Comparaison de différentes formulations pour résoudre de manière exacte un multi-sac-à-dos quadratique en variables entières

Dominique Quadri**, Eric Soutif*, Pierre Tolla**

**Lamsade, Université Paris Dauphine

*Cedric, CNAM Paris

JFRO, 13/01/06, CNAM Paris

Plan

- Le problème traité
- Les différentes formulations
- Résultats numériques
- Conclusions et perspectives

Le problème

$$(QMKP)\left\{\begin{array}{ll} \max & f(x)=\sum_{i=1}^{n}(c_i x_i - d_i x_i^2) \\ s.c. & \left| \begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i \leq & b_j & j=(1,2,...,m) \\ 0 \leq x_i \leq u_i & entiers & \end{array}\right. \end{array}\right.$$

où $c_i \geq 0,\ d_i \geq 0, a_{ji} \geq 0, b_j \geq 0, u_i \leq (c_i/2d_i)$.
Il s'agit d'un **multi-sac-à-dos quadratique entier** dont la fonction objectif est **séparable**.

Notations

- Soit (P) un programme entier ou 0-1.
- Soit $(\overline{P})$ la relaxation continue de (P).
    - $Z[P]$: valeur optimale du problème (P).
    - $Z[\overline{P}]$: valeur optimale de $(\overline{P})$.

Différentes formulations

Formulation			**Borne Supérieure**			**Solver**	
Problème	Type var.	$\sharp$ const.	Nom de la borne	Type var.	$\sharp$ const		
$QMKP$ $\Updownarrow$	entier	m	$Z[\overline{QMKP}]$ $\geq$	[0,u]	m	Cplex 9.0	**I**
MKP $\Updownarrow$	$0-1$	m	$Z[\overline{MKP}]$ $\vert\vert$	[0 ;1]	m	Cplex 9.0	II
$QMKP$ $\Updownarrow$	entier	m	$Z[\overline{KP, W*}]$ $\geq$	[0 ;1]	1	Djerdjour et al.	III
$QMKP$	entier	m	$Z[KP, W*]$	$0-1$	1	Notre formulation	IV

Une formulation classique (I)

- Fonction objectif quadratique soumise à m contraintes linéaires

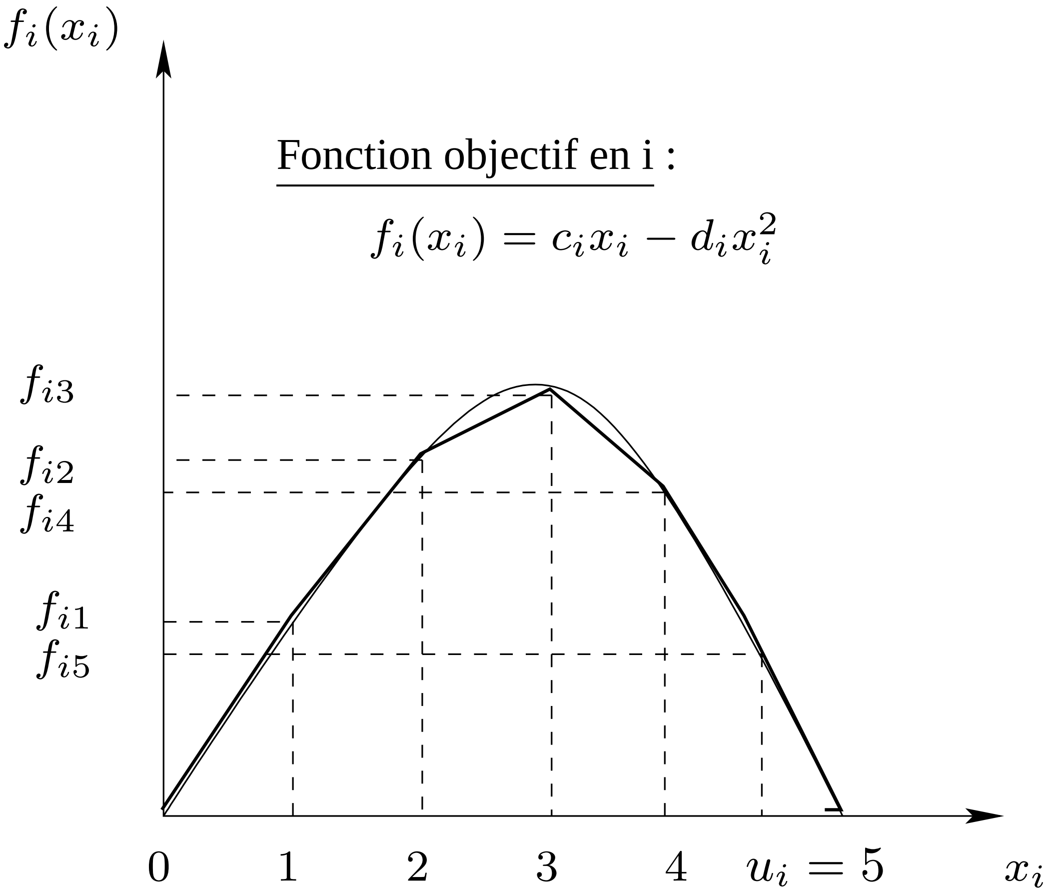
$$(\overline{QMKP}) \left\{ \begin{array}{ll} \max & f(x) = \sum_{i=1}^{n} (c_i x_i - d_i x_i^2) \\ s.c. & \left| \begin{array}{lll} \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \leq & b_j & j = (1, 2, ..., m) \\ 0 \leq x_i \leq u_i & continues & \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- $Z[\overline{QMKP}]$: borne supérieure
- *Cplex9.0*.

Linéarisation : une formulation équivalente (II)

Formulation			Borne Supérieure			Solver	
Problème	Type var.	$\sharp$ const.	Nom de la borne	Type var.	$\sharp$ const.		
$QMKP$	entier	m	$Z[\overline{QMKP}]$	[0,u]	m	Cplex 9.0	I
$\Updownarrow$			$\geq$				
MKP	$0-1$	m	$Z[\overline{MKP}]$	[0 ;1]	m	Cplex 9.0	**II**
$\Updownarrow$			$\vert\vert$				
$QMKP$	entier	m	$Z[\overline{KP,W*}]$	[0 ;1]	1	Djerdjour et al.	III
$\Updownarrow$			$\geq$				
$QMKP$	entier	m	$Z[KP,W*]$	$0-1$	1	Notre formulation	IV

Linéarisation : une formulation équivalente (II)



Linéarisation : une formulation équivalente (II)

$$(MKP)\left\{\begin{array}{ll}\max & \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{u_i} s_{ik}y_{ik}) \\ s.c. & \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n}(a_{ji}\sum_{k=1}^{u_i} y_{ik}) \leq b_j \\ (j=1,2...,m) \\ y_{ik}\in\{0;1\}\end{array}\right.\end{array}\right.$$

où

- $x_i = \sum_{k=1}^{u_i} y_{ik}$, $y_{ik} \in \{0;1\}$,
- $s_{ik} = f_{ik} - f_{i,k-1}$,
- $f_{ik} = c_i k - d_i k^2$.

<u>Proposition</u> : $Z[\overline{MKP}] \leq Z[\overline{QMKP}]$

Relaxation agrégée : formulation (III)

Formulation			**Borne Supérieure**			**Solver**	
Problème	Type var.	$\sharp$ const.	Nom de la borne	Type var.	$\sharp$ const.		
$QMKP$ $\Updownarrow$	entier	m	$Z[\overline{QMKP}]$ $\geq$	[0,u]	m	Cplex 9.0	I
MKP $\Updownarrow$	$0-1$	m	$Z[\overline{MKP}]$ $\vert\vert$	[0 ;1]	m	Cplex 9.0	II
$QMKP$ $\Updownarrow$	entier	m	$Z[\overline{KP, W*}]$ $\geq$	[0 ;1]	1	Djerdjour et al.	**III**
$QMKP$	entier	m	$Z[KP, W*]$	$0-1$	1	Notre formulation	IV

[Djerdjour et al88] : formulation (III)

- Relaxation agrégée : transformer les m contraintes de (MKP) en une seule (contrainte “surrogate”) ;
- Multiplicateur d’agrégation : $W = (W_1, ..., W_j, ..., W_m) \geq 0$;
- (MKP) devient :

$$(KP, W) \left\{ \begin{array}{ll} \max & \sum_{i=1}^{n} (\sum_{k=1}^{u_i} s_{ik} y_{ik}) \\ s.c. & \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} [\sum_{j=1}^{m} W_j a_{ji}] \sum_{k=1}^{u_i} y_{ik} \leq \sum_{j=1}^{m} W_j b_j \\ y_{ik} \in \{0; 1\} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

- $Z[\overline{MKP}] \leq Z[\overline{KP, W}]$
- Comment trouver le “bon” W^* ?

Comment calculer W^* ?

- Considérons : $Z[\overline{KP, W}]$
- Résoudre $(SD) \ = \min_{W \geq 0} Z[\overline{KP, W}]$
- (SD) est le problème dual agrégé
- Problème facile à résoudre :
  - La fonction objectif de (SD) est quasi-convexe
  - Méthode de descente locale

Relaxation agrégée en 0-1 : formulation (IV)

Formulation			Bornes Supérieure			Solver	
Problème	Type var.	$\sharp$ const.	Nom de la borne	Type var.	$\sharp$ const.		
$QMKP$	entier	m	$Z[\overline{QMKP}]$	[0,u]	m	Cplex 9.0	I
$\Updownarrow$			$\geq$				
MKP	$0-1$	m	$Z[\overline{MKP}]$	[0 ;1]	m	Cplex 9.0	II
$\Updownarrow$			$\vert\vert$				
$QMKP$	entier	m	$Z[\overline{KP, W*}]$	[0 ;1]	1	Djerdjour et al.	III
$\Updownarrow$			$\geq$				
$QMKP$	entier	m	$Z[KP, W*]$	$0-1$	1	Notre formulation	**IV**

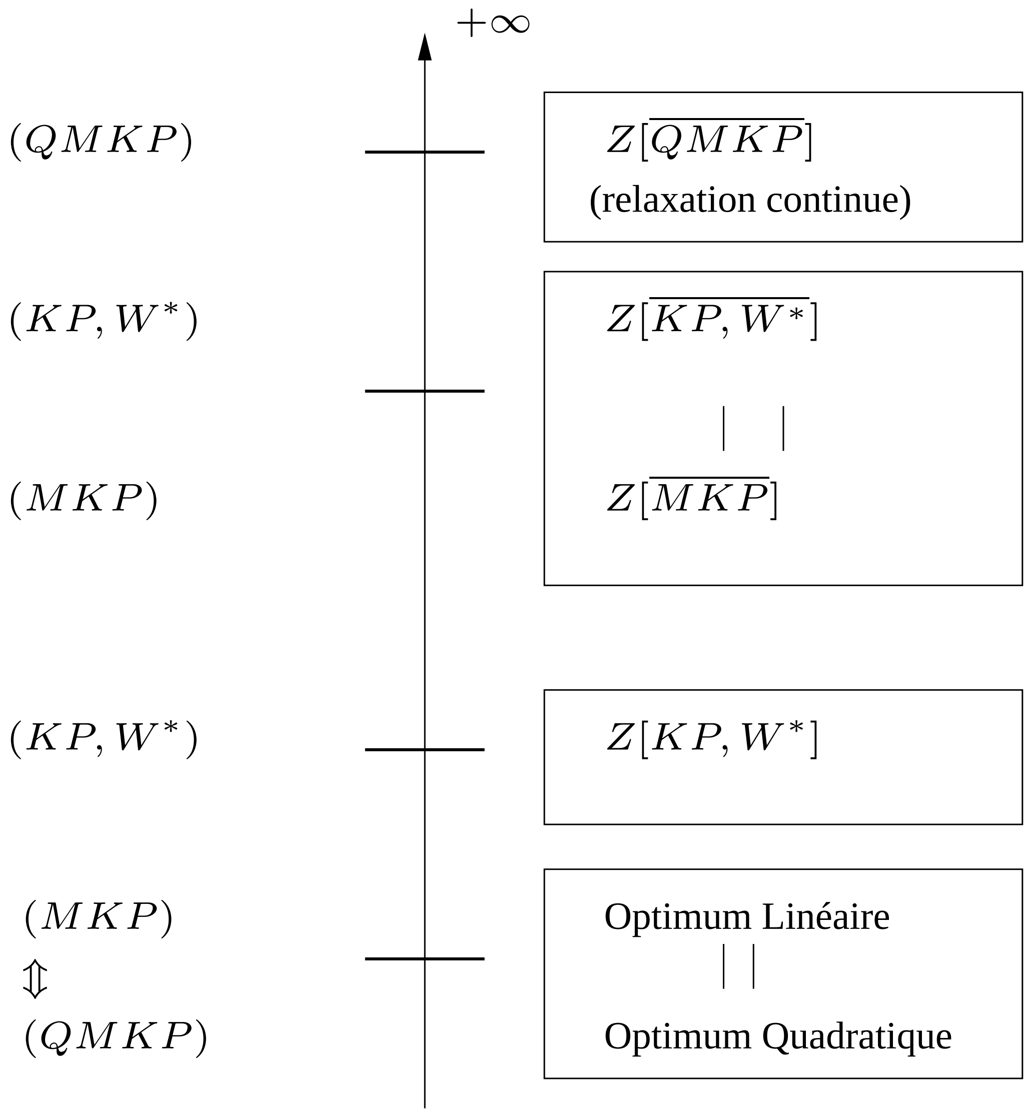
[Quadri et al05] : formulation (IV)

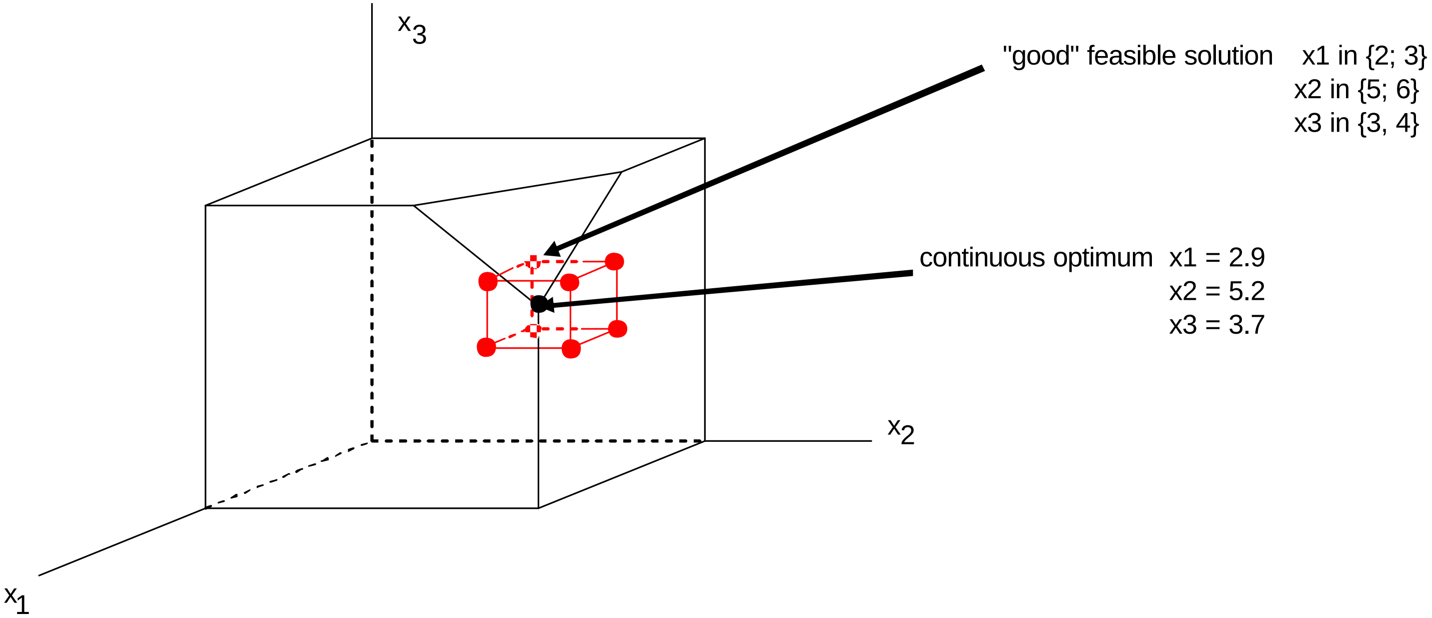
- Amélioration de la méthode de calcul de W^*
  - $Z[\overline{MKP}] = Z[\overline{KP, W^*}]$
  - Proposition : la solution optimale du dual de $(\overline{MKP})$ fournit un vecteur d'agrégation optimal

[Quadri et al05] : formulation (IV)

- Amélioration de la valeur de la borne supérieure
  - $Z[KP, W^*]$: une borne supérieure améliorée
  - Analytiquement la borne est meilleure.

Comparaison analytique des bornes supérieures pour $(QMKP)$




x3
"good" feasible solution x1 in {2; 3}
x2 in {5; 6}
x3 in {3, 4}
continuous optimum x1 = 2.9
x2 = 5.2
x3 = 3.7
x2
x1

Résultats numériques

- 3 types d'instances
  - problèmes carrés ($n = m$),
  - problèmes rectangulaires ($m = 5\%n$),
  - problèmes corrélés (tels que $c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$ and $d_j = \ constante \ = \frac{c_{min}}{2} \ \forall j = (1..n)$).
- problèmes générés aléatoirement dans l'intervalle $[0, 100]$ suivant une loi uniforme

Quality of the upper bound

Instances		(I) Continuous relaxation of (QMKP) Z_LP[QMKP] CPLEX9.0	(II) Continuous relaxation of (MKP) Z_[0,1][MKP] CPLEX9.0	(III) Surrogate Relaxation Z_[0,1][KP, W*] Djerdjour et al.	(IV) Surrogate relaxation in 0-1 variables Z_{0;1}[KP,W*] Our formulation	
# var	# const	GAP	GAP	GAP	GAP	% optima
Square						
100	100	16,30%	8,90%	8,90%	7,60%	10%
500	500	12,70%	7,70%	7,70%	7,30%	0%
1000	1000	31,60%	22,50%	22,50%	21%	0%
Rectangular						
100	5	2,40%	0,30%	0,30%	0,10%	30%
500	25	2,70%	0,20%	0,20%	0,10%	10%
1000	50	3,70%	0,40%	0,40%	0,30%	10%
Correlated						
100	100	56,30%	14,80%	14,80%	11,20%	0%
500	500	81,50%	20,90%	20,90%	17%	0%
1000	1000	80,20%	19%	19%	14,90%	0%

GAP = (Bound - Opt) / Opt

bi-xeon 3.4 Ghz with 4Go lively memory

CPU time of the upper bound methods

Instances		(I) Continuous relaxation of (QMKP) Z_LP[QMKP] CPLEX9.0	(II) Continuous relaxation of (MKP) Z_[0,1][MKP] CPLEX9.0	(III) Surrogate Relaxation Z_[0,1][KP, W*] Djerdjour et al.	(IV) Surrogate Relaxation in 0-1 variables Z_{0,1}[KP, W*]
# var	# const	CPU Time (s)	CPU Time (s)	CPU Time (s)	CPU Time (s)
Square					
100	100	0,0	0,0	0,3	0,1
500	500	12,4	2,2	12,4	2,4
1000	1000	81,3	9,2	49,5	9,3
Rectangular					
100	5	0,0	0,0	0,0	0,0
500	25	0,0	0,1	0,5	0,2
1000	50	0,9	0,4	1,6	0,5
Correlated					
100	100	0,1	0,0	0,3	0,1
500	500	7,6	0,8	10,0	1,0
1000	1000	55,1	9,5	41,5	9,7

bi-xeon 3.4 Ghz with 4Go lively memory

The different branch-and-bound

Instances		(I) Continuous relaxation of (QMKP) Z_LP[QMKP] CPLEX9.0		(II) Continuous relaxation of (MKP) Z_[0,1][MKP] CPLEX9.0		(III) Surrogate Relaxation Z_[0,1][KP, W*] Djerdjour et al.		(IV) Surrogate Relaxation in 0-1 variables Z_{0,1}[KP, W*] Our formulation	
# var	# const	CPU Time (s)	% Pb solved	CPU Time (s)	% Pb solved	CPU Time (s)	% Pb solved	CPU Time (s)	% Pb solved
Square									
100	100	1,31	100	**0,63**	**100**	3,78	100	2,57	100
500	500	120,12	100	**27,48**	**100**	125,13	100	111,50	100
1000	1000	264,42	100	**346,56**	**100**	576,17	100	445,43	100
Rectangular									
100	5	3,22	100	0,04	100	2,13	100	**0,17**	**100**
500	25	3949,69	70	2160,83	80	2817,12	80	**57,50**	**100**
1000	50	4743,54	70	2179,25	80	3137,14	80	**1856,80**	**90**
Correlated									
100	100	6,32	100	**0,15**	**100**	3,35	100	1,55	100
500	500	3400,61	90	**12,62**	**100**	2879,12	80	119,10	100
1000	1000	10314,24	10	**119,13**	**100**	time limit	0	2313,33	100

bi-xeon 3.4 Ghz with 4Go lively memory

Conclusions et perspectives

- Conclusions
  - Petites instances : formulation classique (I)
  - Instances carrées et corrélées : formulation linéarisée (II)
  - Instances rectangulaires : notre formulation (IV)
- Perspectives
  - Améliorer la formulation IV
  - Résoudre un problème de multi-sac-à-dos quadratique non séparable