À la recherche d’une solution “stable” : Deux problèmes mélant RO et Théorie des jeux

Eric Angel, Evripidis Bampis, Lélia Blin, Laurent Gourvès, Fanny Pascual

LaMI, Université d’Évry

Ordonnancement de tâches sur deux machines et stabilité approchée

Introduction

n tâches (agents) à ordonnancer sur 2 machines.

- *Fonction objectif individuel :*

  But de chaque agent : être exécuté le plus rapidement possible.

- *Fonction objectif global :*

  Notre but : minimiser le makespan (date de fin de la dernière tâche).

Introduction

- Chaque tâche connaît la longueur et la stratégie des autres tâches, ainsi que le protocole qui exécute les tâches.
- Chaque tâche choisit sur quelle machine elle va s'exécuter.
- pas de coopération entre tâches.

But : Obtenir un ordonnancement stable qui minimise le makespan.

Plan

- Introduction
- Protocole
  - Sans protocole : prix de l'anarchie
  - Mécanismes de coordination
  - Avec Protocole : prix de la stabilité
  - Prix de la stabilité α-approchée

Plan

- Introduction
- Protocole
  - Sans protocole : prix de l'anarchie
  - Mécanismes de coordination
  - Avec Protocole : prix de la stabilité
  - Prix de la stabilité α-approchée
- Prix de la stabilité α-approchée
  - Borne d'inapproximabilité
  - Borne inférieure
  - Borne supérieure
- Conclusion et perspectives

Sans protocole :

Définition : [Koutsoupias et Papadimitriou, STACS 1999]

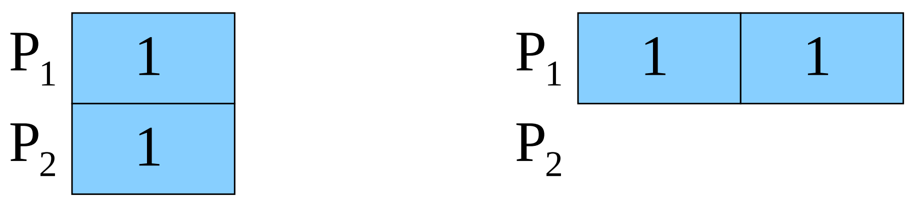
$$\text{Prix de l'anarchie} = \frac{\text{Valeur du makespan ds le pire eq. de Nash}}{\text{Valeur du makespan dans OPT}}.$$

Théorème :

Prix de l'anarchie $\geq \frac{3}{2}$.

Démonstration : 2 tâches :

stratégie de châque tâche= proba de $\frac{1}{2}$ pour aller sur P1.
proba de $\frac{1}{2}$ pour aller sur P2.



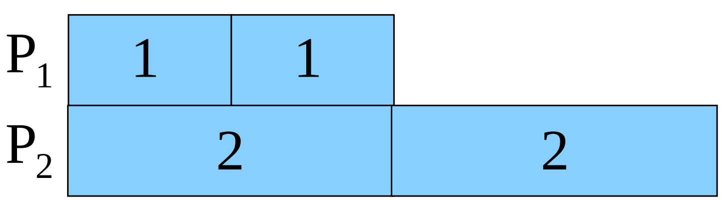
Espérance du makespan = $\frac{3}{2}$.

Mécanismes de coordination

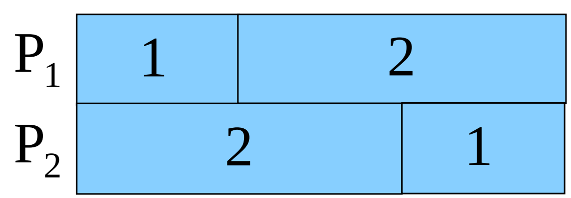
Définition :
Une politique par machine (avec délais eventuels entre les tâches).

Exemple : [Christodoulou et al, ICALP 2004]
Politique de la 1ère machine = SPT (de la plus petite tâche à la plus grande).

Politique de la 2ème machine =LPT (de la plus grande tâche à la plus petite).



Eq. de Nash



OPT

Mécanismes de coordination

Exemple :
Politique de chaque machine = LPT + petits délais entre tâches.
$\rightarrow$ Rapport d'approximation= 7/6.

Conjecture : [Christodoulou et al, ICALP 2004]
Il n'existe pas de meca. de coord. avec un rapport d'approximation inférieur à 7/6 pour notre problème.

Avec protocole :

On a :

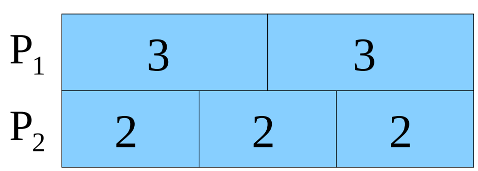
- Une politique par machine.
- Un protocole qui propose une affectation des tâches.

Les tâches acceptent ou refusent cette affectation.

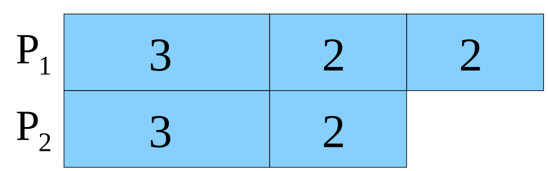
But : Avoir un protocole qui donne une solution :

- qui minimise le makespan
- et qui soit stable.

Exemple : Si chaque machine a comme politique LPT :



Pas stable



Stable

Prix de la stabilité

Introduit dans [Anshelevich et al, FOCS 2004].

Définition :

$$\text{Prix de la stabilité} = \frac{\text{Valeur du makespan ds le meilleur eq. de Nash}}{\text{Valeur du makespan dans OPT}}.$$

Rappel :

$$\text{Prix de l'anarchie} = \frac{\text{Valeur du makespan ds le pire eq. de Nash}}{\text{Valeur du makespan dans OPT}}.$$

Exemple : Si chaque machine a comme politique LPT, alors le prix de la stabilité est 7/6.

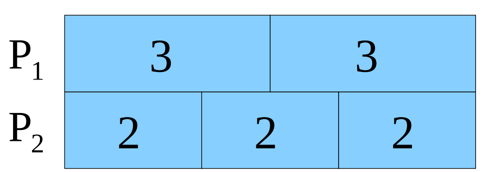
Prix de la stabilité α-approchée

Equilibre de Nash α-approché= solution ds laquelle chaque agent n'augmente pas son profit plus de α fois en changeant de stratégie.

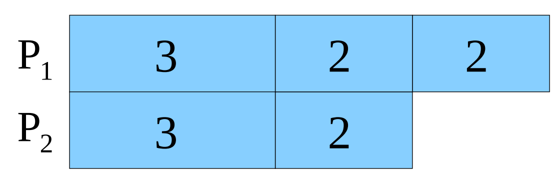
Définition :
Prix de la stabilité α-approchée=

$$\frac{\text{Valeur du makespan ds le meilleur eq. de Nash } \alpha\text{-approché}}{\text{Valeur du makespan dans OPT}}.$$

Exemple : Chaque machine a comme politique LPT.

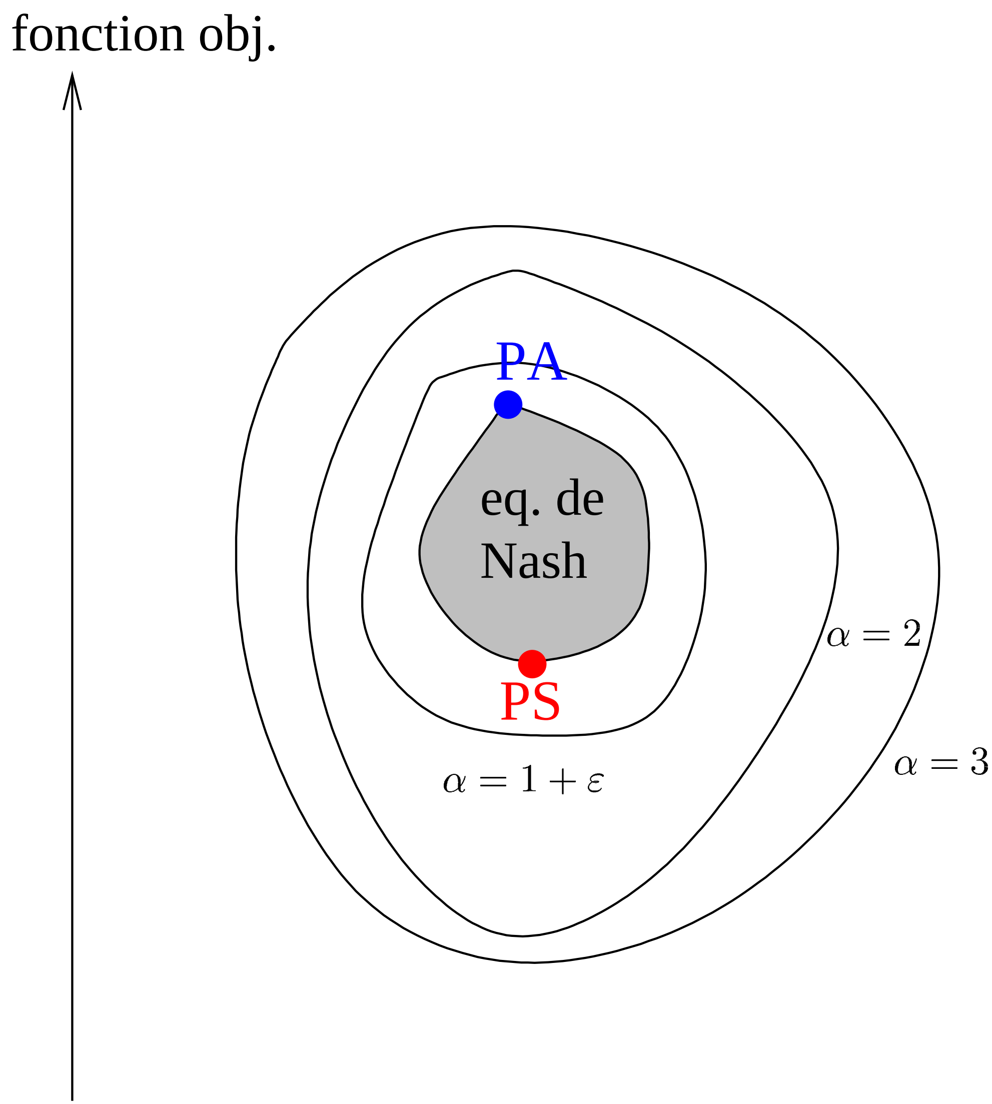


Eq. Nash 2-approché



Eq. de Nash

Prix de la stabilité α-approchée



Plan

- Introduction
- Protocole
  - Sans protocole : prix de l'anarchie $\longrightarrow$ Rapport = 3/2
  - Mécanismes de coordination $\longrightarrow$ Rapport $\geq$ 7/6
  - Avec Protocole : prix de la stabilité $\longrightarrow$ Rapport = 7/6 (LP
  - Prix de la stabilité α-approchée $\longrightarrow$ Rapport = $f(\alpha)$?
- Prix de la stabilité α-approchée
  - Borne d'inapproximabilité
  - Borne inférieure
  - Borne supérieure
- Conclusion et perspectives

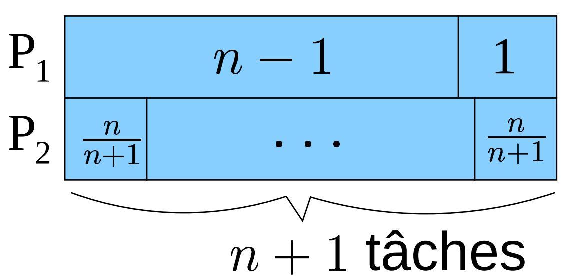
Borne d'inapproximabilité

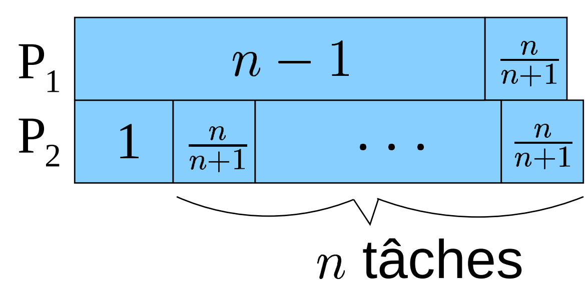
Théorème :

On a : n tâches. Soit $\varepsilon > 0$ t.q $\varepsilon = \frac{1}{n(n+1)}$. Politique des machines = LPT.

Alors : Il n'existe pas d'algo. avec un rapport d'approximation < $(1+\varepsilon)$ qui retourne des équilibres de Nash α-approchés, avec $\alpha < n$.

Démonstration :





Eq. Nash n-approché

Rapport d'approx = $1+\varepsilon$

Borne inférieure

Théorème :

Politique des machines = LPT.

Le prix de la stabilité α-approchée est $\leq \frac{8}{7}$ $, \forall \alpha \geq 3$

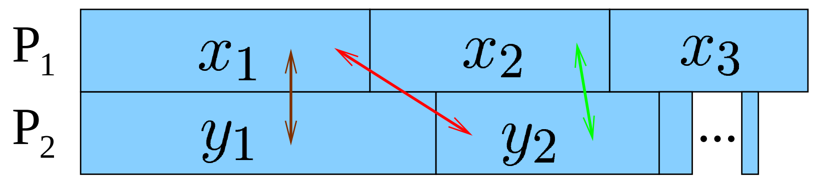
Démonstration :

Algorithme LPT_{swap} :

$\frac{8}{7}$-approché et retourne des équilibres de Nash 3-approchés.

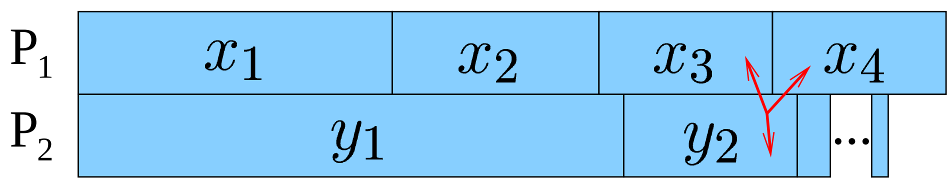
Borne inférieure : LPT_{swap}

- Construire un ordo. LPT
- Etudier cet ordo :
  - 1er cas :



Retourner le meilleur ordo parmi les 4 possibles.

  - 2ème cas :



Retourner le meilleur ordo parmi les 2 possibles.

  - Autres cas :
    Retourner LPT.

Borne inférieure : LPT_{swap}

Théorème 1 :

LPT_{swap} est $\frac{8}{7}$-approché.

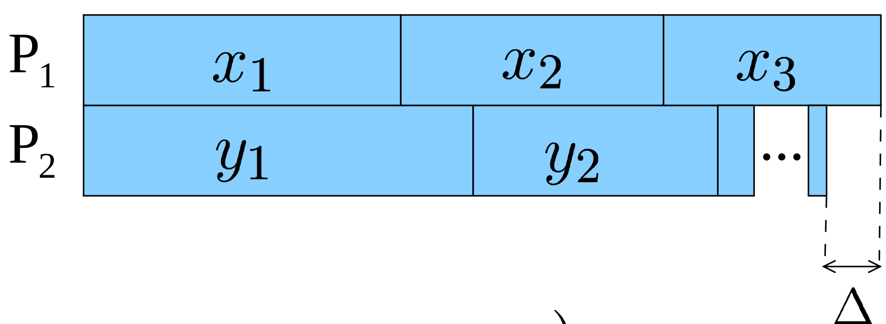
Preuve :

Idée de la preuve :

Si l'ordo retourné par LPT n'est pas $\frac{8}{7}$-approché :

- On a 3 ou 4 tâches sur la machine la plus chargée.
- LPT_{swap} transforme cet ordo. en un ordo. $\frac{8}{7}$-approché.

Définition :



$x_3 = t_m{}^{ax}$

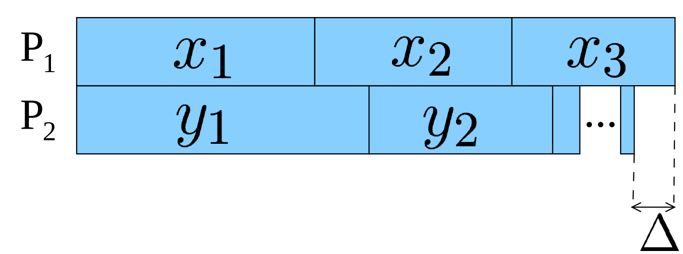
t_i est grande si $l(t_i) \geq l(t_m{}^{ax})$.

Borne inférieure : LPT_{swap}

Preuve : Soit un ordo LPT qui n'est pas $\frac{8}{7}$-approché.
Il y a exactement 2 grandes tâches sur P2 :

$$\left.\begin{array}{r} C_{max} = \frac{\sum_1^n l(t_i)+\Delta}{2} > \frac{8}{7}OPT \\ OPT \geq \frac{\sum_1^n l(t_i)}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta > \frac{2}{7}OPT.$$

$\Rightarrow l(t_{max}) \geq \Delta$
$\Rightarrow$ la dernière tâche de P2 finit $\leq OPT - (\frac{1}{7}+\varepsilon)OPT$.
$\Rightarrow$ le nb max. de grandes tâches sur P2 est :
$\lfloor \frac{OPT-(\frac{1}{7}+\varepsilon)OPT}{\frac{2}{7}+\varepsilon'} \rfloor = 2.$



Borne inférieure : LPT_{swap}

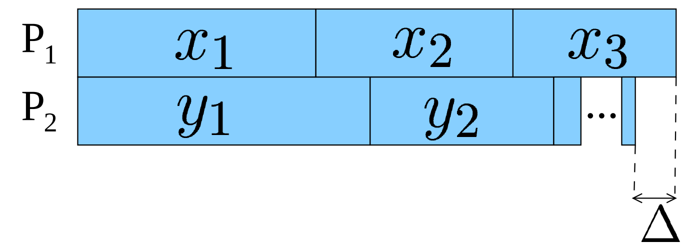
Il y a au plus 4 tâches sur P1 :
même arguments.

Il y a au moins 3 tâches sur P1 :
sinon on aurait un ordo. optimal.

Borne inférieure : LPT_{swap}

Il y a au plus 4 tâches sur P1 :
même arguments.

Il y a au moins 3 tâches sur P1 :
sinon on aurait un ordo. optimal.



LPT_{swap} est un algo $\frac{8}{7}$-approché.

Sur P2 : il y a 2 grandes tâches et un ensemble de petites tâches.

$l(t_m{}^{ax}) \leq \frac{\frac{7}{6}OPT}{3} = \frac{7}{18}OPT$.

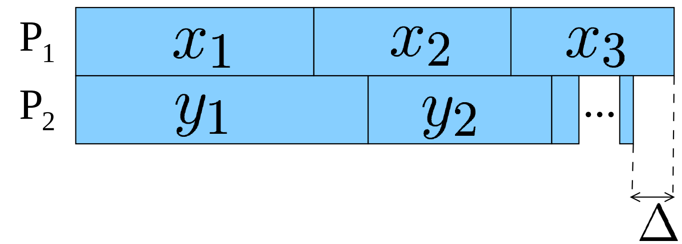
Petites tâches : commencent après t_{max} et avant $C_{max} - \Delta$

$\Rightarrow \sum_{t_i petite} l(t_i) \leq \frac{7}{18}OPT - \Delta \leq (\frac{7}{18} - \frac{2}{7})OPT < \frac{1}{7}OPT$.

Borne inférieure : LPT_{swap}

Il y a au plus 4 tâches sur P1 :
même arguments.

Il y a au moins 3 tâches sur P1 :
sinon on aurait un ordo. optimal.



LPT_{swap} est un algo $\frac{8}{7}$-approché.

Sur P2 : il y a 2 grandes tâches et un ensemble de petites tâches.
$l(t_m{}^{ax}) \leq \frac{\frac{7}{6}OPT}{3} = \frac{7}{18}OPT$.
Petites tâches : commencent après t_{max} et avant $C_{max} - \Delta$
$\Rightarrow \sum_{t_i petite} l(t_i) \leq \frac{7}{18}OPT - \Delta \leq (\frac{7}{18} - \frac{2}{7})OPT < \frac{1}{7}OPT$.

Soit OPT' un ordo optimal des grandes tâches : $OPT' \leq OPT$ et on obtient OPT' avec LPT_{swap}.

Borne inférieure : LPT_{swap}

Théorème 1 :
LPT_{swap} est $\frac{8}{7}$-approché.

Théorème 2 :
LPT_{swap} retourne des équilibres de Nash 3-approchés.

Idée de la preuve : cas par cas.

Corollaire :
Le prix de la stabilité α-approchée est $\leq \frac{8}{7}, \; \forall \alpha \geq 3$.

Plan

- Introduction
- Protocole
  - Présentation du problème
  - Sans protocole : prix de l'anarchie
  - Mécanismes de coordination
  - Avec Protocole : prix de la stabilité
  - Prix de la stabilité α-approchée
- Prix de la stabilité α-approchée
  - Borne d'inapproximabilité
  - Borne inférieure
  - Borne supérieure
- Conclusion et perspectives

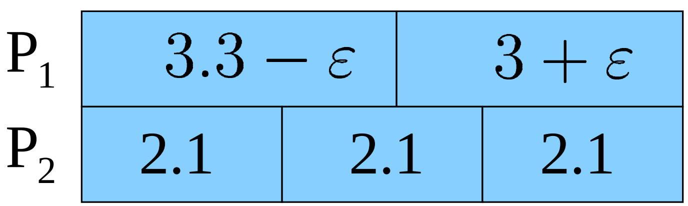
Borne supérieure

Théorème :

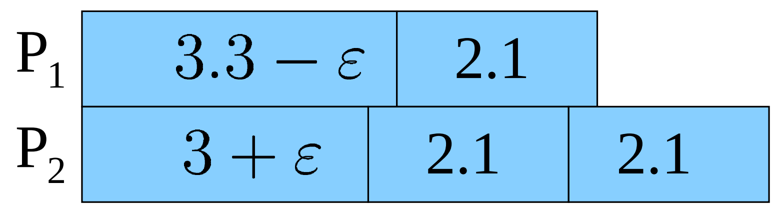
Soit $\varepsilon > 0$. Politique des machines = LPT.

Le prix de la stabilité α-approchée est $\geq \frac{8}{7}$, $\forall\ \alpha < 2.1$

Démonstration :



Makespan = 6.3



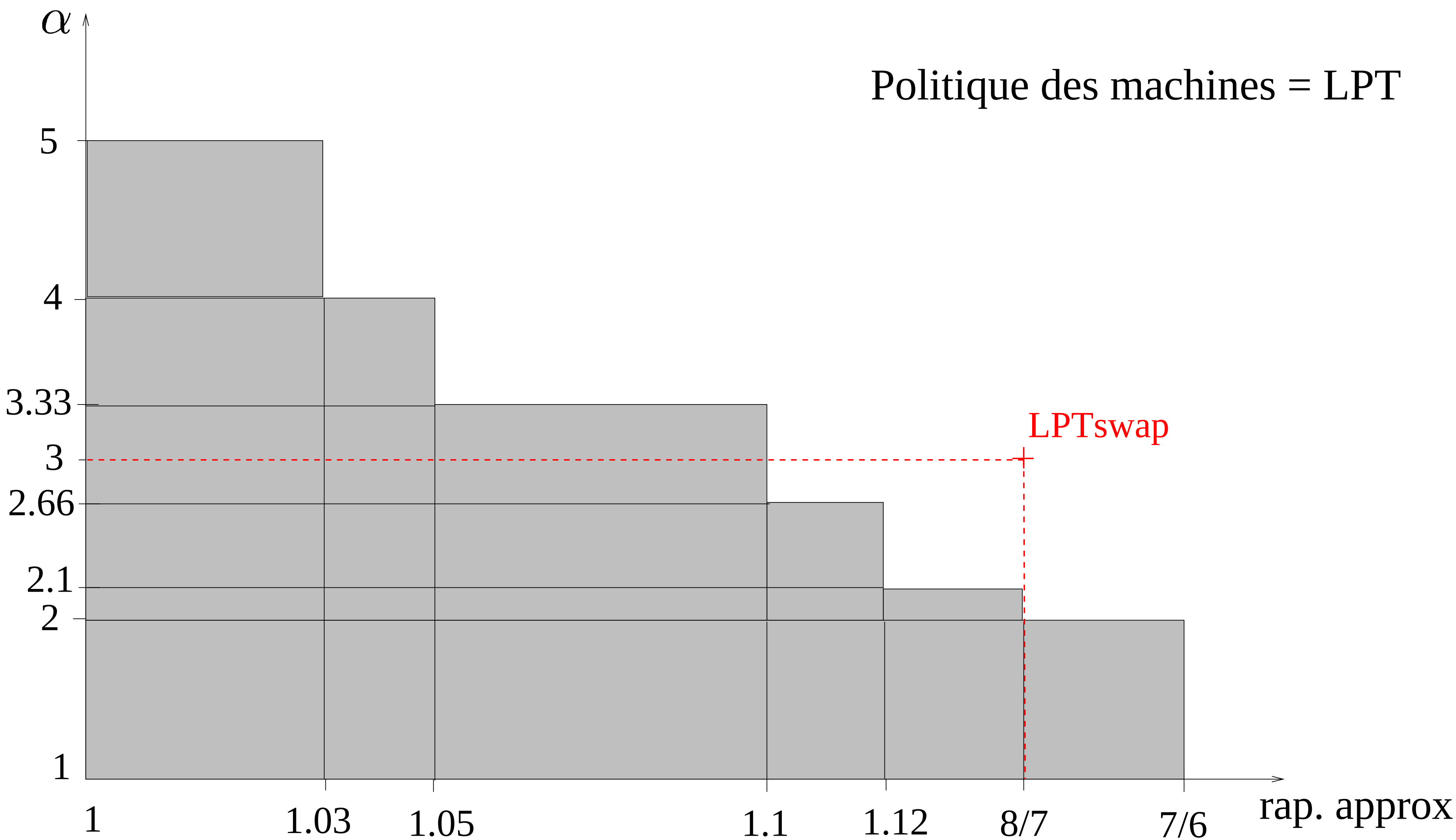
Makespan = 7.2

Eq. Nash α-approché

avec $\alpha = \frac{6.3}{3+\varepsilon} > 2.1 - \varepsilon$

Rapport d'approx. $= \frac{7.2+\varepsilon}{6.3} > \frac{8}{7}$

Bilan



α
Politique des machines = LPT
5
4
3.33
3
2.66
2.1
2
1
LPTswap
1
1.03
1.05
1.1
1.12
8/7
7/6
rap. approx.

Conclusion et perspectives

Conclusion :

- $\alpha \to \infty$ qd PS α-app.$\to 1$.
- PS α-app. $\leq 8/7$,$\forall\, \alpha \geq 3$
  $\geq 8/7$,$\forall\, \alpha < 2.1$.
- Algorithme LPT_{swap}.

Conclusion et perspectives

Conclusion :

- $\alpha \to \infty$ qd PS α-app.$\to 1$.
- PS α-app. $\leq 8/7$,$\forall\ \alpha \geq 3$
  $\geq 8/7$,$\forall\ \alpha < 2.1$.
- Algorithme LPT_{swap}.

Perspectives :

- Analyse plus fine du PS α-app. ; autres algorithmes ?
- Une autre politique meilleure que LPT ?
- Etudier le prix de la stabilité approchée dans d'autres problèmes.