

N. d'ordre : 1639

THÈSE

Présentée devant

l'Université de Rennes 1

Institut de Formation Supérieure en Informatique et
Communication

Pour obtenir

Le Titre de Docteur de l'Université de Rennes 1
Mention INFORMATIQUE

par

Mourad BAÏOU

Titre de la thèse

**LE PROBLÈME DU SOUS-GRAPHE STEINER 2-ARÊTE
CONNEXE: APPROCHE POLYÉDRALE**

Soutenue le 17 Décembre 1996 devant la commission d'examen

MM.	J.	FONLUPT	Rapporteur
	T.M.	LIEBLING	Rapporteur
	M.	BALINSKI	Examineur
	J.P.	BANATRE	Examineur
	A.R.	MAHJOUB	Directeur
	R.	MARIE	Examineur
	F.	BARAHONA	Invité

Résumé

Un graphe G est dit 2-arête-connexe si entre chaque paire de sommets de G , il existe au moins deux chaînes arête-disjointes. Si les arêtes sont munies d'un système de poids, et si S est un ensemble de sommets distingués de G , le problème du sous-graphe Steiner 2-arête-connexe de G est de déterminer un sous-graphe 2-arête-connexe contenant S , de poids minimum. Ce problème a des applications dans les domaines des télécommunications et de transport.

Dans cette thèse nous étudions une approche polyédrale pour ce problème.

Dans une première partie, nous étudions le polyèdre associé à ce problème. Nous donnons une description linéaire complète de ce polyèdre quand le graphe est série-parallèle. Nous discutons par la suite de certains polyèdres liés au polytope des sous-graphes Steiner 2-arête-connexes. Nous examinons tout particulièrement le polytope du voyageur de commerce Steiner et nous en donnons une description linéaire complète dans la classe des graphes série-parallèles.

Dans la deuxième partie, nous étudions une méthode de coupes pour le problème du sous-graphe 2-arête-connexe (où tous les sommets de S ont le même comportement). Dans un premier temps nous étudions la famille de contraintes dites de partition. En utilisant un algorithme récent de Queyranne pour déterminer le minimum d'une fonction sous-modulaire symétrique, nous montrons que le problème de séparation associé à ces contraintes peut être résolu en temps polynomial. Ces contraintes sont utilisées par la suite dans un algorithme de coupes et branchement pour résoudre certaines instances du problème du sous-graphe 2-arête-connexe. La même approche est aussi utilisée pour résoudre des instances du problème du voyageur de commerce. Les résultats expérimentaux montrent que les contraintes de partition sont très efficaces pour résoudre ces problèmes.

Mots clefs: sous-graphe Steiner 2-arête-connexe, polytope, graphe série-parallèle, inégalités de partition, problème de séparation, algorithme de coupes.

Abstract

A graph G is said to be 2-edge connected if between every pair of nodes of G , there are at least two edge-disjoint paths. If weights are associated to the edges of G and S is a set of distinguished nodes of G , then the Steiner 2-edge connected subgraph problem is to find a minimum weight 2-edge connected subgraph of G spanning S . This problem has applications to the design of reliable communication and transportation networks. In this thesis we study a polyhedral approach for this problem.

In the first part of the thesis, we discuss the polytope associated with that problem. We give a complete linear description of this polytope when the underlying graph is series-parallel. We also study some polyhedra related to that polytope. In particular we give a complete characterization of the Steiner traveling salesman polytope on series-parallel graphs.

In the second part of the thesis, we discuss a cutting plane algorithm for the 2-edge connected subgraph problem. (Here all the nodes have to be considered in the solution). First, using a recent algorithm of Queyranne for finding the minimum of a symmetric submodular function, we devise a polynomial time algorithm to solve the separation problem for the so-called partition inequalities. These inequalities are used together with the cut and the trivial inequalities in a branch-and-cut algorithm for solving instances of the 2-edge connected subgraph problem. The same approach is used for solving instances of the traveling salesman problem. The computational results show that the partition inequalities are very efficient to solve those problems.

Key words: Steiner 2-edge connected subgraph, polytope, series-parallel graph, partition inequalities, separation problem, cutting plane algorithm.

TABLE DES MATIÈRES

Avant propos	1
Introduction	5
1 Le polytope des sous-graphes Steiner 2-arête-connexes	11
1.1 Introduction	11
1.2 Le polytope $\text{STECSP}(G, S)$ dans les graphes série-parallèles	13
1.2.1 Propriétés structurales des points extrêmes du polytope $P(G, S)$	13
1.2.2 Preuve du Théorème 1.2	18
1.3 Le polytope $\text{STESNP}(G, S)$ dans les graphes série-parallèles	35
1.4 Formulation étendue	40
2 Polytopes liés au $\text{STECSP}(G, S)$	45
2.1 Le dominant du $\text{STECSP}(G, S)$	45
2.2 Une relaxation du $\text{STECSP}(G, S)$	49
2.3 Le polytope du voyageur de commerce Steiner	51
3 Les contraintes de partition	61
3.1 Séparation des contraintes de partition	62
3.1.1 Cas $b \leq -1$	62
3.1.2 L'approche de Cunningham	67
3.1.3 L'algorithme de Queyranne	71
3.1.4 Cas $b > -1$	74
3.2 Problèmes liés aux contraintes de partition	76
3.3 Applications des contraintes de partition	77
4 Un algorithme de coupes et branchement	83
4.1 Aperçu général sur l'algorithme de coupes et branchement	83

4.2	L'algorithme	85
4.2.1	Séparation des inégalités de coupes	87
4.2.2	Séparation des inégalités de F -partition	88
4.2.3	Un bref aperçu sur MINTO	93
5	Résultats expérimentaux	95
	Conclusion	103
	Annexe	105
	Références	109

Avant propos

Plusieurs problèmes issus de domaines divers (tels que l'industrie, le transport, l'économie) se ramènent à des problèmes d'optimisation combinatoire, une discipline de la programmation mathématique qui a connu durant les trois dernières décennies un développement considérable, tant sur le plan théorique que sur le plan pratique.

Un problème d'optimisation combinatoire peut être défini comme étant celui de déterminer un plus petit (ou un plus grand) élément d'un ensemble fini. A première vue un tel problème paraît très simple à résoudre, vu le caractère fini de l'ensemble de ses solutions. Mais en pratique le nombre de ces solutions peut être exponentiel. Et dans ce cas, une méthode qui consisterait à énumérer toutes les solutions du problème ne peut être envisagée.

L'efficacité d'une méthode de résolution (algorithme) est généralement mesurée par le temps d'exécution. Si ce temps est borné par une fonction polynomiale en la taille du problème, alors la méthode est dite efficace ou polynomiale.

Pour un certain type de problèmes d'optimisation combinatoire, on ne connaît pas d'algorithmes efficaces de résolution. Ces problèmes ont la propriété que s'il existe un algorithme polynomial pour un d'entre-eux alors il existerait un pour chacun d'eux. Pour ces problèmes dits NP-durs, il y a donc peu d'espoir de pouvoir trouver une méthode efficace. Une approche qui s'est révélée efficace pour ce type de problèmes est l'approche dite polyédrale. Cette approche permet de ramener le problème à la résolution d'un programme linéaire par la description du polyèdre, enveloppe convexe des solutions, par un système linéaire.

Une étape cruciale dans cette méthode concerne l'identification des contraintes de ce

système. Une caractérisation complète du polyèdre est généralement difficile à obtenir. Elle s'avère impossible dans le cas où le problème est NP-dur. Cependant, et ceci depuis la découverte de la méthode des ellipsoïdes par Khachiyan [51], une description partielle du polyèdre des solutions peut être suffisante pour résoudre le problème en temps polynomial. En effet en utilisant cette méthode, Grötschel, Lovász et Schrijver [42] (voir aussi Padberg et Rao [63]) ont montré qu'il existe un algorithme polynomial pour résoudre un problème d'optimisation sur un polyèdre donné si et seulement si il existe un algorithme polynomial pour le problème de séparation associé à ce polyèdre, c'est-à-dire un algorithme qui permet de décider pour un point x donné, si x appartient au polyèdre et dans le cas contraire de trouver un hyperplan qui sépare x du polyèdre. En conséquence, si pour un problème d'optimisation combinatoire on connaît un système de contraintes linéaires décrivant partiellement le polyèdre des solutions, et si le problème de séparation associé à ces contraintes est polynomial, alors ce système peut être suffisant pour donner une solution optimale au problème en temps polynomial en utilisant une méthode de coupes. Une telle approche a été appliquée avec succès pour plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire comme le problème du voyageur de commerce et le problème de la coupe maximale.

Dans cette thèse nous considérons cette approche pour le problème du sous-graphe 2-arête-connexe minimum, un des problèmes de conception de réseaux qui a été largement étudié ces dernières années. Ce problème a des applications dans plusieurs domaines comme les télécommunications et le transport. Ici nous nous intéressons au problème Steiner associé.

Dans une première partie, nous étudions le polyèdre associé à ce problème, et nous en donnons une description linéaire complète dans le cas où le graphe est série-parallèle. Nous discutons par la suite de certains polyèdres liés à ce polyèdre. En particulier nous donnons une caractérisation du polytope du voyageur de commerce Steiner dans cette même classe de graphes.

Dans la deuxième partie de la thèse, nous étudions dans un premier temps, le problème de séparation associé à certaines familles de contraintes. En utilisant un algorithme récent de Queyranne [68], nous montrons que ce problème est polynomial pour les contraintes dites de partitions. Ces contraintes (ainsi que d'autres classes de contraintes) sont incorporées dans une méthode de coupes pour résoudre certaines instances du problème du sous-graphe 2-arête-connexe. Une approche similaire est aussi utilisée pour résoudre des instances du problème du voyageur de commerce. Les résultats ex-

périmentaux montrent que les contraintes de partition jouent un rôle central dans la résolution de ces problèmes.

Introduction

Les problèmes de conception de réseaux se posent dans plusieurs domaines, en particulier dans celui des télécommunications. Ce domaine a connu ces dernières années un développement considérable avec l'introduction de la technologie des fibres optiques. Cette technologie s'est avérée très performante. Elle permet d'avoir une fiabilité importante et une grande capacité de transmission dans le réseau. Cependant un problème se pose toujours, celui de la défaillance de composantes du réseau de télécommunication. Cela peut en effet entraîner l'arrêt total du fonctionnement du réseau. La résolution de ce problème nécessite la mise en place de réseaux de télécommunication suffisamment fiables, dans le sens où si une ou plusieurs liaisons (ou noeuds) de transmission sont détruites le réseau continue à fonctionner. Ces conditions de fiabilité sont généralement formulées en terme de connexité dans les réseaux. La topologie des réseaux de télécommunication qui s'est révélée performante est celle des réseaux dits 2-connexes: si une liaison (un noeud) du réseau est supprimée, le réseau reste connexe. Si à chaque liaison possible est associé un certain coût, alors le problème est d'établir un réseau 2-connexe qui soit de coût minimum.

Dans la pratique on doit parfois distinguer certains sommets dans le réseau. Ces sommets, appelés terminaux, doivent être reliés au réseau final. Les autres sommets (non terminaux) ne sont considérés dans la solution que s'ils permettent de réduire le coût total du réseau. Le problème dans ce cas est donc de déterminer un réseau 2-connexe, contenant les sommets terminaux et qui soit de coût minimum.

Dans cette thèse nous considérons ce problème quand la condition de 2-connexité porte sur les liaisons entre les sommets. Nous étudions une approche polyédrale pour ce problème.

Dans ce qui suit, nous présentons le problème en terme de graphes.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *k-arête-connexe* (*resp. k-sommet-connexe*) ($1 \leq k \leq |V| - 1$), si pour toute paire de sommets $i, j \in V$, il existe au moins k chaînes arête-disjointes (sommet-disjointes) disjointes reliant i et j dans G . Soit un graphe $G = (V, E)$ et $w \in \mathbb{R}^E$ un vecteur de poids associé aux arêtes de G . Le poids d'un sous-graphe de G est la somme des poids de ses arêtes. Etant donné un sous-ensemble de sommets distingués S de V , le *problème du sous-graphe Steiner 2-arête-connexe* (STECSP) est de trouver un sous-graphe 2-arête-connexe de poids minimum couvrant S (d'autres sommets n'appartenant pas à S peuvent être pris, s'ils diminuent le coût total de la solution). Le *problème du réseau Steiner 2-arête-fiable* (STESNP) est de trouver un sous-graphe de G de poids minimum couvrant S tel que pour toute paire de sommets i, j de S il existe au moins 2 chaînes arête-disjointes reliant i et j . Notons que toute solution de STECSP est aussi solution de STESNP. Si $w > 0$, alors une solution optimale de STESNP est aussi une solution optimale de STECSP. Et si $S = V$, alors les deux problèmes coïncident. Les problèmes STECSP et STESNP ont des applications dans les domaines de télécommunication et de transport [16, 71, 72].

Plusieurs problèmes Steiner dans les graphes ont été considérés dans la littérature [80, 54]. En particulier, le problème de l'arbre Steiner [11, 12, 38, 56, 57, 66, 67] a reçu une attention particulière, vu ses nombreuses applications dans l'étude des circuits VLSI et dans la conception des réseaux fiables.

Le problème du voyageur de commerce [15, 52, 65] est étroitement lié aux STECSP et STESNP. En effet, comme il a été montré dans [30], le problème de déterminer si un graphe $G = (V, E)$ contient un cycle Hamiltonien (un cycle sans corde passant par tous les sommets du graphe) peut être ramené au STECSP (au cas où $S = V$). Ceci implique que le STECSP et le STESNP sont NP-durs en général. Il a été montré qu'ils peuvent être résolus en temps polynomial pour certaines classes de graphes. Wald et Colbourn [76] ont montré que le STECSP peut être résolu en temps polynomial pour les graphes outerplanaires. Aussi dans [59], il a été montré que ce problème peut être résolu en temps polynomial pour la classe plus générale des graphes série-parallèles. Dans [78, 79] Winter montre que le STESNP peut être résolu en temps polynomial pour les graphes série-parallèles [79] et pour les graphes de Halin [78]. En fait, Winter considère le problème plus général suivant appelé *le problème Steiner général* : Etant donné un ensemble $S \subseteq V$ et une matrice carrée $(|S|, |S|)$, $R = (R_{ij})$ (définissant certaines conditions de connexité entre les sommets), trouver un sous-graphe de poids

minimum couvrant S de telle manière que chaque paire de sommets (i, j) dans S , soient liés par au moins R_{ij} chaînes arête-disjointes (sommets-disjointes). Il a montré que ce problème peut être résolu en temps linéaire si le graphe est série-parallèle ou de Halin. Ce problème a été considéré plus tard par Grötschel et Monma [43] et Grötschel, Monma et Stoer [45, 44, 46] dans le cadre d'un modèle plus général. Ce modèle peut être présenté comme suit:

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Supposons qu'à chaque sommet v de V est associé un entier non-négatif $r(v)$ représentant un "degré de connexité" pour v . Etant donné un sous-graphe $H = (W, F)$ de G , on dit que H vérifie *les conditions de fiabilité associées aux sommets* (resp. *arêtes*) si pour toute paire de sommets distincts $s, t \in V$, H contient au moins

$$r(s, t) = \min \{r(s), r(t)\}$$

chaînes sommet-disjointes (resp. arête-disjointes) reliant s et t . On peut supposer, sans perte de généralité, qu'il existe au moins deux sommets ayant un degré de connexité k , où $k = \max \{r(v) : v \in V\}$. Supposons qu'à chaque arête e est associé un coût $c(e)$, et notons par $k\text{NCON}$ (resp. $k\text{ECON}$) le problème de déterminer un sous-graphe de G de coût minimum vérifiant les conditions de fiabilité associées aux sommets (resp. arêtes). Soit

$$\text{con}(W) = \max \{r(s, t) \mid s \in W, t \in V \setminus W\},$$

où $W \subseteq V$. On écrit $\text{con}_H(W)$ quand $\text{con}(W)$ est considéré par rapport à un graphe H différent de G . Alors le problème $k\text{NCON}$ est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant

$$\left. \begin{array}{ll} \min \sum_{e \in E} c_e x(e) & \\ \text{(i)} \quad x(\delta(W)) & \geq \text{con}(W) \\ & \text{pour tout } W \subseteq V, \emptyset \neq W \neq V, \\ \text{(ii)} \quad x(\delta_{G-Z}(W)) & \geq \text{con}_{G-Z}(W) - |Z| \\ & \text{pour tout } Z \subseteq V, \emptyset \neq Z \neq V, \text{ et pour tout } W \subseteq V \setminus Z, \\ & \quad \emptyset \neq W \neq V \setminus Z \text{ avec } |Z| < \text{con}_{G-Z}(W), \\ \text{(iii)} \quad 0 \leq x(e) \leq 1 & \text{pour tout } e \in E, \\ \text{(iv)} \quad x(e) \text{ entier} & \text{pour tout } e \in E. \end{array} \right\} (1)$$

En supprimant les contraintes (ii), nous obtenons un programme linéaire en nombres entiers formulant le problème $k\text{ECON}$. Le problème STESNP correspond au problème

k ECON dans le cas où $r(v) \in \{0, 2\}$, $\forall v \in V$. Grötschel, Monma et Stoer ont étudié des approches polyédrales pour les problèmes k NCON et k ECON. Leur but était d'obtenir une relaxation linéaire de (1) qui serait efficace pour approcher ces problèmes. Dans [43], Grötschel et Monma ont décrit des contraintes de base valides pour les polyèdres associés. Grötschel, Monma et Stoer ont identifié dans [44] d'autres classes de facettes pour ces polyèdres. Dans [45, 46], ils ont développé des algorithmes de coupes pour le k NCON et le k ECON et présenté des résultats expérimentaux. Une synthèse complète sur ce modèle est présentée dans Stoer [72].

Le STECSP a été introduit par Monma, Munson et Pulleyblank [58]. Ils l'ont étudié dans le cas métrique, c'est-à-dire quand le graphe $G = (V, E)$ est complet et la fonction des poids $w(\cdot)$ satisfait les inégalités triangulaires (c'est-à-dire $w(e_1) \leq w(e_2) + w(e_3)$ pour tout triplet d'arêtes (e_1, e_2, e_3) formant un triangle dans G). Le STECSP (STESNP) est NP-dur même dans ce cas. Ils ont montré, que dans ce cas, le poids d'un sous-graphe 2-arête-connexe de coût minimum couvrant S et ne contenant pas de sommets de $V \setminus S$, est borné par $\frac{4}{3}Q$ où Q est le poids d'un sous-graphe 2-arête-connexe de coût minimum couvrant S . Dans le cas où $S = V$, ils ont donné des propriétés concernant la structure des solutions du problème et montré que le poids d'une solution optimale du problème de voyageur de commerce est borné par $\frac{4}{3}Q$. D'autres propriétés structurales et d'analyse du pire des cas sont données dans Frederickson et Ja'Ja' [35], Bienstock, Brickell et Monma [7] et Goemans et Bertsimas [39].

Notons par $\text{STECSP}(G, S)$ (resp. $\text{STESNP}(G, S)$) l'enveloppe convexe des solutions de STECSP (resp. STESNP).

A notre connaissance les polytopes $\text{STECSP}(G, S)$ et $\text{STESNP}(G, S)$ n'ont pas encore été étudiés. Par contre, quelques cas particuliers ont reçu beaucoup d'attention. En particulier, le cas où $S = V$ a été largement étudié.

Pour $S = V$, Mahjoub [55] a donné une description complète de $\text{STECSP}(G, S)$ dans le cas où le graphe est série-parallèle, et il a introduit une classe d'inégalités appelées inégalités de roues impaires, définissant des facettes pour le polytope $\text{STECSP}(G, S)$. Cette classe d'inégalités a été étendue par Grötschel, Monma et Stoer [45] pour leur modèle. En utilisant la relation entre le STECSP et le problème de voyageur de commerce, Boyd et Hao [9] ont décrit des classes de facettes pour le polytope $\text{STECSP}(G, S)$ à partir de contraintes de peignes. Ces contraintes généralisent également les con-

traintes de roues impaires introduites par Mahjoub [55]. Dans [6], Barahona et Mahjoub ont caractérisé le polytope $\text{STECSP}(G, S)$ pour les graphes de Halin.

Dans [20, 21, 22], Coullard, Rais, Rardin et Wagner ont étudié le problème du sous-graphe Steiner 2-sommet-connexe. Ils ont caractérisé le polytope associé pour les graphes série-parallèles [20]. Dans [22] ils ont décrit le dominant de ce polytope pour les graphes sans W_4 (la roue sur 5 sommets). Dans [21] ils ont développé un algorithme linéaire pour résoudre le problème du sous-graphe Steiner 2-sommet-connexe dans les graphes sans W_4 et les graphes de Halin.

Ce mémoire est organisé comme suit. Dans le Chapitre 1, nous étudions les polytopes $\text{STECSP}(G, S)$ et $\text{STESNP}(G, S)$. Nous donnons des descriptions linéaires complètes pour ces polytopes quand le graphe est série-parallèle. Et nous discutons des formulations étendues pour le STECSP et le STESNP . Dans le Chapitre 2 nous étudions certains polyèdres liés aux $\text{STECSP}(G, S)$ et $\text{STESNP}(G, S)$. Nous donnons une description du dominant de $\text{STECSP}(G, S)$ (et de $\text{STESNP}(G, S)$) dans une classe de graphes généralisant les graphes série-parallèles. Et nous étudions également ce dominant dans le cas où chaque arête du graphe peut être utilisée plus d'une fois. Et nous caractérisons le polytope du voyageur de commerce Steiner dans le cas où le graphe est série-parallèle. Dans le Chapitre 3 nous étudions le problème de séparation des contraintes de partition. Dans le Chapitre 4 nous présentons notre étude expérimentale. Certaines définitions et notations sont données en annexe. Dans ce qui suit nous donnons d'autres définitions et notations qui seront aussi utilisées dans les chapitres suivants.

On considère des graphes non orientés, finis et pouvant contenir des arêtes multiples et des boucles. On note un graphe par $G = (V, E)$ où V est l'ensemble de sommets et E est l'ensemble d'arêtes. Si e est une arête reliant deux sommets u et v , alors u et v seront appelés les extrémités de l'arête e et on écrit $e = uv$. Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $W \subset V$ un sous-ensemble de V . L'ensemble d'arêtes ayant une extrémité dans W et l'autre dans $V \setminus W$ est appelé *coupe* et noté par $\delta(W)$. En posant $\overline{W} = V \setminus W$, on a $\delta(W) = \delta(\overline{W})$.

Soit $W \subseteq V$ un sous-ensemble de sommets de V , on note par $G(W)$ le sous-graphe de G induit par W . Pour $W, W' \subseteq V$, (W, W') dénote l'ensemble d'arêtes ayant une extrémité dans W et l'autre dans W' . Si $F \subseteq E$, $V(F)$ dénotera l'ensemble des extrémités des arêtes de F . Si $W \subseteq V$, alors on note par $E(W)$ l'ensemble d'arêtes

ayant leurs deux extrémités dans W . Si $v \in V$ est un sommet, $l(v)$ dénotera l'ensemble de boucles de v (une boucle de v est une arête qui part de v vers v). On note par $G - e$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e .

Chapitre 1

Le polytope des sous-graphes Steiner 2-arête-connexes

1.1 Introduction

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, un *sous-graphe Steiner* de G , par rapport à S , est un sous-graphe contenant l'ensemble de sommets S . Les sommets de S sont appelés *terminaux* et les sommets de $V \setminus S$ sont appelés *sommets Steiner*.

Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $x(e)$ une variable associée à chaque arête $e \in E$. Pour un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$, le vecteur en 0-1, $x^F \in \mathbb{R}^E$ où $x^F(e) = 1$ si $e \in F$ et $x^F(e) = 0$ sinon, est appelé le *vecteur d'incidence de F* . Pour tout sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$, on définit $x(F) = \sum_{e \in F} x(e)$. Il est facile de voir que le STECSP est équivalent au programme linéaire en nombre entier suivant :

Min wx

$$x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E, \quad (1.1)$$

$$x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E, \quad (1.2)$$

$$x(\delta(W)) \geq 2 \quad \forall W \subseteq V, S \neq W \cap S \neq \emptyset, \quad (1.3)$$

$$x(\delta(W)) - 2x(e) \geq 0 \quad \forall W \subseteq V, S \subseteq W, e \notin E(W), \quad (1.4)$$

$$x(e) \in \{0, 1\}. \quad \forall e \in E. \quad (1.5)$$

Les inégalités (1.1) et (1.2) sont appelées *inégalités triviales* et les inégalités (1.3), *inégalités de coupe-Steiner*. Nous appellerons les inégalités (1.4) *inégalités de coupes-Steiner-gauche*. Les coupes correspondant aux contraintes (1.3) et (1.4) seront appelées respectivement *coupes-Steiner* et *coupes-Steiner-gauche*. Les inégalités de coupes-Steiner-gauche expriment le fait que pour une coupe $\delta(W)$ telle que $S \subset W$, tout sous-graphe Steiner 2-arête-connexe prenant une arête de l'ensemble $E \setminus E(W)$ doit contenir au moins deux arêtes de $\delta(W)$. Soit

$$\text{STECSP}(G, S) = \text{conv}\{x \in \mathbb{R}^E \mid x \text{ satisfait (1.1) -- (1.5)}\},$$

le polytope associé au STECSP. Le polytope $\text{STECSP}(G, S)$ est appelé le *polytope des sous-graphes Steiner 2-arête-connexes*.

Un graphe G est dit *contractible* à un graphe H , si H peut être obtenu à partir de G par suppressions et/ou contractions d'arêtes. Une contraction d'une arête consiste à identifier les extrémités de l'arête et à supprimer cette arête. Un graphe est dit *série-parallèle* [26] si il n'est pas contractible à K_4 (le graphe complet à 4 sommets). Notons que si G est série-parallèle et G est contractible à un graphe H , alors H est série-parallèle. Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes adjacentes à ce sommet.

Il est facile de voir que les graphes série-parallèles vérifient les propriétés suivantes:

Lemme 1.1.

- i) *Tout graphe connexe et série-parallèle ayant plus de deux sommets et ne contenant pas de sommets de degré deux admet au moins deux couples de sommets liés par des arêtes multiples.*

- ii) *Tout graphe série-parallèle et 2-arête-connexe ayant plus de deux sommets contient au moins un sommet adjacent à exactement deux sommets.*

Dans la suite nous allons discuter du polytope STECSP(G, S) dans les graphes série-parallèles.

1.2 Le polytope STECSP(G, S) dans les graphes série-parallèles

Soit $P(G, S)$ le polytope défini par les inégalités (1.1)-(1.4) et soit $\Gamma(W) = E(W) \cup \delta(W)$. Une coupe-Steiner-gauche associée à un sous-ensemble $Z \subset V$ et une arête $e \in \Gamma(\overline{Z})$ sera notée par $(\delta(Z), e)$. Etant données une coupe-Steiner $\delta(W)$ (resp. coupe-Steiner-gauche $(\delta(Z), e)$) et une solution x qui serre l'inégalité correspondant à la coupe-Steiner (resp. coupe-Steiner-gauche), on dira que $\delta(W)$ (resp. $(\delta(Z), e)$) est une coupe-Steiner (resp. coupe-Steiner-gauche) *serrée* par x .

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant:

Théorème 1.2. *Si $G=(V, E)$ est un graphe série-parallèle et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux, alors $STECSP(G, S)=P(G, S)$.*

Avant de démontrer ce théorème, nous donnons d'abord quelques propriétés structurales des points extrêmes du polytope $P(G, S)$.

1.2.1 Propriétés structurales des points extrêmes du polytope $P(G, S)$

Le lemme suivant est un lemme technique qui décrit certaines propriétés des contraintes de coupes-Steiner et de coupes-Steiner-gauche serrées par une solution donnée de $P(G, S)$.

Lemme 1.3. *Soit x une solution de $P(G, S)$. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

- i) Si $\delta(W_1)$ et $\delta(W_2)$ sont deux coupes-Steiner serrées par x et $(W_1 \cap W_2) \cap S \neq \emptyset$ et $(\overline{W_1 \cup W_2}) \cap S \neq \emptyset$ (resp. $(W_1 \setminus W_2) \cap S \neq \emptyset$ et $(W_2 \setminus W_1) \cap S \neq \emptyset$), alors $\delta(W_1 \cap W_2)$ et $\delta(\overline{W_1 \cup W_2})$ (resp. $\delta(W_1 \setminus W_2)$ et $\delta(W_2 \setminus W_1)$) sont deux coupes-Steiner serrées par x , et $x(W_1 \setminus W_2, W_2 \setminus W_1) = 0$ (resp. $x(W_1 \cap W_2, \overline{W_1 \cup W_2}) = 0$).
- ii) Si $\delta(W)$ et $(\delta(Z), e)$ sont respectivement une coupe-Steiner et une coupe-Steiner-gauche serrées par x et $e \in \Gamma(\overline{W \cup Z})$ (resp. $e \in \Gamma(W \setminus Z)$), alors $\delta(W \cap Z)$ et $(\delta(W \cup Z), e)$ (resp. $\delta(Z \setminus W)$ et $(\delta(\overline{W \setminus Z}), e)$) sont respectivement une coupe-Steiner et une coupe-Steiner-gauche serrées par x , et $x(W \setminus Z, Z \setminus W) = 0$ (resp. $x(W \cap Z, \overline{W \cup Z}) = 0$).
- iii) Si $(\delta(Z_1), e_1)$ et $(\delta(Z_2), e_2)$ sont deux coupes-Steiner-gauche serrées par x et $e_i \in \Gamma(\overline{Z_1 \cap Z_2})$, $e_j \in \Gamma(\overline{Z_1 \cup Z_2})$ (resp. $e_i \in \Gamma(Z_1 \setminus Z_2)$, $e_j \in \Gamma(Z_2 \setminus Z_1)$), $\{i, j\} = \{1, 2\}$, alors $(\delta(Z_1 \cap Z_2), e_i)$ et $(\delta(Z_1 \cup Z_2), e_j)$ (resp. $(\delta(\overline{Z_1 \setminus Z_2}), e_i)$ et $(\delta(\overline{Z_2 \setminus Z_1}), e_j)$) sont deux coupes-Steiner-gauche serrées par x et $x(Z_1 \setminus Z_2, Z_2 \setminus Z_1) = 0$ (resp. $x(Z_1 \cap Z_2, \overline{Z_1 \cup Z_2}) = 0$).

Preuve. Dans ce qui suit on démontre i) (la preuve de ii) et iii) est similaire).

Puisque $\delta(W_1)$ et $\delta(W_2)$ sont des coupes-Steiner serrées par x , alors on a

$$\begin{aligned}
4 &= x(\delta(W_1)) + x(\delta(W_2)) \\
&= x(\delta(W_1 \cap W_2)) + x(\delta(W_1 \cup W_2)) + 2x(W_1 \setminus W_2, W_2 \setminus W_1) \\
&\geq x(\delta(W_1 \cap W_2)) + x(\delta(W_1 \cup W_2)) \\
&\geq 4.
\end{aligned}$$

Les deux dernières inégalités proviennent du fait que $x(e) \geq 0$ pour toute arête $e \in E$ et que $\delta(W_1 \cap W_2)$ et $\delta(W_1 \cup W_2)$ soient des coupes-Steiner. Cela implique que toutes les inégalités ci-dessus sont satisfaites à égalité. Par conséquent:

$$x(\delta(W_1 \cap W_2)) = x(\delta(W_1 \cup W_2)) = 2 \text{ et } x(W_1 \setminus W_2, W_2 \setminus W_1) = 0.$$

Si $(W_1 \setminus W_2) \cap S \neq \emptyset$ et $(W_2 \setminus W_1) \cap S \neq \emptyset$, alors les coupes $\delta(W_1 \setminus W_2)$ et $\delta(W_2 \setminus W_1)$ sont aussi des coupes-Steiner et de la même manière, on peut montrer qu'elles sont serrées par x et que $x(W_1 \cap W_2, \overline{W_1 \cup W_2}) = 0$. $\square$

Si x est un point extrême de $P(G, S)$, alors il existe deux sous-ensembles d'arêtes, $E^0, E^1 \subseteq E$ de G , une famille de coupes-Steiner $\{\delta(W_i), i = 1, \dots, l\}$ et une famille de coupes-Steiner-gauche $\{(\delta(Z_j), e_j), j = 1, \dots, t\}$, tels que x soit la solution unique du système

$$(1.6) \begin{cases} x(e) = 0 & \forall e \in E^0, \\ x(e) = 1 & \forall e \in E^1, \\ x(\delta(W_i)) = 2 & \text{pour } i = 1, \dots, l, \\ x(\delta(Z_j)) - 2x(e_j) = 0 & \text{pour } j = 1, \dots, t, \end{cases}$$

où $|E^0| + |E^1| + l + t = |E|$.

Lemme 1.4. *Si x est un point extrême de $P(G, S)$, alors le système (1.6) définissant x peut être choisi de telle manière que ce qui suit soit vérifié:*

- i) *Pour toutes coupes Steiner $\delta(W_i)$ et $\delta(W_k)$, $i, k \in \{1, \dots, l\}$, telles que $W_i \cap W_k \neq \emptyset$, au moins un des ensembles $(W_i \setminus W_k) \cap S$ et $(W_k \setminus W_i) \cap S$ est vide.*
- ii) *Pour toute coupe-Steiner $\delta(W_i)$, $i \in \{1, \dots, l\}$ et coupe-Steiner-gauche $(\delta(Z_j), e_j)$, $j \in \{1, \dots, t\}$ telles que $W_i \setminus Z_j \neq \emptyset$, on a $e_j \notin \Gamma(\overline{W_i \cup Z_j})$.*
- iii) *Pour toutes coupes-Steiner-gauche $(\delta(Z_j), e_j)$ et $(\delta(Z_k), e_k)$, $j, k \in \{1, \dots, t\}$ où $\overline{Z_j \cup Z_k} \neq \emptyset$, si $e_s(e_{\bar{s}}) \in \Gamma(Z_j \setminus Z_k)$ alors $e_{\bar{s}}(e_s) \notin \Gamma(Z_k \setminus Z_j)$ où $\{e_s, e_{\bar{s}}\} = \{e_j, e_k\}$.*

Preuve. La preuve utilise les mêmes idées que celles développées par Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [18] pour un résultat similaire.

Supposons que x est défini par un système de la forme de (1.6) tel que

$$a = \sum_{i=1}^l |W_i| + \sum_{j=1}^t |\overline{Z_j}|$$

soit minimum.

On donnera la preuve de i) (la preuve de ii) et iii) est similaire). Supposons le contraire, à savoir qu'il existe deux coupes-Steiner $\delta(W_r)$ et $\delta(W_s)$, $r, s \in \{1, \dots, l\}$ telles que les ensembles $(W_r \setminus W_s) \cap S$ et $(W_s \setminus W_r) \cap S$ soient les deux non vides. Par le Lemme 1.3 i), $\delta(W_r \setminus W_s)$ et $\delta(W_s \setminus W_r)$ sont aussi des coupes-Steiner serrées par x et $x(W_r \cap W_s, \overline{W_r \cup W_s}) = 0$. d'où

$$x(\delta(W_r)) + x(\delta(W_s)) = x(\delta(W_r \setminus W_s)) + x(\delta(W_s \setminus W_r)). \quad (1.7)$$

Puisque le système (1.6) est de plein rang, toute contrainte de $P(G, S)$ serrée par x doit pouvoir s'écrire comme combinaison linéaire des équations de (1.6). Donc, il existe des scalaires α_e, α'_e , pour $e \in E^0$; β_e, β'_e , pour $e \in E^1$; λ_i, λ'_i , $i = 1, \dots, l$; γ_j, γ'_j , $j = 1, \dots, t$; tels que

$$x(\delta(W_r \setminus W_s)) = \sum_{i=1}^l \lambda_i x(\delta(W_i)) + \sum_{j=1}^t \gamma_j (x(\delta(Z_j)) - 2x(e_j)) + \sum_{e \in E^0} \alpha_e x(e) + \sum_{e \in E^1} \beta_e x(e),$$

et

$$x(\delta(W_s \setminus W_r)) = \sum_{i=1}^l \lambda'_i x(\delta(W_i)) + \sum_{j=1}^t \gamma'_j (x(\delta(Z_j)) - 2x(e_j)) + \sum_{e \in E^0} \alpha'_e x(e) + \sum_{e \in E^1} \beta'_e x(e),$$

où

$$\begin{aligned} 2 \sum_{i=1}^l \lambda_i + \sum_{e \in E^1} \beta_e &= 2, \\ 2 \sum_{i=1}^l \lambda'_i + \sum_{e \in E^1} \beta'_e &= 2. \end{aligned}$$

En combinant ces équations avec (1.7), on obtient

$$(1.8) \begin{cases} \lambda_r + \lambda'_r = 1, \\ \lambda_s + \lambda'_s = 1. \end{cases}$$

Si $\lambda_r \neq 0$ (*resp.* $\lambda'_s \neq 0$), alors en remplaçant l'équation $x(\delta(W_r)) = 2$ (*resp.* $x(\delta(W_s)) = 2$) dans le système (1.6) par l'équation $x(\delta(W_r \setminus W_s)) = 2$ (*resp.* $x(\delta(W_s \setminus W_r)) = 2$), on obtient un système de plein rang ayant x comme solution unique, ce qui contredit la minimalité de a . Donc supposons que $\lambda_r = \lambda'_s = 0$. Par (1.8) on a $\lambda_s = \lambda'_r = 1$. Maintenant en remplaçant $x(\delta(W_r)) = 2$ et $x(\delta(W_s)) = 2$ par $x(\delta(W_r \setminus W_s)) = 2$ et $x(\delta(W_s \setminus W_r)) = 2$, respectivement, on obtient un système ayant x comme solution unique. Puisque $W_r \cap W_s \neq \emptyset$, et par conséquent, $|W_r \setminus W_s| + |W_s \setminus W_r| < |W_r| + |W_s|$, ceci contredit de nouveau la minimalité de a . $\square$

Lemme 1.5. *Soit $(\delta(W), e)$ et $(\delta(Z), f)$ deux coupes-Steiner-gauche serrées par un point extrême x de $P(G, S)$. Si $e \in \Gamma(\overline{Z})$ et $f \in \Gamma(\overline{W})$, alors $(\delta(W), f)$ et $(\delta(Z), e)$ sont aussi deux coupes-Steiner-gauche serrées par x . De plus on a $x(e) = x(f)$.*

Preuve. Il n'est pas difficile de voir que $(\delta(Z), e)$ et $(\delta(W), f)$ sont des coupes-Steiner-gauche dans G . Donc

$$x(\delta(Z)) - 2x(e) \geq 0, \quad (1.9)$$

$$x(\delta(W)) - 2x(f) \geq 0. \quad (1.10)$$

Par ailleurs, puisque $(\delta(Z), f)$ et $(\delta(W), e)$ sont deux coupes-Steiner-gauche serrées par x , on a

$$x(\delta(Z)) - 2x(f) = 0, \quad (1.11)$$

$$x(\delta(W)) - 2x(e) = 0. \quad (1.12)$$

Maintenant en combinant (1.9)-(1.12), il en résulte que $x(e) = x(f)$ et que (1.9) et (1.10) sont satisfaites avec égalité. $\square$

Lemme 1.6. *Soit $x \in \mathbb{R}^E$ un point extrême de $P(G, S)$ tel que $x(e) > 0$ pour toute arête $e \in E$. Si $\delta(W)$ (resp. $(\delta(W), e)$) est une coupe-Steiner (resp. coupe-Steiner-gauche) serrée par x , alors $G(W)$ et $G(\overline{W})$ sont connexes.*

Preuve. On montre le lemme pour $\delta(W)$ (la preuve pour $(\delta(W), e)$ est similaire). Supposons par exemple, que $G(\overline{W})$ n'est pas connexe. Soit $\overline{W}^1, \overline{W}^2$ une partition de $\overline{W}$ telle que $(\overline{W}^1, \overline{W}^2) = \emptyset$. Puisque G est 2-arête-connexe, il en résulte que $(W, \overline{W}^1) \neq \emptyset \neq (W, \overline{W}^2)$. Par notre hypothèse, on a donc

$$x(W, \overline{W}^2) > 0. \quad (1.13)$$

Puisque $\overline{W} \cap S \neq \emptyset$, on peut, sans perte de généralité, supposer que $\overline{W}^1 \cap S \neq \emptyset$. En conséquence, $\delta(\overline{W}^1)$ est une coupe-Steiner de G . Cependant, comme

$$x(\delta(W)) = x(W, \overline{W}^1) + x(W, \overline{W}^2) = 2,$$

il s'en suit par (1.13) que $x(\delta(\overline{W}^1)) = x(W, \overline{W}^1) < 2$, contradiction. $\square$

La remarque suivante sera utilisée fréquemment dans le paragraphe suivant.

Remarque 1.7. Soit $G' = (V', E')$ un graphe obtenu à partir de G en contractant un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$. Soit $S' = (S \setminus V(F)) \cup \{s'\}$ si $S \cap V(F) \neq \emptyset$ et $S' = S$ sinon, où s' est le sommet résultant de la contraction de F . Soit x' la restriction de x à G' . Alors x' est une solution de $P(G', S')$.

Preuve. Il est évident que x' satisfait les inégalités (1.1) et (1.2). Par ailleurs, puisque toute coupe-Steiner (resp. coupe-Steiner-gauche) $\delta(W)$ (resp. $(\delta(W), e)$) de G' par rapport à S' est aussi une coupe-Steiner (resp. coupe-Steiner-gauche) de G par rapport à S , il en découle que les inégalités (1.3) et (1.4) sont aussi satisfaites par x' . $\square$

1.2.2 Preuve du Théorème 1.2

La preuve est par récurrence sur le nombre d'arêtes. Il est simple de voir que le théorème est vrai pour les graphes ayant au plus deux arêtes. Supposons qu'il est vrai pour tout graphe série-parallèle ayant au plus m arêtes et supposons que G contient exactement $m + 1$ arêtes. Sans perte de généralité on peut supposer aussi que G est 2-arête-connexe. Maintenant, supposons que $STECSP(G, S) \neq P(G, S)$. Soit x un point extrême fractionnaire de $P(G, S)$. Supposons aussi que, sous l'hypothèse de récurrence, $|S|$ est maximum. C'est à dire: pour tout graphe série-parallèle $G' = (V', E')$ tel que $|E'| = m + 1$ et un ensemble de terminaux $S' \subset V'$ tel que $|S'| > |S|$, on a $STECSP(G', S') = P(G', S')$. On a les lemmes suivants.

Lemme 1.8. $x(e) > 0$ pour toute arête $e \in E$.

Preuve. Si e_0 est une arête telle que $x(e_0) = 0$, alors considérons x' le vecteur donné par $x'(e) = x(e) \forall e \in E \setminus \{e_0\}$. Il est clair que x' appartient à $P(G - e_0)$. De plus x' est un point extrême de $P(G - e_0)$. Puisque x' est fractionnaire, on a une contradiction. $\square$

Lemme 1.9. Soient x un point extrême de $P(G, S)$ et g une arête de $E(S)$ telle que $0 < x(g) < 1$. Alors il existe au moins deux coupes-Steiner du système (1.6) contenant g .

Preuve. En effet, il est clair qu'il existe au moins une telle coupe. Sinon la solution x' , donnée par $x'(e) = x(e)$ si $e \neq g$ et $x'(e) = 1$ si $e = g$, serait une solution du système (1.6), différente de x ; ce qui est impossible. Supposons maintenant qu'il existe exactement une seule coupe de ce type. Soit (1.6)' le système obtenu à partir de (1.6) en supprimant cette contrainte. Soit $x' \in \mathbb{R}^m$ la solution donnée par $x'(e) = x(e) \forall e \in E \setminus \{g\}$. Puisque g appartient à une coupe serrée et $0 < x(g) < 1$, il doit exister au moins une autre arête de G ayant une valeur fractionnaire et par conséquent x' est fractionnaire. De plus, x' est la solution unique du système (1.6)'. Maintenant considérons le graphe G' obtenu à partir de G en contractant g . Soit $S' = (S - \{u, v\}) \cup \{w\}$, où w est le sommet résultant de cette contraction. Par la Remarque 1.7, $x' \in P(G', S')$. Par ailleurs, notons que le système (1.6)' est inclus dans $P(G', S')$. Ceci implique que x' est un point extrême de $P(G', S')$. Puisque G' est série-parallèle et contient moins d'arêtes que G , ceci contredit l'hypothèse de récurrence et par conséquent notre lemme est prouvé. $\square$

Nous allons maintenant montrer que G ne peut pas contenir des sommets de degré 2.

Lemme 1.10. *G ne contient pas de sommets de degré 2.*

Preuve. Supposons que G contient un sommet v tel que $\delta(v) = \{e_1, e_2\}$. Par les contraintes (1.1)-(1.4), on a

$$x(e_1) = x(e_2). \quad (1.14)$$

Soit G' le graphe obtenu à partir de G en contractant $e_1 = vw$. Il est évident que G' est série-parallèle. Soit x' la restriction de x à G' et soit $S' = (S \setminus \{v, w\}) \cup \{v'\}$ si $\{v, w\} \cap S \neq \emptyset$ et $S' = S$ sinon, où v' est le sommet qui résulte de la contraction de e_1 . Par la Remarque 1.7, $x' \in P(G', S')$. De plus x' est un point extrême de $P(G', S')$. En effet, si ceci n'est pas le cas, alors il existe deux solutions y^1 et y^2 de $P(G', S')$, $y^1 \neq y^2$, telles que $x' = \frac{1}{2}(y^1 + y^2)$. Soient x^1 et x^2 les solutions données par

$$x^1(e) = \begin{cases} y^1(e) & \text{si } e \in E \setminus \{e_1\}, \\ y^1(e_2) & \text{si } e = e_1, \end{cases}$$

et

$$x^2(e) = \begin{cases} y^2(e) & \text{si } e \in E \setminus \{e_1\}, \\ y^2(e_2) & \text{si } e = e_1. \end{cases}$$

Les solutions x^1 et x^2 appartiennent à $P(G, S)$. Nous allons montrer cela pour x^1 , la preuve pour x^2 est identique. Nous considérons trois cas.

Cas 1. $S = \{v\}$.

Donc le polytope $P(G, S)$ est donné seulement par les contraintes de types (1.1), (1.2) et (1.4). De plus, si $l(v) \neq \emptyset$, alors pour chaque arête $e \in l(v)$, on a $x(e) = 1$. Car sinon une arête e de $l(v)$ où $0 < x(e) < 1$ n'appartiendrait à aucune contrainte serrée par x , contradiction.

Nous allons montrer dans la suite que $x(e_1) = x(e_2) = 1$. Supposons le contraire. Puisque $(\delta(v), e)$, $e \in E \setminus l(v)$, est une coupe-Steiner-gauche, par les inégalités (1.4) on a $0 < x(e) < 1 \forall e \in E \setminus l(v)$. Soit $\bar{x}$ la solution donnée par

$$\bar{x}(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \in E \setminus l(v), \\ 1 & \text{si } e \in l(v). \end{cases}$$

Il est clair que $\bar{x}$ appartient à $P(G, S)$. De plus toute contrainte de $P(G, S)$ serrée par x est aussi serrée par $\bar{x}$. Puisque $x \neq \bar{x}$, on a une contradiction.

Donc $x(e_1) = x(e_2) = 1$ et, par conséquent, $x'(e_2) = 1$. Ceci implique que $y^1(e_2) = 1$, et donc $x^1(e_1) = x^1(e_2) = 1$.

Considérons maintenant une coupe-Steiner-gauche $(\delta(Z), e)$ de G .

- Si $e_1, e_2 \in \delta(Z)$, alors il est clair que $x^1(\delta(Z)) \geq 2$ et, puisque $x^1(e) \leq 1$, nous avons $x^1(\delta(Z)) - 2x^1(e) \geq 0$.
- Si $e_1 \notin \delta(Z)$ alors $(\delta(\tilde{Z}), e)$ où, $\tilde{Z} = (Z \setminus \{v, w\}) \cup \{v'\}$, est une coupe-Steiner-gauche de G' par rapport à S' . D'où

$$\begin{aligned} 0 &\leq y^1(\delta(\tilde{Z})) - 2y^1(e) \\ &= x^1(\delta(Z)) - 2x^1(e). \end{aligned}$$

- Si $e_1 \in \delta(Z)$ et $e_2 \notin \delta(Z)$ alors $(\delta(Z'), e_2)$, où $Z' = (\overline{Z} \setminus \{w\}) \cup \{v'\}$, est une coupe-Steiner-gauche de G' par rapport à S' . D'où

$$\begin{aligned} 2x^1(e) \leq 2 &= 2y^1(e_2), \\ &\leq y^1(\delta(Z')) = x^1(\delta(Z')), \\ &= x^1(\delta(Z)). \end{aligned}$$

Dans les trois cas, x^1 satisfait les inégalités de coupes-Steiner-gauche correspondant à $(\delta(Z), e)$. Puisque x^1 satisfait également les inégalités (1.1) et (1.2), il en résulte que $x^1 \in P(G, S)$.

Cas 2. $S \neq \{v\}$.

Cas 2.1. $v \in S$.

Puisque dans ce cas, $\delta(v)$ est une coupe-Steiner, par les inégalités (1.1), (1.2) et (1.3) on a $x(e_1) = x(e_2) = 1$. En conséquence

$$x^1(e_1) = x^1(e_2) = 1. \quad (1.15)$$

Soit $\delta(W)$ une coupe-Steiner de G . Sans perte de généralité, on peut supposer que $v \in \overline{W}$. Si $e_1, e_2 \in \delta(W)$ alors par (1.15), nous avons $x^1(\delta(W)) \geq 2$. Si $e_1 \notin \delta(W)$, alors $\delta(W)$ est aussi une coupe-Steiner de G' par rapport à S' , et donc $x^1(\delta(W)) = y^1(\delta(W)) \geq 2$.

Ainsi supposons que $\{e_1, e_2\} \cap \delta(W) = \{e_1\}$. Donc $w \in W$. Soit $W' = (W \setminus \{w\}) \cup \{v'\}$. Nous avons $W' \cap S' \neq \emptyset$.

- Si $\overline{W'} \cap S' \neq \emptyset$ alors $\delta(W')$ est une coupe-Steiner de G' . Puisque $\delta(W') = (\delta(W) \setminus \{e_1\}) \cup \{e_2\}$, par (1.15) on a $x^1(\delta(W)) = x^1(\delta(W')) = y^1(\delta(W')) \geq 2$.

- Si $\overline{W'} \cap S' = \emptyset$ alors $(\delta(W'), e_2)$ est une coupe-Steiner-gauche dans G' . Nous avons

$$\begin{aligned} 2 = 2x^1(e_2) &= 2y^1(e_2), \\ &\leq y^1(\delta(W')), \\ &= x^1(\delta(W)). \end{aligned}$$

Dans les deux cas, x^1 vérifie l'inégalité $x^1(\delta(W)) \geq 2$.

Par conséquent, x^1 vérifie les inégalités (1.3). De la même manière, on peut montrer que les inégalités (1.4) sont aussi satisfaites par x^1 , ce qui implique que $x^1 \in P(G, S)$.

Cas 2.2. $v \notin S$.

Tout d'abord, notons que x^1 vérifie les contraintes de type (1.3) et les contraintes de type (1.4) telles que $e_1 \notin \delta(W)$. Par ailleurs, il n'est pas difficile de voir que chaque contrainte de type (1.3) ((1.4)), différente de $x(e_1) - x(e_2) = 0$, où $e_1, e_2 \in \delta(W)$ est redondante dans $P(G, S)$.

Considérons une coupe-Steiner $\delta(W)$ telle que $\{e_1, e_2\} \cap \delta(W) = \{e_1\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $v \in W$. Soit $W' = W \setminus \{v\}$. Notons que $\delta(W')$ est une coupe-Steiner dans G' . Puisque $x'(e_1) = x^1(e_2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} x^1(\delta(W)) &= x^1(\delta(W')), \\ &= y^1(\delta(W')), \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Maintenant considérons une coupe-Steiner-gauche $(\delta(Z), e)$ telle que $\{e_1, e_2\} \cap \delta(W) = \{e_1\}$. Si $v \in Z$ ($v \in \overline{Z}$ (et $w \in Z$)) alors soit $Z' = Z \setminus \{v\}$ ($Z' = (Z \setminus \{w\}) \cup \{v'\}$). Si $e \neq e_1$ (resp. $e = e_1$) alors $(\delta(Z'), e)$ (resp. $(\delta(Z'), e_2)$) est une coupe-Steiner-gauche de G' . On a

$$\begin{aligned} x^1(\delta(Z)) &= x^1(\delta(Z')) - x^1(e_2) + x^1(e_1), \\ &= x^1(\delta(Z')), \\ &= y^1(\delta(Z')), \\ &\geq 2y^1(e) \text{ (resp. } 2y^1(e_2)), \\ &= 2x^1(e). \end{aligned}$$

Il en résulte que x^1 satisfait l'inégalité de coupe-Steiner (resp. coupe-Steiner-gauche) associée à $\delta(W)$ (resp. $(\delta(W), e)$), et donc $x^1 \in P(G, S)$.

Par conséquent, $x^1, x^2 \in P(G, S)$. Mais $x = \frac{1}{2}(x^1 + x^2)$. Puisque $x^1 \neq x^2$, ceci contredit le fait que x est un point extrême et notre lemme est prouvé. $\square$

Lemme 1.11. *Chaque arête e où $x(e) = 1$ est contenue dans $E(S)$.*

Preuve. Supposons qu'il existe une arête $e_0 = uv$ où $x(e_0) = 1$ qui ne soit pas

dans $E(S)$. Soit $S' = S \cup \{u, v\}$. Alors x appartient à $P(G, S')$. En effet, il est facile de voir que x satisfait les inégalités (1.1), (1.2) et (1.4). Maintenant considérons une coupe-Steiner $\delta(W)$ dans G par rapport à S' . Si $\delta(W)$ est une coupe-Steiner dans G par rapport à S alors l'inégalité $x(\delta(W)) \geq 2$ est vérifiée par x . Sinon $(\delta(S), e_0)$ est une coupe-Steiner-gauche dans G par rapport à S , et par (1.4), on a $x(\delta(W)) \geq 2x(e_0)$. Comme $x(e_0) = 1$, $x(\delta(W)) \geq 2$ est alors satisfaite par x .

De plus, le système de contraintes de $P(G, S)$ satisfait par x avec égalité est le même que celui de $P(G, S')$. Ceci implique que x est un point extrême de $P(G, S')$. Puisque $|S'| > |S|$, cela contredit la maximalité de S . $\square$

Maintenant nous nous tournons vers le point crucial de la démonstration. Etant donnée une solution y de $P(G, S)$, on note par $\tau(y)$ l'ensemble des inégalités de $P(G, S)$ serrées par y .

Proposition 1.12. $\Gamma(\overline{S})$ ne contient pas d'arêtes multiples.

Preuve. Supposons que la proposition n'est pas vraie et que $\Gamma(\overline{S})$ contient deux arêtes multiples f et g . Par le Lemme 1.11, $x(f)$ et $x(g)$ ont des valeurs fractionnaires. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x(f) \geq x(g)$.

Pour montrer la proposition, nous allons identifier dans un premier temps les inégalités du système (1.6) dans lesquelles au moins une des variables $x(f)$ et $x(g)$ peut avoir un coefficient non nul. Il y en a six types. Dans un deuxième temps, nous montrerons que certaines de ces inégalités ne peuvent pas appartenir à (1.6). Ceci est donné par les Lemmes 1.13 et 1.14. Finalement nous montrerons que les seules contraintes du système (1.6) dont le support intersecte $\{f, g\}$ sont celles où chacune des variables $x(f)$ et $x(g)$ a un coefficient non nul, égal à 1 ou -1. Une contradiction avec le fait que x soit un point extrême est obtenue en construisant une solution x' , $x' \neq x$, qui satisfait le système (1.6).

Les équations du système (1.6) où $x(f)$ ou $x(g)$ peuvent avoir des coefficients non nuls peuvent avoir les formes suivantes :

$$x(f) + x(g) + \sum x(e) = 2, \quad (1.16)$$

$$x(f) + x(g) + \sum x(e) - 2x(e') = 0, \quad (1.17)$$

$$-x(f) + x(g) + \sum x(e) = 0, \quad (1.18)$$

$$x(f) - x(g) + \sum x(e) = 0, \quad (1.19)$$

$$-2x(f) + \sum x(e) = 0, \quad (1.20)$$

$$-2x(g) + \sum x(e) = 0. \quad (1.21)$$

Les équations (1.16) proviennent des coupes-Steiner contenant f et g . Et les équations (1.17)-(1.21) proviennent des coupes-Steiner-gauche contenant soit f soit g soit les deux. Dans la suite nous montrerons que, seules les équations de types (1.16)-(1.19) peuvent être dans le système (1.6).

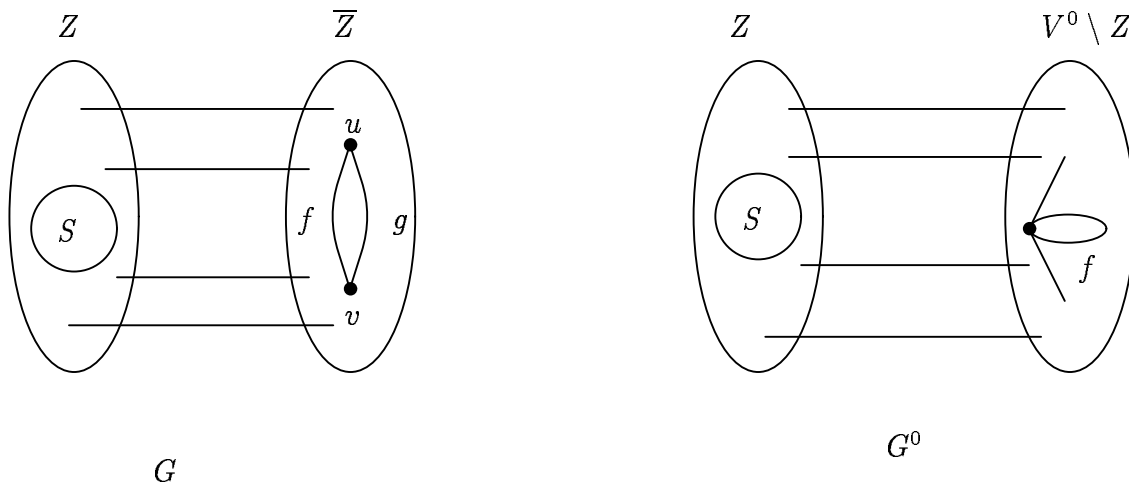


Figure 1.1 :

Lemme 1.13. *Le système (1.6) ne peut pas contenir des équations de types (1.20) et (1.21).*

Preuve. Supposons le contraire. Puisque $x(f) \geq x(g)$, on peut supposer que le système (1.6) contient une équation de type (1.20). Soit $(\delta(Z), f)$ la coupe-Steiner-gauche correspondant à cette équation. Donc $f, g \in E(\overline{Z})$. Soit $G^0 = (V^0, E^0)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant g (remarquons que f se transforme en une boucle dans G^0 , voir Figure 1.1).

- (1) Soit x^0 la restriction de x à G^0 . Par la Remarque 1.7, x^0 est une solution de $P(G^0, S)$. De plus, x^0 satisfait l'équation (1.20). Puisque $|E^0| < |E|$, par

l'hypothèse de récurrence, $P(G^0, S)$ est entier, et donc il doit exister une solution entière y^0 de $P(G^0, S)$ telle que toute contrainte de $P(G^0, S)$ serrée par x^0 est aussi serrée par y^0 . Donc,

$$\tau(x^0) \subseteq \tau(y^0). \quad (1.22)$$

Par ailleurs, comme $0 < x^0(f) < 1$, y^0 peut être choisi de telle manière que $y^0(f) = 0$. Par conséquent, puisque $(\delta(Z), f)$ est serrée par x^0 , il découle que $y^0(\delta(Z)) = 0$. Par les contraintes (1.4), ceci implique que

$$y^0(e) = 0 \quad \forall e \notin E(Z). \quad (1.23)$$

Soit $x^* \in \mathbb{R}^E$ la solution telle que

$$x^*(e) = \begin{cases} y^0(e) & \text{si } e \in E(Z), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons montrer que

$$\tau(x) \subseteq \tau(x^*). \quad (1.24)$$

Il suffit de considérer seulement les inégalités serrées par x et appartenant au système (1.6).

- (2) Puisque $(\delta(Z), f)$ est serrée par x et $0 < x(f) < 1$, par les contraintes (1.4), les arêtes telles que $x(e) = 1$ sont toutes dans $E(Z)$. De plus pour une telle arête e , on a par (1.22), $x^*(e) = y^0(e) = x^0(e) = 1$. Puisque $x(e) > 0 \quad \forall e \in E$, (1.24) est vérifiée pour les inégalités triviales.
- (3) Examinons maintenant les inégalités de coupes-Steiner. Soit $\delta(W)$ une coupe-Steiner serrée par x .
 - Si $W \subseteq Z$, alors $\delta(W)$ est aussi serrée par x^0 . Par (1.22), $\delta(W)$ est alors serrée par y^0 et donc par x^* .

- Si $W \not\subseteq Z$, $W \cap Z \neq \emptyset$, alors $W \setminus Z \neq \emptyset$ et donc par le Lemme 1.4 ii), les deux arêtes f, g n'appartiennent pas à $\Gamma(\overline{Z \cup W})$. D'où $f, g \in E(W \setminus Z)$ et par le Lemme 1.3 ii), $\delta(Z \setminus W)$ est une coupe-Steiner serrée par x et donc par x^0 . D'après (1.22), $\delta(Z \setminus W)$ est aussi serrée par y^0 . Par (1.23), on a donc $x^*(\delta(W)) = y^0(\delta(W)) = y^0(\delta(Z \setminus W)) = 2$ et par conséquent $\delta(W)$ est serrée par x^* .

(4) Maintenant, considérons une coupe-Steiner-gauche $(\delta(U), e)$ serrée par x .

- Si $Z \subseteq U$, alors par (1.23) nous avons $x^*(\delta(U)) - 2x^*(e) = y^0(\delta(U)) - 2y^0(e) = 0$.
- Si $U \subseteq Z$ et $e \in E \setminus \{g\}$, alors $(\delta(U), e)$ est serrée par x^0 et d'après (1.22), $(\delta(U), e)$ est aussi serrée par y^0 . D'où $x^*(\delta(U)) - 2x^*(e) = y^0(\delta(U)) - 2y^0(e) = 0$.
- Si $U \subseteq Z$ et $e = g$, puisque $f \notin E(U)$, $e \notin E(Z)$ et $x(f) \geq x(g)$, il en résulte que $(\delta(U), f)$ est une coupe-Steiner-gauche serrée par x . Et de là on obtient $0 = x(\delta(U)) - 2x(f) = x^0(\delta(U)) - 2x^0(f) = y^0(\delta(U)) - 2y^0(f) = x^*(\delta(U)) - 2x^*(e)$.

Et donc la contrainte associée à $(\delta(U), e)$ est aussi serrée par x^* .

- Si $U \not\subseteq Z$, $Z \not\subseteq U$, $Z \cap U \neq \emptyset$, alors soient $Z_1 = Z \cap U$, $Z_2 = Z \setminus U$, $Z_3 = U \setminus Z$, $Z_4 = \overline{Z \cup U}$.

Si $Z_4 = \emptyset$, comme $f, g \in E(\overline{Z})$, il s'en suit que $f, g \in E(Z_3)$, et donc $(\delta(U), e)$ est aussi serrée par x^0 . Par (1.22), $(\delta(U), e)$ est serrée par y^0 et donc par x^* .

Supposons maintenant que $Z_4 \neq \emptyset$. Nous considérons deux cas.

(a) $e \neq g$.

- (a.1) Si $f, g \in E(Z_4)$ alors $(\delta(U), e)$ est serrée par x^0 et, par (1.22), elle est aussi serrée par y^0 . Ceci implique que $(\delta(U), e)$ est aussi serrée par x^* .
- (a.2) Si $f, g \notin E(Z_4)$ alors $f, g \in E(Z_3) \cup (Z_3, Z_4)$. Par le Lemme 1.4 iii), $e \notin \Gamma(Z_2)$, ce qui implique que $e \in E(Z_4) \cup (U, Z_4)$. Par le Lemme 1.3 iii), $(\delta(Z_1), f)$ est une coupe-Steiner-gauche serrée par x et donc par x^0 . Ceci implique, par (1.22), que $(\delta(Z_1), f)$ est serrée par y^0 . Puisque par (1.23), $y^0(\delta(Z_1)) = y^0(\delta(U))$ et $y^0(e) = y^0(f) = 0$, il en résulte que $(\delta(U), e)$ est serrée par y^0 et donc par x^* .

(b) $e = g$.

Alors $e \in E(Z_4) \cup (Z_3, Z_4)$. Puisque dans ce cas $(\delta(Z), e)$ et $(\delta(U), f)$ sont deux coupes-Steiner-gauche, par le Lemme 1.5, $(\delta(Z), e)$ et $(\delta(U), f)$ sont toutes les deux serrées par x .

- Si $f, g \in E(Z_4)$ alors $(\delta(U), f)$ est serrée par x^0 et par (1.22) elle est aussi serrée par y^0 . Puisque $y^0(f) = 0$, il en découle que $y^0(\delta(U)) = 0 = x^*(\delta(U))$. Comme $x^*(e) = 0$, $(\delta(U), e)$ est alors serrée par x^* .
- Si $f, g \notin E(Z_4)$ alors $f, g \in (Z_3, Z_4)$. De la même manière que dans le cas (a.2) nous montrons que $(\delta(U), e)$ est serrée par x^* .

Par conséquent, $\tau(x) \subseteq \tau(x^*)$. Puisque $x \neq x^*$, ceci est une contradiction, ce qui complète la preuve de notre lemme (remarquons qu'il n'est pas nécessaire que x^* soit une solution de $P(G, S)$). $\square$

Lemme 1.14. *Le système (1.6) ne peut pas contenir une équation de type (1.16)-(1.17) et une équation de type (1.18)-(1.19), en même temps.*

Preuve. Supposons que ceci n'est pas vrai. Puisque $x(f) \geq x(g)$, on peut supposer que le système (1.6) contient une équation de type (1.18). Soit $(\delta(Z), f)$ la coupe-Steiner-gauche correspondant à cette contrainte.

Cas 1. $|\overline{Z}| > 1$.

Puisque $(\delta(Z), f)$ est serrée par x , par les Lemmes 1.6 et 1.8, le graphe $G(\overline{Z})$ est connexe. Soit $G^1 = (V^1, E^1)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant $\overline{Z}$. Alors G^1 est série-parallèle. Soit x^1 la restriction de x à G^1 . Par la Remarque 1.7, x^1 est une solution de $P(G^1, S)$. Puisque G^1 a moins d'arêtes que G , par l'hypothèse de récurrence, $P(G^1, S)$ est entier. Et comme conséquence, il doit exister une solution entière y^1 de $P(G^1, S)$ telle que toute contrainte de $P(G^1, S)$ serrée par x^1 est aussi serrée par y^1 . Puisque $0 < x^1(f) < 1$, y^1 peut être choisi de manière que $y^1(f) = 0$. Ceci implique que $y^1(e) = 0$ pour toute arête $e \in \Gamma(\overline{Z})$. Soit $x^* \in \mathbb{R}^E$ la solution définie par:

$$x^*(e) = \begin{cases} y^1(e) & \text{si } e \in E(Z), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En utilisant les mêmes idées que celles développées pour la preuve du Lemme 1.13 ((2)-(4)), nous obtenons : $\tau(x) \subseteq \tau(x^*)$. Puisque $x \neq x^*$, on a alors une contradiction.

Cas 2. $|\overline{Z}| = 1$.

Nous distinguons deux cas.

Cas 2.1. Le système (1.6) contient une équation de type (1.16) et une équation de type (1.18).

Soit $\delta(W)$ la coupe-Steiner induisant l'équation (1.16). Donc $f, g \in \delta(W) \cap \delta(Z)$. Aussi puisque $S \subseteq Z$, $S \cap W \neq \emptyset$ et $S \cap \overline{W} \neq \emptyset$, nous avons $(Z \setminus W) \cap S \neq \emptyset$ et $(Z \cap W) \cap S \neq \emptyset$. Donc $\delta(Z \setminus W)$ et $\delta(Z \cap W)$ sont toutes les deux des coupes-Steiner dans G .

- Si $W \subset Z$, alors $f, g \in (W, \overline{Z})$. (Voir Figure 1.2). Nous avons

$$\begin{aligned} 2x(f) + 2x(g) &\leq 2x(W, \overline{Z}) = x(\delta(W)) + x(\delta(Z)) - x(\delta(Z \setminus W)) \\ &\leq 2 + 2x(f) - 2 = 2x(f). \end{aligned}$$

Il en découle que $x(g) = 0$, ce qui contredit le Lemme 1.8.

- Si $W \not\subset Z$, alors $Z \cup W = V$. Par conséquent, nous avons $f, g \in (W \setminus Z, Z \setminus W)$. Puisque $\delta(W)$ et $(\delta(Z), f)$ sont serrées par x et $\delta(Z \cap W)$ est une coupe-Steiner, nous avons alors

$$\begin{aligned} 2 + 2x(f) &= x(\delta(W)) + x(\delta(Z)) \\ &= x(\delta(Z \cap W)) + 2x(f) + 2x((Z \setminus W, W \setminus Z) \setminus \{f\}) \\ &\geq 2 + 2x(f) + 2x((Z \setminus W, W \setminus Z) \setminus \{f\}). \end{aligned}$$

d'où

$$x((Z \setminus W, W \setminus Z) \setminus \{f\}) = 0.$$

Ce qui implique que $x(g) = 0$, contradiction.

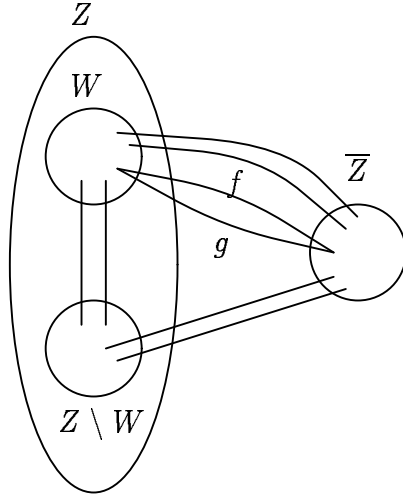


Figure 1.2 :

Cas 2.2. Le système (1.6) contient une équation de type (1.17) et une équation de type (1.18).

Soit $(\delta(Z'), e')$ la coupe-Steiner-gauche induisant (1.17). Donc $Z \setminus Z' \neq \emptyset$ (autrement nous aurions $|\overline{Z}| > 1$, ce qui contredit notre hypothèse).

Cas 2.2.1. $Z' \subset Z$.

Puisque $f, g \in \delta(Z) \cap \delta(Z')$, il en découle que $f, g \in (Z', \overline{Z})$. (Voir Figure 1.3). Et comme $(\delta(Z), f)$ et $(\delta(Z'), e')$ sont serrées par x , nous avons

$$\begin{aligned} 2x(f) + 2x(e') &= x(\delta(Z)) + x(\delta(Z')) = 2x(Z', \overline{Z}) + x(\delta(Z \setminus Z')) \\ &> 2x(f) + x(\delta(Z \setminus Z')). \end{aligned}$$

Ceci implique que $e' \notin \Gamma(Z \setminus Z')$. Sinon, $(\delta(\overline{Z \setminus Z'}), e')$ serait une coupe-Steiner-gauche violée par x , contradiction. Par conséquent, $e' \in (Z', \overline{Z})$.

Donc $(\delta(Z'), f)$ et $(\delta(Z), e')$ sont toutes deux des coupes-Steiner-gauche dans G . Par le Lemme 1.5, il en résulte que $(\delta(Z'), f)$ et $(\delta(Z), e')$ sont serrées par x . Maintenant, en considérant Z' à la place de Z , le Cas 1 s'applique.

Cas 2.2.2. $Z' \not\subset Z$.

Alors $f, g \in (Z \setminus Z', \overline{Z})$ et $e' \in \Gamma(Z \setminus Z')$. De plus $(\delta(Z \cap Z'), e')$ est une coupe-Steiner-

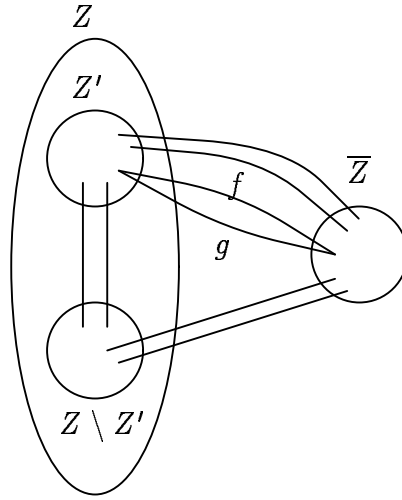


Figure 1.3 :

gauche. Nous avons

$$\begin{aligned} 2x(f) + 2x(g) &\leq 2x(Z \setminus Z', \overline{Z}) = x(\delta(Z)) + x(\delta(Z')) - x(\delta(Z \cap Z')) \\ &\leq 2x(f) + 2x(e') - 2x(e') = 2x(f). \end{aligned}$$

D'où $x(g) = 0$, contradiction. Ce qui complète la preuve du Lemme 1.14. $\square$

Maintenant à partir des Lemmes 1.13 et 1.14, on obtient que les équations du système (1.6) ayant des coefficients non nuls pour $x(f)$ et $x(g)$ sont soit de type (1.16) et (1.17), soit de type (1.18) et (1.19). Si ces équations sont de type (1.16) et (1.17) (resp. (1.18) et (1.19)), alors considérons la solution $\bar{x} \in \mathbb{R}^E$ définie comme suit :

$$\bar{x}(e) = \begin{cases} x(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f, g\}, \\ x(e) + \varepsilon & \text{si } e = f, \\ x(e) - \varepsilon & \text{si } e = g, \end{cases}$$

resp.

$$\bar{x}(e) = \begin{cases} x(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f, g\}, \\ x(e) + \varepsilon & \text{si } e = f, \\ x(e) + \varepsilon & \text{si } e = g, \end{cases}$$

pour $\varepsilon > 0$, suffisamment petit.

Il est clair que $\bar{x} \in P(G, S)$. De plus, toute contrainte serrée par x est aussi serrée par $\bar{x}$. Puisque $x \neq \bar{x}$, ceci contredit le fait que x est un point extrême de $P(G, S)$, ce qui achève la preuve de notre proposition. $\square$

Lemme 1.15. *$G(S)$ ne contient pas deux arêtes multiples f, g telles que $x(f) = 1$ et $0 < x(g) < 1$.*

Preuve. Supposons le contraire. Soient u et v les extrémités de f et g . Puisque $x(g)$ est fractionnaire, il est simple de voir qu'il existe une coupe-Steiner $\delta(W_1)$, $W_1 \subset V$, serrée par x et contenant g (et f). De plus $\delta(W_1)$ peut être supposée parmi les coupes du système (1.6). Par le Lemme 1.6, $G(W_1)$ et $G(\overline{W}_1)$ doivent être connexes. Nous distinguons deux cas

Cas 1. $|W_1| \geq 2$, $|\overline{W}_1| \geq 2$.

Soient G^1 et G^2 les graphes obtenus à partir de G en contractant W_1 et $\overline{W}_1$, respectivement. Puisque $G(W_1)$ et $G(\overline{W}_1)$ sont connexes, les graphes G^1 et G^2 sont série-parallèles. Soient $S^1 = (S \cap \overline{W}_1) \cup \{s_1\}$ et $S^2 = (S \cap W_1) \cup \{s_2\}$ où s_1 et s_2 sont les sommets résultant des contractions de W_1 et $\overline{W}_1$, respectivement. Puisque G^1 et G^2 ont moins d'arêtes que G , par notre hypothèse de récurrence, $P(G^1, S^1)$ et $P(G^2, S^2)$ sont tous les deux des polyèdres entiers. Soient x^1 et x^2 les restrictions de x à G^1 et G^2 , respectivement. Par la Remarque 1.7, x^1 et x^2 sont des solutions de $P(G^1, S^1)$ et $P(G^2, S^2)$, respectivement. En conséquence il existe deux solutions entières y^1 et y^2 de $P(G^1, S^1)$ et $P(G^2, S^2)$, respectivement, telles que toute contrainte de $P(G^1, S^1)$ (resp. $P(G^2, S^2)$) qui est serrée par x^1 (resp. x^2) est aussi serrée par y^1 (resp. y^2). Donc,

$$\tau(x^1) \subseteq \tau(y^1) \tag{1.25}$$

$$\tau(x^2) \subseteq \tau(y^2) \quad (1.26)$$

Puisque $0 < x^1(g) = x^2(g) = x(g) < 1$, $y^1(g)$ et $y^2(g)$ peuvent être choisis de telle manière que $y^1(g) = y^2(g) = 1$. Et comme $\delta(W_1)$ est serrée par x^1 et x^2 , et $y^1(f) = y^2(f) = 1$, par (1.25) et (1.26) on a $y^1(\delta(W_1) \setminus \{f, g\}) = y^2(\delta(W_1) \setminus \{f, g\}) = 0$. Maintenant, considérons la solution $x^* \in \mathbb{R}^{m+1}$ donnée par

$$x^*(e) = \begin{cases} y^1(e) & \text{si } e \in E(\overline{W}_1), \\ y^2(e) & \text{si } e \in E(W_1), \\ 1 & \text{si } e \in \{f, g\}, \\ 0 & \text{si } e \in \delta(W_1). \end{cases}$$

Dans ce qui suit nous allons montrer que $\tau(x) \subseteq \tau(x^*)$. Puisque $x \neq x^*$, nous avons donc une contradiction.

Soit $e \in E$ telle que $x(e) = 1$. Alors $e = f$ ou e appartient soit à $E(W_1)$, soit à $E(\overline{W}_1)$. Si $e \in E(W_1)$ (resp. $e \in E(\overline{W}_1)$) alors par (1.26) (resp. (1.25)), $x^*(e) = y^2(e) = x^2(e) = 1$ (resp. $x^*(e) = y^1(e) = x^1(e) = 1$). Par le Lemme 1.8 on obtient que toute inégalité de type (1.1) ou (1.2) serrée par x est aussi serrée par x^* .

Considérons maintenant une coupe-Steiner $\delta(W)$ serrée par x . $\delta(W)$ peut être supposée parmi les coupes du système (1.6).

- (a) Si $W \subseteq W_1$ alors $x(\delta(W)) = x^2(\delta(W)) = 2$ et par (1.26), $y^2(\delta(W)) = 2$. Puisque $x^*(\delta(W)) = y^2(\delta(W))$, nous obtenons que $\delta(W)$ est serrée par x^* .
- (b) Si $W \subseteq \overline{W}_1$, de la même façon nous obtenons que $\delta(W)$ est serrée par x^* .
- (c) Si $W \not\subseteq W_1$, $W_1 \not\subseteq W$ et $W \cap W_1 \neq \emptyset$, par le Lemme 1.4 i) au moins un des ensembles $(W \setminus W_1) \cap S$ et $(W_1 \setminus W) \cap S$ doit être vide. Puisque $\delta(W)$ et $\delta(W_1)$ sont des coupes-Steiner, il en découle que $W_1 \cap W \cap S \neq \emptyset$ et $\overline{W}_1 \cup \overline{W} \cap S \neq \emptyset$. En conséquence, par le Lemme 1.3 i), $\delta(W_1 \cap W)$ et $\delta(\overline{W}_1 \cup \overline{W})$ sont toutes les deux des coupes-Steiner serrées par x et $x(W_1 \setminus W, W \setminus W_1) = 0$. Par le Lemme 1.8, ceci implique que $(W_1 \setminus W, W \setminus W_1) = \emptyset$. Par ailleurs, puisque $W_1 \cap W \subset W_1$, et $\overline{W}_1 \cup \overline{W} \subset \overline{W}_1$, à partir des Cas (a) et (b), il en résulte que $\delta(W_1 \cap W)$ et

$\delta(\overline{W_1 \cup W})$ sont serrées par x^* . D'où

$$x^*(\delta(W)) = x^*(\delta(W_1 \cap W)) + x^*(\delta(\overline{W_1 \cup W})) - x^*(\delta(W_1)) = 2 + 2 - 2 = 2.$$

Et la contrainte $x(\delta(W)) \geq 2$ est serrée par x^* .

Maintenant On considère une coupe-Steiner-gauche $(\delta(Z), e)$ serrée par x . $(\delta(Z), e)$ peut être supposée parmi les coupes du système (1.6).

- Si $W_1 \subset Z$, alors $(\delta(Z), e)$ est serrée par x^1 . Par (1.25), $(\delta(Z), e)$ est aussi serrée par y^1 . Par conséquent, $x^*(\delta(Z)) - 2x^*(e) = y^1(\delta(Z)) - 2y^1(e) = 0$.
- Si $W_1 \not\subset Z$ alors puisque $W_1 \setminus Z \neq \emptyset$, par le Lemme 1.4 ii) on a, $e \notin \Gamma(\overline{W_1 \cup Z})$. Comme $e \in \Gamma(\overline{Z})$, alors $e \in (\Gamma(W_1 \setminus Z) \setminus (W_1 \setminus Z, \overline{W_1 \cup Z}))$. Donc par le Lemme 1.3 ii), il en résulte que $\delta(Z \setminus W_1)$ et $(\delta(\overline{W_1 \setminus Z}), e)$ sont respectivement une coupe-Steiner et une coupe-Steiner-gauche serrée par x , et $x(W_1 \cap Z, \overline{W_1 \cup Z}) = 0$. D'après le Lemme 1.8, on déduit que $(W_1 \cap Z, \overline{W_1 \cup Z}) = \emptyset$. Puisque $\delta(Z \setminus W_1)$ est une coupe-Steiner et $Z \setminus W_1 \subset \overline{W_1}$, d'après le Cas (b) il s'en suit que $\delta(Z \setminus W_1)$ est serrée par x^* . De plus, comme $\overline{W_1} \subset \overline{W_1 \setminus Z}$, $(\delta(\overline{W_1 \setminus Z}), e)$ est serrée par x^2 . Par (1.25), $(\delta(\overline{W_1 \setminus Z}), e)$ est aussi serrée par y^2 . D'où

$$x^*(\delta(\overline{W_1 \setminus Z})) - 2x^*(e) = y^2(\delta(\overline{W_1 \setminus Z})) - 2y^2(e) = 0.$$

Ainsi

$$x^*(\delta(Z)) = x^*(\delta(Z \setminus W_1)) + x^*(\delta(\overline{W_1 \setminus Z})) - x^*(\delta(W_1)) = 2 + 2x^*(e) - 2 = 2x^*(e).$$

Et par conséquent, la contrainte associée à $(\delta(Z), e)$ est serrée par x^* .

Par conséquent $\tau(x) \subseteq \tau(x^*)$.

Cas 2. $|W_1| = 1$.

Par le Lemme 1.9, il doit exister une autre coupe-Steiner $\delta(W_2)$ serrée par x et contenant g (et f). Si $|W_2| \geq 2$ et $|\overline{W_2}| \geq 2$ alors le Cas 1 s'applique. Supposons alors que $|W_2| = 1$. Donc on peut supposer que $W_1 = \{u\}$ et $W_2 = \{v\}$. (Voir Figure 1.4). Puisque $\delta(W_1)$ et $\delta(W_2)$ sont serrées par x , nous avons

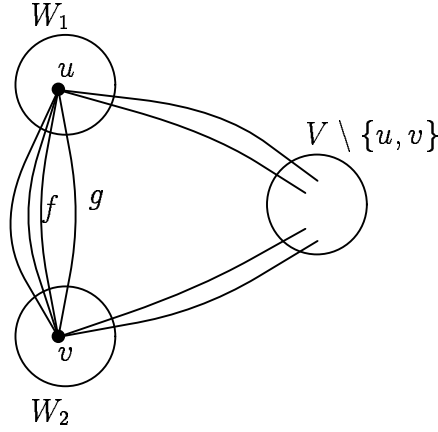


Figure 1.4 :

$$x(\delta(V \setminus \{u, v\})) = x(\delta(W_1)) + x(\delta(W_2)) - 2x(W_1, W_2) < 2 + 2 - 2 = 2.$$

Ceci implique que $(V \setminus \{u, v\}) \cap S = \emptyset$. Sinon $\delta(V \setminus \{u, v\})$ serait une coupe-Steiner violée par x , contradiction. Puisque G est 2-arête-connexe et ne contenant pas de sommets de degré 2, par le Lemme 1.1 i), il existe au moins deux autres arêtes multiples dans $\Gamma(\overline{S})$. Mais ceci contredit la proposition 1.12. $\square$

Lemme 1.16. $G(S)$ ne peut pas contenir deux arêtes multiples f et g telles que $x(f) = x(g) = 1$.

Preuve. Supposons le contraire. Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en contractant les arêtes f et g . Il est clair que G' est série-parallèle. Soit $S' = (S \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$, où u et v sont les extrémités de f et g et w est le sommet résultant de cette contraction. Soit $x' \in \mathbb{R}^{m-1}$ la solution donnée par $x' = x(e)$ pour toute arête $e \in E \setminus \{f, g\}$. Il est évident que x' est une solution de $P(G', S')$. De plus, x' est un point extrême de $P(G', S')$. En effet, si ce n'est pas le cas, il doit exister deux solutions y^1 et y^2 , $y^1 \neq y^2$, de $P(G', S')$ telles que $x' = \frac{1}{2}(y^1 + y^2)$. Maintenant soient les solutions $y^{1'}, y^{2'} \in \mathbb{R}^{m+1}$ données par

$$y^{1'}(e) = \begin{cases} y^1(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f, g\}, \\ 1 & \text{si } e \in \{f, g\}, \end{cases}$$

et

$$y^{2'}(e) = \begin{cases} y^2(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f, g\}, \\ 1 & \text{si } e \in \{f, g\}. \end{cases}$$

Il est clair que $y^{1'}$ et $y^{2'}$ appartiennent à $P(G, S)$. Aussi nous avons $x = \frac{1}{2}(y^{1'} + y^{2'})$, contradiction. Par conséquent, x' est un point extrême de $P(G', S')$. Puisque x' est fractionnaire et $|E'| < |E|$, ceci contredit l'hypothèse de récurrence. $\square$

Par les Lemmes 1.10, 1.15, 1.16 et la Proposition 1.12 on déduit que G ne peut contenir ni des sommets de degré 2, ni des arêtes multiples. Puisque G est série-parallèle, ceci contredit le Lemme 1.1 i), ce qui termine la preuve de notre théorème.

1.3 Le polytope STESNP(G, S) dans les graphes série-parallèles

Dans ce paragraphe, on considère le polytope STESNP(G, S). Nous allons montrer que si le graphe $G = (V, E)$ est série-parallèle alors le polytope STESNP(G, S) est complètement décrit par les contraintes triviales et de coupes-Steiner.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble de terminaux $S \subset V$, on note par $Q(G, S)$ le polytope défini par les inégalités (1.1), (1.2) et (1.3). Nous supposons que $|S| \geq 2$. (Si $|S| = 1$, alors la solution optimale du problème STESNP est formée par les arêtes de poids négatif).

Théorème 1.17. *Si $G=(V, E)$ est série-parallèle, alors $STESNP(G, S) = Q(G, S)$.*

Preuve. La preuve de ce théorème utilise les mêmes techniques que celles utilisées pour démontrer le Théorème 1.2. Dans ce qui suit, nous démontrons seulement les points spécifiques au polytope STESNP(G, S). Comme pour le Théorème 1.2, nous procédons par récurrence sur le nombre d'arêtes de G . Supposons que le théorème est vrai pour tout graphe ayant au plus m arêtes et supposons que G contient $m+1$ arêtes. Sans perte de généralité, on peut également supposer que G est 2-arête-connexe. (Il

n'est pas difficile de voir que si le théorème est vrai dans ce cas, alors il est vrai pour tout graphe série-parallèle). Supposons que $\text{STESNP}(G, S) \neq Q(G, S)$. Donc il existe un point fractionnaire x de $Q(G, S)$. Et par la minimalité de G , on a

$$x(e) > 0 \text{ pour toute arête } e \in E. \quad (1.27)$$

Lemme 1.18. *G ne contient pas de sommets de degré deux.*

Preuve. Supposons que G contient un sommet v où $\delta(v) = \{e_1, e_2\}$. Nous supposons que e_1 and e_2 ne sont pas des arêtes multiples, (le cas où le graphe contient d'arêtes multiples sera considéré plus tard). Si $x(e_1) = x(e_2)$, la preuve est similaire à celle du Lemma 1.10. Donc considérons le cas $x(e_1) \neq x(e_2)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x(e_1) > x(e_2)$. En conséquence, e_1 n'appartient à aucune coupe-Steiner serrée par x . En effet, pour montrer cela on peut noter tout d'abord que v n'appartient pas à S . Car sinon, $\delta(v)$ serait une coupe-Steiner violée par x , ce qui est impossible. Maintenant supposons que $\delta(W)$ est une coupe-Steiner serrée par x contenant e_1 . On peut supposer sans perte de généralité que $v \in W$. Alors $\delta(W')$ où $W' = W \setminus \{v\}$ serait une coupe-Steiner violée par x , contradiction. Donc, on a $x(e_1) = 1$. Car sinon la solution $x' \in R^E$ donnée par $x'(e) = x(e)$ si $e \neq e_1$ et $x'(e) = x(e_1) + \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$ est un scalaire suffisamment petit, serait une solution qui vérifierait le même système définissant x , ce qui est impossible. Soit $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ le graphe obtenu à partir de G en contractant $e_1 = vw$. Soit $\tilde{S} = S \setminus \{v, w\} \cup \{\tilde{v}\}$ si $w \in S$ et $\tilde{S} = S$ sinon, où $\tilde{v}$ est le sommet qui résulte de la contraction de e_1 . Il est évident que $\tilde{G}$ est série-parallèle. Soit $\tilde{x}$ la restriction de x dans $\tilde{G}$. Par la Remarque 1.7 nous avons $\tilde{x} \in Q(\tilde{G}, \tilde{S})$. Puisque $|\tilde{E}| < |E|$, par l'hypothèse de récurrence, $Q(\tilde{G}, \tilde{S})$ est un polyèdre entier. Et donc il existe une solution entière $\tilde{y}$ de $Q(\tilde{G}, \tilde{S})$ telle que toute contrainte de $Q(\tilde{G}, \tilde{S})$ serrée par $\tilde{x}$ est également serrée par $\tilde{y}$. Comme $0 < \tilde{x}(e_2) < 1$, $\tilde{y}$ peut être choisi de telle manière que $\tilde{y}(e_2) = 1$. Soit $\bar{x}$ la solution de R^E donnée par

$$\bar{x}(e) = \begin{cases} \tilde{y}(e) & \text{si } e \in E \setminus \{e_1\}, \\ 1 & \text{si } e = e_1. \end{cases}$$

Il est clair que, $\bar{x}$ est une solution de $Q(G, S)$. De plus, toute contrainte de $Q(G, S)$ serrée par x l'est aussi par $\bar{x}$. Puisque $x \neq \bar{x}$, ceci est une contradiction et le lemme est prouvé. $\square$

Puisque G est série-parallèle et 2-arête-connexe, d'après les Lemmes 1.1 *i*) et 1.18, G doit contenir des arêtes multiples. On peut montrer de la même manière que dans le Lemme 1.16, que

Lemme 1.19. *G ne peut pas contenir deux arêtes multiples f et g telles que $x(f) = x(g) = 1$.*

Ce lemme implique qu'entre deux sommets quelconques de G il existe au plus deux arêtes multiples. En effet, si entre deux sommets donnés il existe trois arêtes multiples ou plus, alors au moins deux de ces arêtes ont des valeurs entières, contradiction. Puisque G est 2-arête-connexe, d'après le Lemme 1.1 *ii*), il existe un sommet $v_0 \in V$ qui est adjacent à exactement deux sommets de V . Soient w_1 et w_2 ces deux sommets. D'après les Lemmes 1.18 et 1.19 on peut supposer qu'entre v_0 et, disons w_1 il existe deux arêtes multiples f et g . Et par la remarque ci-dessus, ces arêtes sont les seules arêtes entre v_0 et w_1 . Sans perte de généralité, on suppose que $x(f) \geq x(g)$. Puisque toute coupe de G , contient soit les deux arêtes f et g soit aucune de ces arêtes, au plus une des arêtes f et g peut avoir une valeur fractionnaire. Alors par le Lemme 1.19 et l'hypothèse ci-dessus il en résulte que

$$x(f) = 1 \text{ et } 0 < x(g) < 1. \quad (1.28)$$

Cas 1. $v_0 \notin S$.

Puisque $0 < x(g) < 1$, alors il existe au moins une coupe-Steiner $\delta(W)$ contenant g et serrée par x . Sans perte de généralité, on suppose que $v_0 \in W$.

Considérons d'abord le cas où il existe une seule arête entre v_0 et w_2 . Puisque $v_0 \notin S$ et $\delta(W)$ est une coupe-Steiner, alors $\delta(W')$, où $W' = \overline{W} \cup \{v_0\}$, est également un coupe-Steiner de G .

Si $w_2 \in W$ ($\notin W$), alors nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(W)) &= x(\delta(W')) + x(f) + x(g) - x(v_0 w_2) = 2, \\ (x(\delta(W)) &= (x(\delta(W')) + x(\delta(v_0)) = 2). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Comme $x(v_0 w_2) \leq 1$, (1.28) et (1.29) impliquent que $x(\delta(W')) < 2$, ce qui est impossible.

Supposons maintenant qu'il existe exactement deux arêtes multiples f' et g' entre v_0 et w_2 (et exactement deux arêtes multiples f et g entre v_0 et w_1). Comme pour f et g , on peut supposer que exactement une arête parmi f' et g' a une valeur fractionnaire. Soient $x(f') = 1$ et $0 < x(g') < 1$.

Puisque $v_0 \in W$, nous avons $w_2 \in W$, car sinon $\delta(W)$ contient f, g, f', g' et donc elle ne serait pas serrée par x . Si $x(g') < x(g)$, alors $\delta(W')$, où $W' = W \setminus \{v_0\}$, est une coupe-Steiner violée par x , ce qui est impossible. Donc nous avons $x(g') \geq x(g)$. Puisque par symétrie on a $x(g) \geq x(g')$, il s'en suit que

$$x(g') = x(g).$$

Maintenant, soit $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant f et g . Soit $S^* = (S \setminus \{w_1\}) \cup \{v^*\}$ si $w_1 \in S$ et $S^* = S$ sinon, où v^* est le sommet résultant de la contraction. Soit x^* la restriction de x dans E^* . D'après la Remarque 1.7, x^* est une solution de $Q(G^*, S^*)$. De plus, x^* est un point extrême de $Q(G^*, S^*)$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors il existe deux solutions y^1, y^2 , $y^1 \neq y^2$, de $Q(G^*, S^*)$ telles que $x^* = \frac{1}{2}(y^1 + y^2)$. Maintenant soient $\bar{y}^1$ et $\bar{y}^2$ définis comme suit

$$\bar{y}^1(e) = \begin{cases} y^1(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f, g\}, \\ 1 & \text{si } e = f, \\ y^1(g') & \text{si } e = g, \end{cases}$$

et

$$\bar{y}^2(e) = \begin{cases} y^2(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f, g\}, \\ 1 & \text{si } e = f, \\ y^2(g') & \text{si } e = g. \end{cases}$$

Nous allons montrer que les solutions $\bar{y}^1$ et $\bar{y}^2$ appartiennent à $Q(G, S)$. Nous montrons cela pour $\bar{y}^1$, (la preuve pour $\bar{y}^2$ est similaire). Tout d'abord, il est clair que $\bar{y}^1$ vérifie (1.1), (1.2) et les inégalités (1.3) pour lesquelles $\delta(W)$ ne contient pas f et g . Maintenant considérons une coupe-Steiner $\delta(W)$ contenant f et g et supposons, sans perte de généralité, que $v_0 \in W$. Soit $W' = W \setminus \{v_0\}$. Notons que $\delta(W')$ est une coupe-Steiner dans G^* . Nous avons

$$\bar{y}^1(\delta(W)) = y^1(\delta(W')) - y^1(f') - y^1(g') + \bar{y}^1(f) + \bar{y}^1(g).$$

Puisque $\bar{y}^1(f) = y^1(f') = 1$ et $\bar{y}^1(g) = y^1(g')$, il en résulte que

$$\bar{y}^1(\delta(W)) = y^1(\delta(W')) \geq 2.$$

Et donc $\bar{y}^1$ satisfait les inégalités associées à la coupe-Steiner $\delta(W)$.

Par conséquent, $\bar{y}^1$ et $\bar{y}^2 \in Q(G, S)$. De plus, nous avons $x = \frac{1}{2}(\bar{y}^1 + \bar{y}^2)$. Comme $\bar{y}^1 \neq \bar{y}^2$, ceci est une contradiction. Donc x^* est un point extrême de $Q(G^*, S^*)$. Puisque G^* a moins d'arêtes que G et x^* est fractionnaire, ceci contredit l'hypothèse de récurrence.

Cas 2. $v_0 \in S$.

Comme $0 < x(g) < 1$, il existe alors une coupe-Steiner $\delta(W)$ contenant g (et f) et serrée par x . D'après le Lemme 1.6, il en résulte que $G(W)$ et $G(\overline{W})$ sont connexes.

Cas 2.1. $|W| \geq 2$, $|\overline{W}| \geq 2$.

Ce cas est similaire au Cas 1 du Lemme 1.15. Puisque $G(W)$ et $G(\overline{W})$ sont connexes, les graphes $G^1 = (V^1, E^1)$ et $G^2 = (V^2, E^2)$ obtenus à partir de G en contractant W et $\overline{W}$ respectivement, sont série-parallèles. En considérant les restrictions x^1 et x^2 de x dans G^1 et G^2 , on peut construire de la même manière que dans le Cas 1 du Lemme 1.15 une solution x^* qui vérifie à égalités les inégalités serrées par x , contradiction.

Cas 2.2. $|W| = 1$.

D'après le Lemme 1.9, il existe une autre coupe-Steiner $\delta(W')$ contenant g et serrée par x . D'après le Cas 2.1 on peut supposer que $|W'| = 1$. Il en résulte donc, sans perte de généralité, que $W = \{v_0\}$ et $W' = \{w_1\}$. De la même manière que dans le Cas 2 du Lemme 1.15, on peut montrer que $x(\delta(\{v_0, w_1\})) < 2$. Ce qui implique que $(V \setminus \{v_0, w_1\}) \cap S = \emptyset$. Car sinon, $\delta(\{v_0, w_1\})$ serait une coupe-Steiner violée par x ce qui est impossible. Donc $\delta(v_0)$ et $\delta(w_1)$ sont les seules coupes-Steiner de G . Maintenant soit $\bar{x} \in R^E$, la solution définie comme suit

$$\bar{x}(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } x(e) = 1 \text{ ou } e = g, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons $\bar{x} \in Q(G, S)$. De plus, toute inégalité de $Q(G, S)$ serrée par x est également serrée par $\bar{x}$. Puisque $x \neq \bar{x}$, ceci contredit le fait que x est un point extrême de $Q(G, S)$, ce qui achève la preuve de notre théorème. $\square$

1.4 Formulation étendue

Si P est un problème d'optimisation combinatoire et $Ax \leq b$ un système linéaire décrivant l'enveloppe convexe de ses solutions où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$ ($m, n \in \mathbb{N}$), alors P est équivalent à un programme linéaire de la forme

$$(1.30) \begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \end{cases}$$

où $c^T \in \mathbb{R}^n$. Il est parfois pertinent d'ajouter des variables supplémentaires à la formulation (1.30). Ces variables peuvent réduire le nombre de contraintes du système et simplifier la structure de celles-ci. Ainsi on obtient une formulation ayant la forme suivante :

$$(1.31) \begin{cases} \max cx \\ Bx + Dy \leq b \end{cases}$$

où $y \in \mathbb{R}^{n'}$ ($n' \in \mathbb{N}$) est le vecteur des nouvelles variables, $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m \times n'}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Une formulation de P de type (1.31) est appelée *formulation étendue*.

Si une formulation étendue de P sous la forme (1.31) est connue, alors l'enveloppe convexe des solutions de P n'est rien d'autre que la projection du polyèdre $Bx + Dy \leq b$ sur x .

L'objet de ce paragraphe est d'étudier une formulation étendue pour les problèmes STECSP. Mais d'abord nous allons discuter de certains exemples liés au problème de l'arbre de poids minimum, utilisant cette approche.

Un *arbre* d'un graphe $G = (V, E)$, est un sous-graphe (U, F) connexe et sans cycle. Etant donné un graphe $G = (V, E)$, le polytope des arbres couvrant $T(G)$ est l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidences des arbres couvrant de G . Le dominant de $T(G)$ est le polyèdre $P(G) = T(G) + \mathbb{R}_+^E$. Il a été montré dans [75, 61] que $P(G)$ est défini par

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq p - 1, \text{ pour toute partition } V_1, \dots, V_p \text{ de } V$$

$$x \geq 0.$$

Dans [48] Jünger et Pulleyblank ont donné une formulation étendue de $P(G)$ en associant des variables $y(v)$, $v \in V$, aux sommets de G . Ils ont montré que la projection du système, ci-dessous, sur les variables x est $P(G)$. Le sommet r est un élément arbitraire de V .

$$\begin{cases} x(\delta(S)) + y(S) \geq 2, & \text{si } r \notin S, S \subset V, \\ x(\delta(S)) + y(S) \geq 0, & \text{si } r \in S, S \subset V, \\ y(V) = 0, \end{cases}$$

Etant donnés un graphe $G = (V, E)$, un ensemble $S \subset V$, un sommet $r \in V$ appelé racine, une fonction w définie sur E et une fonction φ définie sur V . Un *arbre steiner* est un arbre (U, F) de G tel que $S \subset U$. Un *r -arbre* est un arbre (U, F) de G tel que $r \in U$.

Dans [38], Goemans a considéré les trois problèmes suivants.

Problème 1. *Le problème de l'arbre Steiner:*

Trouver un arbre Steiner (U, F) tel que $w(F)$ soit minimum.

Problème 2. *Le problème de l'arbre Steiner à sommets pondérés:*

Trouver un arbre Steiner (U, F) tel que $w(F) + \varphi(U)$ soit minimum.

Problème 3. *Le problème du r -arbre:*

Trouver un r -arbre (U, F) tel que $w(F) + \varphi(U)$ soit minimum.

Les Problèmes 2 et 3 peuvent être considérés comme formulations étendues pour le Problème 1. Il est clair que, le Problème 1 est un cas particulier du Problème 2, en fixant $\varphi(v) = 0$ pour tout $v \in V$. Aussi, le Problème 2 est un cas particulier du problème 3, en choisissant un sommet $r \in S$ et en posant $\varphi(v) = -M \forall v \in S$ où M est un entier négatif assez grand. Goemans [38] a donné une caractérisation complète du polytope associé au problème du r -arbre quand G est série-parallèle. Comme conséquence, il a obtenu une description du polytope associé au problème de l'arbre Steiner à sommets pondérés dans les graphes série-parallèles. En étudiant la projection de ce dernier polytope sur les variables associées aux arêtes, il a obtenu de larges classes de facette du polytope associé au problème de l'arbre Steiner. Une description complète de ce polytope dans

les graphes série-parallèles demeure cependant, inconnue. Margot, Prodon et Liebling [57] ont considéré le problème de l'arbre de poids minimum, quand des poids sont associés aux sommets et aux arêtes du graphes. Ils ont donné une caractérisation complète du polyèdre associé quand le graphe est un 2-arbre.

Revenons maintenant au problème STECSP. L'approche dont nous allons discuter est similaire à celle utilisée par Jünger et Pulleyblank et par Goemans pour le problème de l'arbre de poids minimum. Considérons un graphe $G = (V, E)$. Soit r un sommet donné dans G . r sera appelé *racine*. Et soit φ un vecteur de poids associé aux sommets de G (les arêtes sont aussi munies d'un système de poids). Considérons le problème : Trouver un sous-graphe 2-arêtes-connexe de G contenant r tel que le poids total des sommets et des arêtes soit minimum. On appellera ce problème, *le problème du sous-graphe r -2-arête-connexe* qu'on notera par r -TECSP. Pour chaque sommet $v \in V$, soit $y(v)$ une variable en 0-1, qui prend 1 si v est pris dans une solution du r -TECSP et 0 sinon. Donc le r -TECSP est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\text{Min } \omega x + \varphi y$$

$$x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E, \quad (1.32)$$

$$y(v) \leq 1 \quad \forall v \in V, \quad (1.33)$$

$$x(\delta(W)) - 2y(v) \geq 0 \quad \forall W \subset V, r \in W, v \notin W, \quad (1.34)$$

$$x(e) - y(v) \leq 0 \quad \forall e = uv \in E, v \neq r, \quad (1.35)$$

$$x(e) \in \{0, 1\} \quad \forall e \in E, \quad (1.36)$$

$$y(v) \in \{0, 1\} \quad \forall v \in V. \quad (1.37)$$

Le STECSP est un cas particulier du r -TECSP, en fixant r dans S et en considérant le vecteur de poids φ sur les sommets donné par

$$\varphi(v) = -M, \text{ si } v \in S,$$

$$\varphi(v) = 0, \text{ si } v \notin S,$$

où M est un entier positif suffisamment grand.

En remplaçant les inégalités (1.34) par les inégalités de coupe-Steiner (1.3), on obtient une formulation étendue du programme linéaire en nombres entiers pour le problème STESNP. Cette formulation sera notée par r -TESNP.

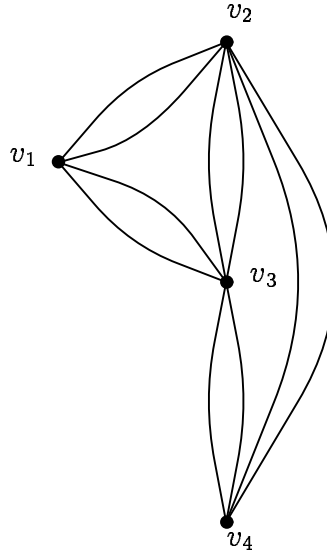


Figure 1.5 :

Etant donné le résultat établi par le Théorème 1.2, une question naturelle se pose : le problème r -TECSP est-il équivalent à sa relaxation linéaire quand le graphe G est série-parallèle? En d'autre terme, le polytope donné par les inégalités (1.32)-(1.35) est-il entier, quand le graphe est série-parallèle. Malheureusement la réponse à cette question est négative comme le montre l'exemple suivant: considérons le graphe série-parallèle $G = (V, E)$ donné par la Figure 1.5. Soit v_1 le sommet représentant la racine r . Soit (x, y) tel que $x(e) = \frac{1}{2}$ pour tout $e \in E$ et $y(v_1) = y(v_4) = 1$ et $y(v_2) = y(v_3) = \frac{1}{2}$. Il est facile de vérifier que (x, y) satisfait les contraintes (1.32)-(1.35). De plus il n'est pas difficile de voir que (x, y) est un point extrême du polytope donné par ces contraintes. Puisque le graphe G est outerplanaire, cela implique que les contraintes (1.32)-(1.35) ne suffisent pas pour décrire le polytope associé à r -TECSP même pour une sous-classe des graphes série-parallèles.

Une question intéressante serait de décrire de nouvelles contraintes valides pour le polytope associé au problème r -TECSP, et donner ainsi une caractérisation complète

de ce polytope quand le graphe est série-parallèle.

Si on pose $S = \{v_1, v_4\}$, la solution (x, y) donnée ci-dessus est aussi un point extrême du polytope défini par les contraintes (1.32), (1.33), (1.35) et (1.3). Ceci implique que même pour le problème r -TESNP, d'autres contraintes sont nécessaires pour une description complète du polytope associé dans les graphes série-parallèles.

Chapitre 2

Polytopes liés au STECSP(G, S)

Dans ce chapitre, nous allons étudier certains polyèdres liés au polytope des sous-graphes Steiner 2-arête-connexes. Dans un premier temps nous étudions le dominant du polytope STECSP(G, S). Nous donnons une description complète de ce polyèdre dans une classe de graphes contenant les graphes série-parallèles. Par la suite, nous discutons du polytope du voyageur de commerce Steiner. En se basant sur les résultats du chapitre précédent, nous donnons une caractérisation complète de ce polytope dans le cas où le graphe est série-parallèle. A notre connaissance, ceci est le premier polytope caractérisé pour ce problème dans une classe de graphes non triviale.

2.1 Le dominant du STECSP(G, S)

Plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire consistent (ou peuvent se ramener) à minimiser une fonction wx avec $w \geq 0$ sur un certain polyèdre. Ceci est le cas par exemple pour le problème du voyageur de commerce. S'il existe des arêtes avec des poids négatifs alors en ajoutant une constante positive assez large au poids de chaque arête, on se ramène à un problème équivalent dont les poids sont tous non négatifs. (Ceci n'est malheureusement pas le cas pour le problème du voyageur de commerce Steiner, du fait que dans ce dernier, les solutions ne comportent pas toutes le même nombre d'arêtes). Aussi, pour plusieurs problèmes dans la pratique on a $w \geq 0$.

Si $w \geq 0$, minimiser la fonction wx sur un polyèdre P est équivalent à minimiser wx sur le dominant de P . Ceci est la motivation principale pour caractériser le dominant

d'un polyèdre donné.

Un graphe $G = (V, E)$ sera dit *parfaitement Steiner 2-arête-connexe* par rapport à un ensemble de terminaux $S \subset V$, si $\text{STECSP}(G, S)$ est complètement décrit par les contraintes (1.1)-(1.4). La classe des graphes parfaitement Steiner 2-arête-connexes contient par exemple la classe des graphes série-parallèles.

Dans ce paragraphe, nous donnons une description complète du dominant du $\text{STECSP}(G, S)$ quand G est parfaitement Steiner 2-arête-connexe. On discutera également d'un polyèdre entier lié à ce dominant. Ce travail a été fait en collaboration avec B. Chaourar.

Etant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble de terminaux $S \subseteq V$, on note par $\text{Dom}(G, S)$ le dominant du $\text{STECSP}(G, S)$.

Considérons les contraintes suivantes

$$x(\delta(W) \setminus \{e\}) \geq 1 \quad \forall W \subset V, (S \cap W) \neq \emptyset \neq (S \cap \overline{W}) \text{ et } e \in \delta(W). \quad (2.1)$$

Remarquons que les contraintes (2.1) sont définies par rapport aux coupes-Steiner de G . Soit

$$D(G, S) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x \text{ satisfasse (1.1), (1.3) et (2.1)}\}.$$

On a le résultat suivant

Théorème 2.1. *Si G est parfaitement Steiner 2-arête-connexe alors $\text{Dom}(G, S) = D(G, S)$.*

Preuve.

1) $\text{Dom}(G, S) \subseteq D(G, S)$:

Soit $y \in \text{Dom}(G, S)$. Alors il existe $x \in \text{STECSP}(G, S)$ tel que $y \geq x$. Il est clair que y vérifie les inégalités (1.1) et (1.3). Soit $\delta(W)$ une coupe qui définit avec $e \in \delta(W)$ une inégalité de type (2.1). On a

$$y(\delta(W) \setminus \{e\}) \geq x(\delta(W) \setminus \{e\}) = x(\delta(W)) - x(e) \geq 1.$$

D'où $y \in D(G, S)$.

2) $D(G, S) \subseteq \text{Dom}(G, S)$:

Soit $\bar{x}$ un point extrême de $D(G, S)$, il suffit de montrer que $\bar{x} \in \text{STECSP}(G, S)$. Nous avons les assertions suivantes:

Assertion 1. $\forall e \in E, \bar{x}(e) \leq 1$.

Preuve. Soit e une arête de E telle que $\bar{x}(e) > 0$. Alors il existe une coupe-Steiner $\delta(W)$ contenant e telle que $\bar{x}(\delta(W)) = 2$ ou $\bar{x}(\delta(W) \setminus \{f\}) = 1$ pour un certain $f \in \delta(W) \setminus \{e\}$. En effet, si ceci n'est pas le cas, on peut considérer la solution $x' \in \mathbb{R}^E$ définie par $x'(e) = \bar{x}(e) - \varepsilon$ et $x'(g) = \bar{x}(g) \forall g \in E \setminus \{e\}$, où ε est un scalaire positif suffisamment petit, qui serait une solution de $D(G, S)$. De plus, toute contrainte serrée par $\bar{x}$ le serait aussi pour x' . Comme $x' \neq \bar{x}$, ceci contredirait le fait que $\bar{x}$ soit un point extrême de $D(G, S)$. Maintenant si $\delta(W)$ est telle que $\bar{x}(\delta(W)) = 2$ (resp. $\bar{x}(\delta(W) \setminus \{f\}) = 1$), On a

$$\begin{aligned} \bar{x}(e) &= 2 - \bar{x}(\delta(W) \setminus \{e\}) \leq 1 \\ (\text{resp. } \bar{x}(e) &\leq \bar{x}(\delta(W) \setminus \{f\}) = 1). \end{aligned}$$

□

Assertion 2. $\bar{x}$ vérifie les contraintes de coupes-Steiner-gauche.

Preuve. Supposons qu'il existe une coupe-Steiner-gauche $(\delta(W), e)$ qui soit violée par $\bar{x}$. Donc $\bar{x}(e) > 0$, et, par conséquent, comme on a vu pour l'Assertion 1, il doit exister une coupe-Steiner $\delta(W')$ contenant e telle que $\bar{x}(\delta(W')) = 2$ ou $\bar{x}(\delta(W') \setminus \{f\}) = 1$, où $f \in \delta(W') \setminus \{e\}$. Supposons que le deuxième cas se produise, alors on a

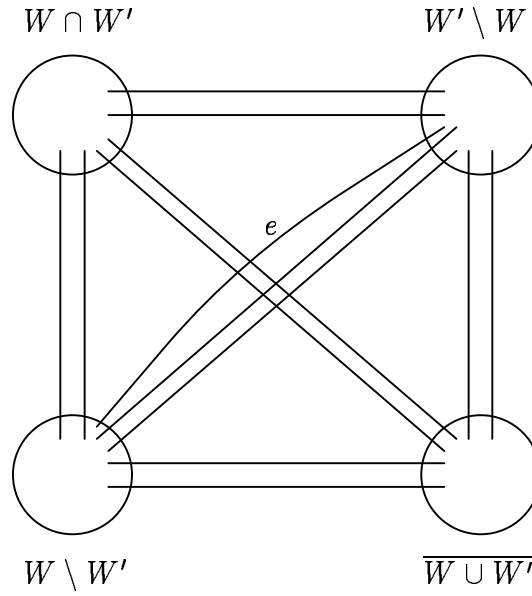
$$\bar{x}(\delta(W') \setminus \{f\}) = \bar{x}(\delta(W')) - \bar{x}(f) = 1.$$

D'où

$$\bar{x}(\delta(W')) = \bar{x}(f) + 1.$$

Par l'Assertion 1, $\bar{x}(f) \leq 1$. Comme $\delta(W')$ est une coupe-Steiner vérifiée par $\bar{x}$, on obtient $\bar{x}(f) = 1$, et par conséquent $\bar{x}(\delta(W')) = 2$. Donc on peut supposer qu'il existe une coupe-Steiner $\delta(W')$ contenant e et serrée par $\bar{x}$. De plus, on peut noter que $W \cap W' \neq \emptyset$ et $\delta(W \cap W')$ est une coupe-Steiner. On distingue deux cas:

Cas 1. $e \in \delta(W)$.

Figure 2.1 : Intersection de $\delta(W, e)$ et $\delta(W')$.

Puisque $e \in \delta(W')$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $e \in (W \setminus W', W' \setminus W)$ (voir Figure 2.1).

Etant donné que $(\delta(W), e)$ est une coupe-Steiner-gauche violée par $\bar{x}$ et $\delta(W')$ est une coupe-Steiner contenant e serrée par $\bar{x}$, on a donc

$$\bar{x}(\delta(W)) < 2\bar{x}(e), \quad (2.2)$$

$$\bar{x}(\delta(W')) = 2. \quad (2.3)$$

D'où

$$\begin{aligned} \bar{x}(\delta(W \cap W')) &\leq \bar{x}(\delta(W) \setminus \{e\}) + \bar{x}(\delta(W') \setminus \{e\}), \\ &< \bar{x}(e) + \bar{x}(\delta(W')) - \bar{x}(e), \\ &= \bar{x}(\delta(W')), \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ce qui est impossible puisque $\delta(W \cap W')$ est une coupe-Steiner.

Cas 2. $e \in E(\overline{W})$.

Dans ce cas on a $e \in \delta(W \cup W')$. Comme dans le cas 1, en utilisant (2.2) et (2.3) on obtient

$$\begin{aligned} 2 + \bar{x}(\delta(W \cup W')) &\leq \bar{x}(\delta(W \cap W')) + \bar{x}(\delta(W \cup W')), \\ &\leq \bar{x}(\delta(W)) + \bar{x}(\delta(W')), \\ &< 2\bar{x}(e) + 2. \end{aligned}$$

D'où $\bar{x}(\delta(W \cup W')) < 2\bar{x}(e)$. Donc $(\delta(W \cup W'), e)$ est une coupe-Steiner-gauche violée par $\bar{x}$. Puisque $e \in \delta(W \cup W')$, ceci contredit le Cas 1.

Par les Assertions 1 et 2, $\bar{x}$ vérifie les inégalités (1.2) et (1.4). Puisque $\bar{x} \in D(G, S)$, alors $\bar{x}$ vérifie aussi les inégalités (1.1) et (1.3). Comme G est parfaitement Steiner 2-arête-connexe, $\bar{x} \in \text{STECSP}(G, S)$.

Par 1) et 2) on a $\text{Dom}(G, S) = D(G, S)$, ce qui termine la preuve de notre théorème. $\square$

Le corollaire suivant est une conséquence directe des Théorèmes 1.2 et 2.1.

Corollaire 2.2. *Si G est série-parallel alors $\text{Dom}(G, S) = D(G, S)$.*

Puisque pour tout système de poids $w \geq 0$, les problèmes STECSP et STESNP coïncident, alors le dominant du STESNP est le même que celui du STECSP. Par conséquent, les résultats de ce paragraphe sont aussi valides pour le problème STESNP.

2.2 Une relaxation du STECSP(G, S)

Dans ce paragraphe nous considérons la relaxation du STECSP quand une arête peut être prise plusieurs fois dans la solution. D'une manière précise, le problème ici est de déterminer un vecteur entier $x \in \mathbb{N}^E$ tel que le graphe induit par $F(x)$, où $F(x)$ est l'ensemble d'arêtes obtenues en remplaçant chaque arête e de F par $x(e)$ arêtes, soit Steiner 2-arête-connexe et $\sum_{e \in E} w(e)x(e)$ soit minimum. Soit $\text{Dom}_1(G, S)$ le polytope associé à ce problème, *i.e.* :

$$\text{Dom}_1(G, S) = \text{conv}\{x \in \mathbb{N}^E \mid x \text{ satisfait (1.1) et (1.3)}\}.$$

Quand $S = V$, Chopra [13] a étudié le polyèdre

$$P_k(G) = \text{conv}\{x \in \mathbb{R}^E \mid (V, F(x)) \text{ soit } k\text{-arête-connexe}\},$$

et il a donné une description complète de $P_k(G)$ quand G est outerplanaire et k est impair. Il a aussi conjecturé que ce résultat reste vrai pour les graphes série-parallèles. Récemment Didi Biha et Mahjoub [24] ont montré cette conjecture comme un cas particulier d'un résultat plus général. Ils ont montré que dans le cas où le graphe est série-parallèle, le polytope des sous-graphes k -arête-connexes peut être décrit par les contraintes triviales, de coupes et les contraintes dites de partition, et ce pour tout k (ces contraintes feront l'objet du prochain chapitre). La conjecture de Chopra a été aussi montrée indépendamment par Chopra et Stoer [14]. Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [18] ont montré que lorsque $k = 2$ et G est série-parallèle alors $P_k(G)$ est complètement caractérisé par les contraintes de non-négativité et les contraintes de coupes. Ce résultat peut être obtenu comme conséquence du résultat de Didi Biha et Mahjoub [24].

Dans ce qui suit, nous allons étendre le résultat de Cornuéjols, Fonlupt et Naddef au cas Steiner. Soit

$$D_1(G, S) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x \text{ satisfait (1.1) et (1.3)}\}.$$

Théorème 2.3. *Si G est série-parallèle alors $\text{Dom}_1(G, S) = D_1(G, S)$. De plus, tout point extrême de $\text{Dom}_1(G, S)$ est dans $\{0, 1, 2\}^E$.*

Preuve. Soit $\bar{x}$ un point extrême de $D_1(G, S)$. Alors, il suffit de montrer que $\bar{x} \in \{0, 1, 2\}^E$. Soit

$$E_1 = \{e \in E \mid \text{il existe une coupe-Steiner } \delta(W) \text{ contenant } e \text{ et } \bar{x}(\delta(W) \setminus \{e\}) < 1\}.$$

Soit $G' = (V, E')$ le graphe obtenu à partir de G en dupliquant toute arête e de E_1 en deux arêtes e_1 et e_2 . On note par E'_1 l'ensemble d'arêtes ainsi obtenu, et soit $x' \in \mathbb{R}^{E'}$ défini par $x'(e_1) = x'(e_2) = \frac{\bar{x}(e)}{2}$ si $e \in E_1$ et $x'(e) = \bar{x}(e)$ sinon. On a $x' \in \text{Dom}(G', S)$. En effet, il est clair que x' vérifie les inégalités (1.1) et (1.3). Maintenant soit $\delta(W)$ une coupe de G' qui définit avec $f \in \delta(W)$ une inégalité de type (2.1). Si $f \notin E'_1$ alors

$$x'(\delta(W) \setminus \{f\}) = \bar{x}(\delta(W) \setminus \{f\}) \geq .1$$

Sinon, alors d'après la construction de G' , il existe une arête $g \in \delta(W)$ telle que $x'(f) = x'(g) = \frac{\bar{x}(e)}{2}$ où e est l'arête de E_1 dont f et g sont issues. On a

$$\begin{aligned} x'(\delta(W) \setminus \{f\}) &= x'(\delta(W) \setminus \{f, g\}) + x'(g) \\ &= \bar{x}(\delta(W) \setminus \{e\}) + \frac{\bar{x}(e)}{2} \\ &\geq \frac{\bar{x}(\delta(W) \setminus \{e\})}{2} + \frac{\bar{x}(e)}{2} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

La dernière inégalité est obtenue par le fait que $\delta(W)$ est une coupe-Steiner vérifiée par $\bar{x}$. D'où $x' \in \text{Dom}(G', S)$. De plus, x' est un point extrême de $\text{Dom}(G', S)$. En effet, si ceci n'est pas le cas, alors il doit exister deux solutions y^1 et y^2 de $\text{Dom}(G', S)$ telles que $x' = \frac{1}{2}(y^1 + y^2)$. Maintenant soient les solutions $y^{1'}, y^{2'} \in \mathbb{R}^E$ données par

$$y^{1'}(e) = \begin{cases} y^1(e) & \text{si } e \notin E_1, \\ y^1(e_1) + y^1(e_2) & \text{si } e \in E_1, \end{cases}$$

et

$$y^{2'}(e) = \begin{cases} y^2(e) & \text{si } e \notin E_1, \\ y^2(e_1) + y^2(e_2) & \text{si } e \in E_1. \end{cases}$$

Il est clair que $y^{1'}$ et $y^{2'}$ sont dans $D_1(G, S)$. Aussi nous avons $\bar{x} = \frac{1}{2}(y^{1'} + y^{2'})$, contradiction. Par conséquent, x' est un point extrême de $\text{Dom}(G', S)$. Puisque G' est série-parallèle, d'après le Corollaire 2.2, $x' \in \{0, 1\}^E$. D'où $\bar{x} \in \{0, 1, 2\}^E$, ce qui termine la preuve du Théorème 2.3. $\square$

2.3 Le polytope du voyageur de commerce Steiner

Considérons un graphe $G = (V, E)$ et une fonction de poids $w(\cdot)$ associée aux arêtes de G . Le *problème du voyageur de commerce* (TSP), est de trouver un cycle Hamiltonien (V, F) de G (un cycle passant exactement une et une seule fois par chaque sommet de G , appelé aussi *tournee*), tel que $w(F) = \sum_{e \in F} w(e)$ soit minimum. Etant donné un ensemble de sommets terminaux $S \subseteq V$, le *problème du voyageur de commerce Steiner* (STSP) est de trouver une cycle de G de poids minimum qui passe

exactement une et une seule fois par chaque sommet de S . Un tel cycle sera appelé *tournee Steiner*. Plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire qui sont NP-durs en général sont polynomiaux dans la classe des graphes série-parallèles. Wald et Colbourn ont donné dans [77] des algorithmes linéaires pour plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire, dans les graphes série-parallèles. Dans [18], G. Cornuéjols, J. Fonlupt et D. Naddef ont étudié le STSP dans le cas *graphique*. Dans ce cas, une tournée peut passer plusieurs fois par le même sommet. Ils ont donné un algorithme linéaire pour résoudre ce problème quand G est série-parallèle. Cet algorithme est une extension de l'algorithme donné par Ratliff et Rosenthal [69] pour résoudre le même problème dans une classe contenue dans celle des graphes série-parallèles.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux de V . Soit $\text{STSP}(G, S)$ l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidences des tournées Steiner de G , *i.e.*

$$\text{STSP}(G, S) = \text{conv}\{x^F \in \mathbb{R}^E \mid H = (W, F), S \subseteq W \subseteq V, F \subseteq E, \\ \text{et } H \text{ soit une tournée Steiner de } G\}.$$

Le polytope $\text{STSP}(G, S)$ est appelé le *polytope des tournées Steiner* de G .

A notre connaissance le polytope $\text{STSP}(G, S)$ n'a pas été considéré pour S quelconque. Cependant le cas où $S = V$ était un des sujets les plus étudiés et plus motivant dans la combinatoire polyédrique durant les trente dernières années [49]. Dans ce cas, le polytope $\text{STSP}(G, S)$ a été caractérisé dans les graphes de Halin [19] et dans les graphes sans $K_5 - \{e\}$ [5]. Dans le cas graphique, Fonlupt et Naddef [31] ont caractérisé les graphes pour lesquels le polytope associé est complètement décrit par les inégalités de non-négativités et de coupes.

Dans ce qui suit, nous allons donner une description complète du polytope $\text{STSP}(G, S)$ dans le cas où le graphe G est série-parallèle.

Si $F \subset E$ induit une tournée Steiner dans G par rapport à S , alors il est clair que x^F , le vecteur d'incidence de F , vérifie les contraintes suivantes

$$x(\delta(v)) = 2 \quad \forall v \in S, S \setminus \{v\} \neq \emptyset, \quad (2.4)$$

$$x(\delta(v)) - 2x(e) \geq 0 \quad \forall v \in V \setminus S \text{ et } e \in \delta(v), \quad (2.5)$$

$$x(\delta(v)) \leq 2 \quad \forall v \in V \setminus S, \quad (2.6)$$

$$x(\delta(W)) \geq x(\delta(u)) \quad \forall W \subset V, S \subseteq W, u \in V \setminus W. \quad (2.7)$$

Soit $H(G, S)$ le polytope défini par les contraintes (1.1)-(1.3), (2.4)-(2.7). Il est facile de voir que le STSP est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{cases} \min wx \\ x \in H(G, S) \\ x \in \{0, 1\}. \end{cases}$$

$H(G, S)$ est, par conséquent, une relaxation du polytope $\text{STSP}(G, S)$. Les contraintes (2.6) seront appelées dans la suite *coupes de degré*. Les inégalités (2.6) combinées avec les inégalités de coupes-Steiner-gauche (2.5), expriment le fait que si un sommet de $V \setminus S$ est pris dans la solution alors il doit être de degré deux. Les inégalités (2.7), expriment le fait que si un sommet de $V \setminus S$ est pris dans la solution alors toute coupe séparant S et ce sommet, doit contenir au moins deux arêtes. Une contrainte de type (2.7) associée à un sous-ensemble de sommets $W \supset S$ et un sommet $u \in V \setminus W$ sera notée par $(\delta(W), \delta(u))$. Notons que si $S = \{s\}$ alors $H(G, S)$ est défini par les contraintes (1.1)-(1.2), (2.5)-(2.7) auxquelles on ajoute $x(\delta(s)) \leq 2$. Aussi nous notons ce qui suit:

Remarque 2.4. Les contraintes de coupes-Steiner-gauche $(\delta(Z), e)$ telles que $|\overline{Z}| > 1$ sont redondantes par rapport à $H(G, S)$. En effet, si u est l'extrémité de e appartenant à $\overline{Z}$, par (2.7) et (2.5) on a

$$x(\delta(Z)) \geq x(\delta(u)) \geq 2x(e).$$

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 2.5. *Si G est série-parallèle alors $\text{STSP}(G, S) = H(G, S)$.*

Preuve. D'abord remarquons que le théorème suivant est vrai si $S = V$. En effet, dans ce cas le polytope $H(G, S)$ est une face de $P(G, S)$ (cf. Paragraphe 1.1), il est donc en 0-1. En conséquence, on peut supposer que $S \subset V$.

La preuve est par récurrence sur le nombre d'arêtes. Le théorème est vrai pour les graphes ayant au plus deux arêtes. Supposons qu'il est vrai pour tout graphe série-parallèle ayant au moins m arêtes et supposons que G est série-parallèle avec exactement $m + 1$ arêtes. Sans perte de généralité, on peut supposer que G est 2-sommet-connexe. Maintenant supposons que $\text{STSP}(G, S) \neq H(G, S)$. Et soit x un point

extrême fractionnaire de $H(G, S)$. Nous avons les lemmes suivants, les deux premiers étant triviaux.

Lemme 2.6. $x(e) > 0$ pour toute arête $e \in E$.

Lemme 2.7. Si $(\delta(Z), \delta(u))$ est une contrainte serrée par x alors $G(\overline{Z})$ est connexe.

Lemme 2.8. Si x est un point extrême de $H(G, S)$, alors il n'existe pas de contraintes $(\delta(Z), \delta(u))$ de type (2.7) serrées par x avec $x(\delta(u)) < 2$.

preuve. Supposons le contraire. Et soit $(\delta(Z), \delta(u))$ une contrainte de type (2.7) serrée par x tel que $x(\delta(u)) < 2$. Supposons que $|Z|$ est minimum. Soit $G^0 = (V^0, E^0)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant $\overline{Z}$. Soit x^0 la restriction de x dans G^0 . Il est clair que x^0 est une solution de $H(G^0, S)$. Puisque par le Lemme 2.7, $G(\overline{Z})$ est connexe et par conséquent $|E^0| < |E|$, il en résulte par l'hypothèse de récurrence que $H(G^0, S)$ est entier. Donc x^0 peut être écrit comme combinaison convexe des points extrêmes de $H(G^0, S)$. Ainsi il existe t points extrêmes de $H(G^0, S)$, $y^1, \dots, y^t$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_t \geq 0$ tels que

$$x^0 = \sum_{i=1}^t \lambda_i y^i, \quad \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1.$$

De plus toute contrainte de $H(G^0, S)$ serrée par x^0 est aussi serrée par y^i , $i = 1, \dots, t$. Puisque $x^0(\delta(Z)) < 2$, il existe un point parmi $y^1, \dots, y^t$, disons y^1 , tel que $y^1(\delta(Z)) < 2$. Comme y^1 appartient à $H(G^0, S)$ on doit avoir $y^1(\delta(Z)) = 0$. Soit $x^* \in \mathbb{R}^E$ la solution définie par

$$x^*(e) = \begin{cases} y^1(e) & \text{si } e \in E(Z), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons montrer que toute contrainte serrée par x est aussi serrée par x^* , ceci contredit le fait que x est un point extrême.

Puisque $(\delta(Z), \delta(u))$ est serrée par x et $x(\delta(u)) < 2$, par les contraintes (2.5) et (2.7), les arêtes telles que $x(e) = 1$ sont toutes dans $E(Z)$. D'où si $x(e) = 1$ alors $x^0(e) = 1$ et comme toute contrainte serrée par x^0 l'est aussi par y^1 , on obtient $x^*(e) = y^1(e) = 1$. Aussi tous les sommets définissant des contraintes de type (2.4) ou (2.6) serrées par x

sont dans Z . Et de même on peut facilement voir que ces contraintes sont aussi serrées par x^* . Pour une contrainte de type (2.5) associée à un sommet v et serrée par x , si $v \in Z$ alors de la même manière on peut montrer que cette contrainte est serrée par x^* . Si $v \in \overline{Z}$ alors $x^*(\delta(v)) = 0$ et donc (2.5) est serrée par x^* .

Donc il reste à montrer que les contraintes de coupes-Steiner (1.3) et les contraintes de type (2.7), serrées par x sont aussi serrées par x^* .

Soit $\delta(W)$ une coupe-Steiner serrée par x (voir Figure 2.2).

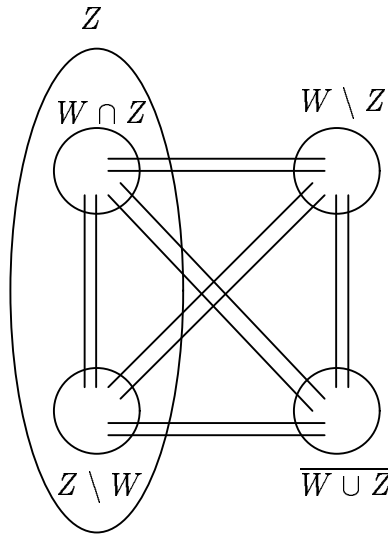


Figure 2.2 :

On a

$$x(\delta(Z)) = x(\delta(u)), \quad (2.8)$$

$$x(\delta(W)) = 2. \quad (2.9)$$

Puisque $W \cap S \neq \emptyset \neq (V \setminus W) \cap S$, $(V \setminus Z) \cap S = \emptyset$, on a $(Z \setminus W) \cap S \neq \emptyset \neq W \cap Z$. D'où $\delta(Z \setminus W)$ et $\delta(W \cap Z)$ sont des coupes-Steiner dans G . On distingue deux cas

Cas 1. $u \in (W \setminus Z)$

Comme $\delta(Z \setminus W)$ est une coupe-Steiner on a

$$x(\delta(Z \setminus W)) \geq 2, \quad (2.10)$$

et puisque $(W \setminus Z) \cap S = \emptyset$, par les inégalités (2.7) on a aussi

$$x(\delta(W \setminus Z)) \geq x(\delta(u)). \quad (2.11)$$

En combinant (2.8)-(2.11) et en utilisant le fait que $x(e) \geq 0 \forall e \in E$, on obtient

$$\begin{aligned} 2 + x(\delta(u)) &\leq x(\delta(Z \setminus W)) + x(\delta(W \setminus Z)) \\ &\leq x(\delta(Z)) + x(\delta(W)) \\ &= 2 + x(\delta(u)). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} x(\delta(Z \setminus W)) &= 2 \\ x(\delta(W \setminus Z)) &= x(\delta(u)) \end{aligned}$$

Puisque $\delta(Z \setminus W)$ est aussi une coupe-Steiner dans G^0 on a alors $x(\delta(Z \setminus W)) = x^0(\delta(Z \setminus W))$, et comme y^1 serre toutes les contraintes serrées par x^0 on déduit que $x^0(\delta(Z \setminus W)) = y^1(\delta(Z \setminus W)) = 2$. Comme $x^*(e) = 0 \forall e \notin E(Z)$, il s'en suit que $x^*(\delta(W)) = x^*(\delta(Z \setminus W)) = y^1(\delta(Z \setminus W)) = 2$.

Cas 2. $u \in (\overline{W \cup Z})$.

En considérant $W \cap Z$ à la place de $Z \setminus W$ et $\overline{W \cup Z}$ à la place de $W \setminus Z$, on montre de la même manière que dans le Cas 1 que $x(\delta(W \cap Z)) = 2$ et $x^*(\delta(W)) = 2$.

Maintenant, considérons une contrainte de type (2.7) associée à un ensemble $Z' \subset V$ et un sommet $u' \in V \setminus Z'$, serrée par x .

Si $x(\delta(u')) = 2$, alors la coupe $\delta(Z')$ jouera le même rôle qu'une coupe-Steiner, et de la même façon que précédemment on peut montrer que $x^*(\delta(Z')) = 2$. Donc on peut supposer que $x(\delta(u')) < 2$, et comme $|Z|$ est minimum on a $Z' \not\subset Z$. Si $Z \subset Z'$, comme $x^*(e) = 0 \forall e \notin E(Z)$, alors on a $x^*(\delta(Z')) = 0 = x^*(\delta(u'))$. Donc on peut supposer que $Z \not\subset Z'$, et par conséquent $S \subseteq Z \cap Z'$ (voir Figure 2.3). On distingue deux cas

Cas a. $u' \in (\overline{Z \cup Z'})$.

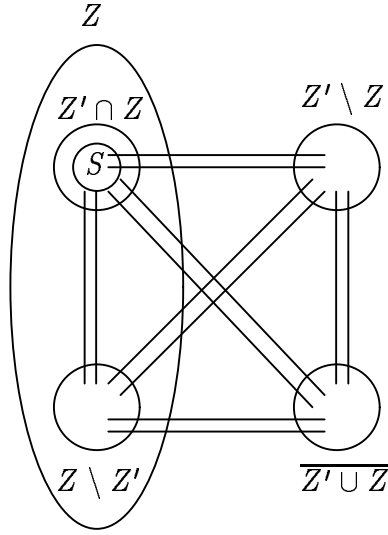


Figure 2.3 :

Dans ce cas $(\delta(Z \cap Z'), \delta(u))$ et $(\delta(Z \cup Z'), \delta(u'))$ sont des contraintes de type (2.7).
On a donc

$$\begin{aligned} x(\delta(Z \cap Z')) &\geq x(\delta(u)), \\ x(\delta(Z \cup Z')) &\geq x(\delta(u')). \end{aligned}$$

Puisque

$$x(\delta(Z)) = x(\delta(u)) \tag{2.12}$$

$$x(\delta(Z')) = x(\delta(u')) \tag{2.13}$$

on obtient

$$\begin{aligned} x(\delta(u)) + x(\delta(u')) &\leq x(\delta(Z \cap Z')) + x(\delta(Z \cup Z')) \\ &\leq x(\delta(Z)) + x(\delta(Z')) \\ &= x(\delta(u)) + x(\delta(u')). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} x(\delta(Z \cap Z')) &= x(\delta(u)) \\ x(\delta(Z \cup Z')) &= x(\delta(u')). \end{aligned}$$

Donc $(\delta(Z \cap Z'), \delta(u))$ est une contrainte de type (2.7) serrée par x avec $|Z \cap Z'| < |Z|$. Ceci contredit le fait que $|Z|$ est minimum.

Cas b. $u' \in (Z \setminus Z')$.

Cas b.1. $u \in (\overline{Z \cup Z'})$.

De la même manière que dans le Cas a, on montre que $(\delta(Z \cap Z'), \delta(u'))$ est une contrainte de type (2.7) serrée par x . Comme $x(\delta(u')) < 2$ et $|Z \cap Z'| < |Z|$, ceci contredit de nouveau la minimalité de $|Z|$.

Cas b.2. $u \in (Z' \setminus Z)$. En utilisant la même démarche que celle utilisée dans le Cas a, on peut montrer que $(\delta(\overline{Z \setminus Z'}), \delta(u'))$ est une coupe de type (2.7) serrée par x . En effet, puisque $S \subseteq Z \cap Z'$, $u \in (Z' \setminus Z)$ et $u' \in (Z \setminus Z')$, alors $(\delta(\overline{Z \setminus Z'}), \delta(u'))$ et $(\delta(\overline{Z' \setminus Z}), \delta(u))$ sont deux contraintes de type (2.7). D'où

$$x(\delta(\overline{Z' \setminus Z})) \geq x(\delta(u)), \quad (2.14)$$

$$x(\delta(\overline{Z \setminus Z'})) \geq x(\delta(u')). \quad (2.15)$$

En combinant (2.12), (2.13) et les inégalités (2.14) et (2.15), on obtient

$$\begin{aligned} x(\delta(u)) + x(\delta(u')) &\leq x(\delta(\overline{Z \setminus Z'})) + x(\delta(\overline{Z' \setminus Z})) \\ &\leq x(\delta(Z)) + x(\delta(Z')) \\ &= x(\delta(u)) + x(\delta(u')). \end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} x(\delta(\overline{Z' \setminus Z})) &= x(\delta(u)), \\ x(\delta(\overline{Z \setminus Z'})) &= x(\delta(u')). \end{aligned}$$

Puisque $(\delta(\overline{Z \setminus Z'}), \delta(u'))$ est aussi une contrainte de type (2.7) dans G^0 , elle est par conséquent serrée par x^0 . D'où

$$x^*(\delta(Z')) = y^1(\delta(\overline{Z \setminus Z'})) = y^1(\delta(u')) = x^*(\delta(u')). \square$$

Soient

$$T = \{u \in V \setminus S \mid x(\delta(u)) = 2\},$$

et

$$S' = S \cup T.$$

Nous avons l'assertion suivante:

Assertion. x est un point extrême de $P(G, S')$.

Preuve. Remarquons d'abord que $x \in P(G, S')$. En effet, il est clair que les contraintes triviales sont vérifiées par x . Soit $\delta(W)$ une coupe-Steiner dans G par rapport à S' . Si $\delta(W)$ est aussi une coupe-Steiner par rapport à S alors il est évident qu'elle est vérifiée par x . Donc on peut supposer que $S \subseteq W$. Puisque $S' \setminus W \neq \emptyset$, alors il existe au moins un sommet u dans $T \cap (V \setminus W)$. Comme $x(\delta(u)) = 2$, par les contraintes de type (2.7) on a $x(\delta(W)) \geq x(\delta(u)) = 2$. Maintenant considérons une coupe-Steiner-gauche $(\delta(Z), e)$ par rapport à S' . Donc $(\delta(Z), e)$ est aussi une coupe-Steiner-gauche par rapport à S . Si $|\overline{Z}| = 1$ (resp. $|\overline{Z}| > 1$) alors par les contraintes (2.5) (resp. par la Remarque 2.4) on a $x(\delta(Z)) - 2x(e) \geq 0$. Donc pour montrer l'assertion, il suffit de déterminer un système d'égalités dans $P(G, S')$ ayant x comme solution unique.

Puisque x est un point extrême de $H(G, S)$, alors il existe un sous-ensemble d'arêtes $E^1 \subseteq E$ de G , une famille de coupes-Steiner $\{\delta(W_i), |W_i| \geq 2, i = 1, \dots, l\}$, une famille de coupes-Steiner-gauche $\{(\delta(v_j), e_j), j = 1, \dots, p\}$ de type (2.5), une famille de contraintes $\{(\delta(Z_k), \delta(u_k)), k = 1, \dots, q\}$, un sous-ensemble T_1 de T et un sous-ensemble S_1 de S , tels que x soit la solution unique du système suivant:

$$(S) \left\{ \begin{array}{ll} x(e) = 1 & \forall e \in E^1, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(\delta(W_i)) = 2 & \text{pour } i = 1, \dots, l, \end{array} \right. \quad (2.17)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(\delta(v_j)) - 2x(e_j) = 0 & \text{pour } j = 1, \dots, p, \end{array} \right. \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(\delta(Z_k)) = x(\delta(u_k)) & \text{pour } k = 1, \dots, q, \end{array} \right. \quad (2.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(\delta(v)) = 2 & \forall v \in T_1, \end{array} \right. \quad (2.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} x(\delta(v)) = 2 & \forall v \in S_1, \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où $|E^1| + l + p + q + |T_1| + |S_1| = |E|$.

Nous allons montrer que toutes les inégalités du système (S) viennent d'une inégalité de $P(G, S')$. En effet, il est clair que les contraintes triviales, de coupes-Steiner par rapport à S et les contraintes de type (2.4) associé aux sommets de S sont parmi les contraintes de $P(G, S')$. Donc les égalités (2.18), (2.19) et (2.23) constituent un système d'égalités dans $P(G, S')$. Les égalités (2.22) deviennent des contraintes de coupe-Steiner vérifiées à égalité par x dans $P(G, S')$.

Considérons une égalité de type (2.20), puisque $v_j \notin S'$, cette égalité définit une contrainte de coupe-Steiner-gauche serrée par x dans $P(G, S')$. Il reste maintenant à examiner les égalités (2.21). Par le Lemme 2.8 et les contraintes de type (2.6), on a $x(\delta(u_k)) = 2$. Donc $u_k \in T$ et les égalités (2.21) deviennent des contraintes de coupes-Steiner vérifiées à égalité par x dans $P(G, S')$.

En conséquence, (S) est aussi un système d'égalités dans $P(G, S')$ ayant comme solution unique x . Donc x est un point extrême de $P(G, S')$. $\square$

Comme x est fractionnaire et G est série-parallèle, notre assertion contredit le Théorème 1.2. Ce qui termine la preuve du Théorème 2.5. $\square$

Chapitre 3

Les contraintes de partition

Soient $G = (V, E)$ un graphe avec $|V| = n$, et $x \in \mathbb{R}_+^E$ un vecteur de poids associé aux arêtes de E . Etant donnée une partition $S_1, \dots, S_p$ de l'ensemble des sommets V , on dénotera par $\delta(S_1, \dots, S_p)$ l'ensemble des arêtes ayant leurs extrémités dans des ensembles différents de la partition. Soit

$$\delta(S_1, \dots, S_p) = \bigcup_{i=1}^p \delta(S_i).$$

Etant donnés deux scalaires a et b , une inégalité de type

$$x(\delta(S_1, \dots, S_p)) \geq ap + b \tag{3.1}$$

est appelée une *inégalité de partition*.

Les inégalités de partition sont des contraintes valides pour plusieurs polyèdres liés aux problèmes du sous-graphe k -arête-connexe (k -sommets-connexe).

Dans ce chapitre, nous allons étudier les contraintes de partition. Nous donnons un algorithme de séparation pour ces contraintes basé sur un récent algorithme de Queyranne [68], minimisant les fonctions sous-modulaires symétriques. Nous discutons de certains problèmes liés aux contraintes de partition et nous présentons quelques applications. Ce travail a été fait en collaboration avec F. Barahona.

3.1 Séparation des contraintes de partition

Etant donné un système linéaire $Ax \leq b$ et un vecteur y , le *problème de séparation* associé à ce système et à y est de vérifier si y est une solution de $Ax \leq b$ et dans le cas contraire de trouver une contrainte de ce système violée par y .

Comme nous l'avons mentionné dans l'Introduction, si on connaît un algorithme polynomial pour résoudre le problème de séparation associé à un système linéaire $Ax \leq b$, alors on peut résoudre en temps polynomial à l'aide d'une méthode de coupes (nous présenterons une telle méthode dans le prochain chapitre) le problème d'optimisation sur le polyèdre défini par ce système. Etant donné que les contraintes de partition jouent un rôle important dans la résolution de plusieurs problèmes de connexité dans les graphes (ceci sera traité plus en détail dans le Paragraphe 3.3), il serait intéressant d'avoir un algorithme polynomial pour séparer ces inégalités.

Dans ce qui suit nous présenterons un tel algorithme.

On peut supposer sans perte de généralité que $a = 1$. On distingue deux cas: $b \leq -1$ et $b > -1$.

3.1.1 Cas $b \leq -1$.

Ce cas a été déjà étudié dans la littérature. Le premier algorithme de séparation pour ce cas a été donné par Cunningham [23]. Il a ramené ce problème à $|E|$ problèmes de coupe minimum. Son approche nous sera utile pour étudier le cas $b > -1$. Barahona [3] a amélioré l'algorithme de Cunningham, en ramenant le problème à $|V|$ problèmes de coupe minimum. Nous présentons dans la suite l'algorithme de Barahona qui sera aussi utilisé plus tard pour le cas $b > -1$.

L'algorithme de Barahona est basé sur la formulation étendue du dominant de l'arbre couvrant.

Si $G = (V, E)$ est un graphe, comme on a vu dans le Paragraphe 1.4, le dominant des arbres couvrants de G $P(G)$ est donné par les contraintes

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq p - 1, \text{ pour toute partition de } V \quad (3.2)$$

$$x \geq 0.$$

Et la formulation étendue de $P(G)$ est définie par

$$x(\delta(S)) + y(S) \geq 2, \text{ si } r \notin S, S \subset V \quad (3.3)$$

$$x(\delta(S)) + y(S) \geq 0, \text{ si } r \in S, S \subset V \quad (3.4)$$

$$y(V) = 0, \quad (3.5)$$

où r est un sommet donné de G .

Etant donnée une solution $\bar{x}$, l'algorithme permet de déterminer la contrainte de type (3.2) la plus violée par $\bar{x}$, si une telle contrainte existe. Alors comme nous allons voir, ceci se ramènera à trouver $\bar{y} \in \mathbb{R}^V$ tel que $(\bar{x}, \bar{y})$ satisfait (3.3)-(3.5), ou montrer qu'un tel $\bar{y}$ ne peut exister.

Soit V un ensemble fini. Une fonction à valeurs réelles $f : 2^V \mapsto \mathbb{R}$ est dite *sous-modulaire* si:

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B), \forall A, B \subseteq V.$$

Une des propriétés des fonctions sous-modulaires est la suivante:

Lemme 3.1. *Soit $f : 2^E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction sous-modulaire et soit $y = (y(S), S \subseteq E)$ un vecteur associé aux sous-ensembles de E , tel que*

$$y(S) \leq f(S) \quad \forall S \subseteq E.$$

Si A et B sont tels que $f(A) = y(A)$ et $f(B) = y(B)$, alors $f(A \cap B) = y(A \cap B)$ et $f(A \cup B) = y(A \cup B)$.

Preuve.

$$\begin{aligned} f(A) + f(B) &= y(A) + y(B), \\ &= y(A \cap B) + y(A \cup B), \\ &\leq f(A \cap B) + f(A \cup B), \\ &\leq f(A) + f(B), \end{aligned}$$

donc on a des égalités partout. Par conséquent, $f(A \cap B) = y(A \cap B)$ et $f(A \cup B) = y(A \cup B)$. $\square$

Soit

$$f(S) = \begin{cases} 2 - \bar{x}(\delta(S)), & \text{si } r \notin S, \\ -\bar{x}(\delta(S)), & \text{si } r \in S, \end{cases}$$

pour $\emptyset \neq S \subseteq V$. Il est facile de voir que la fonction $-f$ est sous-modulaire. Considérons le problème suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimiser } y(V) \\ y(S) \geq f(S), \quad \text{pour } S \subseteq V. \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

Comme il a été montré par Edmonds [28], l'algorithme glouton permet de résoudre ce programme linéaire. Cet algorithme produit aussi une solution optimale du problème dual qui peut s'écrire comme suit:

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximiser } \sum z_S f(S) \\ \sum \{z_S \mid u \in S\} = 1, \quad \forall u \in V, \\ z \geq 0. \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Etant donné un vecteur y vérifiant (3.6), on dit que l'ensemble S est serré si $y(S) = f(S)$. La fonction $y(\cdot) - f(\cdot)$ est positive ou nulle et sous-modulaire. Donc si S et T sont serrés, et $S \cap T \neq \emptyset$, alors d'après le Lemme 3.1 $S \cap T$ et $S \cup T$ sont aussi serrés.

Soit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. L'algorithme peut être présenté de la manière suivante

Algorithme A.

étape 0. Poser $\bar{y}(v_i) \leftarrow 2$ pour $i = 1, \dots, n$; $k \leftarrow 1$; $\mathcal{F} \leftarrow \emptyset$.

étape 1. Si v_k appartient à un ensemble de $\mathcal{F}$, aller à l'étape 3, sinon

poser $\alpha \leftarrow f(\bar{S}) - \bar{y}(\bar{S}) = \max\{f(S) - \bar{y}(S) \mid v_k \in S\}$,

$\bar{y}(v_k) \leftarrow \bar{y}(v_k) + \alpha$,

$\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup \{\bar{S}\}$.

étape 2. Tant qu'il existe deux ensembles S et T dans $\mathcal{F}$ avec $S \cap T \neq \emptyset$ faire
 $\mathcal{F} \leftarrow (\mathcal{F} \setminus \{S, T\}) \cup \{S \cup T\}$.

étape 3. Poser $k \leftarrow k + 1$, si $k \leq n$ aller à l'étape 1, sinon terminer.

Le vecteur $\bar{y}$ est construit de manière à satisfaire (3.6). La famille $\mathcal{F}$ définit une partition de V et $\bar{y}(S) = f(S)$ pour tout $S \in \mathcal{F}$. Posons $\bar{z}_S = 1$, si $S \in \mathcal{F}$, et $\bar{z}_S = 0$ sinon. Alors $\bar{z}$ est une solution de (3.7). De plus, nous avons

$$\bar{y}(V) = \sum \{\bar{y}(S) \mid S \in \mathcal{F}\} = \sum \{f(S) \mid S \in \mathcal{F}\} = \sum \{f(S)\bar{z}_S \mid S \subseteq V\}.$$

Cela montre que $\bar{y}$ et $\bar{z}$ sont des solutions optimales respectivement pour (3.6) et (3.7).

- Si la valeur de l'optimum est 0 alors $(\bar{x}, \bar{y})$ vérifie (3.3)-(3.5). Pour une partition quelconque de V , $V_1, \dots, V_p$, en additionnant les inégalités (3.3) et (3.4) associées aux ensembles $\{V_i\}$ et $-y(V) \geq 0$, nous obtenons $\bar{x}(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq p - 1$. Cela montre que $\bar{x}$ satisfait toutes les contraintes de partition.
- Maintenant supposons que la valeur de l'optimum est strictement supérieure à 0. Considérons la famille $\mathcal{G} = \{S \mid \bar{z}_S = 1\} = \{S_1, \dots, S_p\}$. $\mathcal{G}$ représente une partition de l'ensemble V et

$$\sum f(S)\bar{z}_S = 2(p - 1) - 2\bar{x}(\delta(S_1, \dots, S_p)),$$

puisque $\bar{z}$ est l'optimum de (3.7), cela nous donne l'inégalité de partition la plus violée. En conséquence, nous avons une solution du problème de séparation non seulement pour $b = -1$, mais pour tout $b \leq -1$.

Il reste à montrer comment calculer α dans l'étape 1.

On construit le graphe orienté $D = (N, A)$, où $N = V \cup \{s, t\}$ et $A = \{(i, j), (j, i) \mid ij \in E\} \cup \{(s, i), (i, t) \mid i \in V\}$. Définissons

$$\eta(i) = \bar{y}(i), \text{ pour } i \in V, i \neq r.$$

$$\eta(r) = \bar{y}(r) + 2,$$

et les capacités

$$c(s, i) = -\eta(i), \quad c(i, t) = 0, \quad \text{si } \eta(i) < 0, \quad i \neq v_k, \quad i \in V,$$

$$c(i, t) = \eta(i), \quad c(s, i) = 0, \quad \text{si } \eta(i) \geq 0, \quad i \in V,$$

$$\begin{aligned}
c(s, v_k) &= \infty, \\
c(i, j) &= c(j, i) = \bar{x}(i, j), \text{ pour } ij \in E.
\end{aligned}$$

Si $\{s\} \cup T$ induit une coupe de capacité λ séparant s et t , alors nous avons

$$\bar{y}(T) + \bar{x}(\delta(T)) = \begin{cases} \lambda + \sum\{\eta(v) \mid \eta(v) < 0\} - 2, & \text{si } r \in T, \\ \lambda + \sum\{\eta(v) \mid \eta(v) < 0\}, & \text{si } r \notin T. \end{cases}$$

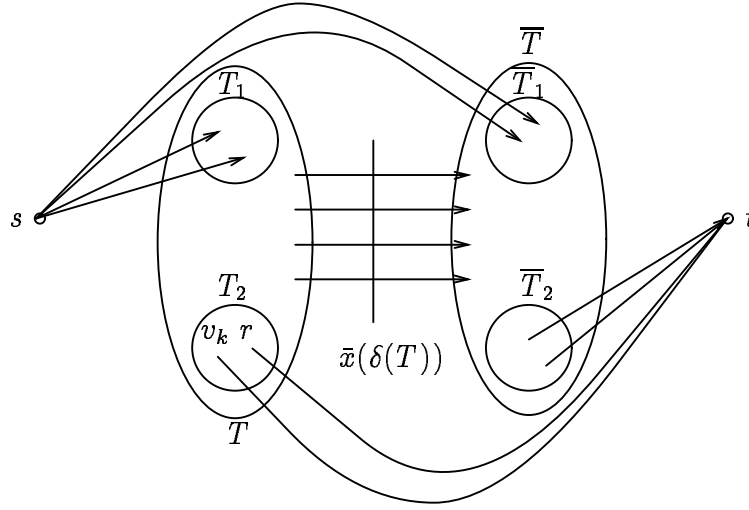


Figure 3.1 : Coupe séparant s et t

En effet, soit $\delta(\{s\} \cup T)$ une telle coupe (voir Figure 3.1. Les arêtes représentées sur la figure sont celles qui portent une capacité différente de zéro). Et soient $T_1 = \{i \mid i \in T \text{ et } \eta(i) < 0\}$, $T_2 = \{i \mid i \in T \text{ et } \eta(i) \geq 0\}$, $\bar{T}_1 = \{i \mid i \in \bar{T} \text{ et } \eta(i) < 0\}$ et $\bar{T}_2 = \{i \mid i \in \bar{T} \text{ et } \eta(i) \geq 0\}$.

On suppose que $v_k, r \in T_2$ (les autres cas sont similaires). Alors on a

$$\begin{aligned}
\lambda &= \bar{x}(\delta(T)) + \sum_{i \in \bar{T}_1} c(s, i) + \sum_{i \in T_2 \setminus \{r\}} c(i, t) + c(r, t) \\
&= \bar{x}(\delta(T)) + \sum_{i \in \bar{T}_1} -\eta(i) + \sum_{i \in T_2 \setminus \{r\}} \eta(i) + \eta(r) + \sum_{i \in T_1} -\eta(i) - \sum_{i \in T_1} -\eta(i) \\
&= \bar{x}(\delta(T)) + \sum_{i \in T_2 \setminus \{r\}} \eta(i) + \sum_{i \in T_1} \eta(i) + \eta(r) - \sum_{\eta(i) < 0} \eta(i) \\
&= \bar{x}(\delta(T)) + \sum_{i \in T_2 \setminus \{r\}} \bar{y}(i) + \sum_{i \in T_1} \bar{y}(i) + \bar{y}(r) + 2 - \sum_{\eta(i) < 0} \eta(i) \\
&= \bar{x}(\delta(T)) + \bar{y}(T) + 2 - \sum\{\eta(i) \mid \eta(i) < 0\}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\bar{y}(T) + \bar{x}(\delta(T)) = \lambda + \sum \{\eta(v) \mid \eta(v) < 0\} - 2.$$

Par conséquent si β est la capacité d'une coupe minimum séparant s et t , alors

$$\alpha = 2 - \beta - \sum \{\eta(i) \mid \eta(i) < 0\}.$$

Et donc l'Algorithme A fait appel à $|V|$ problèmes de coupe minimum au maximum.

Remarque 3.2. Si le problème (3.6) est résolu, alors en ajoutant un nouveau sommet au graphe, résoudre de nouveau (3.6) nécessite un seul appel de l'algorithme de coupe-minimum. En effet, supposons que $\bar{y}$ est la solution de (3.6) associée au graphe $G = (V, E)$, et soit w le sommet ajouté. Posons

$$\bar{\bar{y}}(v) = \bar{y}(v) - \bar{x}(wv),$$

pour tout $v \in V$, et $\bar{\bar{y}}(w) = 2$. Il est clair que $\bar{\bar{y}}$ satisfait les inégalités de (4.6), et toute ensemble qui était serré par $\bar{y}$ reste serré par $\bar{\bar{y}}$. Donc la seule composante qui pourrait être modifiée par l'algorithme glouton est $\bar{\bar{y}}$. Et cela revient à résoudre un problème de coupe minimum.

3.1.2 L'approche de Cunningham

Dans ce paragraphe, nous présentons le problème dit *d'attaque* considéré par Cunningham [23] et sa relation avec le cas $b \leq -1$.

Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $x \in \mathbb{R}_+^E$ un système de poids associé aux arêtes de E . Posons $n = |V|$. $x(e)$ peut être interprété comme étant l'effort requis par l'attaquant pour détruire l'arête e . La valeur de la coupe-minimum (quand x est pris comme capacité) nous donne une mesure de la résistance du réseau à l'attaque : c'est l'effort minimum requis pour augmenter le nombre de composantes connexes dans G . En général, on suppose que la destruction d'un sous-ensemble d'arêtes $A \subseteq E$ nous donne un graphe avec $\kappa(A) + 1$ composantes connexes. Ce problème se formule comme suit :

$$\text{minimiser } (x(A) - \kappa(A) : A \subseteq E).$$

Considérons le matroïde graphique $M(G)$ associé à G . Alors un ensemble $B \subseteq E$ est un indépendant de $M(G)$ si et seulement si B est un ensemble d'arêtes d'une forêt de G . Le *rang* $f(A)$ d'un ensemble $A \subseteq E$ est la cardinalité maximum d'un sous-ensemble indépendant de A . La fonction f vérifie les propriétés suivantes:

- (1) $f(A) = n - (\kappa(\bar{A}) + 1)$ est le nombre de composantes connexes du sous-graphe (V, A) de G .
- (2) $f(A) \leq f(B)$ si $A \subseteq B \subseteq E$.
- (3) $f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B)$ si $A, B \subseteq E$.

Puisque G est connexe, on a

$$f(E) = n - 1, \quad (3.8)$$

$$f(\bar{A}) = n - (\kappa(A) + 1), \quad (3.9)$$

où $\bar{A} = E \setminus A$. En combinant (3.8) et (3.9) on obtient

$$\kappa(A) = f(E) - f(\bar{A}).$$

D'où $x(A) - \kappa(A) = x(A) + f(\bar{A}) - f(E)$. En conséquence le problème d'attaque est équivalent au problème

$$\text{minimiser } (x(A) + f(\bar{A}) : A \subseteq E), \quad (3.10)$$

Pour résoudre (3.10), Cunningham [23] a proposé le programme linéaire suivant

$$\left. \begin{array}{l} \text{maximiser } y(E) \\ y(S) \leq f(S) \quad \text{si } S \subseteq E, \\ y \leq x, \\ y \geq 0. \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

Le lemme suivant montre qu'une solution de (3.11) est une solution de (3.10).

Lemme 3.3. [23]. *Soit $\bar{y}$ la solution de (3.11). Alors on a*

$$\bar{y}(E) = \min(x(A) + f(\bar{A}) : A \subseteq E).$$

Preuve. Nous avons

$$\bar{y}(E) = \bar{y}(A) + \bar{y}(\bar{A}) \leq x(A) + f(\bar{A}). \quad (3.12)$$

Donc il est suffisant d'exhiber un ensemble A tel que (3.12) soit vérifiée à égalité.

Pour toute arête $j \in E$, soit $\bar{y}_j = x_j$, soit j appartient à un ensemble serré. Soit $\bar{A}$ l'union des ensembles serrés. D'après le Lemme 3.1, $\bar{A}$ est aussi serré. D'où

$$y(E) = y(A) + y(\bar{A}) = x(A) + f(\bar{A}). \square$$

Pour résoudre (3.11), Cunningham [23] donne l'algorithme suivant:

Algorithme B.

Début

$y \leftarrow 0$

$\bar{A} \leftarrow \emptyset$

pour $j \in E$ **faire**

$\epsilon \leftarrow f(B_j) - y(B_j) = \min(f(B) - y(B) : j \in B \subseteq E)$

si $\epsilon \leq x_j - y_j$ **alors** $\bar{A} \leftarrow \bar{A} \cup B_j$

sinon $\epsilon \leftarrow x_j - y_j$

finsi

$y_j \leftarrow y_j + \epsilon$

finpour

fin

Le calcul de ϵ se ramène à un problème de coupe minimum. D'où cet algorithme nécessite $|E|$ problèmes de coupe minimum.

Dans ce qui suit, nous allons établir la relation entre le problème d'attaque et le cas $b \leq -1$.

Notons par $\gamma(B)$ pour $B \subseteq V$, l'ensemble d'arêtes ayant les deux extrémités dans B . On a $f(\gamma(B)) = n - (n - |B| + 1) = |B| - 1$. Soit $\bar{y}$ une solution optimale de

(3.11). Les ensembles serrés par $\bar{y}$ peuvent être considérés de type $\gamma(B)$. En effet, considérons un ensemble S serré par $\bar{y}$, qui ne soit pas de la forme $\gamma(B)$. Soit B l'ensemble de sommets induit par S . (V, S) est le sous-graphe induit par S . On distingue deux cas :

Cas 1. (V, S) est connexe.

On a

$$f(\gamma(B)) = f(S) = \bar{y}(S) \leq \bar{y}(\gamma(B)) \leq f(\gamma(B)),$$

notons ici que le nombre de composantes connexes de (V, S) est le même que celui de $(V, \gamma(B))$.

D'où $f(\gamma(B)) = \bar{y}(\gamma(B))$. On trouve donc que $\gamma(B)$ est aussi serré par $\bar{y}$ et $\bar{y}(S) = \bar{y}(\gamma(B))$.

Cas 2. (V, S) n'est pas connexe.

Soient $(V_1, S_1), \dots, (V_p, S_p)$ les composantes connexes de (V, S) , d'après le cas 1 $S_1, \dots, S_p$ peuvent être considérés de la forme $\gamma(B_i)$. Soit $B_i \subset V$ tel que $S_i = \gamma(B_i)$, $i = 1, \dots, p$. Dans ce cas on a $f(S) = n - p$ et $f(S_i) = f(\gamma(B_i)) = |B_i| - 1$, d'où

$$\sum_{i=1}^p f(S_i) = \sum_{i=1}^p f(\gamma(B_i)) = \sum_{i=1}^p (|B_i| - 1) = n - p = f(S).$$

En conséquence

$$\sum_{i=1}^p \bar{y}(S_i) = \bar{y}(S) = f(S) = \sum_{i=1}^p f(S_i),$$

et donc on obtient $\bar{y}(S_i) = f(S_i)$ pour $i = 1, \dots, p$ et $\bar{y}(\gamma(B)) = \bar{y}(S)$.

Maintenant en posant $A = \emptyset$, le minimum de $x(A) + f(\bar{A})$ est au plus $n - 1$. Donc il est équivalent à chercher le minimum de

$$x(A) + f(\bar{A}) - (n - 1) = x(E) - (n - 1) + f(\bar{A}) - x(\bar{A}),$$

qui est négatif ou nul. Et comme les ensembles serrés peuvent être considérés de la forme $\gamma(B)$, $\bar{A}$ est l'union des ensembles de type $\gamma(B)$. On obtient donc le minimum de

$$\sum_{i=1}^p [(|S_i| - 1) - x(\gamma(S_i))] + x(E) - (n - 1).$$

En posant $S_{p+i} = \{v_i\}$ pour $v_i \notin S_j$, $1 \leq j \leq p$, nous obtenons le minimum

$$x(\delta(S_1, \dots, S_k) - (k - 1)).$$

3.1.3 L'algorithme de Queyranne

Soient V un ensemble fini, $n = |V|$ et une fonction sous-modulaire $f : 2^V \mapsto \mathbb{R}$. Queyranne [68] a donné un algorithme qui permet de trouver un sous-ensemble A de V minimisant $f(A) + f(V \setminus A)$. Cet algorithme est une généralisation de l'algorithme de coupe minimum donné par Stoer et Wagner [73] et par Frank [34]. L'algorithme de Stoer et Wagner [73] et de Frank [34] est une simplification de l'algorithme de Nagamochi et Ibaraki [60].

La sous-modularité est une propriété très utilisée en optimisation combinatoire, voir [74], [53], [36] et [37] pour plus de détails concernant ce sujet.

Dans ce paragraphe, nous présentons l'algorithme de Queyranne. Il sera utilisé dans le paragraphe suivant pour développer un algorithme polynomial de séparation pour les contraintes de partition pour le cas $b > -1$.

Une fonction $s : 2^V \mapsto \mathbb{R}$ est dite symétrique si

$$s(A) = s(V \setminus A) \text{ pour tout } A \subset V.$$

Etant donnés deux éléments t et u , on dit que le sous-ensemble A de V *sépare* t et u , si exactement un des éléments t ou u est dans A .

Soit s_f (resp. a_f) la fonction définie comme suit

$$s_f(A) = \frac{1}{2}(f(A) + f(V \setminus A)) \text{ (resp. } a_f(A) = \frac{1}{2}(f(A) - f(V \setminus A)).$$

La fonction s_f (resp. a_f) est appelée la partie symétrique (resp. antisymétrique) de f .

Païres pendantes

Etant donnés un sous-ensemble $A \subset V$ et $u \in V \setminus A$, on note par $A + u$ (resp. $A - u$) l'ensemble $A \cup \{u\}$ (resp. $A \setminus \{u\}$). Soit $f(u) = f(\{u\})$. Une paire (t, u) d'éléments de V est appelée une *paire pendante* du système sous-modulaire (V, f) , si

$$s_f(u) = \min\{s_f(A) \mid u \in A \text{ et } A \text{ sépare } u \text{ et } t\}.$$

Dans la suite nous présentons un algorithme donnant une paire pendante en faisant $O(n^2)$ évaluations de f . L'algorithme construit un ordre $(v_1, \dots, v_n)$ sur les éléments

de V , où le premier élément v_1 peut être choisi arbitrairement. Soient $W_0 = \emptyset$ et $W_i = \{v_j : j \leq i\}$, $i = 1, \dots, n$.

Algorithme PAIRE-PENDANTE(V, f, x)

étape 1. $v_1 \leftarrow x$; $W_1 = \{v_1\}$; $i = 1$;

étape 2. Pour tout $v \notin W_i$ faire $k(v) = f(W_i + v) - f(v)$. Soit $k(v_{i+1}) = \min\{k(v)\}$.

étape 3. $W_{i+1} \leftarrow W_i + v_{i+1}$; $i \leftarrow i + 1$. Si $i = n$ renvoyer (v_{n-1}, v_n) , sinon aller à l'étape 2.

Le couple (v_{n-1}, v_n) obtenu à la fin de l'algorithme est une paire pendante. La preuve est basée sur le lemme suivant.

Lemme 3.4. [68]. *Si (V, f) est un système sous-modulaire alors pour tout $i = 1, \dots, n - 1$, tout $y \in V \setminus W_i$ et tout $X \subseteq W_{i-1}$*

$$f(W_i) + f(y) \leq f(W_i \setminus X) + f(X + y).$$

Preuve. Le lemme est trivial pour $i = 1$. Supposons qu'il est vrai pour $1 \leq i \leq k - 1$. Soient $u \in V \setminus W_k$, et $S \subseteq W_{k-1}$. Par l'algorithme PAIRE-PENDANTE() on a

$$f(W_k) + f(u) \leq f(W_{k-1} + u) + f(v_k). \quad (3.13)$$

Soit j le plus petit entier tel que $S \subseteq W_{j-1}$.

Si $j = k$, alors $v_{k-1} \in S$ et $W_{k-1} \setminus S \subseteq W_{k-2}$. Donc

$$\begin{aligned} f(W_k \setminus S) + f(S + u) &= f((W_{k-1} \setminus S) + v_k) + f(S + u) \\ &\geq f(W_{k-1}) + f(v_k) - f(S) + f(S + u). \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence avec $X = W_{k-1} \setminus S$ et en posant $y = v_k$, on obtient de la sous-modularité de f et de (3.13)

$$f(W_{k-1}) + f(v_k) - f(S) + f(S + u) \geq f(W_{k-1} + u) + f(v_k) \geq f(W_k) + f(u).$$

Si $j \leq k - 1$ alors $v_{j-1} \in S$ et $v_j, \dots, v_k$ ne sont pas dans S . Alors

$$\begin{aligned} f(W_k \setminus S) + f(S + u) &= f((W_{j-1} \setminus S) \cup (W_k \setminus W_{j-1})) + f(S + u) \\ &\geq f((W_{j-1} \setminus S) \cup (W_k \setminus W_{j-1})) + f(W_j) - f(W_j \setminus S) + f(u). \end{aligned}$$

A partir de l'hypothèse de récurrence et de la sous-modularité de f on a

$$f((W_{j-1} \setminus S) \cup (W_k \setminus W_{j-1})) + f(W_j) - f(W_j \setminus S) + f(u) \geq f(W_k) + f(u). \square$$

En appliquant le Lemme 3.4 avec $i = n - 1$, $y = v_n$ on trouve que $s_f(v_n) = \min\{s_f(S) \mid S \text{ sépare } v_n \text{ et } v_{n-1}\}$, d'où (v_{n-1}, v_n) est une paire pendante. L'algorithme fait appel à l'étape 2, $n - 1$ fois, et chaque appel nécessite $O(n)$ appels de f et $O(n)$ opérations pour le calcul de $\min\{k(u)\}$. D'où l'algorithme PAIRE-PENDANTE() nécessite $O(n^2)$ évaluations de f .

Recherche d'un ensemble optimal

Dans ce paragraphe, on présentera un algorithme récursif utilisant l'algorithme PAIRE-PENDANTE() comme sous-programme, pour trouver un sous-ensemble propre A de V minimisant la partie symétrique s_f de f . Si on suppose que A n'est pas obligatoirement un sous-ensemble propre, par la sous-modularité de f on a

$$s_f(\emptyset) = s_f(V) \leq s_f(A), \text{ pour tout } A \subseteq V.$$

L'algorithme est simple et est basé sur l'observation suivante : si (t, u) est une paire pendante pour (V, f) , alors un sous-ensemble optimal A , soit sépare t et u et dans ce cas $s_f(A) = s_f(u)$, soit ne les sépare pas. Dans ce dernier cas, on fusionne t et u en un seul élément, disons t . Et on considère un nouveau système sous-modulaire (V', f') où $V' = V - u$ et $f' : 2^{V'} \mapsto \mathbb{R}$ est définie par

$$f'(A') = \begin{cases} f(A' + u) & \text{si } t \in A', \\ f(A') & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f' est sous-modulaire quand f l'est. Donc (V', f') est un système sous-modulaire. Après un certain nombre de fusions des paires pendantes, chaque élément de l'ensemble V' représente un sous-ensemble de V . Après $n - 1$ étapes, l'ensemble courant V' est un singleton, donc il n'existe plus de sous-ensemble propre et le processus récursif s'arrête. A ce moment là, on aura identifié $n - 1$ sous-ensembles A^h ($h = 1, \dots, n - 1$), où chaque sous-ensemble est susceptible de représenter l'ensemble optimale. L'optimum sera donc un sous-ensemble A^h avec $s_f(A^h)$ minimum. Voici la mise en œuvre de cet algorithme :

A une étape donnée de l'algorithme, le système sous-modulaire (V', f') définit une partition $\{S_j : j \in V'\}$ de V . Initialement $V' = V$ et $S_j = \{j\}$, $j \in V$. La fonction $f' : 2^{V'} \leftarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$f'(A') = f(\cup_{j \in A'} S_j)$$

pour tout $A' \subseteq V'$. Il est connu (voir [37]) que (V', f') est un système sous-modulaire quand (V, f) l'est.

Algorithme ENSEMBLE-OPTIMAL(V, f, x)

1. **pour** $j \in V$ **faire** $S_j \leftarrow \{j\}$; $V' \leftarrow \{S_j : j \in V\}$; et f' est définie comme ci-dessus;
2. **pour** $h = 1$ à $|V| - 1$
3. **faire** $(S_t, S_u) \leftarrow \text{PAIRE-PENDANTE}(V', f', S_x)$;
4. $A^h \leftarrow S_u$ et $s^h \leftarrow s_{f'}(S_u)$;
5. $S_t \leftarrow S_t \cup S_u$ et $V' \leftarrow V' \setminus \{S_u\}$;
6. $i \leftarrow \arg \min \{s^h : h = 1, \dots, n-1\}$;
7. **renvoyer** A^i .

Cet algorithme fait $(n-1)$ appels à la fonction PAIRE-PENDANTE() qui à son tour nécessite $O(n^2)$ évaluations de f . Donc ENSEMBLE-OPTIMAL() renvoie un sous-ensemble propre de V minimisant s_f , en évaluant f $O(n^3)$ fois.

Si f est une fonction sous-modulaire symétrique, alors $s_f = f$ et l'algorithme ENSEMBLE-OPTIMAL() donne un sous-ensemble propre de V minimisant f .

3.1.4 Cas $b > -1$

Considérons le problème

$$\text{minimiser } x(\delta(S_1, \dots, S_p)) - p - b, \quad (3.14)$$

où $p \geq 2$.

Si le minimum de (3.14) est positif ou nul alors il n'existe pas d'inégalités de partition violées par x , sinon on obtient l'inégalité la plus violée. Le problème (3.14) est équivalent au problème suivant:

$$\text{minimiser } x(\delta(S_1, \dots, S_p)) - p, \quad (3.15)$$

le problème (3.15) est appelé *le problème de multicoupe*. Ce problème est équivalent à minimiser

$$g(S) = x(\delta(S)) - 2 + \min \{x(\delta(T_1, \dots, T_k)) - (k - 1)\},$$

où $S \subset V$ et $\{T_i\}$ est une partition de S . Nous allons montrer que g est une fonction sous-modulaire. Puisque $x(\delta(S))$ est sous-modulaire, il suffit de prouver que

$$h(S) = \min \{x(\delta(T_1, \dots, T_k)) - (k - 1)\}$$

est sous-modulaire.

Nous considérons donc (3.11) pour $E = \gamma(S)$, $E = \gamma(T)$, $E = \gamma(S \cup T)$ et $E = \gamma(S \cap T)$. Supposons que y_1 soit obtenu en appliquant l'algorithme glouton B pour $E = \gamma(S \cap T)$. On peut étendre y_1 à une solution y_2 pour $E = \gamma(S \cup T)$ comme suit: Si on pose $y_1(e) = 0$ pour toute arête $e \in (\gamma(S \cup T) \setminus \gamma(S \cap T))$, il est clair que y_1 satisfait (3.11) pour $E = \gamma(S \cup T)$, et que tout ensemble serré pour $E = \gamma(S \cap T)$ reste aussi serré pour $E = \gamma(S \cup T)$. Maintenant en appliquant l'algorithme glouton pour $E = \gamma(S \cup T)$ à partir de y_1 on obtient la solution y_2 , d'où

$$y_2(\gamma(S \cap T)) = y_1(\gamma(S \cap T)).$$

Soient y_3 et y_4 les solutions pour $E = \gamma(S)$ et $E = \gamma(T)$ respectivement. On a

$$\begin{aligned} y_2(\gamma(S \cup T)) &\leq y_2(\gamma(S)) + y_2(\gamma(T)) - y_2(\gamma(S \cap T)), \\ &\leq y_3(\gamma(S)) + y_4(\gamma(T)) - y_1(\gamma(S \cap T)). \end{aligned}$$

D'où

$$y_2(\gamma(S \cup T)) + y_1(\gamma(S \cap T)) \leq y_3(\gamma(S)) + y_4(\gamma(T)),$$

et comme on a vu au paragraphe 3.1.2, que $h(S)$ est égale à l'optimum de (3.11) plus $1 - |S|$, où $E = \gamma(S)$, on obtient donc

$$h(S \cup T) + h(S \cap T) \leq h(S) + h(T).$$

Le but est d'appliquer l'algorithme de Queyranne. Comme on a vu dans le paragraphe précédent, cet algorithme minimise la partie symétrique d'une fonction sous-modulaire. Mais g n'est pas symétrique. Pour ce faire on considère la fonction $g'(S)$ où $g'(S) = h(S) + \frac{1}{2}x(\delta(S)) - 1$, $\forall S \subset E$. Puisque $h(S)$ et $x(\delta(S))$ sont sous-modulaires alors il en est de même pour g' . Il est clair que minimiser g est équivalent à minimiser la partie symétrique de g' ($g'(S) + g'(\bar{S})$).

L'algorithme vu dans le paragraphe précédent appliqué à g' nécessite $O(n^3)$ évaluations de g' . Et dans notre cas une évaluation de g' revient à $O(n)$ problèmes de coupe minimum (en appliquant l'Algorithme A). Donc une application directe de cette méthode nécessite $O(n^4)$ appels du problème de coupe minimum. Cependant chaque évaluation de g' dans la fonction PAIRE-PENDANTE est de type $g'(W_i) + u$ où g' est déjà calculée dans l'itération précédente et d'après la Remarque 3.2, l'évaluation de g' revient donc à un seul appel au problème de coupe minimum. Finalement on a besoin de résoudre $O(n^3)$ problèmes de coupe minimum pour résoudre (3.15).

3.2 Problèmes liés aux contraintes de partition

Etant donné un graphe connexe $G = (V, E)$. Le problème

$$\text{minimiser } \frac{x(\delta(S_1, \dots, S_p))}{p-1}, \quad (3.16)$$

a été étudié dans [23] et [10]. Dans [23] Cunningham a donné un algorithme pour résoudre (3.16), en se basant sur l'idée suivante: Soit σ la solution de (3.16), pour un nombre fixé b , $\sigma \geq b$ si et seulement si $\min(x(\delta(S_1, \dots, S_p) - b(p-1)))$ est positif ou nul, (et donc 0, car pour $p = 1$ on obtient 0). Supposons que $b \geq \sigma$. Si $\min(x(\delta(S_1, \dots, S_p) - b(p-1))) = 0$, alors $b \leq \sigma$, donc $b = \sigma$ et le problème (3.16) est résolu. Sinon, soit $(x(\delta(T_1, \dots, T_k) - b(k-1))) = \min(x(\delta(S_1, \dots, S_p) - b(p-1))) < 0$. Alors $\sigma \leq \frac{x(\delta(T_1, \dots, T_k))}{k-1} = b' < b$, donc on peut remplacer b par b' et ainsi de suite. Il a montré que ce processus converge rapidement vers σ . Remarquons que $\min(x(\delta(S_1, \dots, S_p) - b(p-1)))$ peut être calculé par l'Algorithme A.

Chvátal [17] a montré que le minimum de

$$\frac{x(\delta(S_1, \dots, S_p))}{p}$$

est donné par une coupe minimum.

Maintenant considérons le problème de k -coupe. On veut minimiser

$$x(\delta(S_1, \dots, S_k)),$$

pour une valeur fixée de k . Goldschmidt et Hochbaum [41] ont donné un algorithme en $O(n^{k^2})$, et ils ont montré que ce problème est NP-dur pour k quelconque.

Pour un nombre λ quelconque on peut obtenir une borne inférieure

$$f(\lambda) = \min \{x(\delta(S_1, \dots, S_p)) - \lambda(p - k)\}, \quad (3.17)$$

et chercher le maximum de f . Alors si pour une valeur de λ la solution de (3.17) est telle que $p > k$, on peut obtenir une borne supérieure en contractant quelques ensembles de la partition $S_1, \dots, S_p$ puis en fusionnant les sommets résultants de cette contraction. Il est intéressant d'avoir des informations concernant la qualité de ces approximations.

3.3 Applications des contraintes de partition

Comme il a été déjà mentionné au Paragraphe 3.1.1, le dominant du polytope des arbres couvrant est donné par les inégalités de positivité et les inégalités

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq p - 1,$$

pour toute partition de V , [75, 61]. Ces inégalités ont été utilisées par Barahona [4] pour résoudre *le problème de chargement d'un réseau*. Le problème est de choisir un ensemble de liaisons de coût minimum, reliant un ensemble de cités. Les liaisons entre les cités ont une capacité finie, et doivent permettre l'existence d'un multiflot, où chaque flot ne doit pas dépasser une certaine demande.

Dans ce qui suit, nous discutons d'une famille de contraintes liées à celle de partition. Ces contraintes sont valides pour le STECSP quand $S = V$ (le polytope associé dans ce cas sera noté par $\text{TECP}(G)$).

Dans [55], Mahjoub a introduit une classe d'inégalités valides pour $\text{TECP}(G)$ comme suit : Etant donné un graphe $G = (V, E)$, considérons une partition de V en $V_0, V_1, \dots, V_p$, et soit $F \subseteq \delta(V_0)$ avec $|F| = 2k + 1$.

Si on additionne les inégalités suivantes :

$$x(\delta(V_i)) \geq 2, \quad 1 \leq i \leq p,$$

$$-x(e) \geq -1, \quad e \in F,$$

$$x(e) \geq 0, \quad e \in \delta(V_0) \setminus F,$$

on obtient

$$2x(\Delta) \geq 2p - 2k - 1$$

où $\Delta = \delta(V_1, \dots, V_p) \setminus F$. En divisant par 2, et en arrondissant le membre droit au plus petit entier supérieur, on obtient

$$x(\Delta) \geq p - k. \quad (3.18)$$

Les inégalités (3.18) seront appelées les inégalités de *F-partition*. Ces inégalités ont été aussi étudiées dans [6] et il a été montré qu'elles suffisent avec les inégalités triviales et de coupes pour caractériser $\text{TECP}(G)$ dans les graphes de Halin. Dans ce paragraphe, nous présenterons une méthode de séparation des inégalités de *F-partition* quand F est fixé.

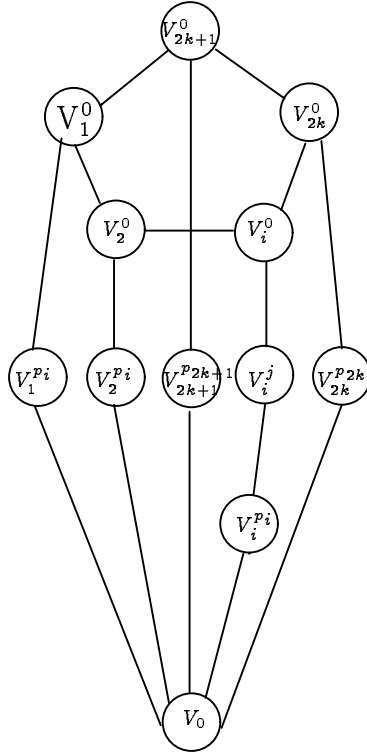


Figure 3.2 : Configuration de roue-impair.

Une *configuration de roue-impair* (voir figure 3.2) est définie par un entier $k \geq 1$,

des entiers p_i , pour $i = 1, \dots, 2k + 1$, et une partition de l'ensemble des sommets V en V_i^s, V_0 pour $i = 1, \dots, 2k + 1$ et $s = 0, 1, \dots, p_i$ tels que

- (1) les graphes $G(V_i^s)$ et $G(V_0)$ soient 3-arête-connexe pour $i = 1, \dots, 2k + 1$ et $s = 0, 1, \dots, p_i$;
- (2) l'ensemble d'arêtes $[V_i^0, V_{i+1}^0]$ n'est pas vide pour $i = 1, \dots, 2k + 1$ (modulo $2k + 1$);
- (3) l'ensemble d'arêtes $[V_i^s, V_i^{s+1}]$ n'est pas vide et si $p_i > 0$, $|[V_i^s, V_i^{s+1}]| = 1$ pour $i = 1, \dots, 2k + 1$ et $s = 0, 1, \dots, p_i$ (on notera V_0 par $V_i^{p_i+1}$ pour $i = 1, \dots, 2k + 1$);
- (4) l'ensemble d'arêtes $[V_i^s, V_i^q]$ est vide pour $1 \leq i \leq 2k + 1$, $s \geq 0$, $q \leq p_i + 1$, $q \neq s + 1$ et $(s, q) \neq (0, p_i + 1)$;
- (5) l'ensemble d'arêtes $[V_i^s, V_t^q]$ est vide pour $i \geq 1$, $t \leq 2k + 1$, $i \neq t$, $1 \leq s \leq p_i + 1$ et $1 \leq q \leq p_t + 1$.

Soit r_i , pour $1 \leq i \leq 2k + 1$, le plus grand entier tel que $0 \leq r_i \leq p_i$ et $|\delta(V_i^{r_i})| \geq 3$. Une arête de $[V_i^s, V_i^{s+1}]$ sera notée par $e_{i,s}$, pour $i = 1, \dots, 2k + 1$ et $s = 0, 1, \dots, p_i$. Soit

$$F' = E^1 - \{e_{i,s}; 1 \leq i \leq 2k + 1; r_i \leq s \leq p_i\},$$

où E^1 est l'ensemble d'arêtes des coupes $\delta(V_i^s)$ pour $1 \leq i \leq 2k + 1$ et $0 \leq s \leq p_i + 1$, i.e.

$$E^1 = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq 2k+1 \\ 0 \leq s \leq p_i+1}} \delta(V_i^s)$$

Une *inégalité de roue-impair* associée à la configuration de roue-impair est

$$x(F') \geq k + 1 + \sum_{i=1, \dots, 2k+1} r_i. \quad (3.19)$$

Les inégalités (3.19) sont exactement les inégalités de F -partition (3.18) soumises aux conditions (1)-(5). Pour retrouver la structure des inégalités (3.18), on peut définir $V_0, V_1, \dots, V_p$ et F comme suit (l'entier k est le même):

$$V_0 = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq 2k+1 \\ r_i+1 \leq j \leq p_i+1}} V_i^j, \quad F = \{e_{i,s}; 1 \leq i \leq 2k + 1\}$$

avec

$$p = (2k + 1) + \sum_{i=1, \dots, 2k+1} r_i,$$

c'est-à-dire que les ensembles $V_1, \dots, V_p$ seront les V_i^s pour $s = 0, 1, \dots, r_i$ et $i = 1, \dots, 2k + 1$. On a

$$\Delta = F', \text{ et } p - k = (2k + 1) + \sum_{i=1, \dots, 2k+1} r_i - k = k + 1 + \sum_{i=1, \dots, 2k+1} r_i.$$

D'après la validité des inégalités (3.18), on déduit que les inégalités de roue-impair sont valides pour $\text{TECP}(G)$.

Théorème 3.5.[55]. *Les inégalités de roue-impair définissent des facettes pour le polytope $\text{TECP}(G)$.*

Dans [32], Fonlupt et Mahjoub ont donné une classe de contraintes qui généralise les inégalités de roue-impair, appelée inégalités de *roue-impair généralisées*. Ils ont décrit des conditions suffisantes pour que ces inégalités définissent des facettes de $\text{TECP}(G)$. Dans ce qui suit, on donne un bref aperçu sur cette classe de contraintes et on montre comment elle généralise la classe des inégalités de roue-impair. Pour plus de détails voir [32].

Comme on a vu précédemment, dans la configuration de roue-impair les ensembles $V_i^0, i = 1, \dots, 2k + 1$ sont reliés à $V_i^{p_i+1}$ par des chaînes. Dans une configuration généralisée seulement un nombre impair d'éléments parmi $V_i^0, \dots, V_{2k+1}^0$ doit être relié à $V_i^{p_i+1}$. Soit I un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, 2k + 1\}$ de cardinalité impair. On suppose que pour tout $i \in I$, il existe une chaîne entre V_i^0 et $V_i^{p_i+1}$, on suppose aussi qu'il existe un sous-ensemble d'arêtes M définissant un couplage parfait entre les ensembles $V_i^0, i \in \{1, \dots, 2k + 1\} \setminus I$, (c'est-à-dire, chaque $V_i^0, i \in \{1, \dots, 2k + 1\} \setminus I$ est adjacent à exactement une arête de M). Une inégalité de roue-impair généralisée est donnée par

$$x(F') \geq k + 1 + |M| \sum_{i \in I} r_i. \quad (3.20)$$

(3.20) se ramène à (3.18) de la même façon que (3.19), d'où sa validité pour $\text{TECP}(G)$.

Puisque le polytope du voyageur de commerce est une face de $\text{TECSP}(G)$, les inégalités de F -partition (3.18) sont aussi valides pour le TSP. Dans le Chapitre 5,

nous présentons des résultats expérimentaux pour certaines instances de TSP prises de la librairie TSPLIB [70]. Pour certains problèmes de TSP de petite taille, on a pu obtenir la tournée optimale, en utilisant seulement les inégalités triviales, de coupes et de F -partition.

Maintenant, considérons le problème du sous-graphe k -arête-connexe de poids minimum, pour $k > 1$. Grötschel et al [45] ont introduit les contraintes suivantes

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \lceil \frac{kp}{2} \rceil.$$

Ils ont étendu ces contraintes à un modèle plus général et ils ont aussi montré que le problème de séparation des contraintes obtenues à partir de cette extension est NP-dur. Une méthode de coupes et des résultats expérimentaux utilisant ces inégalités sont présentés dans [46, 47]. Grötschel et al emploient des heuristiques pour le problème de séparation associé, et ils remarquent que les inégalités de partition sont très utiles. Et en conséquence le besoin d'avoir de meilleurs algorithmes de séparation.

Considérons de nouveau le problème du sous-graphe k -arête-connexe de poids minimum quand une arête peut être prise dans la solution plusieurs fois. Chopra [13] introduit les inégalités de partition suivantes :

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1, \quad (3.21)$$

pour toute partition $V_1, \dots, V_p$ de V telle que $G(V_i)$ soit connexe pour $i = 1, \dots, p$. Il montre qu'elles sont valides pour le polyèdre associé $P_k(G)$ quand G est outerplanaire et k impair. Il montre également que dans ce cas, $P_k(G)$ peut être décrit par les inégalités de positivité, de coupes, et (3.21). Dans [24] Didi Biha et Mahjoub ont montré que les contraintes (3.21) restent valides pour le polytope des sous-graphes k -arête-connexes dans la classe plus générale des graphes série-parallèles. Ils ont montré aussi que dans cette classe de graphe, le polytope des sous-graphe k -arête-connexes est complètement caractérisé par les inégalités triviales, de coupes et (3.21). Les inégalités (3.21) peuvent être séparées par la méthode vue au Paragraphe 3.1.4.

Pour les sous-graphes k -sommets-connexes, les inégalités ci-dessous ont été étudiées dans [45]. Soient $Z \subset V$ un ensemble de sommets avec $|Z| = t \leq k - 1$ et $V_1, \dots, V_p$ une partition de $V \setminus Z$. Alors les inégalités suivantes sont valides :

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \begin{cases} p-1 & \text{si } k-t=1, \\ \lceil \frac{p(k-t)}{2} \rceil & \text{si } k-t \geq 2. \end{cases}$$

Si $k-t=1$, ces inégalités peuvent être séparées par la méthode du Paragraphe 3.1.1.

Si $k-t$ est positif et pair, alors elles peuvent être séparées par la méthode vue au Paragraphe 3.1.4.

Chapitre 4

Un algorithme de coupes et branchement

Dans ce chapitre nous présentons un algorithme de coupes et branchement pour résoudre le problème STECSP quand $S = V$ (TECP). Cet algorithme est basé sur les résultats polyédraux et algorithmiques présentés dans les chapitres précédents. Dans le chapitre suivant, nous présentons nos résultats expérimentaux. Ce travail a été établi en collaboration avec F. Barahona.

On notera par $\text{TECP}(G)$ l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidences des sous-graphes 2-arête-connexes de G .

4.1 Aperçu général sur l'algorithme de coupes et branchement

Considérons un programme linéaire en nombres entiers de la forme,

$$\left. \begin{array}{l} \min cx \\ Ax \geq b \\ x \in \{0, 1\}. \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

Soit P le polyèdre dont les sommets sont les solutions de (4.1).

Si une description complète de P par un système d'inégalités linéaires est connue et si le problème de séparation associé à ce système est polynomial alors (4.1) peut être résolu en temps polynomial [51, 42]. L'inverse de cette assertion est aussi vrai [42, 50, 63]. Cette équivalence entre optimisation et séparation était à l'origine des méthodes de coupes et branchement utilisées pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire.

Pour les problèmes NP-durs on ne connaît pas en général de caractérisations complètes des polyèdres associés, (et il y a peu d'espoir d'en trouver une). Mais pour ces problèmes, même une description partielle du polyèdre associé peut être suffisante pour résoudre le problème en temps polynomial si le problème de séparation associé au système définissant cette description est polynomial.

Supposons donc qu'on connaît un système $\tilde{A}x \geq \tilde{b}$ d'inégalités valides pour P (dont le problème de séparation associé est polynomial).

Un algorithme de coupes pour (4.1) commence par résoudre un programme linéaire

$$\begin{cases} \min cx \\ A_0x \geq b_0, \end{cases}$$

où $A_0x \geq b_0$ est un sous-système de $\tilde{A}x \geq \tilde{b}$ contenant un nombre raisonnable de contraintes. Soit x_0 la solution ainsi obtenue. L'algorithme résout par la suite le problème de séparation associé à x_0 et P . Si $x_0 \in P$ alors x_0 est optimale pour (4.1). Sinon il détermine une contrainte (coupe) dans $\tilde{A}x \geq \tilde{b}$ violée par x_0 , il ajoute cette contrainte au programme et il répète le processus jusqu'à ce qu'il détermine une solution optimale qui soit dans P ou qu'il ne trouve plus de contrainte violée à ajouter. Ainsi l'algorithme résout une séquence de programmes linéaires, les points de P étant des solutions pour ces programmes. Ce que l'on espère c'est que la solution $\bar{x}$ obtenue à la fin de cette phase soit dans P .

Mais en général, cette solution peut être fractionnaire. Dans ce cas, l'algorithme fait un *branchement* sur une composante fractionnaire $\bar{x}_e$ en construisant deux nouveaux programmes obtenus à partir du programme courant, en ajoutant respectivement les égalités (non valides) $x_e = 1$ ou $x_e = 0$ et en procédant comme ci-dessus pour les polyèdres $P \cap \{x \mid x_e = 0\}$ et $P \cap \{x \mid x_e = 1\}$.

4.2 L'algorithme

Dans ce paragraphe nous présentons l'algorithme de coupes et de branchement que nous avons développé pour résoudre le problème TECP. Puisque le polytope TSP est une face du $\text{TECP}(G)$, toute contrainte valide pour le $\text{TECP}(G)$ est aussi valide pour le TSP. Ceci nous a motivé d'utiliser la description partielle du $\text{TECP}(G)$ dont nous disposons pour résoudre des instances du TSP.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et un système de poids associés aux arêtes, notre algorithme commence par résoudre le programme linéaire (PL) suivant

$$\left. \begin{array}{l} \min cx \\ x(\delta(v)) \geq 2 \quad \text{pour tout } v \in V, \\ 0 \leq x(e) \leq 1 \quad \text{pour tout } e \in E, \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

qui consiste en $|V|$ inégalités de degré et $2|E|$ inégalités triviales (dans le cas de TSP, les inégalités de degré seront remplacées par des égalités). La plupart de ces inégalités définissent des facettes pour le $\text{TECP}(G)$ (voir [55]). Dans [55] Mahjoub a donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalités de coupes et triviales définissent des facettes pour $\text{TECP}(G)$.

En général, une solution optimale $y \in \mathbb{R}^E$ de (4.2) n'est pas réalisable pour le polytope $\text{TECP}(G)$ (si c'est le cas, alors cette solution est optimale pour le problème TECP et on termine). Dans chaque itération de l'algorithme de coupes, on essaye de trouver des inégalités (en particulier de coupes et de F -partition (voir Paragraphe 3.3)) valides pour le $\text{TECP}(G)$ violées par y , où y est la solution optimale du programme linéaire courant. Les algorithmes qui nous donnent de telles inégalités sont appelés des *procédures de séparation*. Nous ajoutons les inégalités violées trouvées au système linéaire courant et nous résolvons le nouveau programme linéaire ainsi obtenu. Nous répétons ce processus jusqu'à ce que la solution y soit dans $\text{TECP}(G)$, ou qu'on ne puisse plus trouver d'inégalités violées par y . Dans ce dernier cas nous faisons appel à un branchement. Ceci est assuré à l'aide de MINTO, un logiciel permettant de résoudre des programmes mixtes. Une brève description de ce logiciel sera donnée plus tard.

Puisque nous utilisons une description partielle de $\text{TECP}(G)$, on n'est pas sûr de

trouver une solution optimale pour le TECP pour tout graphe G et toute fonction coût c sans la phase de branchement. On a trouvé intéressant que pour certaines instances de TSP les inégalités de coupes et de F -partition suffisent pour trouver une solution optimale. Dans le cas où ces contraintes ne seraient pas suffisantes, elles nous permettent néanmoins d'aborder la phase de coupes et branchement avec une bonne borne inférieure, (dans le chapitre suivant nous donnerons des exemples illustrant ces situations).

La remarque suivante nous permet de réduire le graphe (au sens des arêtes) dans lequel les procédures de séparation seront appliquées.

Remarque. Soit $G = (V, E)$ un graphe et $F \subset E$ un sous-ensemble d'arêtes de E . Soit $G' = (V, E')$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant les arêtes de F ($E' = E \setminus F$). Supposons que $ax \geq \alpha$ est une inégalité valide pour le $TECP(G)$. Soit

$$\begin{aligned} \bar{a}(e) &= a(e) & \text{si } e \notin F \\ \bar{a}(e) &= 0 & \text{sinon.} \end{aligned}$$

alors la contrainte $\bar{a}x \geq \alpha$ est valide pour le $TECP(G')$.

Par cette remarque, si $ax \geq \alpha$ est violée par $\bar{x}$, alors en posant $F = \{e \mid \bar{x}(e) = 0\}$, et $\bar{x}'(e) = \bar{x}(e)$ si $e \in E \setminus F$, $\bar{a}x \geq \alpha$ serait également violée par $\bar{x}'$. Donc pour chercher une contrainte violée par la solution du programme linéaire courant on peut considérer le graphe $(V, E \setminus F)$ à la place de (V, E) . On a remarqué que cette simplification permet d'améliorer la performance de nos procédures de séparation. L'organigramme de notre algorithme est donné par la Figure 4.1. Les paragraphes suivants seront consacrés à la présentation des procédures de séparation des inégalités de coupes $\text{COUPE}()$ et de F -partition $F\text{-PARTITION}()$ et à la description du logiciel MINTO utilisé pour la phase coupes et branchement.

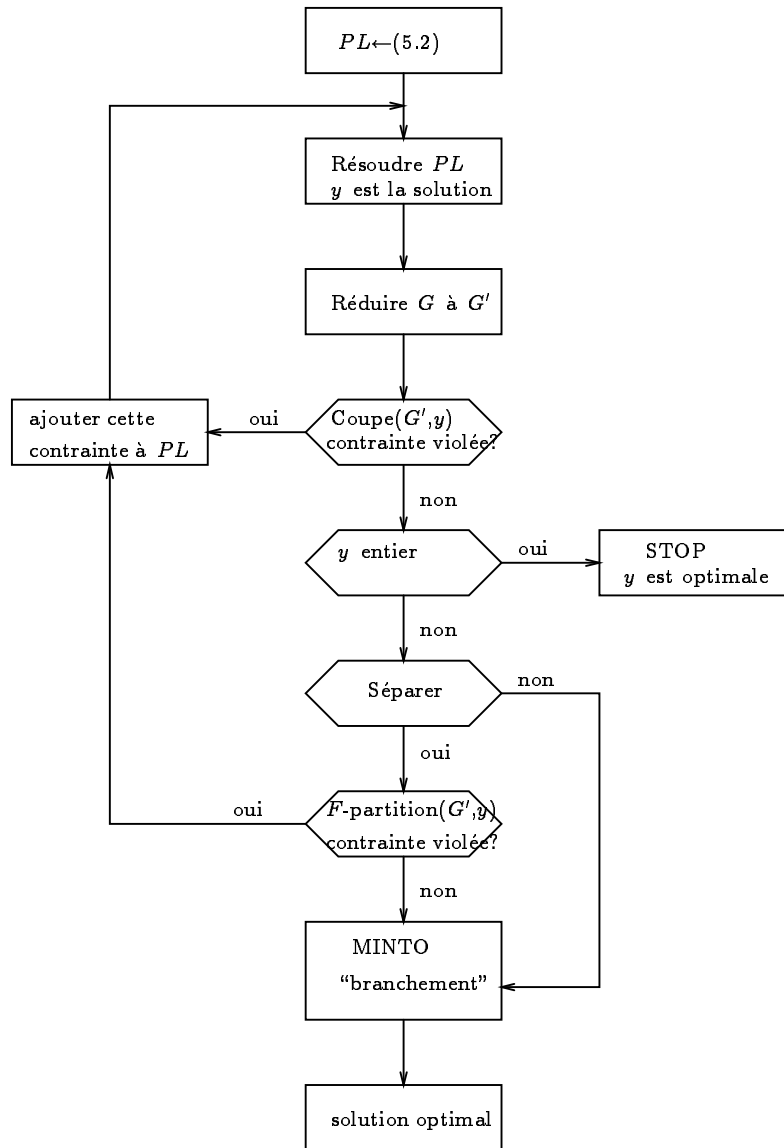


Figure 4.1 : Algorithme de coupe

4.2.1 Séparation des inégalités de coupes

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}_+^E$, le problème de recherche d'inégalités de coupes violées par x , se ramène à la recherche d'une coupe minimum dans G , où x représente les capacités des arêtes de G . En utilisant un algorithme polynomial pour le problème de flot maximum [25, 28] et le fameux théorème de flot

maximum-coupe minimum (cf. Ford et Fulkerson [33]), on peut trouver une coupe minimum dans G en temps polynomial. Un des plus performants algorithmes de flot maximum est celui de Goldberg et Tarjan [40]. Nous utilisons cet algorithme et le code correspondant de Goldberg et Tarjan pour séparer les inégalités de coupes.

Soit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. $\text{Coupe-Min}(G, x, v_1, v_i)$ est une fonction qui utilise l'algorithme de Goldberg et Tarjan [40] pour la recherche d'une coupe minimum dans G séparant v_1 de v_i . En faisant varier $i = 2, \dots, n$, le minimum des valeurs données par $\text{Coupe-Min}()$, nous donne la valeur de la coupe minimum dans G . Ici, on s'arrête dès qu'on trouve une coupe ayant une capacité strictement inférieure à 2. Et donc notre procédure de séparation des inégalités de coupes $\text{COUPE}()$, s'écrit comme suit

COUPE(G, x)

étape 0. $i \leftarrow 2$;

étape 1. Tant que $\text{Coupe-Min}(G, x, v_1, v_i) \geq 2$ et $i \leq n$ faire
 $i \leftarrow i + 1$;

étape 2. Si $i \leq n$ alors la coupe séparant v_1 de v_i est violée par x , terminer.
sinon il n'existe pas d'inégalités de coupes violées par x , terminer.

4.2.2 Séparation des inégalités de F -partition

Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et des entiers positifs r_v pour tout $v \in V$, un r -recouvrement est un ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que $|F \cap \delta(v)| \geq r_v$ pour tout $v \in V$. Si les arêtes sont munies d'un système de poids alors le problème du r -recouvrement est de trouver un r -recouvrement de poids minimum. Il est clair qu'une solution du problème $k\text{ECON}$ (voir Introduction) défini par un graphe G et un vecteur $r \in N^V$ est aussi une solution du problème du r -recouvrement. Le problème du r -recouvrement est polynomial. En effet ce problème peut être transformé en un problème de b -couplage [27]. En conséquence, on peut déterminer en temps polynomial une borne inférieure pour le problème $k\text{ECON}$ en résolvant le problème du r -recouvrement. Cette relaxation intéressante a été considérée par Grötschel, Monma et Stoer [47].

Dans [27], Edmonds a non seulement donné un algorithme polynomial pour ré-

soudre le problème du b -couplage, mais il a aussi donné une description complète du polytope associé. Les inégalités “blossom” d’Edmonds pour ce polytope, peuvent être transformées en des contraintes valides pour le polytope des r -recouvrements. Cette transformation (voir Grötschel, Monma et Stoer [44]) nous donne les inégalités du r -recouvrement qui sont aussi valides pour le polytope associé au problème k ECON. Quand $r_v = 2$ pour tout $v \in V$, ces inégalités ne sont rien d’autre que les inégalités de F -partition où les éléments de la partition sont des singletons. Padberg et Rao [64] ont donné un algorithme polynomial pour séparer les inégalités “blossom” du b -couplage. Par une simple transformation [47], cet algorithme résout en même temps le problème de séparation des inégalités de r -recouvrement. Grötschel, Monma et Stoer [47] ont étendu la classe des inégalités de r -recouvrement en une classe plus générale de contraintes appelées les inégalités de “ r -recouvrement généralisées”. Dans [46], ils ont montré que le problème de séparation pour ces contraintes est NP-dur. Quand $r_v = 2$ pour tout $v \in V$, les contraintes de r -recouvrement généralisées se ramènent aux inégalités de F -partition. Grötschel, Monma et Stoer citeGMS:CRC ont développé un algorithme de coupes et branchement utilisant une heuristique pour séparer les inégalités de r -recouvrement généralisées. Cette heuristique utilise l’algorithme de Padberg et Rao [64]. Dans la suite, nous donnons une méthode polynomiale très simple utilisant l’Algorithme A du Paragraphe 3.1.1, pour résoudre le problème de séparation des inégalités de F -partition quand l’ensemble F est fixé.

Méthode utilisée

Etant donnée une solution $x \in \mathbb{R}_+^E$, on fixe $F \subset E$ et on résout le problème de séparation pour les contraintes de F -partition de la manière suivante:

- Choisir $V_0 \subset V$ tel que $F \subseteq \delta(V_0)$ et $|F| = 2k + 1$.
- Contracter V_0 (v_0 dénotera le sommet qui résulte de cette contraction) et supprimer F de G . Soit $G' = (V', E')$ le nouveau graphe.
- Chercher une inégalité de partition violée dans G' de type

$$x(\delta(V'_1, \dots, V'_p)) \geq (p - 1) - k, \quad (4.3)$$

où $V'_1, \dots, V'_p$ est une partition de G' . Soit $V_1, \dots, V_p$ la partition de V obtenue à partir de $V'_1, \dots, V'_p$ en éclatant le sommet v_0 . Si toutes les arêtes de F apparaissent dans $\delta(V'_1, \dots, V'_p)$, alors on aura trouvé une inégalité de F -partition violée par x , sinon on aura trouvé juste une inégalité valide pour le $\text{TECP}(G)$.

Pour trouver une inégalité violée (4.3), on cherche l'inégalité la plus violée

$$x(\delta(V'_1, \dots, V'_p)) \geq p - 1, \quad (4.4)$$

en appliquant l'algorithme A du Paragraphe 3.1.1. S'il n'existe pas d'inégalité violée (4.4), alors il est de même pour (4.3). Sinon, puisque l'Algorithme A donne l'inégalité la plus violée, alors on trouve l'inégalité (4.3) la plus violée, si elle existe.

La procédure F -PARTITION() de séparation des contraintes de F -partition peut donc être présentée de la manière suivante.

F -PARTITION(G, x, F, V_0)

étape 0. Supprimer F de G et contracter V_0 , et considérer le nouveau graphe ainsi obtenu pour le reste des opérations.

étape 1. Poser $\bar{y}(v_i) \leftarrow 2$ pour $i = 1, \dots, n$; $k \leftarrow 1$; $\mathcal{F} \leftarrow \emptyset$.

étape 2. Si v_k appartient à un ensemble de $\mathcal{F}$ aller à l'étape 4, sinon

poser $\alpha \leftarrow f(\bar{S}) - \bar{y}(\bar{S}) = \max\{f(S) - \bar{y}(S) \mid v_k \in S\}$,

$\bar{y}(v_k) \leftarrow \bar{y}(v_k) + \alpha$,

$\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{F} \cup \{\bar{S}\}$.

étape 3. Tant qu'il existe deux ensembles S et T dans $\mathcal{F}$ avec $S \cap T \neq \emptyset$ faire

$\mathcal{F} \leftarrow (\mathcal{F} \setminus \{S, T\}) \cup \{S \cup T\}$.

étape 4. Poser $k \leftarrow k + 1$, si $k \leq n$ aller à l'étape 2.

étape 5. Soit $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_p\}$.

si $\sum \bar{y}_i > 0$

alors si $x(\delta(S_1, \dots, S_p)) < p - 1 - \left(\frac{|F| - 1}{2}\right)$

alors $x(\delta(S_1, \dots, S_p)) \geq p - 1 - \left(\frac{|F| - 1}{2}\right)$ est une contrainte de F -partition

violée par x , terminer.

sinon il n'existe pas de contraintes de F -partition violées par x , terminer.

sinon il n'existe pas de contraintes de F -partition violées par x , terminer.

La remarque et le lemme suivants nous permettent d'envisager une implémentation plus adéquate que l'implémentation directe de la procédure F -PARTITION().

Remarque 4.1. Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une fonction de capacité c associée aux arêtes de G et deux sommets s et t de V , l'algorithme de Goldberg et Tarjan pour le calcul d'un flot maximum séparant s et t , donne une coupe de capacité minimum $\delta(W)$, $W \subset V$, séparant s et t telle que $|W|$ soit minimum.

Le lemme suivant nous informe sur l'intersection des ensembles de la famille $\mathcal{F}$, afin de réaliser le test de l'étape 3 sans considérer toutes les intersections possibles.

Lemme 4.2. Soit $S_k \subseteq V$, l'ensemble obtenu à la $k^{\text{ième}}$ itération, tel que $f(S_k) - \bar{y}(S_k) = \max \{f(S) - \bar{y}(S) \mid v_k \in S\}$ et $|S_k|$ maximum. Soit $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_{k-1}\}$ la famille des ensembles obtenus aux $k - 1$ premières itérations. Alors pour tout $i = 1, \dots, k - 1$ on a $S_i \subset S_k$ ou $S_i \cap S_k = \emptyset$.

Preuve. Tout d'abord remarquons que pour tout $i = 1, \dots, k - 1$, S_i est serré par la solution courante $\bar{y}$, c'est-à-dire $f(S_i) = \bar{y}(S_i)$.

Soit $S_i \in \mathcal{F}$. Supposons que le lemme ne soit pas vrai et que $S_i \not\subset S_k$ et que $S_i \cap S_k \neq \emptyset$. On peut supposer aussi que $r \in S_i \cap S_k$ les autres cas sont similaires. (Voir Figure 4.2). Rappelons ici que r est un sommet fixé de V et $f(S)$ définie par

$$f(S) = \begin{cases} 2 - \bar{x}(\delta(S)), & \text{si } r \notin S, \\ -\bar{x}(\delta(S)), & \text{si } r \in S. \end{cases}$$

Puisque $|S_i \cup S_k| > |S_k|$, d'après notre hypothèse on a

$$f(S_i \cup S_k) - \bar{y}(S_i \cup S_k) < f(S_k) - \bar{y}(S_k),$$

et d'après la définition de $f(S)$ il s'en suit:

$$-\bar{x}(\delta(S_i \cup S_k)) - \bar{y}(S_i) - \bar{y}(S_k) + \bar{y}(S_i \cap S_k) < -\bar{x}(\delta(S_k)) - \bar{y}(S_k)$$

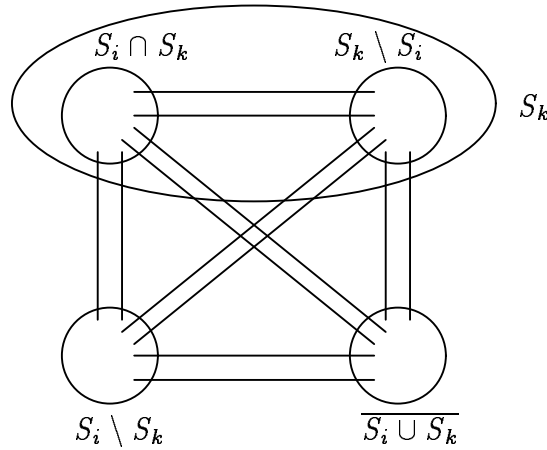


Figure 4.2 :

D'où

$$-\bar{x}(S_i \setminus S_k, \overline{S_i \cup S_k}) - \bar{y}(S_i) + \bar{y}(S_i \cap S_k) < -(\bar{x}(S_k \setminus S_i, S_i \setminus S_k) + \bar{x}(S_i \cap S_k, S_i \setminus S_k)).$$

En ajoutant $-(\bar{x}(S_i \cap S_k, S_k \setminus S_i) + \bar{x}(S_i \cap S_k, \overline{S_i \cup S_k}) + \bar{x}(S_k \setminus S_i, S_i \setminus S_k))$ aux deux membres de l'inégalité ci-dessus on obtient

$$f(S_i) - \bar{y}(S_i) + \bar{y}(S_i \cap S_k) < f(S_i \cap S_k) - 2\bar{x}(S_k \setminus S_i, S_i \setminus S_k).$$

Comme S_i est un ensemble serré par $\bar{y}$, on a $f(S_i) - \bar{y}(S_i) = 0$. Et donc on obtient

$$f(S_i \cap S_k) - \bar{y}(S_i \cap S_k) > 0.$$

Ce qui est impossible car $\bar{y}$ vérifie le système (3.6). □

Pour trouver l'ensemble $\bar{S}$ à l'étape 2, on peut inverser les arcs (s, i) et les arcs (i, t) du réseau D (cf. Paragraphe 3.1.1), et calculer à l'aide de l'algorithme de Goldberg et Tarjan une coupe minimum séparant t et s . D'après la Remarque 4.1, l'ensemble serré $\bar{S}$ est maximum. Par conséquent, d'après le Lemme 4.2, l'ensemble S_k construit à l'itération k est tel que $S_k \cap S_i = \emptyset$ ou $S_i \subset S_k$ pour $i = 1, \dots, k-1$. D'où le test de l'étape 3 est facilement et rapidement réalisé.

4.2.3 Un bref aperçu sur MINTO

MINTO (Mixed INTeger Optimizer) [62] est un outil qui permet de résoudre des problèmes de programmation linéaire mixtes, en utilisant des techniques de branchement et évaluation (branch-and-bound). Les problèmes considérés sont de la forme:

$$\begin{aligned}
 & \max \sum_{j \in B} c_j x_j + \sum_{j \in I} c_j x_j + \sum_{j \in C} c_j x_j \\
 & \sum_{j \in B} a_{ij} x_j + \sum_{j \in I} a_{ij} x_j + \sum_{j \in C} a_{ij} x_j \sim b_i \quad i = 1, \dots, m \\
 & 0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad j \in B \\
 & l_{xj} \leq x_{ij} \leq u_{xj} \quad j \in I \cup C \\
 & x_j \in \mathbb{Z} \quad j \in B \cup I \\
 & x_j \in \mathbb{R} \quad j \in C
 \end{aligned}$$

où B est l'ensemble d'indices des variables en 0-1, I est l'ensemble d'indices des variables entières, C est l'ensemble d'indices des variables continues, le sens $\sim$ d'une contrainte peut être $\leq$, $\geq$, ou $=$, et les bornes inférieures et supérieures peuvent être $-\infty$ ou $+\infty$ ou un nombre rationnel quelconque.

L'efficacité d'un algorithme de branchement et évaluation dépend beaucoup de la procédure d'évaluation utilisée et de la taille du problème. Si cette procédure fournit des bornes assez larges lorsque la taille du problème est importante, l'algorithme peut prendre un temps considérable pour donner une solution optimale. Pour remédier à ce problème, MINTO donne la possibilité à l'utilisateur d'introduire des fonctions spécifiques au problème qui permettent d'accélérer le calcul de la solution optimale. Ces fonctions peuvent être par exemple des procédures de séparation de contraintes valides. Pour notre problème nous avons incorporé dans la phase branchement gérée par MINTO, l'algorithme de séparation des contraintes de coupes.

La puissance de ce logiciel est qu'il permette à l'utilisateur de se concentrer sur des aspects spécifiques au problème plutôt que sur des détails comme la structure de données ou l'implémentation d'un algorithme de programmation linéaire ou de branchement et évaluation. Pour la résolution d'un programme linéaire, MINTO fera appel à un logiciel qui résoud un programme linéaire. Pour plus de détails sur MINTO voir [62].

Chapitre 5

Résultats expérimentaux

Notre objectif principal dans cette phase expérimentale était de mesurer l'efficacité des contraintes de coupes et des contraintes de F -partition dans une méthode de coupes pour le problème du sous-graphe 2-arête-connexe minimum ainsi que pour le problème étroitement lié du voyageur de commerce. On souhaite en particulier voir si les contraintes de F -partition avec les contraintes de coupes et les inégalités triviales peuvent suffire pour obtenir une solution optimale. Et dans le cas contraire, si ces contraintes peuvent donner une bonne borne inférieure pour entamer la phase de branchement. (Cette phase est généralement très coûteuse).

Notre algorithme suit l'approche standard décrite au paragraphe précédent. Comme il a été déjà souligné, les procédures de coupes que nous avons développées sont propres au problème TECP. Toute autre technique de réduction du programme linéaire est automatiquement faite par MINTO. Quand on achève la phase de coupes, si la solution obtenue est en 0-1, on termine. Sinon MINTO commence la phase de branchement. Ceci consiste à choisir une variable fractionnaire, la fixer à 0, ensuite à 1 et à résoudre les programmes linéaires ainsi obtenus. Ici on utilisera encore la procédure de séparation des contraintes de coupes pour déterminer d'éventuelles contraintes valides violées par la solution courante. Cet appel est nécessaire pour assurer la réalisabilité de la solution finale. Le logiciel que nous utilisons pour résoudre un programme linéaire est le CPLEX initialement développé par Bixby [8].

Puisque le polytope du TSP est une face du polytope $\text{TECP}(G)$, on a aussi expérimenté notre programme pour résoudre des instances du TSP.

Dans la Table 5.1 on présente des résultats concernant la performance de notre algorithme appliqué à des instances prises de la librairie TSPLIB [70] pour résoudre le problème TECP. La Table 5.2 présente des résultats concernant le problème TSP pour les mêmes instances. Les graphes traités sont complets et le coût d'une arête représente la distance euclidienne entre ses extrémités.

La première colonne de chaque table, contient la liste des problèmes traités, le nombre donné à la fin du nom de chaque problème est la taille de ce problème (nombre de sommets). Les entrées des autres colonnes de gauche à droite sont:

IT	nombre d'itérations (= nombre d'appels à la résolution du PL)
NC	nombre d'inégalités de coupes utilisées par l'algorithme de coupes.
NFP	nombre d'inégalités de F -partition utilisées par l'algorithme de coupes.
C	la valeur de la solution optimale à la fin de l'algorithme de coupes.
T	le temps total de l'algorithme de coupes en secondes (sans la phase de branchement).
COPT	la valeur optimale.
PAS	$100 \times (\text{COPT} - C) / \text{COPT}$ (= pourcentage de l'erreur relative à la fin de l'algorithme de coupes).
SB	le nombre de sommets générés dans la phase de branchement.
PB	la profondeur maximum de l'arbre exploré dans la phase de branchement.
TT	temps total d'exécution en secondes (dans les phases de coupes et de branchement).

Les contraintes de F -partition avec les contraintes de coupes et les inégalités triviales n'ont pas suffi pour résoudre les cinq instances de TECP présentées dans la Table 5.1, malgré le nombre important de contraintes de F -partition ajoutées. Mais par con-

Problème	IT	NC	NFP	C	T	COPT	PAS	SB	PB	TT
st70	142	101	17	674.33	79	675	0.1	9	3	91
eil101	85	54	4	628	58	629	0.15	11	5	92
pr76	110	43	44	106241.33	117	106492	0.2	7	3	122
eil51	75	14	37	426	41	426	0.0	9	3	44
kroA100	277	154	57	21236	412	21261	0.1	16	4	459

Tableau 5.1 : Performances de l'algorithme de coupes et de branchement appliqué au problème TECP

tre, l'erreur relative entre la borne inférieure donnée à la fin de l'algorithme de coupes et la solution optimale est assez petite. Elle n'excède pas les 0.2%. Pour le problème eil51, cette erreur est de 0.0%. La phase de branchement était nécessaire pour trouver la solution optimale (voir Figure 5.3), la solution donnée à la fin de l'algorithme de coupes étant fractionnaire. Cette solution est présentée par la Figure 5.2, où les arêtes à 1 sont représentées par des lignes continues et les arêtes fractionnaire par des lignes discontinues. On n'a pas pu en effet détecter de contraintes de F -partition violées par cette solution. La Figure 5.1 montre une solution intermédiaire obtenue par l'algorithme de coupes pour le même problème. Pour cette solution on a détecté une contrainte de F -partition violée dont l'ensemble F est choisi parmi les arêtes à 1 et est représentée par des lignes en gras. Les sommets de la partie supérieure de la Figure 5.1 sont dans V_0 , les autres ensembles V_i sont représentés par des ellipses et des cercles. Dans ce cas la contrainte est $x(\Delta) \geq 7$, alors que la solution courante nous donne 6.5 pour le membre gauche de cette contrainte. Par contre pour résoudre le TSP pour le même problème (eil51), l'algorithme de coupes sans aucun branchement (voir Table 5.2) nous a permis de déterminer une tournée optimale (voir Figure 5.3). Pour cette solution seulement 13 contraintes de coupes et 37 contraintes de partition étaient nécessaires. La solution obtenue est aussi une solution optimale pour le TECP.

Les solutions de TECP correspondantes aux problèmes st70 et eil101 sont également des cycles Hamiltoniens. Par contre pour les problèmes pr76 et kroA100, les solutions optimales du TECP données par les Figures 5.4 et 5.6 ne sont pas des tournées. Ceci montre que même dans le cas où les coûts associés aux arêtes représentent la distance euclidienne, les solutions du TECP et TSP peuvent être différentes. Pour le problème kroA100, on remarque que 57 contraintes de F -partition étaient fournies pour le TECP et 79 pour le TSP. Le PAS pour les deux problèmes est assez faible. Dans toutes les

Problème	IT	NC	NFP	C	T	COPT	PAS	SB	PB	TT
st70	136	86	20	674.33	81	675	0.1	8	3	97
eil101	101	54	4	628	62	629	0.15	19	5	150
eil51	60	13	37	426	43	426	0.0	1	0	43
kroA100	397	158	79	21240.55	700	21282	0.2	29	5	900

Tableau 5.2 : Performances de l'algorithme de coupes et de branchement appliqué au problème TSP

contraintes de F -partition ajoutées et pour les différents problèmes, $|F|$ était au plus 7.

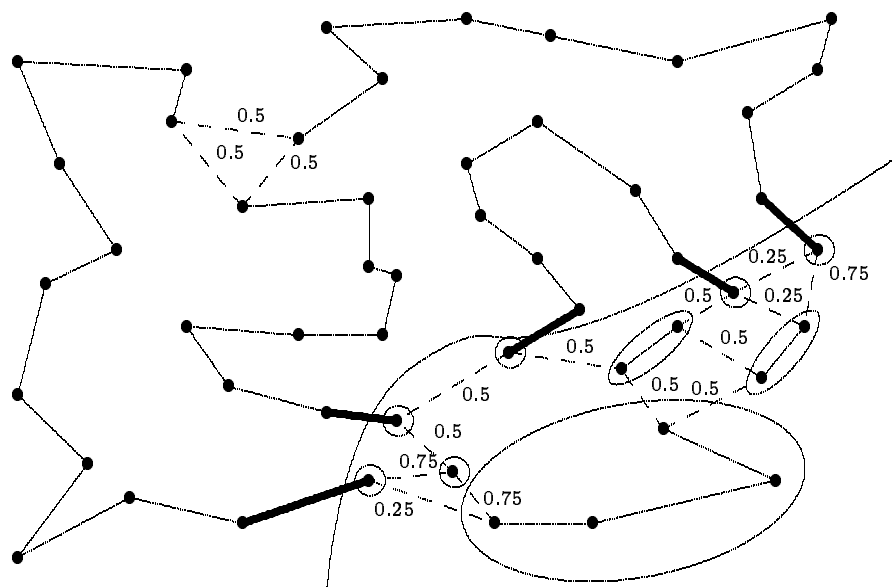


Figure 5.1 : solution intermediaire de eil51

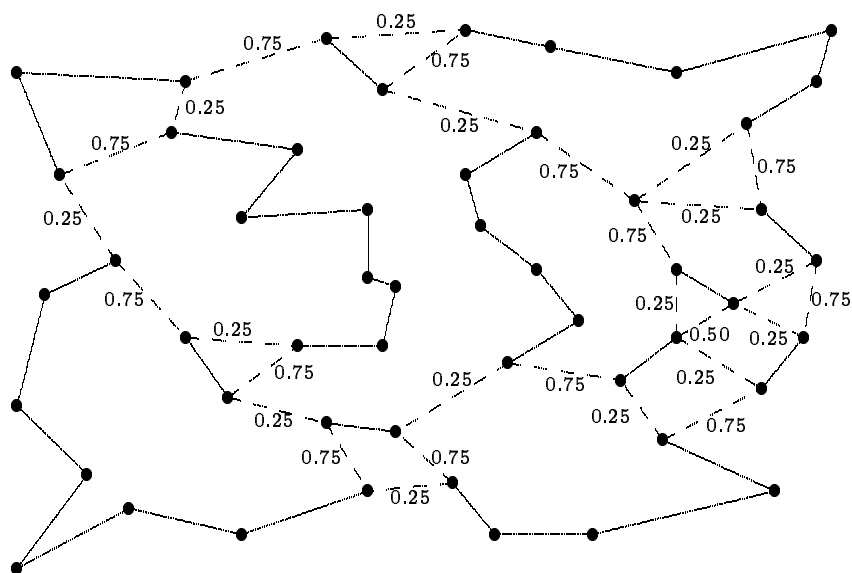


Figure 5.2 : solution de l'algorithme de coupe eil51

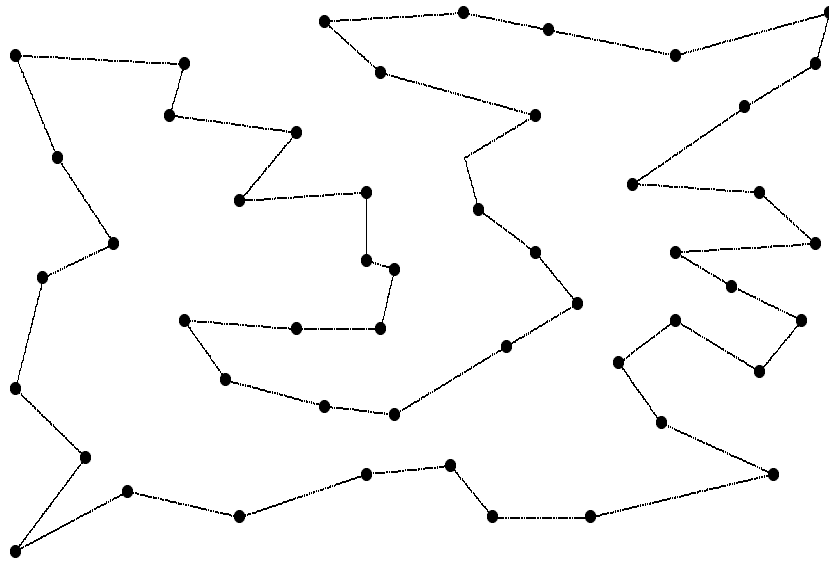


Figure 5.3 : solution optimale de TECP et TSP pour eil51

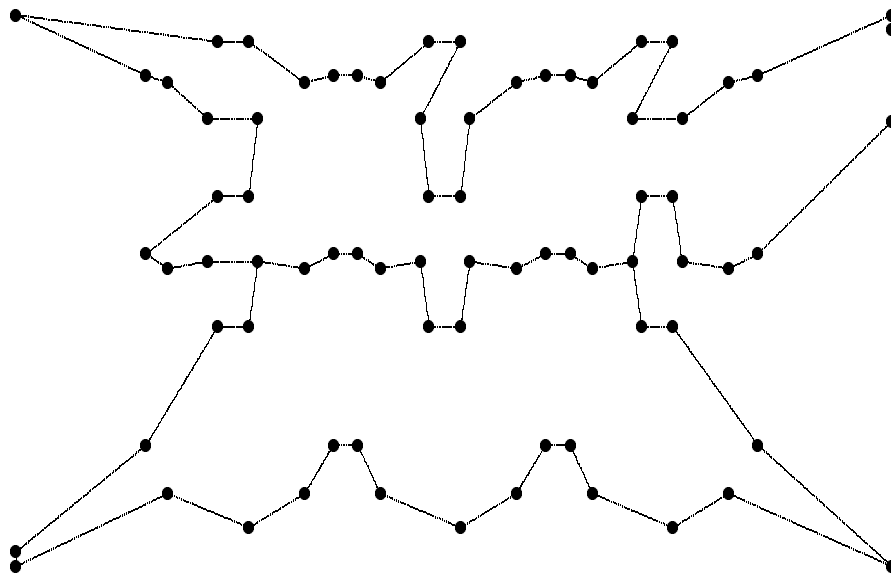


Figure 5.4 : solution optimale de TECP pour pr76

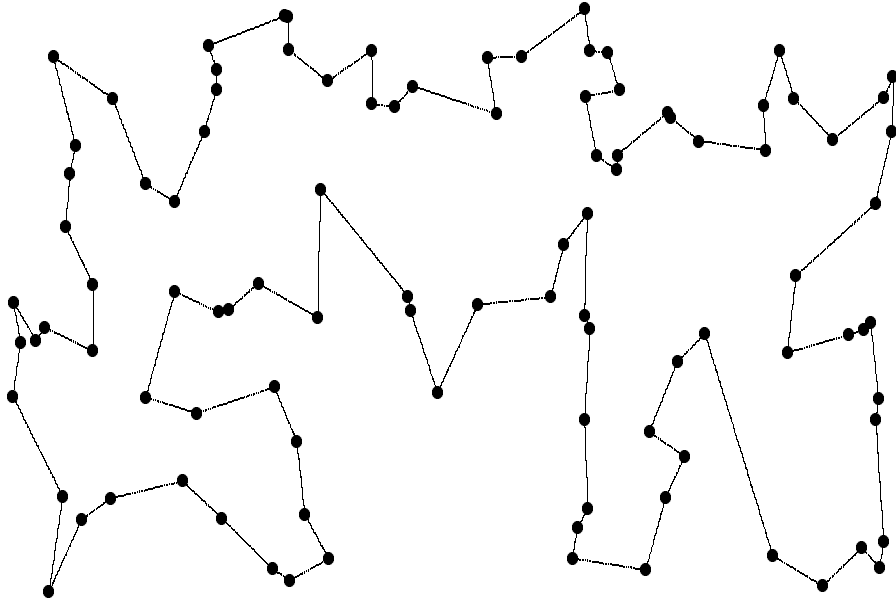


Figure 5.5 : solution optimale de TSP pour kroA100

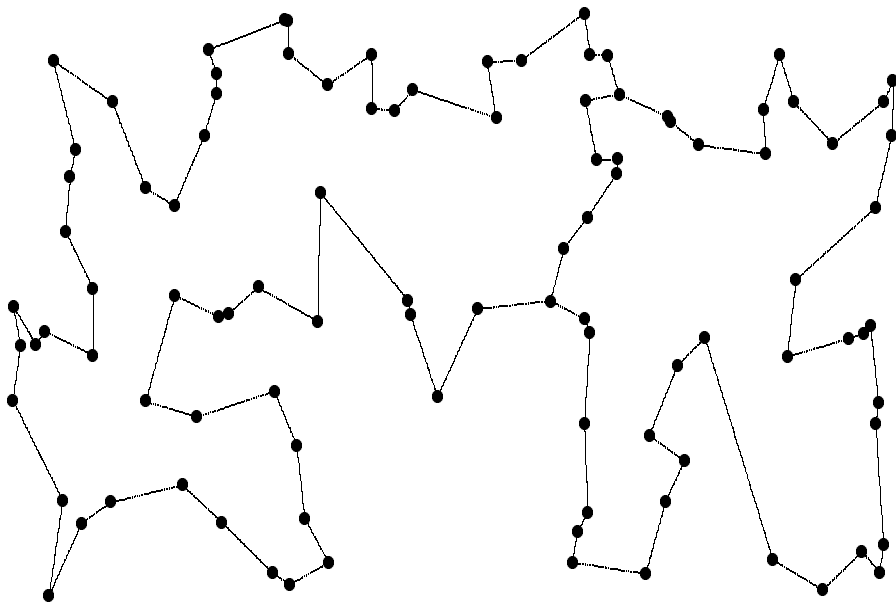


Figure 5.6 : solution optimale de TECP pour kroA100

Conclusion

D'après les résultats commentés ci-dessus, on en déduit que les inégalités triviales, de coupes et de F -partition représentent une bonne relaxation des polyèdres $\text{TECP}(G)$ et $\text{TSP}(G)$.

Conclusion

Dans cette thèse nous avons considéré le problème du sous-graphe 2-arête-connexe minimum. Nous nous sommes intéressé en particulier au cas Steiner, où certains sommets du graphe sont distingués. Nous avons étudié une approche polyédrale pour ce problème. Nous avons donné une caractérisation linéaire complète du polytope associé à ce problème dans le cas où le graphe est série-parallèle. Nous avons discuté également de certains polyèdres liés à ce polytope. Nous avons examiné le dominant de ce polytope et nous en avons donné une caractérisation dans une classe de graphes contenant les graphes série-parallèles. Nous avons étudié également le polytope du problème du voyageur de commerce Steiner. Nous avons donné une description de ce polytope dans la classe des graphes série-parallèles.

Nous avons étudié également une méthode de coupes pour le problème du sous-graphe 2-arête-connexe. Nous avons donné dans un premier temps, un algorithme polynomial pour séparer les contraintes de partition. Et nous avons montré comment les algorithmes de Barahona et Cunningham peuvent être utilisés pour séparer les contraintes de F -partition. Ces contraintes sont utilisées par la suite dans un algorithme de coupes et branchement pour résoudre des instances du sous-graphe 2-arête-connexe et du problème du voyageur de commerce.

A la suite de cette étude, certaines questions restent ouvertes et méritent d'être étudiées.

D'abord sur le plan polyédral. Il serait intéressant de voir si des descriptions similaires à celles données pour le $\text{STECSP}(G, S)$ et son dominant dans les graphes série-parallèles, peuvent être obtenues pour le polytope des sous-graphes Steiner k -arête-connexes et son dominant dans la même classe de graphes, où k est un entier fixé. Si k est impair, des nouvelles contraintes (de partition) sont nécessaires. Aussi, il serait

intéressant de voir si les résultats du chapitre 1 et 2 peuvent être étendus à des classes de graphes plus générales que la classe des graphes série-parallèles. En particulier, de voir si la description du dominant du $\text{STECSP}(G, S)$ peut être généralisée à la classe des graphes sans $K_5 - e$ ($K_5 - e$ est le graphe K_5 moins une arête).

Sur le plan algorithmique nous avons remarqué que les contraintes de F -partition sont très efficaces pour résoudre le problème TECP et le problème du voyageur de commerce. Ces contraintes peuvent être séparées en temps polynomial quand $|F|$ est fixé. Une question intéressante serait de voir s'il existe un algorithme polynomial pour séparer ces contraintes quand F est quelconque. De plus, nous avons remarqué que la taille maximale de F utilisé pour résoudre des instances du problème du sous-graphe 2-arête-connexe et du problème du voyageur de commerce est 7. Ceci peut être expliqué par le fait que les graphes étaient complets. Mais nous pensons d'une manière générale que nous ne devons pas avoir besoin de grands ensembles F pour résoudre ces problèmes ou, dans le cas échéant, pour déterminer une bonne borne inférieure pour lancer la procédure de branchement. Bien sûr, on peut toujours construire un graphe où aura recours à des ensembles F de grandes tailles (par exemple une roue W_k avec k sommets, où k est assez grand). Les contraintes de F -partition avec les contraintes de coupes et les contraintes triviales constituent, à notre avis, une très bonne relaxation linéaires pour les deux problèmes TECP et TSP.

Une question paraît intéressante à la suite de cette remarque est: Est-ce-que cette relaxation suffit pour décrire le polytope dans un graphe où les contraintes de F -partition sont telles que $|F| \leq k$, où k est fixé? Ceci est le cas par exemple des graphes sans W_4 (la roue avec 4 sommets) où la taille de tout F est 3.

Annexe

1) Polyèdres.

Combinaison convexe. Soit $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$. Un point $x \in \mathbb{R}^n$ peut être obtenu par combinaison convexe des points de S s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, \dots, k.$$

Dimension. Un polyèdre Q dans $\mathbb{R}^n$ est de dimension k , noté $\dim(Q) = k$, si le nombre maximum de points de Q affinement indépendants est $k + 1$.

Dominant. Soit Q un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$. Le dominant de Q est le polyèdre donné par

$$\text{Dom}(Q) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in Q \text{ et } x \leq y\},$$

Enveloppe convexe. Soit $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$. L'enveloppe convexe des points de S , notée $\text{conv}(S)$, est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ pouvant être obtenus par combinaisons convexes de points de S .

Face. Soit $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ un polyèdre de $\mathbb{R}^n$ et $ax \geq \alpha$ une inégalité valide pour Q . L'ensemble $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in Q, ax = \alpha\}$ est dit une face de Q .

Facette. Une face F d'un polyèdre Q est une facette de Q si $\dim(F) = \dim(Q) - 1$.

Indépendance affine. Soit $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$. Ces k

points sont dits affinement indépendants si le système

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i = 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0,$$

a comme unique solution $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \dots, k$.

Inégalité valide. Soit Q un polyèdre. Une inégalité $ax \geq \alpha$ est une inégalité valide pour Q si elle est vérifiée par chacun des points de Q .

Inégalité serrée. Etant donné une contrainte $ax \geq \alpha$ et un point $x^* \in \mathbb{R}^n$, $ax \geq \alpha$ est dite serrée par x^* si $ax^* = \alpha$.

Point extrême. Soit Q un polyèdre. Un point $x \in Q$ est un point extrême de Q s'il n'existe pas $x_1, x_2 \in Q$, $x_1 \neq x_2$ tel que $x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$.

Polyèdre. Un polyèdre Q est un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$ satisfaisant un nombre fini d'inégalité linéaires ($Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$).

Polytope. Un polyèdre borné est appelé polytope.

2) Graphes.

Chaîne. Un chaîne dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence d'arêtes $e_1, e_2, \dots, e_k$ telle que $e_1 = v_0 v_1$, $e_2 = v_1 v_2, \dots$, $e_k = v_{k-1} v_k$, où $v_1, \dots, v_k$ sont des sommets distincts de V .

Graphe connexe. Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si pour toute paire (u, v) de sommets de V , il existe une chaîne reliant u et v .

2-arbre. Un graphe est un 2-arbre s'il peut être construit à partir d'un graphe consistant en deux sommets et une arête, en appliquant d'une manière répétitive l'opération suivante: Ajouter un nouveau sommet et le lier aux extrémités d'une arête.

Graphe complet. Un graphe $G = (V, E)$ est dit complet si toute paire de sommets est reliée par une arête.

Graphe de Halin. Un graphe $G = (V, T \cup C)$ est dit de Halin si T est un arbre ne contenant pas de sommets de degré deux et C est un cycle ayant comme sommets les sommets pendants de T .

Graphe outerplanaire. Un graphe est dit *outerplanaire* s'il consiste en un cycle avec des cordes qui ne se coupent pas (une corde est une arête entre deux sommets non consécutifs du cycle). Les graphes outerplanaires sont série-parallèles.

Sous-graphe. Etant donné un graphe $G = (V, E)$, un graphe $H = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$ est dit sous-graphe de G .

Références

- [1] M.Baïou and A.R. Mahjoub, “Steiner 2-edge connected subgraph polytopes on series-parallel graphs”, (1993) à paraître dans *SIAM Journal on Discrete Mathematics*.
- [2] M.Baïou, F.Barahona and A.R. Mahjoub, “Separation of Partition Inequalities”, IBM Research Report, RC 20539(09/09/96), Optimization, T.j. Watson Research Center.
- [3] F. Barahona, “Separating from the dominant of the spanning tree polytope”, *Op. Research Letters*, 12 (1992), pp. 201-203.
- [4] F. Barahona. “Network design using cut inequalities”, *SIAM Journal on Optimization*, 6 (1996), pp. 823-837.
- [5] F. Barahona and M. Grötschel, “The Traveling Salesman Problem for Graphs not Contractible to $K_5 - \{e\}$ ”, Rapport technique n° 77, Mathematisches Institut. Universität Augsburg, June 1985.
- [6] F. Barahona and A. R. Mahjoub, “On two-connected subgraph polytopes”, *Discrete Mathematics* 147 (1995) 19-34.
- [7] D. Bienstock, E. F. Brickell and C. L. Monma, “On the structure of minimum weight k-connected spanning networks”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 3 (1990) 320-329.
- [8] R. E. Bixby, “Implementing the simplex method: The initial basis”, Technical Report TR 90-32, Department of Mathematical Sciences, Rice University, Houston, Texas, 1991.

- [9] S.C. Boyd and T. Hao, "An integer polytope related to the design of survivable communication networks", *SIAM J. Discrete Math.* Vol. 6, No 4, pp. 612-630, November 1993.
- [10] E. Cheng and W. H. Cunningham, "A faster algorithm for computing the strength of a network", *Inf. Process. Lett.*, 49 (1994), pp. 209-212.
- [11] S. Chopra and M.R. Rao, "The Steiner tree problem I: Formulations, compositions and extension of facets", *Mathematical Programming* 64 (1994) 209-229.
- [12] S. Chopra and M.R. Rao, "The Steiner tree problem II: Properties and classes of facets", *Mathematical Programming* 64 (1994) 231-246.
- [13] S. Chopra, "The k-edge connected spanning subgraph polyhedron", *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 7 (1994) 245-259.
- [14] S. Chopra and M. Stoer, Private communication.
- [15] N. Christofides, "The Traveling Salesman Problem", in: N. Christofides, ed., *Combinatorial Optimization* (Wiley, New York, 1979) pp. 131-150.
- [16] N. Christofides and C. A. Whitlock, "Network synthesis with connectivity constraints-A survey", in J. P. Brans (ed), *Operational Research* 81, North Holland, (1981) 705-723.
- [17] V. Chvátal, "Tough graphs and hamiltonian circuits", *Discrete mathematics*, 5 (1973), pp. 215-228.
- [18] G. Cornuéjols, J. Fonlupt and D. Naddef, "The traveling salesman problem on a graph and some related integer polyhedra", *Mathematical Programming* 33, (1985), 1-27.
- [19] G. Cornuéjols, D. Naddef, W.R Pulleyblank, "Halin graphs and the Traveling Salesman Problem", *Mathematical Programming*, vol.26, 1983, pp. 287-294.
- [20] R. Coullard, A. Rais, R. L. Rardin and D. K. Wagner, "The 2-connected-Steiner subgraph polytope for series-parallel graphs", Report No. CC-91-23, School of Industrial Engineering, Purdue University.

- [21] R. Coullard, A. Rais, R. L. Rardin and D. K. Wagner, "Linear-time algorithm for the 2-connected Steiner subgraph problem on special classes of graphs", Report No.91-25, School of Industrial Engineering, Purdue University.
- [22] R. Coullard, A. Rais, R. L. Rardin and D. K. Wagner, "The dominant of the 2-connected-Steiner subgraph polytope for W_4 -free graphs", Report No.91-28, School of Industrial Engineering, Purdue University.
- [23] W. H. Cunningham. "Optimal attack and reinforcement of a network", *J. of ACM*, 32 (1985), pp. 549-561.
- [24] M. Didi Biha and A. R. Mahjoub, "k-edge connected polyhedra on series-parallel graphs", *Op. Research letters*, 19 (1996) 71-78.
- [25] E. A. Dinits, "Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation", *Soviet math. Dokl.* 11 (1970) 1277-1280.
- [26] R. J. Duffin, "Topology of series-parallel networks", *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 10 (1965) 303-318.
- [27] J. Edmonds, "Maximum Matching and a Polyheron With 0,1 Vertices", *J. Res. Natl. Bur. Stand.* 69 (1965), 125-130.
- [28] J. Edmonds, "Submodular function, matroids, and certain polyhedra, in Combinatorial Structures and their Application", R. K. Guy, E. Milner, and N. Sauer, eds., New York, 1970, Gordon and Breach, pp. 69-87.
- [29] J. Edmonds and R. M. Karp, "Theoretical improvement in algorithm efficiency for network flow problems", *J. Assoc. compu. Mach.* 19 (1972) 248-264.
- [30] R.E. Erikson, C.L. Monma and A.F. Veinott, Jr. "Send-and-split method for minimum-concave-cost network flows", *Mathematics of Operations Research*, 12 (1987) 634-664.
- [31] J. Fonlupt and D. Naddef, "The traveling salesman problem in graphs with some excluded minors", *Mathematical Programming* 53 (1992) 147-172.
- [32] J. Fonlupt and A. R. Mahjoub, "Critical noninteger extreme points of the 2-edge connected subgraph polytope", preprint, (1996).

- [33] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, "Maximal flow through a network", *Can. J. Math.* 8 (1956) 399-404.
- [34] A. Frank, "On the edge-connectivity algorithm of Nagamochi and Ibaraki", Laboratoire Artemis, IMAG, Université J. Fourier, Grenoble, March 1994.
- [35] G. N. Frederickson and J. Ja'Ja', "On the relationship between the biconnectivity augmentations and traveling salesman problem", *Theoretical Computer Science* 13 (1982) 189-201.
- [36] S. Fujishige, "Submodular systems and related topics", *Mathematical Programming Study*, 22 (1984), pp. 113-131.
- [37] S. Fujishige, "Submodular Functions and Optimization", North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1991.
- [38] M. X. Goemans, "The Steiner tree polytope and related polyhedra", *Mathematical Programming* 63 (1994) 157-182.
- [39] M. X. Goemans and D. J. Bertsimas, "Survivable networks, linear programming and the parsimonious property", *Mathematical Programming* 60 (1993) 145-166.
- [40] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan, "A New Approach to the Maximum-Flow problem", *Journal of the Association for Computing Machinery*, Vol. 35, No. 4, October 1988, pp. 921-940.
- [41] O. Goldschmidt and D. S. Hochbaum, "A polynomial algorithm for the k -cut problem for fixed k ", *Math. Oper. Res.*, 19 (1994), pp. 24-37.
- [42] M. Grötschel, L. Lovász and Schrijver, "The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization", *Combinatorica* 1 (1981) 70-89.
- [43] M. Grötschel and C. Monma, "Integer polyhedra arising from certain network design problems with connectivity constraints", *SIAM Journal on Discrete Mathematics* Vol. 3, No. 4, (1990) 502-523.
- [44] M. Grötschel, C. Monma and M. Stoer, "Polyhedral approaches to network survivability", In F. Roberts, F. Hwang and C. L. Monma, editors, *Reliability of computer and Communication Networks*, volume 5, Series Discrete Mathematics and Computer Science, 121-141. AMS/ACM, 1991.

- [45] M. Grötschel, C. Monma and M. Stoer, "Facets for polyhedra arising in the design of communication networks with low-connectivity constraints", *SIAM Journal on Optimization*, 2 (3), August 1992, 474-504.
- [46] M. Grötschel, C. Monma and M. Stoer, "Computational results with a cutting plane algorithm for designing communication networks with low-connectivity constraints", *Operations Research* 40 (2) (1992) 309-330.
- [47] M. Grötschel, C. Monma and M. Stoer, "Polyhedral and computational investigations for designing communications networks with high survivability requirements", *Operations Research*, 43 (1995), pp. 1012-1024.
- [48] M. Jünger and W. R. Pulleyblank, "New primal and dual matching heuristics", Report 91.105, Institut für Informatik, Universität zu Köln, 1991.
- [49] M. Jünger, G. Reinelt and G. Rinaldi, "The Traveling Salesman Problem", Networks, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, ed. M.O. Ball, T.L. Magnanti, C.L. Monma and G.L. Nemhauser.
- [50] R. Karp and C. Papadimitriou, "On linear characterisations of combinatorial optimization problems", *Proceedings of the Twenty-first annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, IEEE (1980), 1-9.
- [51] L. G. Khachiyan, "A polynomial algorithm in linear programming", *Soviet Mathematics Doklady* 20 (1979), 191-194.
- [52] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy-Kan and D.B. Shmoys, "The Traveling Salesman Problem," (Wiley, New York, 1985).
- [53] L. Lovász, "Submodular functions and convexity", in A. Bachem et al., eds, Mathematical programming - The State of The Art, springer, Berlin, Germany (1983), pp. 235-257.
- [54] N. Maculan, "The Steiner problem in graphs", *Ann. Discrete Math.* 31 (1987) 285-212.
- [55] A. R. Mahjoub, "Two-edge connected spanning subgraphs and polyhedra", *Mathematical Programming* 64 (1994) 199-208.

- [56] F. Margot, A. Prodon and Th.M. Liebling, "Tree polyhedron on 2-tree and $(n - 2, n)$ Steiner polyhedron", Technical Report RO 910222, Département de Mathématiques, EPF Lausanne (Lausanne, 1991).
- [57] F. Margot, A. Prodon and Th.M. Liebling, "Tree polytope on 2-trees", *Mathematical Programming* 63 (1994) 183-191.
- [58] C. L. Monma, B. S. Munson and W. R. Pulleyblank, "Minimum-weight two connected spanning networks", *Mathematical Programming* 46 (1990) 153-171.
- [59] C.L. Monma and J.B. Sidney, "Sequencing with series-parallel precedence constraints", *Mathematics of Operations Research* 4 (1979) 215-224.
- [60] H. Nagamochi and T. Ibaraki, "Computing edge connectivity in multigraphs and capacitated graphs", *SIAM. J. Discrete Mathematics*, 5 (1992), pp. 54-66.
- [61] C. S. J. A. Nash-Williams, "Edge-disjoint spanning trees of finite graphs", *J. London Math. Soc.*, 36 (1961), pp. 445-450.
- [62] G.L. Nemhauser, M.W.P. Savelsbergh and G.C. Sigismondi, "MINTO, a Mixed INTegeR Optimizer", *Operations Research Letters* 15 (1994) 47-58.
- [63] M. W. Padberg and M. R. Rao, "The Russian method for linear inequalities III: Bounded integer programs", GBA Working paper 81-39 New York University, New York (1981).
- [64] M. W. Padberg and M. R. Rao, "Odd minimum cut sets and b -matchings.", *Mathematics of Operations Research*, 7:67-80, 1982.
- [65] R.G. Parker and R.L. Rardin, "The traveling salesman problem: an update of research", *Naval Research Logistics Quarterly* 30 (1983) 69-96.
- [66] A. Prodon, "Steiner trees with n terminals among $n + 1$ nodes", *Operations Research Letters* 11 (1992) 125-133.
- [67] A. Prodon, Th.M. Liebling and H. Gröfflin, "Steiner's problem on two-trees", Technical Report RO 850315, Département de Mathématiques, EPF Lausanne (Lausanne, 1985).
- [68] M. Queyranne, "A combinatorial algorithm for minimizing symmetric submodular function", in Proc. 6th ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, 1995, pp.98-101.

- [69] D. M. Ratliff and A. S. Rosenthal, "Order-picking in a rectangular warehouse : A solvable case of the travelling salesman problem", *Operations Research* 31 (1983) 507-521.
- [70] G. Reinelt, "TSPLIB - a traveling salesman problem library", *ORSA Journal on computing*, 3 (1991), pp. 376-384.
- [71] K. Steiglitz, P. Weiner and D. J. Kleitman, "The design of minimum cost survivable networks", *IEEE Transactions and Circuit Theory* 16 (1969) 455-460.
- [72] M. Stoer, "Design of Survivable Networks", Lecture Notes in Mathematics, 1531, Springer-Verlag (1992).
- [73] M. Stoer and F. Wagner, "A simple min cut algorithm", Proceedings of the 1994 European Symposium on Algorithms ESA'94, LNCS 855, *Springer Verlag* (1994), pp. 141-147.
- [74] D. M. Topkis, "Minimizing a submodular function on lattice", *Operations Research*, 26 (1978), pp. 305-321.
- [75] W. T. Tutte, "On the problem of decomposing a graph into n connected factors", *J. London Math. Soc.*, 36 (1961), pp. 221-230.
- [76] J.A. Wald and C.J. Colbourn, "Steiner trees in outerplanar graphs", *Congressus Numeratum* 36 (1982) 15-22.
- [77] J.A. Wald and C.J. Colbourn, "Steiner trees, partial 2-trees, and minimum IFI networks 13 (1983) 159-167.
- [78] P. Winter, "Generalized Steiner problem in Halin networks", In *Proc. 12 th International Symposium on Mathematical Programming*, MIT, 1985.
- [79] P. Winter, "Generalized Steiner problem in series-parallel networks", *Journal of Algorithms* 7, (1986) 549-566.
- [80] P. Winter, "Steiner problem in networks: A survey" *Networks* 17 (1987) 129-167.