

# Problème de tournées de véhicules combinées à la gestion des stocks.

Sophie Michel   François Vanderbeck



`smichel@math.u-bordeaux1.fr`

JFRO, 6 avril 2007.

- 1 Problématique
- 2 Modélisation
- 3 Bornes duales
- 4 Bornes primales
- 5 Solutions sur les données industrielles
- 6 Conclusion et perspectives de recherche

- 1 Problématique: **Tournées de véhicules** et **Gestion des stocks**
- 2 Modélisation
- 3 Bornes duales
- 4 Bornes primales
- 5 Solutions sur les données industrielles
- 6 Conclusion et perspectives de recherche

# Collecte d'un produit sur différents sites

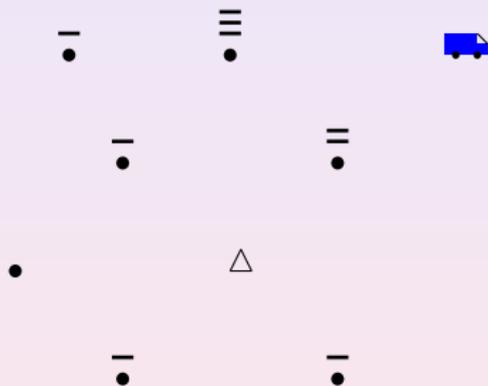
Application industrielle

(260 sites)

⇒ Décisions à long terme

## Structure

- modèle de tournées de véhicules
- modèle de gestion de stock



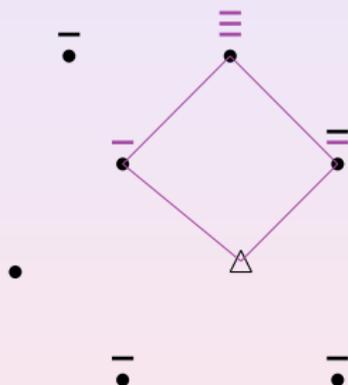
### 3 décisions:

- 1 **quand** visiter un client?
- 2 **quelle quantité** collecter?
- 3 **quelle route** utiliser?

→ Optimisation simultanée

## Structure

- modèle de tournées de véhicules
- modèle de gestion de stock



Période1

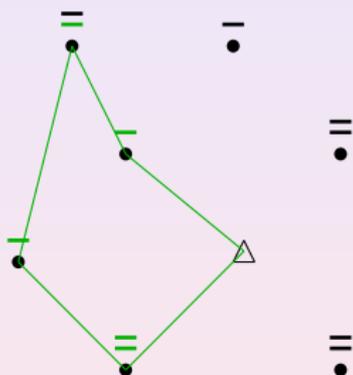
### 3 décisions:

- 1 **quand** visiter un client?
- 2 **quelle quantité** collecter?
- 3 **quelle route** utiliser?

→ Optimisation simultanée

## Structure

- modèle de tournées de véhicules
- modèle de gestion de stock



Période2

### 3 décisions:

- 1 **quand** visiter un client?
- 2 **quelle quantité** collecter?
- 3 **quelle route** utiliser?

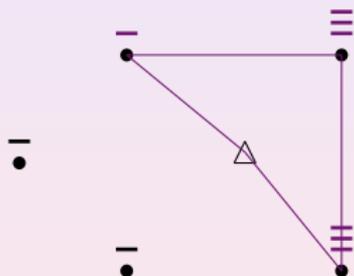
→ Optimisation simultanée

## Structure

- modèle de tournées de véhicules
- modèle de gestion de stock



Période3



### 3 décisions:

- 1 **quand** visiter un client?
- 2 **quelle quantité** collecter?
- 3 **quelle route** utiliser?

→ **Optimisation simultanée**

- [Ba] Bell, Dalberto, Fisher, Greenfield, Jaikumar, Kedia, Mack, Prutzman 1983
- [Ga] Golden, Assad, Dahl 1984
- [AF] Anily, Federgruen 1990
- [WL] Webb, Larson 1995
- [C] Christiansen 1999
- [Qa] Qu, Bookbinder, Iyogun 1999
- [Ca] Campbell, Clarke, Savelsbergh 2002
- [Ma] Malépart, Boctor, Renaud, Labilloy 2002
- [GF] Gaur, Fisher 2004

## Nombreuses variantes

- un produit [Ba,Ga,AF,WL,C,Ca,GF] ou plusieurs [Qa,Ma]
- horizon mono-périodique [Ga,Ma], roulant [Ba,Ca], multi-périodique [C,GF], infini [AF,WL,Qa]
- demande déterministe [AF,WL,C,Ca,Ma,GF], stochastique [Ga,Qa], en ligne [Ba]

## et applications

### Livraisons

- pour des industries de gaz, de produits chimiques [Ba,Ga,Ca], par bateau [C],
- pour des chaînes de supermarché [GF],
- pour des stations essence [Ma]...

## Heuristique en deux phases

[Ga,Qa,Ca,Ma]

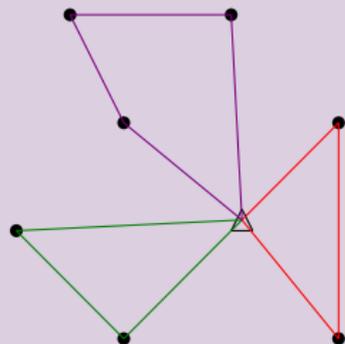
- 1 Planification sur un horizon  $T$
- 2 Elaboration des routes pour chaque période

## Basées sur une approche exacte

- Heuristiques primales [Ba]
- Branch-and-Price [C]

## Politiques restrictives

- Partition fixe [AF,GF]



- "Order up to level" [WL]

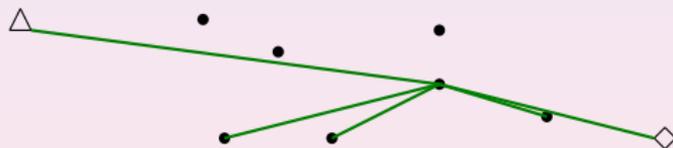
⇒ difficultés de comparaisons des méthodes

- 1 Problématique
- 2 Notre problème : **modélisation** du **niveau tactique**
- 3 Bornes duales
- 4 Bornes primales
- 5 Solutions sur les données industrielles
- 6 Conclusion et perspectives de recherche

# Modèle de tournées

## Régionalisation

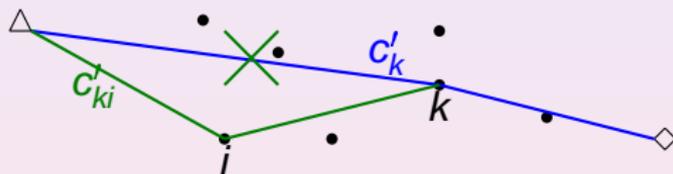
→ **Cluster**, ensembles homogènes de clients:



## Structure coût [1]

- coût d'**ouverture** du centre  $k$ :  $c'_k = c_{0k} + c_{k1} + f_k$
- coût de **connexion** du client  $i$  au centre  $k$ :

$$c'_{ki} = c_{ki} + f_i + \min(c_{0i} - c_{0k}, c_{i1} - c_{k1})$$



[1] ML. Fisher et R. Jaikumar, A Generalized Assignment Heuristic for Vehicle Routing, 1981.

# Gestion de stock

## Hypothèses

- un seul type de produit
- demandes déterministes
- à chaque collecte, **le stock est entièrement vidé**
  - politique “order up to level”
- pas de coût de stockage
- horizon  $\infty$

⇒ la quantité collectée est **normalisée** en nombre de périodes.

## Planning périodique

- **Cluster  $p$ -périodique**, où  $p \in P \subseteq \{1, \dots, Pmax\}$  fixé.
- $H$  = la longueur du **cycle de régénération** du planning  
 =  $ppcm$  des périodicités des clusters du planning  
 $\leq T = ppcm\{p : p \in P\}$ .

$\Rightarrow P = \{1, 2, 3\}$ :

	t1	t2	t3	t4	t5	t6
i1			★			★
i2	★			★		
i3			★			★
p	3		3			

$\Rightarrow H = 3$

# Cluster périodique = planning partiel

Pour un client, cluster = triplet  $(s, p, \ell)^r$   $\left\{ \begin{array}{l} s \text{ la date de départ} \\ p \text{ la périodicité} \\ \ell \text{ la quantité collectée} \end{array} \right.$

Planning-client:

- $C1 = (1, 4, 2)^{\Upsilon} + (2, 4, 1)^{\square} + (3, 4, 1)^{\odot}$
- $C2 = (1, 4, 2)^{\Upsilon} + (2, 2, 1)^{\ominus}$

	t1	t2	t3	t4
C1	$\Upsilon$	$\square$	$\odot$	$\Upsilon$
C2	$\Upsilon$	$\ominus$		$\Upsilon\ominus$

Planning partiel =  
une **matrice indicatrice**  $\delta$

$\delta$	1	0	0	1
$\delta$	0	1	0	0
$\delta$	0	0	1	0

**Symétrie**

dans le choix des dates de départ.

C1'	$\Upsilon$	$\Upsilon$	$\square$	$\odot$
C1''	$\Upsilon$	$\odot$	$\square$	$\Upsilon$

# Problème maître discret

Soit  $\{(c^q, s^q, p^q, \phi^q)\}_{q \in Q}$  l'ensemble des clusters périodiques et la matrice  $\delta^q$  et la variable  $\lambda_q$  associées à chacun d'eux.

$$\begin{aligned}
 [FormDiscrete] \quad \min \quad & Vmax + \alpha \sum_{q \in Q} \frac{c^q}{p^q} \lambda_q \\
 & \sum_q \delta_{it}^q \lambda_q \geq 1 \quad \forall i, t \quad (\pi_{it}) \\
 & \sum_q \delta_{0t}^q \lambda_q \leq Vmax \quad \forall t \quad (\sigma_t) \\
 & \lambda_q \in \{0, 1\} \quad \forall q \\
 & Vmax \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

→ résoudre le maître PL par **génération de colonnes**

# Problème de pricing

Pour chaque périodicités  $p$ , date  $s$  et centre  $k$ :

problème de sac-à-dos à choix multiple (MCKP) [1]

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{il} p_{il}^{p,s,k,\pi} \phi_{il} \\
 \sum_{\ell} \phi_{il} &= 1 \quad \forall i \\
 \sum_{il} \ell d_i \phi_{il} &\leq W \\
 \phi_{il} &\in \{0, 1\} \quad \forall i, \ell.
 \end{aligned}$$

→ **Stop à la première** colonne de coût réduit négatif

[1] D. Pisinger, A minimal Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Problem, 1995.

## Symétrie en $t$

- énumération de solutions équivalentes
- instabilité des variables duales  $\pi_{it}$

→ Agrégation des périodes (“state space relaxation”)



Soit  $Q(r) = \{q : c^q = c^r, \phi^q = \phi^r, p^q = p^r, s^q \text{ libre}\}$ ,

$$\lambda_r = \sum_{q \in Q(r)} \lambda_q$$

# Problème maître agrégé

$$\begin{aligned}
 \text{[FormAgr]} \quad \min \quad & V_{\text{moy}} + \alpha \sum_{r \in R} \frac{c^r}{p^r} \lambda_r \\
 \sum_{r \in R} \frac{\ell}{p^r} \phi_{i\ell}^r \lambda_r \geq & 1 \quad \forall i \quad (\pi_i) \\
 \sum_{r \in R} \frac{1}{p^r} \lambda_r \leq & V_{\text{moy}} \quad (\sigma) \\
 \lambda_r \in & \mathbb{N} \quad \forall r \\
 V_{\text{moy}} \in & \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

$$V_{\text{moy}} \leq V_{\text{max}}$$

# Comparaison des solutions linéaires

$$\mathbf{BD}([FormDiscrete]) = \mathbf{BD}([FormAgr])$$

$$\text{Solution symétrique: } \begin{cases} \hat{\lambda}_q = \frac{1}{p_r} \hat{\lambda}_r & \forall r, q \in Q(r) \\ \hat{V}_{max} = \hat{V}_{moy} \end{cases}$$

$\Rightarrow$   $[FormAgr]$  est plus rapide.

# Comparaison des solutions entières

le modèle agrégé est une **relaxation** du modèle discret

## EX 1 : Sous-estimation du nombre de véhicules

R1,  $p = 3$ R2,  $p = 2$ 

- . R1 utilise  $\frac{1}{3}$  de véhicule
- . R2 utilise  $\frac{1}{2}$  de véhicule

→ Solution pour [FormAgr]:  $1 * R1 + 1 * R2$  et  $V_{moy} = 1$

t	1	2	3	4	5	6
$\delta_0$		R2	R1	R2		R1 - R2

## Ex 2 : Planning d'un client irréalizable



R1:  $p = 6$   $\phi_{i3} = 1$

R2:  $p = 4$   $\phi_{i2} = 1$

- . R1 couvre  $\frac{1}{2}$  de la demande
- . R2 couvre  $\frac{1}{2}$  de la demande

→ Solution pour  $[FormAgr]$ :  $1 * R1 + 1 * R2$

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\delta_i$	R2	✓	✓	R1 ✓	R2			✓ ✓	✓ R2	R1		✓

- 1 Problématique
- 2 Modélisation
- 3 **Bornes duales** avec [*FormAgr*],  $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 4 Bornes primales
- 5 Solutions sur les données industrielles
- 6 Conclusion et perspectives de recherche

# Coupes



$$R1: p = 6 \quad \phi_{i5} = 1$$

. R1 couvre  $\frac{5}{6}$  de la demande

t1	t2	t3	t4	t5	t6
R1		✓	✓	✓	✓

→ Solution fractionnaire:  $1.2 * R1$

Une coupe:

$$2\lambda(\ell = p) + \lambda(\ell \neq p) \geq 2$$

Inégalités valides pour  $[FormAgr]$

Pour tout  $h = 1, \dots, T - 2$  et  $i \in N$  tel que  $t_{max_i} > 1$ ,

$$\sum_{r: h\ell \bmod p=0} \frac{\ell}{p} \phi_{il}^r \lambda_r + \sum_{r: h\ell \bmod p \neq 0} \left( \left\lceil \frac{h\ell}{p} \right\rceil - \frac{h\ell}{p} \right) \phi_{il}^r \lambda_r \geq 1$$

# Coupes : implémentation

- Modifie seulement l'**objectif** du problème de pricing.
- Nombre **polynômial** de coupes.

## Séparation exacte

- **Enumération**.
- Ajout de **K** coupes.
- **Stop** quand on a trouvé **K** coupes violées.

# Branchement sur $V_{moy}$

$$V_{moy} = v \notin \mathbb{IN}$$

$$N1 : V_{moy} \leq \lfloor v \rfloor$$

$$N2 : V_{moy} \geq \lceil v \rceil$$

numériquement

irréalisable (pure phase 1)

valeur  $V_{moy}$  entière

# Branchement + coupes : résultats numériques

Nom	BDrac	dev	dev+cp	dev+br	BD+br+cp	dev+br+cp
moy AL100	325.674	22.81	21.31	10.37	366.123	9.24
moy S60	224.836	26.38	25.51	12.51	254.083	11.83
GN172	517.348	16.46	15.59	8.65	558.452	7.89
Pb157	601	15.40	14.39	5.83	659.839	5.11
<b>moy 17 inst</b>		<b>23.05</b>	<b>21.80</b>	<b>10.63</b>		<b>9.67</b>

→ am = 12.42%

Temps (en %)					
SpSol	MR	PC (sep)	N0	N1	N2
10.84	8.14	73.49 (4.14)	5.87	16.17	77.91

- 1 Problématique
- 2 Modélisation
- 3 Bornes duales
- 4 **Bornes primales** avec [*FormAgr*] et [*FormDiscrete*],  
 $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- 5 Solutions sur les données industrielles
- 6 Conclusion et perspectives de recherche

# Heuristique d'arrondi

- 1 Résoudre le maître continu:
    - initialement à l'optimum,
    - réoptimisation limitée, génération de colonnes compatibles.
  - 2 Fixer une colonne à 1 et choisir une date de départ
    - selon le score  $\frac{\text{coût}}{\text{satisfaction des contraintes}}$
  - 3 Mettre à jour le maître et le problème de pricing.
  - 4 Si ("critères d'arrêt") alors STOP; sinon étape 1.
- nouveau départ sur le même solution continue

Diverses Variantes sur moy 17 inst	dev	Vmax	Temps HA
nbMaxCg = 300, racine, 3P	14.76	4.05	10m20s
nbMaxCg = 100	21.18	4.11	3m18s
Toutes les 200 iter	16.82	4.18	20m27s
Coupes	26.92	4.65	1h15m
Branchement	11.66	4	19m47s

Nom	BP	dev	Vmax	Temps	
				HA (en %)	Total
nbMaxCg = 300, 3P, racine et après branchement					
moy AL100	409.399	12.29	4	90	18m22s
moy S60	285.056	11.75	3	78	6m10s
GN172	589.582	5.574	6	79	1h22m2s
Pb157	731.48	10.85	7	91	1h30m16s
<b>moy 17 inst</b>		<b>11.66</b>	<b>4</b>		

→  $P = \{1, 2, 3\}$ : dev = 9,67% en moins de 1h,

→ + post-optimisation,  $P = \{1, 2, 3, 6\}$ : dev = 8,84% (en moins de 1s).

Diverses Variantes sur moy 17 inst	dev	Vmax	Temps HA
nbMaxCg = 300, racine, 3P	14.76	4.05	10m20s
nbMaxCg = 100	21.18	4.11	3m18s
Toutes les 200 iter	16.82	4.18	20m27s
Coupes	26.92	4.65	1h15m
Branchement	11.66	4	19m47s

Nom	BP	dev	Vmax	Temps	
				HA (en %)	Total
nbMaxCg = 300, 3P, racine et après branchement					
moy AL100	409.399	12.29	4	90	18m22s
moy S60	285.056	11.75	3	78	6m10s
GN172	589.582	5.574	6	79	1h22m2s
Pb157	731.48	10.85	7	91	1h30m16s
<b>moy 17 inst</b>		<b>11.66</b>	<b>4</b>		

→  $P = \{1, 2, 3\}$ : dev = 9,67% en moins de 1h,

→ + post-optimisation,  $P = \{1, 2, 3, 6\}$ : dev = 8,84% (en moins de 1s).

# Heuristique de recherche locale

- 1 **Solution initiale**  $(S, \hat{Q})$ .
- 2 Faire:
  - 1 Solution  $(S', \hat{Q}')$  **voisine** de  $(S, \hat{Q})$ ;  $\hat{Q}' = \hat{Q} \setminus Q1 \cup Q2$ .
  - 2 Si  $S' \leq S$  alors  $(S, \hat{Q}) = (S', \hat{Q}')$  et retour en (a), sinon STOP.

Une solution voisine = 1 échange

- 1 **Supprimer** les mauvaises colonnes et des colonnes voisines.
- 2 **Fixer** une colonne.
- 3 **Compléter** la solution à l'aide de l'heuristique d'arrondi.

Exploration du voisinage

- Stop à la première meilleure solution trouvée.
- Le nombre d'échanges est borné.

# Heuristique de recherche locale

- 1 Solution initiale  $(S, \hat{Q})$ .
- 2 Faire:
  - 1 Solution  $(S', \hat{Q}')$  voisine de  $(S, \hat{Q})$ ;  $\hat{Q}' = \hat{Q} \setminus Q1 \cup Q2$ .
  - 2 Si  $S' \leq S$  alors  $(S, \hat{Q}) = (S', \hat{Q}')$  et retour en (a), sinon STOP.

## Une solution voisine = 1 échange

- 1 **Supprimer** les mauvaises colonnes et des colonnes voisines.
- 2 **Fixer** une colonne.
- 3 **Compléter** la solution à l'aide de l'heuristique d'arrondi.

## Exploration du voisinage

- Stop à la première meilleure solution trouvée.
- Le nombre d'échanges est borné.

- Appel à la **racine** sur les **solutions des différentes passes** de l'heuristique d'arrondi.
- Le nombre de **colonnes fixées** est **limité**.

Nom	BP	dev	Vmax	Temps (en %)		
				HA	RL	Total
moy AL100	407.892	11.8858	4	19	76	46m4s1
moy S60	285.18	11.7374	3	22	74	13m27s
GN172	590.48	5.73506	6	48	38	1h0m50s
Pb157	708.594	7.38898	7	71	24	54m50s
<b>moy 17 inst</b>		<b>11.22</b>	<b>4</b>			
moy HA		11.66	4			≤ 1h30

- 1 Problématique
- 2 Modélisation
- 3 Bornes duales
- 4 Bornes primales
- 5 Résolution du **Problème Industriel****
- 6 Conclusion et perspectives de recherche

## Collecte d'un produit sur différents sites

BD+br+cp = 838.17 en 8h34m (PC = 5h21m).

Heur	BP	dev	Vmax	nbCol	Temps (en %)		
					HA	RL	Total
$P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$							
HA	915.735	9.25414	9	55460	84		4h29m
RL	912.981	8.9255	9	48278	45	44	3h40m
$P = \{1, 2, 3\}$ +post-optimisation							
HA	894.125	6.67584	9	39119	35		1h49m
RL	<b>890.384</b>	<b>6.22948</b>	<b>9</b>	40826	12	60	2h53m

# Solution:

Solution industrielle  
(6-périodique)

## Comportement moyen sur une période

Solution opérationnelle industrielle	Notre solution tactique
(année 2005)	
basée sur les fréquences de collecte	
10 routes	9 routes
59 collectes	98.5 collectes
782.63 km	711.125 km
Semaines creuses ou fortes	→ aider le modèle opérationnel

- 1 Problématique
- 2 Modélisation
- 3 Bornes duales
- 4 Bornes primales
- 5 Solutions sur les données industrielles
- 6 **Conclusion et perspectives** de recherche

## Conclusion

- **Problème industriel**  $\notin$  littérature.
- Choix de modélisation **tactique**.
- Solutions avec **garantie de la déviation** à l'optimum.

## Perspectives et développements

- Algo **exacte** de Branch-and-Price-and-Cut.
- **Heuristiques primales** basées sur la décomposition.
- Niveau **opérationnel**.

## Conclusion

- **Problème industriel**  $\notin$  littérature.
- Choix de modélisation **tactique**.
- Solutions avec **garantie de la déviation** à l'optimum.

## Perspectives et développements

- Algo **exacte** de Branch-and-Price-and-Cut.
- **Heuristiques primales** basées sur la décomposition.
- Niveau **opérationnel**.