

MePL - Résolution de l'exercice 7 du TD 05

2 mars 2026

1 Symplexe III

Résoudre à l'aide de la méthode du symplexe le problème suivant.

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x + y \\ & x + y \leq 10 \\ & -x - y \leq -7 \\ & x \leq 5 \\ & y \geq 4 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

2 Solution

L'exercice doit être résolu à l'aide des variables artificielles. On commence par mettre le système en forme standard.

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x + y \\ & x + y + s_1 = 10 \\ & x + y - s_2 = 7 \\ & x + s_3 = 5 \\ & y - s_4 = 4 \\ & x, y, s_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4 \end{aligned}$$

Le problème à cette étape est que les variables d'écart ne forment pas une matrice identité. On ajoute à la 2e et 4e contrainte une variable artificielle pour régler le problème.

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x + y \\ & x + y + s_1 = 10 \\ & x + y - s_2 + a_1 = 7 \\ & x + s_3 = 5 \\ & y - s_4 + a_2 = 4 \\ & x, y, s_i, a_j \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, 4, \quad \forall j = 1, 2 \end{aligned}$$

Pour le passage suivant on veut maximiser la fonction $-a_1 - a_2$ avec l'objectif d'effacer les deux variables artificielles. Voici donc le tableau de départ. La base est s_1, a_1, s_3, a_2 .

Tableau 0	betas	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1	a_2
s_1	10	1	1	1	0	0	0	0	0
a_1	7	1	1	0	-1	0	0	1	0
s_3	5	1	0	0	0	1	0	0	0
a_2	4	0	1	0	0	0	-1	0	1
γ	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Premier passage : on doit modifier la ligne des coefficients réduits (gammas) pour qu'il ait des zéros sur les colonnes de la base. C'est à dire on fait $\gamma \leftarrow \gamma + a_1 + a_2$

Tableau 1	betas	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1	a_2
s_1	10	1	1	1	0	0	0	0	0
a_1	7	1	1	0	-1	0	0	1	0
s_3	5	1	0	0	0	1	0	0	0
a_2	4	0	1	0	0	0	-1	0	1
γ	11	1	2	0	-1	0	-1	0	0

Ici on peut choisir quoi faire rentrer (soit la colonne x ou la colonne y). Je procède avec la colonne y . Pour la règle des pivots, il faut faire sortir la colonne a_2 (pivot colorié ci-dessus).

La 4e ligne va être associée à y . Les autres modifs seront :

- $s_1 \leftarrow s_1 - y$,
- $a_1 \leftarrow a_1 - y$,
- $\gamma \leftarrow \gamma - 2y$.

Tableau 2	betas	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1	a_2
s_1	6	1	0	1	0	0	1	0	-1
a_1	3	1	0	0	-1	0	1	1	-1
s_3	5	1	0	0	0	1	0	0	0
y	4	0	1	0	0	0	-1	0	1
γ	3	1	0	0	-1	0	1	0	-2

On fait faire rentrer la colonne x et sortir la colonne a_1 .

Tableau 3	betas	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4	a_1	a_2
s_1	3	0	0	1	1	0	0	-1	0
x	3	1	0	0	-1	0	1	1	-1
s_3	2	0	0	0	1	1	-1	-1	1
y	4	0	1	0	0	0	-1	0	1
γ	0	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Maintenant on a trouvé une base qui ne contient pas ni a_1 ni a_2 . Nous sommes donc sur un sommet de notre vraie polytope et nous pouvons nous débarrasser des colonnes associées aux variables artificielles.

En plus, on peut substituer γ avec notre fonction objectif originelle.

Tableau 4	betas	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	3	0	0	1	1	0	0
x	3	1	0	0	-1	0	1
s_3	2	0	0	0	1	1	-1
y	4	0	1	0	0	0	-1
γ	0	5	1	0	0	0	0

Comme au début, la ligne des γ doit être modifiée : $\gamma \leftarrow \gamma - 5x - y$

Tableau 5	betas	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	3	0	0	1	1	0	0
x	3	1	0	0	-1	0	1
s_3	2	0	0	0	1	1	-1
y	4	0	1	0	0	0	-1
γ	-19	0	0	0	5	0	-4

Le passage suivant est de faire rentrer en base la colonne s_2 et faire sortir la s_3 .

Tableau 6	betas	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4
s_1	1	0	0	1	0	-1	1
x	5	1	0	0	0	1	0
s_2	2	0	0	0	1	1	-1
y	4	0	1	0	0	0	-1
γ	-29	0	0	0	0	-5	1

Dernier passage on fait rentrer la colonne s_4 et on fait sortir la s_1 .

Tableau 7	betas	x	y	s_1	s_2	s_3	s_4
s_4	1	0	0	1	0	-1	1
x	5	1	0	0	0	1	0
s_2	3	0	0	1	1	0	0
y	5	0	1	1	0	-1	0
γ	-30	0	0	-1	0	-4	0

On obtient donc la solution $x = 5, y = 5$, avec valeur de 30.