

Modélisation en Programmation Linéaire

TD 6 : Dualité

E. Lancini

Université Dauphine-PSL

Exercice 1 — Cas classique

Déterminer le dual du problème suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Déterminer le dual du problème suivant :

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s.c.} \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 3 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

Exercice 3 — Variables de signes variés

Déterminer le dual du problème suivant :

$$\min \quad x_1 - 2x_2 + x_3$$

$$\text{s.c.} \quad x_1 + x_2 - x_3 \geq 2$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 = 1$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 0, \quad x_3 \text{ libre.}$$

Exercice 4 — Matching biparti

Soit $G = (U \cup V, E)$ un graphe biparti.

On considère le problème de maximum matching :

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{e \in E} x_e \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{e \in \delta(u)} x_e \leq 1 \quad \forall u \in U \\ & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \\ & x_e \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E. \end{aligned}$$

Questions :

- Déterminer le dual pour $K_{2,3}$ et l'interpréter.
- Déterminer le dual dans le cas générale de ce problème.
- Interpréter ce dual.