

THÈSE

Présentée devant

l'Université de Bretagne Occidentale

Pour obtenir

Le Titre de Docteur de l'Université de Bretagne Occidentale
Mention INFORMATIQUE

par

Mohamed DIDI BIHA

GRAPHES k -ARÊTE CONNEXES ET POLYÈDRES

Soutenue le 24 septembre 1998 devant la commission d'examen

MM. :	Michel	BALINSKI	Président
	Jean	FONLUPT	Rapporteur
	Jean François	MAURRAS	Rapporteur
	Yves	DERRIENNIC	Examineur
	Ali Ridha	MAHJOUB	Directeur

THÈSE

Présentée devant

l'Université de Bretagne Occidentale

Pour obtenir

Le Titre de Docteur de l'Université de Bretagne Occidentale

Mention INFORMATIQUE

par

Mohamed DIDI BIHA

GRAPHES k -ARÊTE CONNEXES ET POLYÈDRES

Soutenue le 24 septembre 1998 devant la commission d'examen

MM. :	Michel	BALINSKI	Président
	Jean	FONLUPT	Rapporteur
	Jean François	MAURRAS	Rapporteur
	Yves	DERRIENNIC	Examineur
	Ali Ridha	MAHJOUB	Directeur

A la mémoire de ma tante Maryem

*A mes grand-parents
Aicha et Mekhalla,
à mon père et ma mère.*

Remerciements

*J*e tiens à exprimer toute ma gratitude à Ali Ridha Mahjoub pour avoir dirigé et encadré mon travail avec une disponibilité exceptionnelle et une grande rigueur scientifique. Je le remercie pour son soutien, son attention et ses conseils toujours pertinents.

*M*onsieur Michel Balinski, en acceptant de présider ce jury, m'a fait un grand honneur et je l'en remercie vivement.

*M*essieurs Jean Fonlupt et Jean François Maurras m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de ce mémoire. Je leur en suis très reconnaissant.

*J*e suis honoré que Monsieur Yves Derriennic se soit intéressé à mon travail et je le remercie d'avoir accepté de participer à ce jury.

*U*n immense merci, bien qu'insuffisant, à Hervé Kerivin avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer. Je le remercie pour ses innombrables lectures minutieuses de ce mémoire, son soutien et surtout pour son amitié.

*J*e tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Sophie Gire pour son amitié et pour tout ce qu'elle a fait pour moi dans les moments les plus difficiles.

*J*e voudrais également remercier Abdallah Zémirline pour les fructueuses conversations scientifiques, pour avoir eu la patience de lire cette thèse et avoir apporté ses commentaires.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous considérons une approche polyédrale pour certains problèmes de connexité dans les graphes ayant des applications dans la conception des réseaux de télécommunication fiables.

Dans le premier chapitre, nous introduisons des nouvelles classes d'inégalités valides pour le polytope des sous-graphes k -arête connexes $kECSP(G)$. Dans le second chapitre, nous caractérisons complètement le polytope $kECSP(G)$ dans les graphes série-parallèles, ainsi que dans une autre classe de graphes généralisant la classe de Halin. Nous donnons également une description complète du polytope des sous-graphes Steiner k -arête connexes $kSECSP(G, S)$ dans les graphes série-parallèles quand k est pair.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des graphes dits parfaitement k -arête connexes, c'est-à-dire les graphes pour lesquels le polytope $kECSP(G)$ est donné par les contraintes triviales et les contraintes de coupes. Nous étudions la structure des points extrêmes du polytope donné par ces contraintes. Enfin, nous introduisons des nouvelles classes de graphes parfaitement k -arête connexes .

Dans le quatrième chapitre, nous étudions le polytope des sous-graphes Steiner connexe $1SECSP(G, S)$ et le polytope de l'arbre Steiner $STP(G, S)$. Nous introduisons une nouvelle classe d'inégalités valides pour ces deux polytopes. En utilisant des procédures de construction de facettes, nous caractérisons le polytope $1SECSP(G, S)$ dans des classes particulières de graphes. Par la suite, nous établissons une relation entre le polytope $1SECSP(G, S)$ et le dominant de l'arbre Steiner. Ceci nous permet de donner une description complète de ce dernier dans certaines classes de graphes.

Mots clés : graphe k -arête connexe, graphe série-parallèle, polyèdre, polytope, contrainte valide, facette.

ABSTRACT

In this thesis, we consider a polyhedral approach for certain problems relating to the connectivity in graphs, which have applications to the design of reliable communication and transportation networks.

In the first chapter, we introduce new classes of valid inequalities for the k -edge connected subgraph polytope $k\text{ECSP}(G)$ and give the necessary conditions and sufficient conditions for these inequalities to define facets for this polytope. In the second chapter, we characterize completely the polytope $k\text{ECSP}(G)$ on series-parallel graphs as well as another class of graphs generalizing the Halin graphs. We also give a complete description of the Steiner k -edge connected subgraph polytope $k\text{SECSP}(G, S)$ on series-parallel graphs when k is even.

The third chapter is devoted to the study of perfectly k -edge connected graphs which are graphs for which the polytope $k\text{ECSP}(G)$ is given by trivial and cut inequalities. We study the structure of extreme points of the polytope given by these inequalities. Also we introduce new classes of perfectly k -edge connected graphs.

In the fourth chapter, we study the Steiner edge connected subgraph polytope and the Steiner tree polytope $\text{STP}(G, S)$. We introduce a new class of valid inequalities for these two polytopes. Using the procedure of construction of facets of $1\text{SECSP}(G, S)$, we characterize the polytope $1\text{SECSP}(G, S)$ in particular classes of graphs. We establish a relation between the polytope $1\text{SECSP}(G, S)$ and the dominant of Steiner tree polytope. This enable us to give a complete description of the latter in certain classes of graphs.

Key words : k -edge connected graph, series-parallel graph, polyhedron, polytope, valid constraint, facet.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 Contraintes valides pour le polytope des sous-graphes k-arête connexes	9
1.1 Introduction	9
1.2 Les contraintes de SP-partitions	13
1.3 Les contraintes de F -partition	20
1.3.1 Relation avec les inégalités de r -recouvrement	21
1.3.2 Séparation des contraintes de F -partition	23
1.3.3 Facettes	24
1.4 Les inégalités de roue-paires	33
2 Caractérisations polyédrales	39
2.1 Introduction	39
2.2 Le polytope $k\text{ECSP}(G)$ dans les graphes série-parallèles	40
2.3 Le polytope $k\text{SECSP}(G, S)$ dans les graphes série-parallèles	47
2.4 Le polytope $k\text{ESCP}(G)$ dans la classe $\mathcal{H}_k$	59
3 Les graphes parfaitement k-arête connexes	69
3.1 Introduction	69
3.2 Réduction de graphes	70
3.3 Propriétés structurales des points extrêmes de $Q(G, k)$	73
3.4 Exemples de graphes parfaitement k -arête connexes	83
3.5 Conclusion	87
4 Le polytope des sous-graphes Steiner connexes	91
4.1 Introduction	91
4.2 Les inégalités de partitions Steiner généralisées	92

4.3	Construction de facettes	100
4.3.1	Ajout d'un sommet	100
4.3.2	Contraction d'une arête	106
4.3.3	Explosion d'un sommet	111
4.4	Le polytope $1SECSP(G, S)$ dans certaines classes de graphes	114
4.4.1	Les graphes série-parallèles	114
4.4.2	Le polytope $1SECSP(G, S)$ dans la classe Ψ	119
4.5	Le dominant du polytope des arbres Steiner	127
	Conclusion	131
	Bibliographie	132

Introduction

Beaucoup de problèmes réels peuvent se modéliser comme des problèmes d'optimisation combinatoire. Un coût (ou un poids) ayant été affecté à chaque élément d'un ensemble fini E , il s'agit de choisir un "meilleur" élément (de coût minimum ou de poids maximum) d'une famille de sous-ensembles de E . Vu le nombre exponentiel éventuel de solutions, il est clair que la procédure triviale de recherche d'une solution par énumération de l'ensemble des cas, si elle est théoriquement possible, ne peut être envisagée.

Plusieurs approches ont, par conséquent, été développées pour ces problèmes comme la programmation linéaire et non linéaire, la programmation en nombres entiers et les approches polyédrales. L'efficacité d'une méthode de résolution (algorithme) d'un problème est mesurée par le nombre des opérations nécessaires pour résoudre ce problème. Si ce nombre est borné par une fonction polynomiale d'un paramètre caractérisant la taille du problème, alors la méthode est dite efficace ou polynomiale.

Il existe une large classe de problèmes d'optimisation combinatoire qui ont un statut identique quant à l'existence d'un algorithme polynomial pour les résoudre. C'est-à-dire que s'il existe un algorithme polynomial permettant de résoudre un de ces problèmes (dits NP-complets), alors il en existe un pour chacun d'entre eux. Ces problèmes sont réputés les plus difficiles parmi les problèmes d'optimisation combinatoire, et il y a peu d'espoir de trouver une méthode efficace pour les résoudre.

Une approche qui s'est révélée efficace pour ce type de problèmes est l'approche polyédrale. Cette méthode introduite par J. Edmonds dans le cadre du problème de couplage [30], consiste à décrire l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des solutions du problème (le polyèdre associé au problème) par un système d'inégalités linéaires, et donc à se ramener à la maximisation (ou la minimisation) d'une fonction linéaire sur un

polyèdre. Cette méthode permet donc de transformer un problème d'optimisation combinatoire en un programme linéaire, et de le résoudre, en conséquence, par la méthode du Simplex. Malheureusement, aucune méthode efficace n'est connue pour générer une description linéaire de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$.

Soient $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un polyèdre et $\mathcal{I}$ une classe d'inégalités valides pour P . Le problème de séparation de $\mathcal{I}$ est le problème suivant: étant donné un point $x \in \mathbb{R}^n$, décider si x satisfait toutes les inégalités de $\mathcal{I}$ et, lorsque ce n'est pas le cas, trouver une inégalité de $\mathcal{I}$ violée par x . Le problème de séparation est le point essentiel dans l'approche polyédrale. En effet, Grötschel et al. [42] (voir aussi Padberg et Rao [67]) ont montré une équivalence entre la résolution en temps polynomial d'un problème d'optimisation combinatoire et l'existence d'un algorithme polynomial pour le problème de séparation des inégalités du polyèdre associé à ce problème. Ce résultat implique qu'il y a peu de chance d'obtenir une description complète des polyèdres associés aux problèmes d'optimisation combinatoire NP-complets par un système d'inégalités linéaires dont le problème de séparation est polynomial. Les deux objectifs principaux de l'approche polyédrale sont la détermination des classes d'inéquations définissant des facettes du polyèdre associé au problème et la caractérisation des polyèdres associés aux cas particuliers du problème pouvant être résolus en temps polynomial. C'est dans ce cadre là que se place le présent travail.

Cette thèse porte sur certains problèmes de connexité dans les graphes ayant des applications dans la conception des réseaux de télécommunication fiables.

L'introduction de la technologie des fibres optiques dans le domaine des télécommunications a provoqué un regain d'intérêt pour les problèmes de conception de réseaux. En effet, cette technologie permet d'avoir une fiabilité accrue et une grande capacité de transmission dans les réseaux. Cependant, vu son coût élevé, la défaillance du réseau entraîne des coûts insupportables. Pour éviter ce problème, les réseaux doivent être suffisamment fiables. Cela veut dire que, si $k - 1$ ($k \geq 1$) liaisons (ou noeuds) de transmission sont détruites, le réseau continue à fonctionner. Ces conditions de fiabilité peuvent être formulées en terme de connexité dans le réseau.

Dans ce qui suit, nous présentons le problème en terme de graphes.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *k-arête connexe* (resp. *k-sommet connexe*), $1 \leq k \leq |V| - 1$, si pour toute paire de sommets $u, v \in V$, il existe au moins k chaînes arête-disjointes (resp. k chaînes sommet-disjointes) reliant u et v dans G . Si G est muni d'une fonction coût sur ses arêtes, le *problème du sous-graphe k-arête connexe* (*kECSP*) est de trouver un sous-graphe *k-arête connexe* de coût minimum. Le coût d'un sous-graphe est la somme des coûts de ses arêtes.

Le problème *kECSP* est NP-complet dans le cas général. En effet, il a été montré dans [31] que le problème du cycle hamiltonien, qui est NP-complet, peut être ramené au 2ECSP, ce qui implique que ce dernier est NP-complet.

Dans [81, 82], Winter considère le problème (PW) suivant: soient $G = (V, E)$ un graphe, $S \subseteq V$ et $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui associe à chaque arête e de E un coût $c(e)$. Étant donnée une matrice à $|S|$ lignes et $|S|$ colonnes, $R = (R_{uv})$, trouver un sous-graphe H de coût minimum tel que pour toute paire de sommets u et v de S , il existe au moins R_{uv} chaînes arête-disjointes reliant u et v dans H . Il a montré que ce problème peut être résolu en temps polynomial si le graphe est série-parallèle ou de Halin et $R_{uv} \in \{0, 1, 2\}$ pour tout $(u, v) \in E$. Le problème *kECSP* correspond au problème (PW) quand $S = V$ et $R_{uv} = k$ pour tous $u, v \in V$.

Quand $R_{uv} = k$, pour tous $u, v \in S$, le problème (PW) est appelé *le problème du sous-graphe Steiner k-arête connexe* (*kSECSP*). Les sommets de S sont appelés *terminaux* et les sommets de $V \setminus S$ *Steiner*.

Grötschel et Monma [43] et Grötschel et al. [44, 45, 46, 47] ont considéré le modèle suivant.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour chaque sommet $v \in V$, on associe un entier positif $r(v)$ et pour chaque arête $e \in E$, on associe un coût $c(e)$. On dit que le sous-graphe $H = (U, F)$ de G vérifie les conditions de fiabilité, si pour toute paire de sommets distincts $u, v \in V$, H contient au moins

$$r(u, v) = \min\{r(u), r(v)\}$$

chaînes arête-disjointes reliant u et v . Soit $k = \max\{r(v) : v \in V\}$. Notons par $k\text{ECON}$ le problème de déterminer un sous-graphe de G de coût minimum vérifiant les conditions de fiabilité et par $k\text{ECON}(G)$ le polyèdre associé à ce problème. Les problèmes $k\text{ECSP}$ et $k\text{SECSP}$ correspondent au problème $k\text{ECON}$ respectivement dans le cas où $r(v) = k$ pour tout $v \in V$ et le cas où $r(v) \in \{0, k\}$ pour tout $v \in V$.

Plusieurs cas particuliers du problème $k\text{ECON}$ peuvent être résolus en temps polynomial:

- le problème du plus court k -chemin [75, 76]: $r(u) = k$ pour exactement deux sommets s et t de V et $r(u) = 0$ pour tout $u \in V \setminus \{s, t\}$;
- le problème de l'arbre couvrant de coût minimum [52, 68]: $r(u) = 1$ pour tout $u \in V$;
- le problème de l'arbre Steiner ($r(u) \in \{0, 1\}$ pour tout $u \in V$) quand le nombre de sommets terminaux ou de sommets Steiner est fixé [53];
- le problème d'augmentation [20, 14, 31, 33, 34, 64] : G est un graphe complet et $c(e) \in \{0, 1\}$ pour tout $e \in E$;
- quand toutes les arêtes ont le même coût et G est un graphe complet [20, 34].

Le problème $k\text{ECON}$ a été largement étudié ces dernières années. On peut distinguer trois axes principaux d'investigation pour $k\text{ECON}$.

L'établissement des propriétés structurales et heuristiques

La connaissance des propriétés structurales des solutions de problèmes d'optimisation combinatoire joue un rôle important dans l'élaboration des heuristiques efficaces pour ces problèmes. Pour cette raison, plusieurs travaux ont été menés dans cette direction [11, 35, 40, 51, 62, 63].

Dans [11], Bienstock et al. ont établi des propriétés structurales pour la solution optimale de $k\text{ECSP}$ quand la fonction coût satisfait les inégalités triangulaires (c'est-à-dire $c(e_1) \leq c(e_2) + c(e_3)$ pour tout triplet d'arêtes (e_1, e_2, e_3) formant un triangle dans G). Leurs résultats généralisent des résultats déjà obtenus par Frederickson et JàJà [35] et Monma et al. [62] pour $k = 2$. Dans [51] Ko et Monma ont élaboré des heuristiques

pour le problème k ECSP. Dans [40], Goemans et al. ont introduit une heuristique efficace pour le problème k ECSP quand k est pair ou $k = 1$.

Algorithmes d'approximation

Un α -*algorithme d'approximation* pour un problème d'optimisation combinatoire est un algorithme polynomial qui donne une solution dont la valeur est inférieure à $\alpha C(SO)$, où $C(SO)$ est la valeur de la solution optimale de ce problème. Cette piste a été largement explorée dans les cinq dernières années pour le problème k ECON [7, 15, 39, 41, 36, 50, 55, 72, 80].

Dans [15], Cheriyan et al. ont donné un $\frac{17}{12}$ -algorithme d'approximation pour 2ECSP. Ils ont montré aussi que si la $\frac{4}{3}$ -conjecture pour le problème du voyageur de commerce métrique est vraie, alors il existe un $\frac{4}{3}$ -algorithme d'approximation pour 2ECSP. Dans [50], Khuller et Raghvachari ont donné un (1.85)-algorithme d'approximation pour k ECSP quand toutes les arêtes ont le même coût et G est un graphe quelconque. Dans [80] Williamson et al. ont donné un algorithme d'approximation polynomial pour une classe de problèmes incluant le problème k ECON.

Approche polyédrale

Dans [45, 46, 47], Grötschel et al. ont étudié le polyèdre associé au problème k ECON. Ils ont introduit des inégalités valides pour ce polyèdre. A l'aide de ces inégalités, ils ont développé des algorithmes de coupes pour résoudre le problème k ECON. Dans [9], Barahona et Mahjoub ont caractérisé le polytope des sous-graphes 2-arête connexes pour les graphes de Halin. Mahjoub [57] a donné une description complète de ce polytope pour les graphes série-parallèles. Il a aussi introduit une classe d'inégalités définissant des facettes du polytope des sous-graphes 2-arête connexes. Dans [13], Boyd et Hao ont introduit une classe d'inégalités valides pour ce polytope. Cette classe généralise celle donnée par Mahjoub [57]. Ils ont aussi donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces inégalités définissent des facettes de ce polytope.

Dans [16], Chopra a donné une caractérisation complète du polyèdre associé au problème k ECSP dans les graphes outerplanaires quand chaque arête peut être utilisée plusieurs fois et, ce pour k impair.

Le problème du sous-graphe 2-sommet connexe a également été étudié en utilisant cette approche. Dans [22, 23, 24], Coullard et al. discutent du polytope des sous-graphes 2-

sommet connexes. Dans [22], ils décrivent ce polytope dans les graphes série-parallèles et dans [24] ils décrivent le dominant de ce polytope dans la classe des graphes non contractibles à W_4 (la roue sur 5 sommets). Dans [23], ils développent un algorithme linéaire pour résoudre ce problème dans les graphes de Halin et les graphes non contractibles à W_4 .

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux problèmes k ECSP et k SECSP d'un point de vue polyédral.

Dans le chapitre 1, nous décrivons certaines familles de contraintes valides pour le polytope des sous-graphes k -arête connexes. Nous donnons des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que ces familles définissent des facettes de ce polytope. Dans le chapitre 2, nous donnons une caractérisation complète du polytope des sous-graphes k -arête connexes dans les graphes série-parallèles ainsi que dans une classe de graphe généralisant celle de Halin. Nous donnons aussi une description complète du polytope des sous-graphes Steiner k -arête connexes dans les graphes série-parallèles quand k est pair.

Dans le chapitre 3, nous discutons des graphes dont le polytope des sous-graphes k -arête connexes est donné par les contraintes triviales et les contraintes dites de coupes. Ces graphes seront appelés graphes parfaitement k -arête connexes. Cette classe de graphes contient les graphes série-parallèles quand k est pair. Nous décrivons certaines opérations de réduction qui préservent la propriété de parfaitement k -arête connexité. Par la suite, nous étudions la structure des points extrêmes du polytope défini par les contraintes triviales et les contraintes de coupes. Ceci nous permettra de caractériser de nouvelles classes de graphes parfaitement k -arête connexes.

Dans le chapitre 4, nous étudions le polytope des sous-graphes Steiner connexes ($k = 1$) et le polytope lié de l'arbre Steiner. Nous introduisons une nouvelle classe d'inégalités valides pour ces deux polytopes. Cette classe généralise celles de partitions Steiner et de trous impairs. Nous étudions également certaines procédures de construction de facettes. Celles-ci seront utilisées pour infirmer une conjecture de Chopra et Rao [18] sur le dominant du polytope de l'arbre Steiner dans la classe des 2-arbres. Par la suite, nous donnons une description complète du polytope des sous-graphes Steiner connexes dans certaines classes de graphes. Ceci nous permettra de décrire complètement le dominant du polytope de l'arbre Steiner dans ces classes de graphes.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques définitions et notations utilisées dans cette thèse. Le lecteur désirant un exposé plus détaillé des définitions utilisées est invité à se référer à [10] pour la théorie des graphes, à [71] pour la combinatoire polyédrique et à [37] pour la complexité algorithmique.

On considère des graphes non orientés, finis et pouvant contenir des arêtes multiples et des boucles. On note par $G = (V, E)$ le *graphe* dont l'ensemble des *sommets* est V et l'ensemble d'*arêtes* est E . Si e est une arête reliant deux sommets u et v , alors u et v seront appelés les *extrémités* de e , et on écrira $e = (u, v)$. On note par $G - e$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant e .

Soit W un sous-ensemble de V . L'ensemble d'arêtes ayant une extrémité dans W et l'autre extrémité dans $\overline{W} = V \setminus W$ est appelé *coupe* et noté par $\delta(W)$. On note par $G[W]$ le sous-graphe de G induit par W , *i.e.* $G[W] = (W, E(W))$, où $E(W)$ est l'ensemble d'arêtes ayant les deux extrémités dans W .

Étant donné $F \subset E$, on désigne par $G \setminus F$ le graphe $(V, E \setminus F)$ et par $V(F)$ l'ensemble de sommets adjacent à F , *i.e.* $V(F) = \{v \in V \mid \exists e \in F \text{ tel que } v \text{ soit une extrémité de } e\}$. On note par $G(F)$ le graphe induit par F *i.e.* $G(F) = (V(F), F)$. Étant donnée une famille $V_1, \dots, V_p$ de sous-ensembles deux à deux disjoints de V , l'ensemble d'arêtes ayant une extrémité dans V_i et l'autre extrémité dans V_j , $i, j \in \{1, \dots, p\}$ ($i \neq j$), sera noté par $\delta(V_1, \dots, V_p)$ si $p \geq 3$ et par $[V_1, V_2]$ si $p = 2$. Si $V = \bigcup_{i=1, \dots, p} V_i$, alors $\{V_1, \dots, V_p\}$ est dit une *partition* de V .

Une *chaîne* dans un graphe $G = (V, E)$ est une séquence d'arêtes $e_1, \dots, e_t$ telle que $e_1 = (v_1, v_2)$, $e_2 = (v_2, v_3)$, $\dots$, $e_t = (v_{t-1}, v_t)$, où $v_1, \dots, v_t$ sont des sommets distincts de V . Un *cycle* est une chaîne $e_1, \dots, e_t$ telle que $e_1 = e_t$.

Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est une *combinaison convexe* des vecteurs $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Les points $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ sont *affinement indépendants* si le système

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 0$$

a comme unique solution $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \dots, m$.

Soit $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$. L'*enveloppe convexe* des points de S , notée $\text{conv}(S)$, est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ pouvant être obtenus par des combinaisons convexes de points de S .

Un *polyèdre* P est un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$, obtenu comme intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$, *i.e.*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\},$$

où A est une matrice à m lignes et n colonnes et b est un vecteur à m composantes. Un polyèdre borné est appelé *polytope*. Le *dominant* d'un polyèdre P est le polyèdre

$$\text{Dom}(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in P \text{ tel que } x \leq y\}.$$

Un polyèdre P est de *dimension* m , $\dim(P) = m$, si le nombre maximum de points de P affinement indépendants est $m + 1$.

Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est dit *point extrême* du polyèdre P s'il n'est pas une combinaison convexe d'autres points de P . Un polyèdre dont tous les points extrêmes sont entiers est dit *entier*.

Une inégalité (contrainte) $ax \geq \alpha$ est une *inégalité valide* (*contrainte valide*) pour un polyèdre P dans $\mathbb{R}^n$ si

$$P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid ax \geq \alpha\}.$$

Si $ax \geq \alpha$ est une contrainte valide pour P , on dit que $\mathcal{F} = \{x \in P \mid ax = \alpha\}$ est une *face* de P induite ou définie par la contrainte $ax \geq \alpha$. Une *facette* de P est une face $\mathcal{F}$ de P telle que $\dim(\mathcal{F}) = \dim(P) - 1$.

Une contrainte $ax \geq \alpha$ est dite *contrainte serrée* pour un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ si $ax^* = \alpha$.

Chapitre 1

Contraintes valides pour le polytope des sous-graphes k -arête connexes

1.1 Introduction

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $F \subseteq E$. Le vecteur $x^F \in \mathbb{R}^E$, où $x^F(e) = 1$ si $e \in F$ et $x^F(e) = 0$ sinon, est appelé *le vecteur d'incidence de F* . Étant donné un point $x \in \mathbb{R}^E$ et un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$, on définit $x(F) = \sum_{e \in F} x(e)$.

Si (V, F) est un sous-graphe k -arête connexe de G , alors x^F satisfait les inégalités suivantes :

$$x(e) \geq 0 \quad \forall e \in E, \quad (1.1)$$

$$x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E, \quad (1.2)$$

$$x(\delta(W)) \geq k \quad \forall W \subseteq V, W \neq \emptyset, V \setminus W \neq \emptyset. \quad (1.3)$$

Les inégalités (1.1) et (1.2) sont appelées *inégalités triviales* et les inégalités (1.3), *inégalités de coupes*.

L'enveloppe convexe $k\text{ECSP}(G)$ des vecteurs d'incidence des sous-ensembles d'arêtes de E induisant des sous-graphes k -arête connexes est appelée *le polytope des sous-graphes k -arête connexes* de G , *i.e.*

$$k\text{ECSP}(G) = \text{conv}\{x^F \in \mathbb{R}^E \mid (V, F) \text{ est } k\text{-arête connexe}\}.$$

Le problème $kECSP$ est donc équivalent au programme linéaire

$$\min\{wx \mid x \in kECSP(G)\}.$$

Le problème $kECSP$ peut, par conséquent, être ramené à la résolution d'un programme linéaire par la description du polytope $kECSP(G)$. Étant donné que le problème $kECSP$ est NP-dur, il y a peu d'espoir de trouver une caractérisation complète de $kECSP(G)$ par un système d'inégalités linéaires pour tout graphe G . Mais une description partielle de ce polytope peut être parfois suffisante pour résoudre le problème $kECSP$ à l'optimum. Aussi, pour certaines classes de graphes, le polytope $kECSP(G)$ peut être décrit par quelques familles d'inégalités linéaires dont le problème de séparation est polynomial. Ainsi le problème $kECSP$ peut se résoudre en temps polynomial dans ces classes de graphes en utilisant la méthode des ellipsoïdes [42].

Dans ce chapitre, nous décrivons certaines familles de contraintes valides pour le polytope $kECSP(G)$. Nous donnons des conditions nécessaires (suffisantes) pour que ces familles définissent des facettes de $kECSP(G)$. Certaines de ces familles seront utilisées dans le chapitre 2 pour donner une caractérisation complète du polytope $kECSP(G)$ dans les graphes série-parallèles.

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier $k \geq 1$, on dit qu'une arête $e \in E$ est *essentielle*, si le graphe $G - e$ n'est pas k -arête connexe. On note par E^* l'ensemble des arêtes essentielles de G . Le théorème suivant donne la dimension du polytope $kECSP(G)$.

Théorème 1.1 [43] *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $k \geq 1$ un entier. Alors*

$$\dim(kECSP(G)) = |E| - |E^*|.$$

□

Comme conséquence de ce théorème, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.2 [43] *Le polytope $kECSP(G)$ est de pleine dimension si et seulement si G est $(k + 1)$ -arête connexe.*

□

Dans [43], Grötschel et Monma ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalités (1.1)-(1.3) définissent des facettes de $kECSP(G)$. Ces conditions, données par les deux théorèmes suivants, généralisent celles décrites par Mahjoub [57] pour $k = 2$.

Théorème 1.3 [43] *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $k \geq 1$ un entier. Alors*

1. $x(e) \geq 0$ définit une facette de $kECSP(G)$ si et seulement si pour toute arête $f \neq e$, le graphe $G \setminus \{e, f\}$ est k -arête connexe.
2. $x(e) \leq 1$ définit une facette de $kECSP(G)$ si et seulement si $e \notin E^*$. □

Théorème 1.4 [43] *Soient $G = (V, E)$ un graphe $(k + 1)$ -arête connexe, $k \geq 1$ un entier et W un sous-ensemble de V . Soient*

$$\begin{aligned} \text{def}_e(S) &= \max\{0, k - |[S, W \setminus S] \setminus \{e\}|\}, \quad \forall e \in E \setminus \delta(W), \quad \forall S \subset W, S \neq \emptyset, \\ \text{def}_e(U) &= \max\{0, k - |[U, (V \setminus W) \setminus U] \setminus \{e\}|\}, \quad \forall e \in E \setminus \delta(W), \quad \forall U \subset V \setminus W, U \neq \emptyset. \end{aligned}$$

La contrainte de coupe

$$x(\delta(W)) \geq k$$

définit une facette du polytope $kECSP(G)$ si et seulement si

- (a) $G[W]$ et $G[\overline{W}]$ sont connexes, et
- (b) pour toute arête $e \in E \setminus \delta(W)$, pour toute famille $S_1, \dots, S_p$ de sous-ensembles de sommets de W deux à deux disjoints avec $\emptyset \neq S_i \neq W$, pour $i = 1, \dots, p$ ($p \geq 0$) et pour toute famille $U_1, \dots, U_q$ de sous-ensembles de sommets de $\overline{W}$ deux à deux disjoints avec $\emptyset \neq U_i \neq \overline{W}$, pour $i = 1, \dots, q$ ($q \geq 0$), l'inégalité suivante est vérifiée:

$$\sum_{i=1}^p \text{def}_e(S_i) + \sum_{i=1}^q \text{def}_e(U_i) - |[\bigcup_{i=1}^p W_i, \bigcup_{i=1}^q U_i]| \leq k.$$

□

Le problème de séparation des inégalités (1.3) se ramène à un problème de flot maximum. Il est donc polynomial. Par conséquent, le problème $kECSP$ peut se résoudre en temps polynomial quand le polytope $kECSP(G)$ est donné par les inégalités (1.1)-(1.3).

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V . Dans [44], Grötschel et al. ont montré que les inégalités suivantes sont valides pour $k\text{ECSP}(G)$:

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \begin{cases} p - 1 & \text{si } k = 1, \\ \lceil \frac{kp}{2} \rceil & \text{si } k \neq 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Ils ont aussi donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalités de partitions (1.4) définissent des facettes de $k\text{ECSP}(G)$. Si $k = 1$, le problème de séparation des inégalités de partitions (1.4) peut se résoudre comme une séquence de $|V|$ problèmes de coupe minimum en utilisant l'algorithme de Barahona [8] ou une séquence de $|E|$ problèmes de coupe minimum en utilisant l'algorithme de Cunningham [25]. Si k est pair, l'inégalité (1.4) est dominée par les inégalités de coupes.

Le lemme suivant sera très utile pour le reste de ce chapitre et les chapitres qui suivent. Il montre que si une contrainte

$$\sum_{e \in E} a(e)x(e) \geq b$$

définit une facette non triviale (*i.e.* qui n'est pas définie par une contrainte triviale) de $k\text{ECSP}(G)$, alors $a(e) \geq 0$ pour toute arête e de E telle que $G - e$ soit k -arête connexe.

Lemme 1.5 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et (P) une propriété sur E telle que si F_1 vérifie (P) et $F_1 \subset F_2 \subseteq E$, alors F_2 vérifie (P) . Soit le polyèdre*

$$Q = \text{conv}\{x^F \mid F \subseteq E \text{ vérifie } (P)\}.$$

Supposons que la contrainte

$$\sum_{e \in E} a(e)x(e) \geq b$$

définit une facette $\mathcal{F}$ de Q différente d'une facette triviale. Alors $a(e) \geq 0$ pour toute arête e de E telle que $E \setminus \{e\}$ vérifie (P) .

Preuve. Soit e_0 une arête de E telle que $E \setminus \{e_0\}$ vérifie (P) . Puisque $\mathcal{F}$ est une facette non triviale, il existe $F \subseteq E$ ne contenant pas e_0 tel que $x^F \in \mathcal{F}$, *i.e.*

$$\sum_{e \in E} a(e)x^F(e) = \sum_{e \in E \setminus \{e_0\}} a(e)x^F(e) = b.$$

Comme $F' = F \cup \{e\}$ vérifie (P) , alors $x^{F'} \in Q$. Par conséquent, on a

$$\sum_{e \in E} a(e)x^{F'}(e) = \sum_{e \in E \setminus \{e_0\}} a(e)x^F(e) + a(e_0) = b + a(e_0) \geq b.$$

D'où, $a(e_0) \geq 0$. □

1.2 Les contraintes de SP-partitions

Dans [16], Chopra considère le problème k ECSP dans le cas où chaque arête peut être utilisée plus d'une fois. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un vecteur de poids, $w \in \mathbb{R}^E$, associé aux arêtes de G , le problème consiste à déterminer un vecteur entier $x \in \mathbb{N}^E$ tel que le graphe $(V, E(x))$ soit k -arête connexe et $\sum_{e \in E} w(e)x(e)$ soit minimum, où $E(x)$ est l'ensemble d'arêtes obtenu en remplaçant chaque arête $e \in E$ par $x(e)$ arêtes. Soit

$$P_k(G) = \text{conv}\{x \in \mathbb{N}^E \mid (V, E(x)) \text{ est } k\text{-arête connexe}\}$$

le polyèdre associé à ce problème.

Dans [16], Chopra décrit plusieurs classes de facettes de $P_k(G)$ et donne une description complète de $P_k(G)$ quand G est outerplanaire (un graphe est dit *outerplanaire* s'il est constitué d'un cycle avec des cordes qui ne s'intersectent pas).

Le polyèdre $P_k(G)$ a été étudié initialement par Cornuéjols et al. [21]. Ils ont montré que si G est série-parallèle, alors $P_2(G)$ est complètement caractérisé par les inégalités de non-négativité et les inégalités de coupes.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V telle que $G[V_i]$ soit connexe pour $i = 1, \dots, p$. Chopra [16] a montré que les inégalités suivantes sont valides pour $P_k(G)$ si G est outerplanaire et k est impair:

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1. \quad (1.5)$$

Dans ce qui suit, nous allons étendre ce résultat aux graphes série-parallèles.

Un graphe G est dit *contractible* à un graphe H , si H peut être obtenu à partir de G par suppression et/ou contractions d'arêtes. Une *contraction* d'une arête consiste à

supprimer cette arête et à identifier ses extrémités. Un graphe est dit *série-parallèle* [29] s'il n'est pas contractible à K_4 (le graphe complet à 4 sommets).

Dans [29], Duffin a montré qu'un graphe série-parallèle, peut être obtenu à partir d'un graphe constitué de deux sommets liés par une arête, en appliquant d'une manière récursive les deux opérations suivantes:

O1: dupliquer une arête,

O2: subdiviser une arête (*i.e.* remplacer une arête (u, v) par deux arêtes (u, w) et (w, v) , où w est un nouveau sommet).

Tout d'abord, nous donnons la propriété suivante des graphes série-parallèles.

Lemme 1.6 *Soit $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle 2-arête connexe avec $|V| \geq 3$. Alors G contient au moins un sommet adjacent à exactement deux sommets.*

Preuve. Puisque G est série-parallèle, il peut être construit en appliquant d'une manière récursive les deux opérations *O1* et *O2*. Le dernier sommet ajouté par l'opération *O2* est adjacent à exactement deux sommets. $\square$

Théorème 1.7 *Si $G = (V, E)$ est un graphe série-parallèle k -arête connexe et k est impair, alors les inégalités (1.5) sont valides pour $kECSP(G)$.*

Preuve. Il suffit de montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe série-parallèle k -arête connexe, alors on a

$$|E| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil |V| - 1. \quad (1.6)$$

La preuve se fait par récurrence sur $|V|$. Si $|V| = 2$, alors on a $|E| \geq k = \lceil \frac{k}{2} \rceil |V| - 1$. Supposons maintenant que (1.6) soit valide pour tout graphe série-parallèle k -arête connexe qui a au plus n sommets et supposons que G possède $n + 1$ sommets. D'après le lemme 1.6, il existe un sommet $v \in V$ qui est adjacent à exactement deux sommets v_1 et v_2 de V . Notons par F_1 (resp. F_2) l'ensemble d'arêtes entre v et v_1 (resp. v et v_2). Sans perte de généralité, on peut supposer que $|F_1| \geq |F_2|$. Puisque G est k -arête connexe, on a $|F_1| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Soit $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant l'ensemble des arêtes de F_1 . Il est clair que G^* est série-parallèle et k -arête connexe. Comme $|V^*| \leq n$, d'après notre hypothèse de récurrence, on a

$$|E^*| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil |V^*| - 1.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} |E| &= |E^*| + |F_1| \\ &\geq \lceil \frac{k}{2} \rceil |V^*| - 1 + \lceil \frac{k}{2} \rceil \\ &= \lceil \frac{k}{2} \rceil (|V^*| + 1) - 1 \\ &= \lceil \frac{k}{2} \rceil |V| - 1. \end{aligned}$$

□

Les inégalités (1.5) seront appelées *les contraintes de SP-partition*.

Le problème de séparation des contraintes (1.5) dans les graphes série-parallèles peut se résoudre en temps polynomial en utilisant un algorithme de Baïou, Barahona et Mahjoub [5].

Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et une partition $\pi = \{V_1, \dots, V_p\}$ de V , on note $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant les ensembles V_i , $i = 1, \dots, p$. Le théorème 1.7 implique que si $G = (V, E)$ est un graphe (pas nécessairement série-parallèle) et $\pi = \{V_1, \dots, V_p\}$ est une partition de V telle que $G[V_i]$ soit connexe pour $i = 1, \dots, p$ et G_π soit série-parallèle, alors l'inégalité (1.5) est valide pour $k\text{ECSP}(G)$.

Malheureusement, ce résultat n'est plus vrai si G_π n'est pas série-parallèle. En effet, considérons le cas où $G = K_4$ (le graphe complet sur 4 sommets), $k = 3$, $p = 4$ et $|V_i| = 1$ pour $i = 1, \dots, 4$. Le graphe K_4 est 3-arête connexe et contient 6 arêtes, alors que le second membre de l'inégalité (1.5) correspondante est 7.

Remarque 1.1 Si k est pair, alors les inégalités (1.5) sont dominées par les inégalités de coupes. Et si k est impair, les inégalités de coupes sont un cas particulier des inégalités (1.5).

Preuve. En effet, considérons un sous-ensemble d'arêtes F de E induisant un sous-graphe k -arête connexe de G . Soit $\{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V telle que $G[V_i]$ soit

connexe, $i = 1, \dots, p$. Supposons que k soit pair. Alors on a

$$x^F(\delta(V_i)) \geq k, \quad i = 1, \dots, p.$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$2x^F(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq kp.$$

D'où

$$x^F(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \frac{k}{2}p > \frac{k}{2}p - 1 = \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1.$$

Si k est impair et $p = 2$, alors on a

$$x^F(\delta(V_1)) = x^F([V_1, V_2]) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil 2 - 1 = k.$$

□

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires pour que les inégalités de SP-partition définissent des facettes de $k\text{ECSP}(G)$.

Théorème 1.8 *Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle et $\pi = \{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V telle que $G[V_i]$ soit connexe pour $i = 1, \dots, p$. L'inégalité (1.5) définit une facette de $k\text{ECSP}(G)$ différente d'une facette triviale, où $k \geq 3$ et impair, seulement si*

- i) le graphe $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ est 2-sommet connexe,*
- ii) pour tout $e \in E_\pi$ tel que $G - e$ soit k -arête connexe, $G_\pi - e$ est 2-sommet connexe,*
- iii) si e_0 est une arête de $G[V_i]$, $i \in \{1, \dots, p\}$, telle que $G - e_0$ soit k -arête connexe, alors pour toute partition $\{V_i^1, V_i^2\}$ de V_i avec $e_0 \in [V_i^1, V_i^2]$, on a $||V_i^1, V_i^2|| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$.*

Preuve. Soit $F \subseteq E$ un ensemble d'arêtes qui induit un sous-graphe k -arête connexe tel que x^F vérifie (1.5) à l'égalité.

i) Supposons qu'il existe $v_0 \in V_\pi$ tel que le graphe $G_\pi \setminus \{v_0\}$ ne soit pas connexe. Soient $G_\pi^i = (V_\pi^i, E_\pi^i)$, $i = 1, \dots, s$ ($s \geq 2$), les composantes connexes de $G_\pi \setminus \{v_0\}$. Soit F_i la restriction de F dans le sous-graphe de G_π induit par $V_\pi^i \cup \{v_0\}$, $i = 1, \dots, s$. Il est clair que le sous-graphe de G_π induit par F_i est k -arête connexe pour $i = 1, \dots, s$. D'où

$$\sum_{e \in E_\pi[V_\pi^i \cup \{v_0\}]} x^{F_i}(e) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil (|V_\pi^i| + 1) - 1 \quad \text{pour } i = 1, \dots, s. \quad (1.7)$$

En sommant les s inégalités (1.7), on obtient

$$\begin{aligned} x^F(E_\pi) &\geq \lceil \frac{k}{2} \rceil \left(\sum_{i=1}^s |V_\pi^i| + s \right) - s \\ &= \lceil \frac{k}{2} \rceil (|V_\pi| + s - 1) - s \\ &= \lceil \frac{k}{2} \rceil |V_\pi| + \lceil \frac{k}{2} \rceil (s - 1) - s \\ &> \lceil \frac{k}{2} \rceil |V_\pi| - 1, \end{aligned}$$

une contradiction.

ii) Sans perte de généralité, on peut supposer que $e \notin F$. Sinon, la face définie par l'inégalité (1.5) serait contenue dans la face définie par $x(e) \leq 1$, une contradiction. La démonstration est donc similaire à celle de *i)* en considérant le graphe $G - e$ à la place de G .

iii) Supposons que

$$|[V_i^1, V_i^2]| \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil. \quad (1.8)$$

On va démontrer que $e_0 \in F$. En effet, si ceci n'est pas le cas, alors d'après (1.8) et les inégalités triviales, on a

$$x^F([V_i^1, V_i^2]) < \lceil \frac{k}{2} \rceil.$$

Soit $\pi' = \{V'_1, \dots, V'_{p+1}\}$ la partition de V donnée par

$$\begin{aligned} V'_t &= V_t \quad \text{pour } t = 1, \dots, i-1, \\ V'_i &= V'_1, \\ V'_{i+1} &= V'_2, \end{aligned}$$

$$V'_t = V_{t-1} \quad \text{pour } t = i + 2, \dots, p + 1.$$

On a

$$\begin{aligned} x^F(E_{\pi'}) &= x^F(E_\pi) + x^F([V_i^1, V_i^2]) \\ &< \lceil \frac{k}{2} \rceil |V_\pi| - 1 + \lceil \frac{k}{2} \rceil \\ &= \lceil \frac{k}{2} \rceil (|V_\pi| + 1) - 1 \\ &= \lceil \frac{k}{2} \rceil |V_{\pi'}| - 1, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $x^F \in k\text{ECSP}(G)$. D'où, $e_0 \in F$, et par conséquent, la face définie par (1.5) est contenue dans la face définie par $x(e_0) \leq 1$. Ce qui est impossible puisque (1.5) définit une facette non triviale. $\square$

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour que les inégalités de SP-partition définissent des facettes de $k\text{ECSP}(G)$.

Théorème 1.9 *Soient $G = (V, E)$ un graphe (quelconque), $k \geq 1$ un entier impair et $\{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V . Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées:*

- i) $G[V_i]$ est $(k + 1)$ -arête connexe, pour $i = 1, \dots, p$,*
- ii) $|[V_i, V_{i+1}]| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$, pour $i = 1, \dots, p \pmod{p}$,*
- iii) G_π est série-parallèle.*

Alors la contrainte de SP-partition correspondante définit une facette de $k\text{ECSP}(G)$.

Preuve. Remarquons d'abord que dans ce cas G est $(k + 1)$ -arête connexe, et donc d'après le corollaire 1.2, le polytope $k\text{ECSP}(G)$ est de pleine dimension. Notons l'inégalité (1.5) par $a^T x \geq a_0$. Soit $\mathcal{F}$ la face de $k\text{ECSP}(G)$ induite par (1.5). Supposons que $\mathcal{F}$ soit contenue dans une facette $\mathcal{P}$ de $k\text{ECSP}(G)$ induite par une contrainte $b^T x \geq b_0$. Puisque $k\text{ECSP}(G)$ est de pleine dimension, pour montrer que $\mathcal{F}$ est une facette, il suffit de montrer qu'il existe un scalaire $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$.

On note $F_i = [V_i, V_{i+1}] = \{e_{i,j} : j = 1, \dots, |F_i|\}$ pour $i = 1, \dots, p \pmod{p}$.

Tout d'abord, on montre que $b(e) = b(f)$, pour tous $e, f \in [V_i, V_{i+1}] \cup [V_{i+1}, V_{i+2}]$, $i = 1, \dots, p \pmod{p}$.

Soient f_1, f_2 deux arêtes quelconques de $[V_i, V_{i+1}]$ et g une arête de $[V_{i+1}, V_{i+2}]$ pour un certain $i \in \{1, \dots, p\}$. On peut choisir une numérotation des arêtes de F_i et de F_{i+1} de telle manière que $f_1 = e_{i,1}$, $f_2 = e_{i, \lceil \frac{k}{2} \rceil}$ et $g = e_{i+1,1}$. Soient

$$\begin{aligned} E_0^i &= \{e_{i,j} : j = 1, \dots, \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1\} \cup \left(\bigcup_{l \neq i} \{e_{l,j} : j = 1, \dots, \lceil \frac{k}{2} \rceil\} \right) \cup (E \setminus E_\pi), \\ E_1^i &= (E_0^i \cup \{f_2\}) \setminus \{f_1\}, \\ E_2^i &= (E_0^i \cup \{f_2\}) \setminus \{g\}. \end{aligned}$$

Les ensembles E_j^i , $j = 0, 1, 2$, induisent des sous-graphes k -arête connexes. Aussi, les vecteurs $x^{E_j^i}$, $j = 0, 1, 2$, vérifient $a^T x \geq a_0$ à l'égalité. Comme $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$, il en résulte que

$$b^T x^{E_j^i} = b_0, \quad j = 0, 1, 2.$$

D'où

$$b(f_1) = b(f_2) = b(g).$$

Puisque f_1, f_2, g sont des arêtes quelconques de $[V_i, V_{i+1}] \cup [V_{i+1}, V_{i+2}]$, on en déduit que

$$b(e) = \rho \quad \forall e \in [V_i, V_{i+1}], \quad i = 1, \dots, p, \quad (1.9)$$

pour un certain scalaire $\rho \in \mathbb{R}$.

Soit $e \in [V_s, V_t]$ avec $s, t \in \{1, \dots, p\}$ et $t \notin \{s-1, s, s+1\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $1 < s < t$. Considérons l'ensemble

$$E_3 = (E_0^1 \cup \{e\}) \setminus \{e_{s,1}\}$$

qui induit un sous-graphe k -arête connexe de G . Puisque $x^{E_3} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$, on en déduit que $b^T x^{E_3} = b^T x^{E_0^1} = b_0$. D'où, $b(e) = b(e_{s,1})$, et par conséquent

$$b(e) = \rho \quad \forall e \in [V_s, V_t]. \quad (1.10)$$

D'après (1.9) et (1.10), on obtient

$$b(e) = \rho \quad \forall e \in E_\pi.$$

Maintenant, considérons une arête $f_0 \in E \setminus E_\pi$. Soit $E_4 = E_0^1 \setminus \{f_0\}$. Puisque $G[V_i]$ est $(k+1)$ -arête connexe, il s'en suit que le graphe induit par E_4 est k -arête connexe. Donc, $x^{E_4} \in \mathcal{F}$ et par conséquent, $x^{E_4} \in \mathcal{P}$. D'où

$$b(f_0) = b^T x^{E_0^1} - b^T x^{E_4} = 0.$$

Ce qui implique que

$$b(e) = 0 \quad \forall e \in E \setminus E_\pi.$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} b(e) &= \rho \quad \forall e \in E_\pi, \\ b(e) &= 0 \quad \forall e \in E \setminus E_\pi. \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.5, on a $\rho \geq 0$. Aussi, comme $\mathcal{P} \subset k\text{ECSP}(G)$, on a $\rho \neq 0$. D'où $\rho > 0$. $\square$

1.3 Les contraintes de F -partition

Dans [57], Mahjoub a introduit une classe d'inégalités valides pour le polytope $2\text{ECSP}(G)$ comme suit. Soient $G = (V, E)$ un graphe, $\{V_0, V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V et $F \subseteq \delta(V_0)$ avec $|F| = 2t + 1$ ($t \geq 0$). Soit $\Delta = \delta(V_0, V_1, \dots, V_p) \setminus F$. Le vecteur d'incidence de toute solution de $2\text{ECSP}(G)$ vérifie les contraintes suivantes:

$$\begin{aligned} x(\delta(V_i)) &\geq 2 & 1 \leq i \leq p, \\ -x(e) &\geq -1 & \forall e \in F, \\ x(e) &\geq 0 & \forall e \in \delta(V_0) \setminus F. \end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$2x(\Delta) \geq 2p - 2t - 1.$$

En divisant par 2, et en arrondissant le second membre au plus petit entier supérieur, on obtient

$$x(\Delta) \geq p - t. \tag{1.11}$$

Les inégalités du type (1.11) sont appelées les *contraintes de F -partition*. Il a été montré dans [9] que les contraintes (1.11) suffisent avec les inégalités triviales et les inégalités de coupes pour caractériser le polytope $2\text{ECSP}(G)$ dans la classe des graphes de Halin (un graphe $G = (V, T \cup C)$ est dit de *Halin* si T est un arbre ne contenant pas de sommet de degré deux et C est un cycle dont les sommets sont les sommets pendants de T).

Dans ce qui suit, nous allons étudier une généralisation de cette classe d'inégalités pour tout k .

Soient $G = (V, E)$ un graphe, $\{V_0, V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V et $F \subseteq \delta(V_0)$. Si $k = 2q$, $q \geq 1$, et $|F| = 2t + 1$, $t \geq 1$ (resp. $k = 2q + 1$, $q \geq 1$ et $|F|p$ est impair), alors on peut montrer d'une manière similaire à (1.11) que la contrainte

$$x(\Delta) \geq qp - t \quad (\text{resp. } x(\Delta) \geq \frac{1}{2}[pk - |F|]). \quad (1.12)$$

est valide pour $k\text{ECSP}(G)$. Les contraintes de type (1.12) seront aussi appelées les *contraintes de F -partition*. Si k est impair et $|F|p$ est pair, la contrainte (1.12) est dominée par les contraintes de coupes.

Dans un premier temps, nous allons discuter de la relation entre ces contraintes et les contraintes dites de r -recouvrement et étudier le problème de séparation associé. Dans un deuxième temps, nous décrivons des conditions suffisantes pour que ces contraintes définissent des facettes de $k\text{ECSP}(G)$.

1.3.1 Relation avec les inégalités de r -recouvrement

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et une fonction $r : V \rightarrow \mathbb{N}$ qui associe à chaque sommet $v \in V$ un entier positif r_v , un r -recouvrement de G est un ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que $|F \cap \delta(v)| \geq r_v$ pour tout $v \in V$. Si les arêtes sont munies d'un système de poids, alors le *problème du r -recouvrement* consiste à trouver un r -recouvrement de poids minimum.

Edmonds [30] a démontré que le problème du r -recouvrement est polynomial. Il a aussi démontré que le polytope associé à ce problème est complètement caractérisé par les

inégalités

$$0 \leq x(e) \leq 1 \quad \forall e \in E, \quad (1.13)$$

$$x(\delta(v)) \geq r_v \quad \forall v \in V, \quad (1.14)$$

$$x(E(U)) + x(\delta(U) \setminus T) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{v \in U} r_v - |T| + 1 \right) \quad \forall U \subseteq V \text{ et} \quad (1.15)$$

$$T \subseteq \delta(U) \text{ tels que } \sum_{v \in U} r_v - |T| \text{ est impair.}$$

Les inégalités (1.15) sont appelées *les contraintes de r -recouvrement*.

Toute solution du problème k ECON défini par un graphe G et un vecteur $r \in \{0, 1, \dots, k\}^{|V|}$ est aussi une solution du problème du r -recouvrement. Par conséquent, les inégalités (1.15) sont aussi valides pour k ECON(G).

Padberg et Rao [66] ont donné un algorithme polynomial pour séparer les inégalités (1.15). Grötschel, Monma et Stoer [47] ont étendu la classe des inégalités (1.15) en une classe plus générale comme suit. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $r \in \{0, 1, \dots, k\}^{|V|}$. Soient $U \subset V$ et $T \subseteq \delta(U)$. Pour chaque $e = (u, v) \in T$, on note $T_e = \{u, v\}$. Les ensembles T_e , $e \in T$, sont appelés *les dents*. Soit $\{U_1, \dots, U_p\}$, $p \geq 3$, une partition de U telle que:

- $\max \{r_v \mid v \in U_i\} \geq 1$, $i = 1, \dots, p$,
- il existe au plus $\text{con}(U_i) - 1$ dents qui intersectent U_i pour $i = 1, \dots, p$, où $\text{con}(U_i) = \max \{r(u, v) \mid u \in U_i, v \in \overline{U_i}\}$,
- $\sum_{i \in I_2} \text{con}(U_i) - |T|$ est impair, où $I_2 = \{i \mid \text{con}(U_i) \geq 2\}$.

Soit $I_1 = \{i \mid \text{con}(U_i) = 1\}$. Considérons l'inégalité suivante

$$x(\delta(U_1, \dots, U_p)) + x(\delta(U) \setminus T) \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{i \in I_2} \text{con}(U_i) - |T| + 1 \right) + |I_1|. \quad (1.16)$$

Grötschel, Monma et Stoer [47] ont montré que les contraintes (1.16) sont valides pour le polytope k ECON(G, r) et ont appelé ces contraintes, *les contraintes de r -recouvrement généralisées*. Ces contraintes généralisent les contraintes de F -partition. En effet, les contraintes de F -partitions correspondent aux contraintes (1.16) quand $r_v = k$ pour tout $v \in V$. Dans [45], Grötschel et al. ont montré que le problème de séparation des inégalités (1.16) est NP-dur. Ils ont également développé un algorithme de coupe et branchement utilisant une heuristique pour séparer ces inégalités.

1.3.2 Séparation des contraintes de F -partition

Dans [3], Baïou a donné une méthode polynomiale pour résoudre le problème de séparation des inégalités de F -partitions quand l'ensemble F est fixé et $k = 2$. Cette méthode utilise l'algorithme de Cunningham [25] ou l'algorithme de Barahona [8] pour séparer les inégalités de partitions $x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq p - 1$.

Dans ce qui suit, nous étendons cette méthode au cas où F est fixé et k est pair. Si $x \in \mathbb{R}_+^E$ et $F \subset E$ est un ensemble fixé où $|F| = 2t + 1$, alors le problème de séparation des inégalités de F -partitions associé à x peut être résolu de la manière suivante.

- Poser $x' = \frac{x}{q}$ ($k = 2q$).
- Choisir $V_0 \subset V$ tel que $F \subseteq \delta(V_0)$.
- Contracter V_0 (on note v_0 le sommet qui résulte de cette contraction) et supprimer F . Soit $G' = (V', E')$ le nouveau graphe.
- Chercher une inégalité de partition violée dans G' par x' de type

$$x(\delta(V'_1, \dots, V'_p)) \geq (p - 1) - \alpha, \quad (1.17)$$

où $\alpha = \frac{t}{q}$ et $\{V'_1, \dots, V'_p\}$ est une partition de G' .

Soit $\{V_1, \dots, V_p\}$ la partition de V obtenue à partir de la partition $\{V'_1, \dots, V'_p\}$ en éclatant le sommet v_0 . Si toutes les arêtes de F sont dans $\delta(V_1, \dots, V_p)$, alors on aura trouvé une inégalité de F -partition violée par x , sinon on aura juste trouvé une inégalité valide pour $k\text{ECSP}(G)$.

Pour trouver une inégalité violée (1.17), on utilise l'algorithme de Barahona [8]. Cet algorithme nous donne la partition $\{U'_1, \dots, U'_{p_0}\}$ de V la plus violée, *i.e.* telle que $x'(\delta(U'_1, \dots, U'_{p_0})) = \alpha' = \min\{x'(\delta(V'_1, \dots, V'_p)) - (p - 1)\}$. Si $\alpha' \geq -\alpha$, alors toute partition de G' satisfait (1.17). Si $\alpha' < -\alpha$, alors $x'(\delta(U'_1, \dots, U'_{p_0})) < (p_0 - 1) - \alpha$ et on aura trouvé une inégalité (1.17) violée.

1.3.3 Facettes

Dans cette section, nous donnons des conditions suffisantes pour que les contraintes de F -partitions définissent des facettes de $k\text{ECSP}(G)$. La première classe de facettes est une généralisation d'une famille de contraintes introduites par Mahjoub [57] pour le polytope $2\text{ECSP}(G)$. Par la suite, nous donnons d'autres conditions suffisantes pour que les contraintes de F -partitions définissent des facettes du polytope $k\text{ECSP}(G)$ pour tout k .

Dans [57], Mahjoub a introduit une classe de contraintes définissant des facettes du polytope $2\text{ECSP}(G)$, appelées *inégalités de roue-impair*. Ces inégalités sont un cas particulier des contraintes de F -partition. Dans ce qui suit, nous donnons une généralisation de cette classe.

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un entier $k = 2(2q + 1)$, $q \geq 0$, une configuration de *roue-impair généralisée* (voir figure 1.1) est définie par un entier l , des entiers p_i , pour $i = 1, \dots, 2l + 1$, et une partition de l'ensemble des sommets V en V_i^s , V_0 pour $i = 1, \dots, 2l + 1$ et $s = 0, \dots, p_i$ tels que

- (1) les graphes $G[V_i^s]$ et $G[V_0]$ soient $(k + 1)$ -arête connexes pour $i = 1, \dots, 2l + 1$ et $s = 0, \dots, p_i$;
- (2) $||V_i^0, V_{i+1}^0|| \geq 2q + 1$, pour $i = 1, \dots, 2l + 1 \pmod{(2l + 1)}$;
- (3) $||V_i^s, V_i^{s+1}|| \geq 2q + 1$ et si $p_i > 0$, $||V_i^s, V_i^{s+1}|| = 2q + 1$ pour $i = 1, \dots, 2l + 1$ et $s = 0, \dots, p_i$ (on notera V_0 par $V_i^{p_i+1}$ pour $i = 1, \dots, 2l + 1$);
- (4) $[V_i^s, V_i^q] = \emptyset$ pour $1 \leq i \leq 2l + 1$, $0 \leq s, q \leq p_i + 1$, $q \neq s + 1$ et $(s, q) \neq (0, p_i + 1)$;
- (5) $[V_i^s, V_t^q] = \emptyset$ pour $1 \leq i, t \leq 2l + 1$, $i \neq t$, $1 \leq s \leq p_i$ et $1 \leq q \leq p_t$.

Soit r_i pour $1 \leq i \leq 2l + 1$, le plus grand entier tel que $0 \leq r_i \leq p_i$ et $|\delta(V_i^{r_i})| \geq k + 1$, *i.e.*

$$r_i = \max\{j : |\delta(V_i^j)| \geq k + 1\}.$$

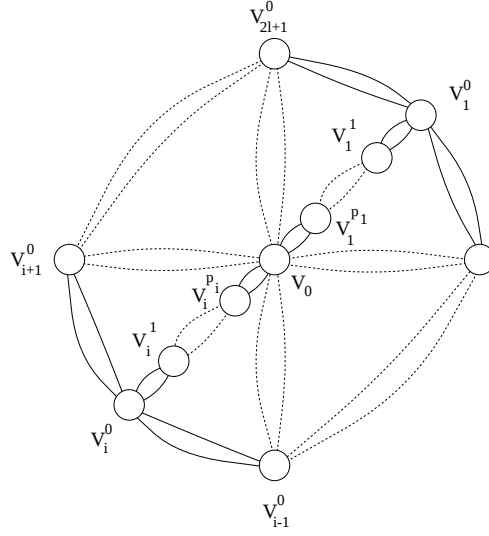


Figure 1.1 : Configuration de roue-impair généralisée

On note par $E_{i,s}$ un ensemble d'arêtes fixé de $[V_i^s, V_i^{s+1}]$ tel que $|E_{i,s}| = 2q + 1$ pour $i = 1, \dots, 2l + 1$ et $s = 0, \dots, p_i$. Soit

$$T = E^1 - \{E_{i,s} : 1 \leq i \leq 2l + 1, r_i \leq s \leq p_i\},$$

où

$$E^1 = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq 2l+1 \\ 0 \leq s \leq p_i}} \delta(V_i^s).$$

L'inégalité de *roue-impair généralisée* associée à la configuration de roue-impair généralisée est donnée par

$$x(T) \geq (2q + 1) \sum_{i=1}^{2l+1} r_i + q(2l + 1) + l + 1. \quad (1.18)$$

On a le théorème suivant.

Théorème 1.10 *Les inégalités de roue-impair généralisées définissent des facettes du polytope $kECSP(G)$.*

Preuve. On démontre d'abord la validité de (1.18). Le vecteur d'incidence de tout sous-graphe k -arête connexe vérifie les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} x(\delta(V_i^0)) &\geq 2(2q + 1) & i = 1, \dots, 2l + 1, \\ x(\delta(V_i^j)) &\geq 2(2q + 1) & i = 1, \dots, 2l + 1, j = 1, \dots, r_i - 1, \\ x(\delta(V_i^{r_i}) \setminus E_{i,r_i}) &\geq 2q + 1 & i = 1, \dots, 2l + 1, \\ x(e) &\geq 0 & \forall e \in \delta(V_0) \cap T. \end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, on obtient

$$2x(T) \geq 2(2q+1) \sum_{i=1}^{2l+1} r_i + (2q+1)(2l+1).$$

En divisant par 2 et en arrondissant le membre de droite au plus petit entier supérieur, on obtient

$$x(T) \geq (2q+1) \sum_{i=1}^{2l+1} r_i + q(2l+1) + l+1,$$

ce qui montre que (1.18) est valide pour le polytope $k\text{ECSP}(G)$.

Notons par $a^T x \geq a_0$ l'inégalité (1.18), et soit $\mathcal{F}$ la face de $k\text{ECSP}(G)$ induite par (1.18). Supposons que $\mathcal{F}$ soit contenue dans une facette de $k\text{ECSP}(G)$ induite par une contrainte $b^T x \geq b_0$.

D'après le théorème 1.1, $\dim(k\text{ECSP}(G)) = |E| - |E^*|$. Par conséquent, pour montrer que (1.18) définit une facette, il suffit de montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{E^*}$ et $\varphi > 0$ tels que $a^T = \varphi b^T + \lambda^T B$, où B est une matrice $(I, \mathbf{0})$ à $|E^*|$ lignes et $|E|$ colonnes, I est une $(|E^*|, |E^*|)$ matrice unité et $\mathbf{0}$ est une $(|E^*|, |E| - |E^*|)$ matrice dont tous les éléments sont nuls.

Considérons les ensembles d'arêtes suivants

$$E_0 = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq 2l+1 \\ 0 \leq s \leq p_i+1}} E(V_i^s),$$

$$E_j \subset [V_{2j-1}^0, V_{2j}^0], \quad j = 1, \dots, l+1 \pmod{(2l+1)} \text{ avec } |E_j| = q+1,$$

$$F_j \subset [V_{2j}^0, V_{2j+1}^0], \quad j = 1, \dots, l \text{ avec } |F_j| = q.$$

Soit

$$C = E_0 \cup \left(\bigcup_{j=1, \dots, l+1} E_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1, \dots, l} F_j \right) \cup \left(\bigcup_{\substack{1 \leq i \leq 2l+1 \\ 0 \leq s \leq p_i}} E_{i,s} \right).$$

Les ensembles C et $C_e = C \setminus \{e\}$ pour tout $e \in E_0$, induisent des sous-graphes k -arête connexes. De plus, $x^C, x^{C_e} \in \mathcal{F}$. Par conséquent

$$b^T x^C = b^T x^{C_e} = b_0.$$

D'où

$$b(e) = 0 \quad \forall e \in E_0.$$

Dans la suite, nous allons montrer que $b(e_1) = b(e_2)$ pour tous $e_1, e_2 \in [V_i^0, V_{i+1}^0]$, $i = 1, \dots, 2l+1 \pmod{(2l+1)}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $e_1 \in C$ et $e_2 \notin C$. Soit $C' = (C \setminus \{e_1\}) \cup \{e_2\}$. L'ensemble C' induit un sous-graphe k -arête connexe tel que $x^{C'} \in \mathcal{F}$. D'où

$$b^T x^C = b^T x^{C'},$$

et par conséquent, $b(e_1) = b(e_2)$. Donc

$$b(e) = \varphi'_i \quad \forall e \in [V_i^0, V_{i+1}^0]$$

pour un certain scalaire φ'_i , $i = 1, \dots, 2l+1$.

Maintenant nous allons montrer que $\varphi'_i = \varphi'_j$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, 2l+1\}$.

Soient $e_1 \in [V_i^0, V_{i+1}^0]$ et $e_2 \in [V_{i+1}^0, V_{i+2}^0]$, pour un certain $i \in \{1, \dots, 2l+1\} \pmod{(2l+1)}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $e_1 \in [V_1^0, V_2^0]$, $e_2 \in [V_2^0, V_3^0]$, $e_1 \in C$ et $e_2 \notin C$. L'ensemble $C' = (C \setminus \{e_1\}) \cup \{e_2\}$ induit un sous-graphe k -arête connexe dont le vecteur d'incidence $x^{C'}$ vérifie (1.18) à l'égalité. D'où $b(e_1) = b(e_2)$. Ceci implique que $\varphi'_i = \varphi'_j = \varphi'$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, 2l+1\}$. Donc

$$b(e) = \varphi' \quad \forall e \in [V_i^0, V_{i+1}^0], \quad i = 1, \dots, 2l+1. \quad (1.19)$$

Soit $e \in [V_i^0, V_j^s]$, $0 \leq s \leq r_j$; $j \in \{1, \dots, 2l+1\} \setminus \{i\}$; $(s, j) \neq (0, p)$, où $p \in \{i-1, i, i+1\}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $i = 2$. Soit $e_1 \in [V_1^0, V_2^0] \cap C$. L'ensemble d'arêtes $\tilde{C} = (C \setminus \{e_1\}) \cup \{e\}$ induit un sous-graphe k -arête connexe. De plus, $x^{\tilde{C}} \in \mathcal{F}$. D'où, $b^T x^C = b^T x^{\tilde{C}} = b_0$. Ce qui implique que $b(e) = b(e_1)$. Et donc

$$b(e) = \varphi' \quad \forall e \in [V_i^0, V_j^s], \quad \forall i, j, s \in \{1, \dots, 2l+1\}, \quad j \neq i, \quad (s, j) \neq (0, p), \quad (1.20)$$

où $p \in \{i-1, i, i+1\}$.

Soit $e \in [V_i^s, V_i^{s+1}]$ tel que $|\delta(V_i^s)|, |\delta(V_i^{s+1})| \geq k+1$, $s \in \{0, \dots, r_i-1\}$.

Puisque $|\delta(V_i^s)|, |\delta(V_i^{s+1})| \geq k + 1$, il existe $j, j' \in \{1, \dots, 2l + 1\} \setminus \{i\}$ tels que $[V_i^s, V_j^0] \neq \emptyset \neq [V_i^{s+1}, V_{j'}^0]$. Soient $e_1 \in [V_i^s, V_j^0]$ et $e_2 \in [V_i^{s+1}, V_{j'}^0]$.

Supposons que $j = j'$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $j = j' = 1$.

Soient

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq 2l+1 \\ 0 \leq s \leq p_i}} [V_i^s, V_i^{s+1}] \setminus \{e\}, \\ E'_j &\subset [V_{2j-1}^0, V_{2j}^0], \quad j = 1, \dots, l+1 \pmod{(2l+1)} \text{ avec } |E'_j| = q, \\ F'_j &\subset [V_{2j}^0, V_{2j+1}^0], \quad j = 1, \dots, l \text{ avec } |F'_j| = q + 1. \end{aligned}$$

Soit

$$C^* = E_0 \cup \overline{E} \cup \left(\bigcup_{j=1, \dots, l+1} E'_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1, \dots, l} F'_j \right) \cup \{e_1, e_2\}.$$

L'ensemble d'arêtes C^* induit un sous-graphe k -arête connexe. De plus, $x^{C^*} \in \mathcal{F}$.

D'où, $b(e) = \varphi'$. De la même façon, on obtient $b(e) = \varphi'$, si $j \neq j'$. Donc, on a

$$b(e) = \varphi' \quad \forall e \in [V_i^s, V_i^{s+1}], \quad i = 1, \dots, 2l + 1, \quad s = 0, \dots, r_i - 1. \quad (1.21)$$

Soit $e \in [V_0, V_i^0]$, $i \in \{1, \dots, 2l + 1\}$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $i = 2$. L'ensemble d'arêtes $\overline{C} = (C \setminus \{e_1\}) \cup \{e\}$, où $e_1 \in C \cap [V_1^0, V_2^0]$, induit un sous-graphe k -arête connexe de G tel que $x^{\overline{C}} \in \mathcal{F}$. D'où, $b(e) = \varphi'$, et par conséquent

$$b(e) = \varphi' \quad \forall e \in [V_0, V_i^0], \quad i \in \{1, \dots, 2l + 1\}. \quad (1.22)$$

D'après (1.19)-(1.22), on a

$$\begin{aligned} b(e) &= \varphi' \quad \forall e \in T \setminus E^*, \\ b(e) &= 0 \quad \forall e \in E \setminus (T \cap E^*). \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.5, on a $\varphi' \geq 0$. Puisque $b^T x \geq b_0$ induit une facette de $k\text{ECSP}(G)$, on a $\varphi' \neq 0$. Soit

$$\lambda_e = \begin{cases} 1 - \frac{b_e}{\varphi'} & \text{si } e \in T \cap E^*, \\ -\frac{b_e}{\varphi'} & \text{si } e \in E^* \setminus T. \end{cases}$$

Soit $\varphi = \frac{1}{\varphi'}$. on a

$$a^T = \varphi b^T + \lambda^T B.$$

Ce qui termine la preuve de notre théorème. $\square$

Remarque 1.2 Les inégalités de roue-impaires généralisées sont des inégalités de F -partitions (1.12) soumises aux conditions (1)-(5). Pour retrouver la structure des inégalités (1.12), on peut définir $V_0, V_1, \dots, V_p$ et F comme suit:

$$V_0 = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq 2l+1 \\ r_i+1 \leq s \leq p_i+1}} V_i^s,$$

$$F = \bigcup_{1 \leq i \leq 2l+1} E_{i, r_i}.$$

Les ensembles $V_1, \dots, V_p$ seront les V_i^s pour $s = 0, 1, \dots, r_i$ et $i = 1, \dots, 2l+1$, où

$$p = (2l+1) + \sum_{i=1, \dots, 2l+1} r_i.$$

Dans ce qui suit, nous donnons d'autres conditions suffisantes pour que les contraintes de F -partitions définissent des facettes de $k\text{ECSP}(G)$ pour tout $k \geq 2$.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et k un entier impair. Soit $\{W, V_i, U_i : i = 1, \dots, 2l+1\}$ ($l \geq 2$ si $k = 3$ et $l \geq 1$ si $k \geq 4$), une partition de V telle que (voir figure 1.2 pour $k = 3$ et $l = 2$)

- (1) Les graphes $G[W]$, $G[V_i]$ et $G[U_i]$ soient $(k+1)$ -arête connexes, $i = 1, \dots, 2l+1$;
- (2) $|[W, V_i]| \geq k-2$ et $[W, U_i] = \emptyset$, pour $i = 1, \dots, 2l+1$;
- (3) $|[U_i, U_{i+1}]| \geq \frac{k-1}{2}$, $i = 1, \dots, 2l+1 \pmod{(2l+1)}$;
- (4) $|[V_i, V_{i+1}]| \geq 1$, $i = 1, \dots, 2l+1 \pmod{(2l+1)}$;
- (5) $|[V_i, U_i]| \geq 1$ et $|[V_i, U_{i-1}]| \geq 1$, $i = 1, \dots, 2l+1 \pmod{(2l+1)}$.

Soit $F = E \setminus (E_1 \cup E_2)$, où $E_1 = \bigcup_{i=1, \dots, 2l+1} [W, V_i]$ et $E_2 = E(W) \cup (\bigcup_{i=1, \dots, 2l+1} E(W_i)) \cup (\bigcup_{i=1, \dots, 2l+1} E(V_i))$. Considérons la contrainte de F -partition suivante

$$x(F) \geq (k+2)l + \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1. \quad (1.23)$$

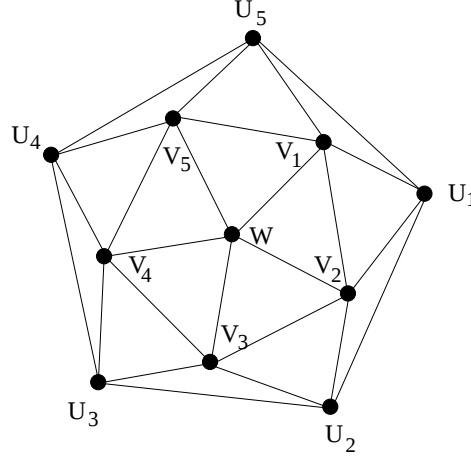


Figure 1.2 :

Théorème 1.11 *La contrainte (1.23) définit une facette de $k\text{ECSP}(G)$.*

Preuve. Nous allons donner la preuve pour $k = 3$. Pour $k \geq 4$ la preuve est similaire. Remarquons d'abord que dans ce cas G est 4-arête connexe. D'après le corollaire 1.2, le polytope $3\text{ECSP}(G)$ est de pleine dimension. Notons l'inégalité (1.23) par $a^T x \geq a_0$. Soit $\mathcal{F}$ la face de $k\text{ECSP}(G)$ induite par (1.23). Supposons que $\mathcal{F}$ soit contenue dans une facette $\mathcal{P}$ de $k\text{ECSP}(G)$ induite par une contrainte $b^T x \geq b_0$. Puisque $3\text{ECSP}(G)$ est de pleine dimension, pour montrer que $\mathcal{F}$ est une facette, il suffit de montrer qu'il existe un scalaire $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$.

Soient $e_i \in [V_i, V_{i+1}]$, $f_i \in [V_i, U_{i-1}]$, $f'_i \in [V_i, U_i]$ et $g_i \in [U_i, U_{i+1}]$ pour $i = 1, \dots, 2l+1$, où $V_0 = V_{2l+1}$ et $U_{2l+2} = U_1$.

Soient

$$\begin{aligned} F_0 &= \{e_{2i-1}; i = 1, \dots, l+1\} \cup \{f'_i; i = 1, \dots, 2l+1\} \cup \{g_i; i = 1, \dots, 2l+1\}, \\ E^* &= E_1 \cup E_2 \cup F_0. \end{aligned}$$

Soient $e \in E_1$ et $e' \in E_2$. Nous allons montrer que $b(e) = b(e') = 0$.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $e \in [W, V_1]$. Les ensembles E^* et $E_1^* = E^* \setminus \{e, e'\}$ induisent des sous-graphes 3-arête connexes. De plus, $x^{E^*}, x^{E_1^*} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$. Par conséquent, on a $b^T x^{E^*} = b^T x^{E_1^*} = b_0$. Il en résulte que $b(e) + b(e') = 0$. D'après le lemme 1.5, $b(e) \geq 0$ et $b(e') \geq 0$. Donc $b(e) = b(e') = 0$.

D'où

$$b(e) = 0, \quad \forall e \in E_1 \cup E_2. \quad (1.24)$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que $b(e) = \rho, \forall e \in \delta(U_1, \dots, U_{2l+1})$ et $b(e) = \rho', \forall e \in \delta(V_1, \dots, V_{2l+1}) \cup [\bigcup_{i=1, \dots, 2l+1} V_i, \bigcup_{i=1, \dots, 2l+1} U_i]$, où $\rho, \rho' \in \mathbb{R}$. Pour cela, il suffit de montrer que $b(g_i) = b(g_{i+1})$ et $b(e_i) = b(e_{i+1}) = b(f'_i) = b(f_{i+1})$ pour $i = 1, \dots, 2l+1$, où $e_{2l+2} = e_1$ et $f_{2l+2} = f_1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $i = 2l+1$. Soit

$$F_1 = \{f_j, f'_j; j = 1, \dots, 2l+1\} \cup \{g_{2j}; j = 1, \dots, l\} \cup \{g_{2l+1}\}.$$

Les sous-ensembles d'arêtes

$$\begin{aligned} \overline{E} &= E_1 \cup E_2 \cup F_1, \\ \overline{E}_1 &= (\overline{E} \setminus \{g_{2l+1}\}) \cup \{g_1\} \end{aligned}$$

induisent des sous-graphes 3-arête connexes. Comme $x^{\overline{E}}, x^{\overline{E}_1} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$, il s'en suit que $b^T x^{\overline{E}} = b^T x^{\overline{E}_1} = b_0$. Donc $b(g_{2l+1}) = b(g_1)$. Par conséquent, il existe un scalaire ρ tel que

$$b(e) = \rho, \quad \forall e \in \delta(U_1, \dots, U_{2l+1}). \quad (1.25)$$

D'autre part, les ensembles

$$\begin{aligned} \overline{E}_2 &= (\overline{E} \setminus \{f_1\}) \cup \{e_1\}, \\ \overline{E}_3 &= (\overline{E} \setminus \{f_1\}) \cup \{e_{2l+1}\}, \\ \overline{E}_4 &= (\overline{E} \setminus \{f'_{2l+1}\}) \cup \{e_{2l+1}\} \end{aligned}$$

induisent des sous-graphes 3-arête connexes tels que $x^{\overline{E}_i} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}, i = 2, 3, 4$. Par conséquent, $b(e_1) = b(e_{2l+1}) = b(f_1) = b(f'_{2l+1})$. D'où l'existence d'un scalaire ρ' tel que

$$b(e) = \rho', \quad \forall e \in \delta(V_1, \dots, V_{2l+1}) \cup [\bigcup_{i=1, \dots, 2l+1} V_i, \bigcup_{i=1, \dots, 2l+1} U_i]. \quad (1.26)$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer que $\rho = \rho'$.

Puisque $x^{E^*}, x^{\overline{E}} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$, il en résulte que $b^T x^{E^*} = b^T x^{\overline{E}} = b_0$. Et par conséquent,

on a $\rho(2l+1) + \rho'(3l+2) = \rho(l+1) + \rho'(4l+2)$. D'où $\rho = \rho'$, et d'après (1.24), (1.25) et (1.26), on a $b = \rho a$. D'après le lemme 1.5, on a $\rho \geq 0$. Comme $\mathcal{P} \subset 3\text{ECSP}(G)$, il en résulte que $\rho > 0$. $\square$

Soient $G = (V, E)$ un graphe et k un entier pair. Soit $\{W, V_i, U_i : i = 1, \dots, 2l+1\}$ ($l \geq 1$), une partition de V telle que (voir figure 1.3 pour $k = 4$ et $l = 2$)

- (1) Les graphes $G[W]$, $G[V_i]$ et $G[U_i]$ soient $(k+1)$ -arête connexes, $i = 1, \dots, 2l+1$;
- (2) $||[W, V_i]|| \geq k-1$ et $[W, U_i] = \emptyset$, pour $i = 1, \dots, 2l+1$;
- (3) $||[U_i, U_{i+1}]|| \geq \frac{k}{2}$, $i = 1, \dots, 2l+1 \pmod{(2l+1)}$;
- (4) $||[V_i, V_{i+1}]|| \geq 1$, $i = 1, \dots, 2l+1 \pmod{(2l+1)}$;
- (5) $||[V_i, U_i]|| \geq 1$ et $||[V_i, U_{i-1}]|| \geq 1$, $i = 1, \dots, 2l+1 \pmod{(2l+1)}$.

Soit $F = E \setminus (E_1 \cup E_2)$, où $E_1 = \bigcup_{i=1, \dots, 2l+1} [W, V_i]$ et $E_2 = E(W) \cup (\bigcup_{i=1, \dots, 2l+1} E(W_i)) \cup (\bigcup_{i=1, \dots, 2l+1} E(V_i))$. Considérons la contrainte de F -partition suivante

$$x(F) \geq (k+1)l + \frac{k}{2} + 1. \quad (1.27)$$

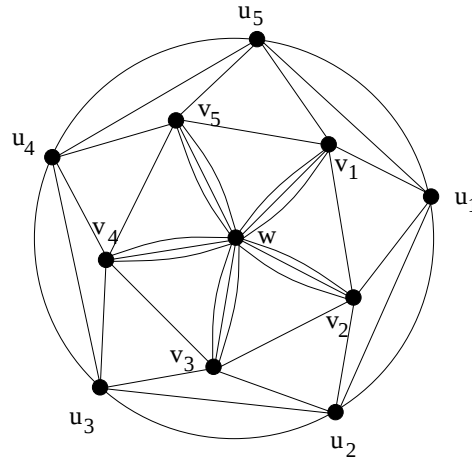


Figure 1.3 :

Théorème 1.12 *La contrainte (1.27) définit une facette de $kECSP(G)$.*

Preuve. Similaire à la preuve du théorème 1.11. □

1.4 Les inégalités de roue-paires

Soit $G_0 = (V_0, E_0)$ le graphe donné dans la figure 1.4. On note $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, $i = 1, \dots, 8 \pmod{8}$.

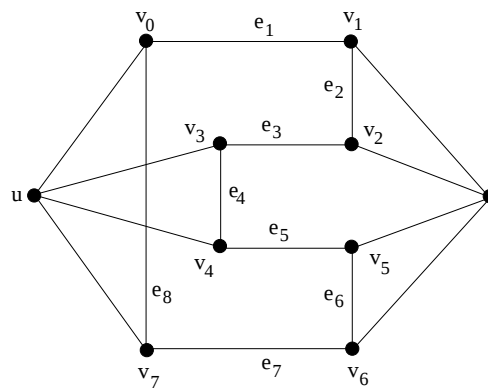


Figure 1.4 :

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^{E_0}$ la solution définie par

$$x_0(e) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } e \in \{e_1, \dots, e_8\}, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La solution x_0 n'appartient pas au polytope $2ECSP(G_0)$ et elle satisfait toutes les inégalités triviales, de coupes, de partitions (1.4) et de F -partition.

Il n'est pas difficile de voir que si l'ensemble $F \subseteq E_0$ induit un sous-graphe 2-arête connexe de G_0 , alors F contient au moins trois arêtes parmi les arêtes e_1, e_5, e_6, e_7, e_8 . Et par conséquent, la contrainte

$$x(e_1) + x(e_5) + x(e_6) + x(e_7) + x(e_8) \geq 3$$

est valide pour $2ECSP(G_0)$. Cette contrainte n'est pas vérifiée par x_0 . Dans ce qui suit, nous montrons que cette contrainte est un cas particulier d'une classe plus générale d'inégalités valides pour $kECSP(G)$.

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, une configuration de *roue-paire* est définie par un entier $l = 2p$ ($p \geq 4$) et une famille $W, V_1, \dots, V_{2p}$ de sous-ensembles de V tels que:

- (1) $V_i \cap V_j = \emptyset, i, j \in \{1, \dots, 2p\}, i \neq j$;
- (2) $|\delta(V_i)| = k + 1, i = 1, \dots, 2p$;
- (3) il existe un sous-ensemble d'arêtes $C = \{e_1, \dots, e_{2p}\} \subset E$ avec $e_i \in [V_i, V_{i+1}]$, $i = 1, \dots, 2p \pmod{2p}$;
- (4) il existe $I \subseteq \{1, 3, \dots, 2p - 1\}$ avec $|I| = 2t, t \geq 2$, tel que $e_i \in \delta(W), \forall i \in I$;
- (5) $|\delta(W) \setminus E_0| = k - 2$, où $E_0 = \{e_i : i \in I\}$.

A une configuration de roue-paire, on associe la famille de contraintes suivantes:

$$x(C \setminus \{e_{i-1}, e_i, e_{i+1}\}) \geq p - 1, \forall i \in I. \quad (1.28)$$

Les inégalités (1.28) seront appelées les *inégalités de roue-paires*.

Théorème 1.13 *Les inégalités (1.28) sont valides pour le polytope $kECSP(G)$.*

Preuve. Considérons une contrainte de type (1.28) associée à $i_0 \in I$. Soit F un ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe k -arête connexe. Puisque $|F \cap \delta(W)| \geq k$, $E_0 \subseteq \delta(W)$ et $|\delta(W) \setminus E_0| = k - 2$, il existe $j \in I \setminus \{i_0\}$ tel que $e_j \in F$. On suppose que $j = 2s + 1$ et $i_0 = 2r + 1$ ($s, r \geq 0$). Sans perte de généralité, on peut supposer que $j < i_0$ (si ceci n'est pas le cas, on peut changer la numérotation des V_i pour que cela soit vrai). Puisque $|\delta(V_i)| = k + 1$, $i = 1, \dots, 2p$, alors le vecteur x^F vérifie les contraintes:

$$x(e_{2t-1}) + x(e_{2t}) \geq 1 \quad t = 1, \dots, s,$$

$$x(e_{2s+1}) = 1$$

$$x(e_{2t-2}) + x(e_{2t-1}) \geq 1 \quad t = s + 2, \dots, r,$$

$$x(e_{2t-1}) + x(e_{2t}) \geq 1 \quad t = r + 2, \dots, p.$$

D'où

$$x(C \setminus \{e_{i-1}, e_i, e_{i+1}\}) \geq p - 1.$$

□

Théorème 1.14 *Une inégalité de type (1.25) définit une facette de $kECSP(G)$, si les conditions suivantes sont vérifiées (voir figure 1.5 pour $k = 3$):*

(1) $G[V_i]$ est $(k + 1)$ -arête connexe, $i = 1, \dots, 2p$;

(2) il existe deux ensembles de sommets disjoints $W_1, W_2 \subset V$ tels que

$$(2.1) \quad V = W_1 \cup W_2 \cup \left(\bigcup_{i=1, \dots, 2p} V_i \right);$$

$$(2.2) \quad G[W_j] \text{ est } (k + 1)\text{-arête connexe, } j = 1, 2;$$

$$(2.3) \quad W_1 \subset W, \quad W_2 \subset \overline{W} \text{ et } |[W_1, W_2]| = k - 2;$$

$$(2.4) \quad |[W_1, V_j]| = k - 2, \text{ si } V_i \subset W, j = 1, \dots, 2p;$$

$$(2.5) \quad |[W_2, V_i]| = k - 2, \text{ si } V_i \subset \overline{W}, i = 1, \dots, 2p.$$

Preuve. Notons par $a^T x \geq a_0$ l'inégalité (1.25) associée à un certain $i_0 \in I$. Soit $\mathcal{F}$ la face du polytope $kECSP(G)$ définie par cette inégalité. Supposons que $\mathcal{F}$ soit

contenue dans une facette $\mathcal{P}$ de $k\text{ECSP}(G)$ définie par une contrainte $b^T x \geq b_0$. Puisque le graphe G est $(k+1)$ -arête connexe, d'après le corollaire 1.2, le polytope $k\text{ECSP}(G)$ est de pleine dimension. Donc pour montrer que $\mathcal{F}$ est une facette, il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$.

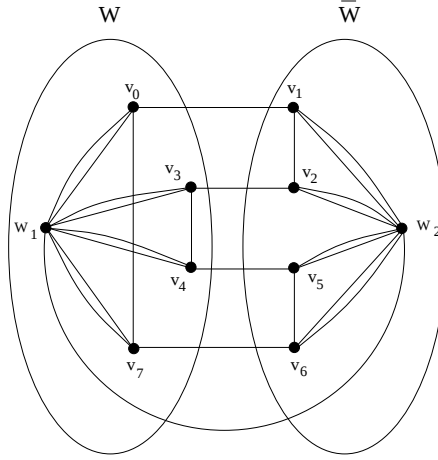


Figure 1.5 :

Soit $F_{i_0} = (E \setminus \{e_j \mid j \notin I\}) \cup \{e_{i_0-1}, e_{i_0+2}\}$. Les ensembles d'arêtes F_{i_0} , $F_{i_0} \setminus \{e_{i_0-1}\}$, $F_{i_0} \setminus \{e_{i_0}\}$ et $F_{i_0} \setminus \{e_{i_0+1}\}$ induisent des sous-graphes k -arête connexes. Par ailleurs, $x^{F_{i_0}}, x^{F_{i_0} \setminus \{e_{i_0-1}\}}, x^{F_{i_0} \setminus \{e_{i_0}\}}, x^{F_{i_0} \setminus \{e_{i_0+1}\}} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$. D'où

$$b(e_{i_0-1}) = b(e_{i_0}) = b(e_{i_0+1}) = 0.$$

Montrons que $b(e_j) = b(e_s)$ pour tous $j, s \in \{1, \dots, 2p\} \setminus \{i_0 - 1, i_0, i_0 + 1\}$.

Il suffit de montrer que $b(e_{j-1}) = b(e_j)$ pour tout $j \notin I \cup \{i_0 - 1, i_0 + 1\}$.

Soit $F_{i_0}^j = (E \setminus C) \cup \{e_{i_0-1}, e_{i_0}, e_{i_0+1}\} \cup \{e_{i_0+3}, e_{i_0+5}, \dots, e_j\} \cup \{e_{j+1}, e_{j+3}, \dots, e_{i_0-2}\}$. Les ensembles $F_{i_0}^j$ et $\overline{F}_{i_0}^j = (F_{i_0}^j \setminus \{e_j\}) \cup \{e_{j-1}\}$ induisent des sous-graphes k -arête connexes. De plus, $x^{F_{i_0}^j}, x^{\overline{F}_{i_0}^j} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$. Il s'en suit que $b(e_{j-1}) = b(e_j)$.

Montrons que si $e \notin C$, alors $b(e) = 0$.

Si $e \in E(W_1) \cup E(W_2) \cup (\bigcup_{i=1, \dots, 2p} E(V_i)) \cup [W_1, W_2]$, alors $x^{F_{i_0} \setminus \{e\}} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$. D'où, $b(e) = 0$.

Soit $e \in [W_s, V_j]$ pour un certain $s \in \{1, 2\}$ et un certain $j \in \{1, \dots, 2p\}$. Supposons que j soit impair. L'ensemble d'arêtes $F_{i_0}^{j-1} \setminus \{e\}$ induit un sous-graphe k -arête connexe

tel que $x^{F_{i_0}^{j-1} \setminus \{e\}} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$. D'où, $b(e) = 0$.

Supposons maintenant que j soit pair. Soit

$$E_{i_0}^j = (E \setminus C) \cup \{e_{i_0-1}, e_{i_0}, e_{i_0+1}\} \cup \{e_{i_0+2}, e_{i_0+4}, \dots, e_{j-1}\} \cup \{e_j, e_{j+2}, \dots, e_{i_0-3}\}.$$

Les ensembles $E_{i_0}^j$ et $E_{i_0}^j \setminus \{e\}$ induisent des sous-graphes k -arête connexes tels que $x^{E_{i_0}^j}, x^{E_{i_0}^j \setminus \{e\}} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}$. D'où, $b(e) = 0$.

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} b(e) &= \rho \quad \forall e \in C \setminus \{e_{i-1}, e_i, e_{i+1}\} \\ b(e) &= 0 \quad \forall e \in (E \setminus C) \cup \{e_{i-1}, e_i, e_{i+1}\} \end{aligned}$$

D'après le lemme 1.5, on a $\rho \geq 0$. Aussi, comme $\mathcal{P} \subset k\text{ECSP}(G)$, il en résulte que $\rho \neq 0$. $\square$

Chapitre 2

Caractérisations polyédrales

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le polytope $k\text{ECSP}(G)$ dans deux classes de graphes. Tout d'abord nous considérons la classe des graphes série-parallèles. Nous donnons une description complète du polytope $k\text{ECSP}(G)$ pour tout k dans cette classe. Nous montrons que si G est série-parallèle et k est impair, alors $k\text{ECSP}(G)$ est complètement caractérisé par les inégalités triviales et les inégalités de SP-partition. Et si k est pair, alors $k\text{ECSP}(G)$ est donné par les inégalités triviales et les inégalités de coupes. Nous étudions également le problème du sous-graphe Steiner k -arête connexe dans cette classe de graphes et nous y donnons une description complète du polytope associé quand k est pair.

Par la suite, nous étudions le polytope $k\text{ECSP}(G)$ dans une classe de graphes $(k+1)$ -arête connexes minimaux qui généralise celle de Halin. Nous montrons que dans cette classe, le polytope $k\text{ECSP}(G)$ est donné par les contraintes triviales, les contraintes de coupes et les contraintes de r -recouvrement généralisées.

2.2 Le polytope $k\text{ECSP}(G)$ dans les graphes série-parallèles

Plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire NP-difficiles dans le cas général, peuvent être résolus en temps polynomial dans les graphes série-parallèles [1, 2, 12, 21, 22, 56, 57, 73, 77, 78, 79]. Étant donnée la relation étroite entre les deux aspects algorithmique et polyédral en optimisation combinatoire, ceci suggère la possibilité d'obtenir pour ces problèmes des descriptions complètes des polytopes associés dans cette classe de graphes. Plusieurs problèmes y ont été étudiés, comme par exemple le problème du stable maximum (Boulala et Uhry [12], Mahjoub [56]), le problème de l'arbre Steiner orienté (Prodon et al. [70], Goemans [38], Schaffers [73]), le problème du sous-graphe 2-sommet connexe et du sous-graphe 2-arête connexe (Coullard et al. [23, 22, 24], Mahjoub [57]) et le problème du voyageur de commerce (Cornuéjols et al. [21]). Dans [61], Martin et al proposent une technique générale qui, à partir d'un algorithme de programmation dynamique, donne une description complète de la plupart des polytopes associés aux problèmes d'optimisation combinatoire dans les graphes série-parallèles. Néanmoins, cette description utilise des variables auxiliaires qui ne sont pas dans l'espace des variables naturelles.

Dans cette section, nous discutons du polytope $k\text{ECSP}(G)$ dans cette classe de graphes.

Soit $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle k arête-connexe. Notons par $P(G, k)$ le polytope donné par les contraintes (1.1)-(1.3) et (1.5). Pour démontrer le résultat principal de cette section, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.1 *Soit x une solution de $P(G, k)$.*

i) Si $\pi = \{V_1, \dots, V_p\}$ est une partition de V serrée pour x , alors

$$x([V_i, V_j]) \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil \quad \forall i, j \in \{1, \dots, p\}, i \neq j. \quad (2.1)$$

De plus, si x vérifie (2.1) à l'égalité pour i et j avec $i < j$, alors la partition $\pi' = \{V'_1, \dots, V'_{p-1}\}$ telle que

$$\begin{aligned}
V'_t &= V_t && \text{pour } t = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, \\
V'_i &= V_i \cup V_j, \\
V'_t &= V_{t+1} && \text{pour } t = j, \dots, p-1
\end{aligned}$$

est aussi serrée pour x .

ii) Si $\pi = \{V_1, \dots, V_p\}$ (resp. $\delta(W)$) est une partition (resp. une coupe) serrée pour x et $\{V_i^1, V_i^2\}$ une partition de V_i pour $i \in \{1, \dots, p\}$ (resp. W), alors $x([V_i^1, V_i^2]) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

iii) Si $\delta(W_1)$ et $\delta(W_2)$ sont deux coupes serrées pour x , alors $x(\delta(W_1) \cap \delta(W_2)) \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

Preuve.

i) On a

$$\begin{aligned}
x(\delta(V'_1, \dots, V'_{p-1})) &= x(\delta(V_1, \dots, V_p)) - x([V_i, V_j]) \\
&= \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1 - x([V_i, V_j]) \\
&\geq \lceil \frac{k}{2} \rceil (p-1) - 1.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $x([V_i, V_j]) \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. De plus, si $x([V_i, V_j]) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$, la partition π' est serrée pour x .

ii) Considérons la partition $\{U_1, \dots, U_{p+1}\}$ donnée par

$$\begin{aligned}
U_j &= V_j && \text{pour } j = 1, \dots, i-1, \\
U_i &= V_i^1, \\
U_{i+1} &= V_i^2, \\
U_j &= V_{j-1} && \text{pour } j = i+2, \dots, p+1.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
x(\delta(U_1, \dots, U_{p+1})) &= x(\delta(V_1, \dots, V_p)) + x([V_i^1, V_i^2]) \\
&= \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1 + x([V_i^1, V_i^2]) \\
&\geq \lceil \frac{k}{2} \rceil (p+1) - 1.
\end{aligned}$$

D'où, $x([V_i^1, V_i^2]) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

iii) On note par $\delta(W_1)\Delta\delta(W_2)$ la différence symétrique de $\delta(W_1)$ et $\delta(W_2)$, i.e.

$$\delta(W_1)\Delta\delta(W_2) = (\delta(W_1) \setminus \delta(W_2)) \cup (\delta(W_2) \setminus \delta(W_1)).$$

Puisque la différence symétrique de deux coupes est une coupe, on a

$$\begin{aligned} x(\delta(W_1)\Delta\delta(W_2)) &= x(\delta(W_1)) + x(\delta(W_2)) - 2x(\delta(W_1) \cap \delta(W_2)) \\ &= 2k - 2x(\delta(W_1) \cap \delta(W_2)) \\ &\geq k. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $x(\delta(W_1) \cap \delta(W_2)) \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. □

Théorème 2.2 *Si $G = (V, E)$ est un graphe série-parallèle k -arête connexe et k est pair (resp. impair), alors $kECSP(G)$ est complètement caractérisé par les inégalités (1.1), (1.2) et (1.3) (resp. (1.1), (1.2) et (1.5)).*

Preuve. La démonstration est par récurrence sur $|E|$.

Il est clair que $kECSP(G) = P(G, k)$ si G est constitué de deux sommets liés par k arêtes. Supposons que le théorème soit vrai pour tout graphe série-parallèle ayant au plus m arêtes et supposons que G contienne exactement $m + 1$ arêtes. Puisque les inégalités (1.1)-(1.3) et (1.5) sont valides pour $kECSP(G)$, il s'en suit que $kECSP(G) \subseteq P(G, k)$. De plus, toute solution entière de $P(G, k)$ est aussi une solution de $kECSP(G)$. Donc si $kECSP(G) \neq P(G, k)$, alors il existe un point extrême fractionnaire x de $P(G, k)$.

Affirmation 1. $x(e) > 0, \forall e \in E$.

Preuve. Si e_0 est une arête telle que $x(e_0) = 0$, alors la restriction x' de x dans le graphe $G - e_0$ est un point extrême fractionnaire de $kECSP(G - e_0)$. Mais ceci contredit l'hypothèse de récurrence.

Soit E_1 l'ensemble des arêtes e telles que $x(e) = 1$. Puisque x est un point extrême de $P(G, k)$, il existe une famille de coupes $\{\delta(W_i), i = 1, \dots, r\}$ et une famille de partitions $\{\pi_1, \dots, \pi_s\}$ de V avec $|V_{\pi_j}| \geq 3, j = 1, \dots, s$, telles que x soit l'unique

solution du système

$$\begin{cases} x(e) = 1 & \forall e \in E_1, \\ x(\delta(W_i)) = k & \text{pour } i = 1, \dots, r, \\ x(E_{\pi_j}) = \lceil \frac{k}{2} \rceil |V_{\pi_j}| - 1 & \text{pour } j = 1, \dots, s, \end{cases} \quad (2.2)$$

où $r + s + |E_1| = |E|$.

Affirmation 2. Chaque variable $x(e)$ apparaît dans au moins deux équations du système (2.2) avec des coefficients non nuls.

Preuve. Il est clair que chaque variable $x(e)$ apparaît avec un coefficient non nul dans au moins une équation du système (2.2). Sinon la solution $x' \in \mathbb{R}^E$ telle que $x'(f) = x(f)$ pour tout $f \in E \setminus \{e\}$ et $x'(e) = x(e) + \varepsilon$ serait aussi une solution du système (2.2). Comme $x \neq x'$, ceci contredirait le fait que x est un point extrême de $P(G, k)$. Maintenant, supposons qu'il existe une arête $e_0 = (u, v) \in E$ telle que $x(e_0)$ ait un coefficient non nul dans exactement une équation de (2.2). Soit (2.2)' le système obtenu à partir de (2.2) en supprimant cette équation. On note $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en contractant e_0 . Soit x' la restriction de x dans E' . Il est clair que $x' \in P(G', k)$. De plus, x' est la solution unique du système (2.2)'. Par ailleurs, les équations (2.2)' correspondent toutes à des contraintes de $P(G', k)$. Ceci implique que x' est un point extrême fractionnaire de $P(G', k)$. Puisque G' est série-parallèle et contient moins d'arêtes que G , ceci contredit l'hypothèse de récurrence et par conséquent, notre affirmation est prouvée.

D'après le lemme 1.6, il existe un sommet v dans V adjacent à exactement deux sommets v_1 et v_2 . On note F_1 (resp. F_2) l'ensemble des arêtes entre v et v_1 (resp. v et v_2). On suppose que $|F_1| \geq |F_2|$. Puisque G est k -arête connexe, on a

$$|F_1| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil. \quad (2.3)$$

Affirmation 3. Il existe $f \in F_1$ telle que $0 < x(f) < 1$.

Preuve. Supposons que $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1$. Nous allons montrer que le système (2.2) peut être choisi de telle manière que $\delta(W_i) \cap F_1 = \emptyset$ pour $i = 1, \dots, r$ et $E_{\pi_j} \cap F_1 = \emptyset$ pour $j = 1, \dots, s$. Supposons qu'il existe une partition $\pi_j = \{V_1, \dots, V_p\}$ telle que $E_{\pi_j} \cap F_1 \neq \emptyset$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $F_1 \subseteq [V_1, V_2]$.

Puisque $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1$, d'après (2.3), on a $x([V_1, V_2]) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$. D'après le lemme 2.1.i), on a $x([V_1, V_2]) \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil$, ce qui implique que $x([V_1, V_2]) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Par conséquent, la partition $\pi'_j = \{V'_1, \dots, V'_{p-1}\}$ où

$$\begin{aligned} V'_1 &= V_1 \cup V_2, \\ V'_i &= V_{i+1} \quad \text{pour } i = 2, \dots, p-1, \end{aligned}$$

est serrée pour x . Remarquons aussi que l'équation définie par la partition π'_j peut être obtenue à partir de celle définie par π_j et des équations $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1$. Donc, elle ne peut pas figurer parmi les équations du système (2.2). Considérons alors le système obtenu à partir du système (2.2) en remplaçant l'équation définie par π_j par celle définie par π'_j . Il est clair que le nouveau système est linéairement indépendant et que x est la solution unique de ce système.

Maintenant, supposons que $\delta(W_i) \cap F_1 \neq \emptyset$ pour un certain $i \in \{1, \dots, r\}$. On a donc $F_1 \subseteq \delta(W_i)$. On suppose, sans perte de généralité, que $v \in W_i$ (et $v_1 \in V \setminus W_i$). Supposons que $v_2 \in V \setminus W_i$. Dans ce cas on a $W_i = \{v\}$. Nous allons alors montrer que $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_2$. Supposons le contraire. Puisque $x(e) = 1$, pour tout $e \in F_1$ et $x(\delta(v)) = x(\delta(W_i)) = k$, l'ensemble F_2 doit contenir deux arêtes f, g telles que $x(f)$ et $x(g)$ soient fractionnaires. Soit x' le point défini par

$$x'(e) = \begin{cases} x(e) + \omega & \text{si } e = f, \\ x(e) - \omega & \text{si } e = g, \\ x(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f, g\}, \end{cases}$$

où ω est un scalaire suffisamment petit. Il est facile de voir que x' est une solution de (2.2). Puisque $x \neq x'$, ceci contredit le fait que x est un point extrême de $P(G, k)$. En conséquence, $x(e) = 1$ pour tout $e \in \delta(v)$, et donc l'équation $x(\delta(v)) = k$ est redondante dans le système (2.2), ce qui contredit notre hypothèse.

Donc $v_2 \in W_i$. Soit $W'_i = W_i \setminus \{v\}$. On a

$$\begin{aligned} x(\delta(W'_i)) &= x(\delta(W_i)) - x(F_1) + x(F_2) \\ &= k - x(F_1) + x(F_2) \\ &\geq k, \end{aligned}$$

ce qui implique que $x(F_2) \geq x(F_1)$. Puisque $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1$ et $|F_2| \leq |F_1|$, on a $x(F_2) = x(F_1)$, et par conséquent $\delta(W'_i)$ est serrée pour x . En remplaçant la coupe

$\delta(W_i)$ dans le système (2.2) par $\delta(W'_i)$, on obtient un système linéairement indépendant dont x est la solution unique.

Donc le système (2.2) peut être choisi de telle manière que $\delta(W_i) \cap F_1 = \emptyset$ pour $i = 1, \dots, r$ et $E_{\pi_j} \cap F_1 = \emptyset$ pour $j = 1, \dots, s$. Par conséquent, pour tout $e \in F_1$, $x(e)$ apparaît avec un coefficient non nul dans une seule équation du système (2.2), en l'occurrence $x(e) = 1$. Ceci contredit l'affirmation 2. D'où, il existe $f \in F_1$ telle que $0 < x(f) < 1$.

Maintenant, nous distinguons deux cas.

Cas 1. $|F_1| = \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

Dans ce cas, on a aussi $|F_2| = \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Sinon on aurait $|\delta(v)| = k$ et $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1$, ce qui contredirait l'affirmation 3.

Par symétrie et d'après l'affirmation 3, il existe une arête $g \in F_2$ telle que $0 < x(g) < 1$. Nous allons montrer que chaque partition π_j , $j = 1, \dots, s$ (coupe $\delta(W_i)$, $i = 1, \dots, r$), contient soit F_1 et F_2 , soit ni l'un ni l'autre. En effet, supposons qu'il existe une partition $\pi_j = \{V_1, \dots, V_p\}$ telle que $F_1 \subseteq E_{\pi_j}$ et $F_2 \cap E_{\pi_j} = \emptyset$ (la preuve est similaire pour une coupe). Sans perte de généralité, on peut supposer que $v \in V_1$. Donc on a $x([v, V_1 \setminus \{v\}]) = x(F_2) < \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Mais ceci contredit le lemme 2.1.ii).

Soit $\bar{x}$ la solution donnée par

$$\bar{x}(e) = \begin{cases} x(e) + \omega & \text{si } e = f, \\ x(e) - \omega & \text{si } e = g, \\ x(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f, g\}, \end{cases}$$

où ω est un scalaire suffisamment petit. La solution $\bar{x}$ est aussi une solution du système (2.2), ce qui contredit le fait que x est un point extrême.

Cas 2. $|F_1| > \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

Remarquons d'abord que f est la seule arête de F_1 dont la valeur est fractionnaire. Sinon, on pourrait construire une autre solution de (2.2) comme ci-dessus, ce qui contredirait le fait que x est la seule solution du système (2.2). Ainsi

$$x(F_1) > \lceil \frac{k}{2} \rceil. \quad (2.4)$$

D'après le lemme 2.1.i), il en résulte que $F_1 \cap E_{\pi_j} = \emptyset$ pour $j = 1, \dots, s$. Donc par

l'affirmation 2, il existe deux coupes $\delta(W_i)$ et $\delta(W_j)$, $i, j \in \{1, \dots, r\}$, qui contiennent f . Puisque $F_1 \subseteq \delta(W_i) \cap \delta(W_j)$, d'après (2.4) on a $x(\delta(W_i) \cap \delta(W_j)) > \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Mais ceci contredit le lemme 2.1.iii). Ce qui termine la preuve de notre théorème. $\square$

Comme conséquence du théorème 2.2, on obtient le résultat suivant qui a été conjecturé par Chopra [16] et indépendamment démontré par Chopra et Stoer [19].

Corollaire 2.3 *Si $G = (V, E)$ est un graphe série-parallèle connexe (pas nécessairement k -arête connexe) et k est impair, alors $P_k(G)$ (voir section 1.2 du chapitre 1) est donné par les inégalités (1.1) et (1.5).*

Preuve. Soit $P_k^*(G) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x \text{ vérifie (1.1) et (1.5)}\}$. Il suffit de démontrer que les points extrêmes de $P_k^*(G)$ sont entiers. Supposons le contraire. Soit x un point extrême fractionnaire de $P_k^*(G)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$. Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête e de E par $\lceil x(e) \rceil$ arêtes $e_1, \dots, e_{\lceil x(e) \rceil}$. Soit $x' \in \mathbb{R}^{E'}$ la solution donnée par

$$\begin{cases} x'(e_i) = 1 & \text{pour } i = 1, \dots, \lceil x(e) \rceil - 1, \\ x'(e_i) = x(e) - \lceil x(e) \rceil + 1 & \text{pour } i = \lceil x(e) \rceil. \end{cases}$$

Il est clair que x' vérifie les inégalités (1.1), (1.2) et (1.4). De plus, la solution x' est un point extrême de $P(G', k)$. En effet, si ceci n'est pas le cas, alors x' peut s'écrire sous la forme

$$x' = \sum_{j=1}^t \lambda_j y'_j, \quad \sum_{j=1}^t \lambda_j = 1,$$

où $y'_1, \dots, y'_t$ sont des points extrêmes de $P(G', k)$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ sont des scalaires positifs.

Soient $y_1, \dots, y_t \in \mathbb{R}^E$ les solutions définies par

$$y_i(e) = \sum_{j=1}^{\lceil x(e) \rceil} y'_i(e_j) \quad \forall e \in E, \quad i = 1, \dots, t.$$

Il n'est pas difficile de voir que $y_1, \dots, y_t \in P_k^*(G)$. On a aussi $x = \sum_{j=1}^t \lambda_j y_j$, ce qui contredit le fait que x est un point extrême de $P_k^*(G)$. Par conséquent, x' est un point

extrême de $P(G', k)$. Comme x' est fractionnaire et G' est série-parallèle, ceci contredit le théorème 2.2. $\square$

2.3 Le polytope $k\text{SECSP}(G, S)$ dans les graphes série-parallèles

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, un *sous-graphe Steiner* de G , par rapport à S , est un sous-graphe contenant S . Les sommets de S sont appelés *terminaux* et les sommets de $V \setminus S$ sont appelés *Steiner*. Étant donné $w \in \mathbb{R}^E$, un vecteur de poids associé aux arêtes de G , le *problème du sous-graphe Steiner k -arête connexe* ($k\text{SECSP}$) consiste à trouver un sous-graphe Steiner de G de poids minimum tel que pour toute paire de sommets u et v de S , il existe au moins k chaînes arête-disjointes reliant u et v . Le poids d'un sous-graphe de G est la somme des poids de ses arêtes. Winter a montré que si $k \in \{0, 1, 2\}$, alors $k\text{SECSP}$ peut se résoudre en temps polynomial dans les graphes série-parallèles [82] et dans les graphes de Halin [81].

Dans cette section, nous allons étudier le problème $k\text{SECSP}$ et donner une caractérisation complète du polytope associé dans la classe des graphes série-parallèles quand k est pair.

Notons par $k\text{SECSP}(G, S)$ l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des sous-ensembles $F \subseteq E$ tels que $G(F)$ soit Steiner k -arête connexe, *i.e.*

$$k\text{SECSP}(G, S) = \text{conv}\{x^F \mid G(F) \text{ est Steiner } k\text{-arête connexe}\}.$$

Soit $F \subseteq E$. Si $G(F)$ est un sous-graphe Steiner k -arête connexe, alors le vecteur d'incidence de F , x^F , satisfait les contraintes suivantes

$$x(\delta(W)) \geq k \quad \forall W \subset V, S \neq W \cap S \neq \emptyset \quad (2.5)$$

Les inégalités (2.5) sont appelées *les contraintes de coupes Steiner*. Dans la suite, nous allons montrer que si G est série-parallèle et k est pair, alors $k\text{SECSP}(G, S)$ est complètement caractérisé par les inégalités triviales et les contraintes de coupes Steiner.

Ce qui généralise le résultat de Baïou et Mahjoub [6] pour $k = 2$.

Soit $P(G, S, k)$ le polytope défini par les inégalités (1.1), (1.2) et (2.5). Si x est un point extrême de $P(G, S, k)$, alors il existe deux sous-ensembles d'arêtes $E_0, E_1 \subseteq E$, et une famille de coupes Steiner $\{\delta(W_i); i = 1, \dots, r\}$ tels que x soit la solution unique du système

$$\begin{cases} x(e) = 0 & \forall e \in E_0, \\ x(e) = 1 & \forall e \in E_1, \\ x(\delta(W_i)) = k & \text{pour } i = 1, \dots, r, \end{cases} \quad (2.6)$$

où $r + |E_0| + |E_1| = |E|$.

Lemme 2.4 *Si $\delta(W)$ est une coupe Steiner serrée pour x , alors le système (2.6) peut être choisi de telle manière que: soit $W_i \subseteq W$, soit $W_i \subseteq V \setminus W$ pour $i = 1, \dots, r$.*

Preuve. La preuve utilise les mêmes idées que celles développées par Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [21] pour un résultat similaire. Supposons que $W_1 \cap W \neq \emptyset$, $W_1 \not\subseteq W$, $W \not\subseteq W_1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $(W \cap W_1) \cap S \neq \emptyset$. Puisque $(V \setminus W_1) \cap S \neq \emptyset$, alors au moins un des deux ensembles $W \setminus W_1$ et $\overline{W} \setminus W_1$ intersecte S . On distingue deux cas :

Cas 1. $(\overline{W} \setminus W_1) \cap S \neq \emptyset$.

Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} 2k &= x(\delta(W)) + x(\delta(W_1)) \\ &= x(\delta(W \cap W_1)) + x(\delta(\overline{W} \setminus W_1)) + 2x([W \setminus W_1, W_1 \setminus W]) \\ &\geq x(\delta(W \cap W_1)) + x(\delta(\overline{W} \setminus W_1)) \\ &\geq 2k. \end{aligned}$$

Les deux dernières inégalités proviennent du fait que $\delta(W \cap W_1)$ et $\delta(\overline{W} \setminus W_1)$ soient deux coupes Steiner et que $x(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$. Par conséquent

$$\begin{aligned} x(\delta(W \cap W_1)) &= x(\delta(\overline{W} \setminus W_1)) = k, \\ x([W \setminus W_1, W_1 \setminus W]) &= 0. \end{aligned}$$

Donc on peut remplacer $x(\delta(W_1)) = k$ par $x(\delta(W \cap W_1)) = k$ et $x(\delta(\overline{W} \setminus W_1)) = k$.

Cas 2. $(\overline{W} \setminus W_1) \cap S = \emptyset$.

Puisque $\overline{W} \cap S \neq \emptyset$ et $\overline{W}_1 \cap S \neq \emptyset$, on en déduit que

$$\begin{aligned} (W_1 \setminus W) \cap S &\neq \emptyset, \\ (W \setminus W_1) \cap S &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

En considérant $\delta(\overline{W})$ à la place de $\delta(W)$, on peut appliquer le cas 1. $\square$

Maintenant, nous pouvons donner le résultat principal de cette section.

Théorème 2.5 *Si $G = (V, E)$ est série-parallèle k -arête connexe et k est pair, alors $k\text{SECSP}(G, S) = P(G, S, k)$*

Preuve. La preuve de ce théorème utilise les mêmes techniques que celles utilisées pour démontrer le théorème 2.2. Dans ce qui suit, nous démontrons seulement les points spécifiques au polytope $k\text{SECSP}(G, S)$. Comme pour le théorème (2.2), nous procédons par récurrence sur le nombre d'arêtes de G . Supposons que le théorème soit vrai pour tout graphe ayant au plus m arêtes et supposons que G contienne $m + 1$ arêtes. Supposons que $k\text{SECSP}(G, S) \neq P(G, S, k)$. Donc il existe un point extrême fractionnaire x de $P(G, S, k)$. Supposons aussi que, sous l'hypothèse de récurrence, $|S|$ soit maximum, c'est-à-dire que pour tout graphe série-parallèle $G' = (V', E')$ avec $|E'| = m + 1$ et dont l'ensemble de terminaux S' est tel que $|S'| > |S|$, on a $k\text{SECSP}(G', S') = P(G', S', k)$.

D'après la minimalité de G , on obtient

$$x(e) > 0 \quad \forall e \in E. \quad (2.7)$$

Affirmation 1. Si $\delta(W)$ est une coupe Steiner serrée pour x , alors $G[W]$ et $G[\overline{W}]$ sont connexes.

Preuve. Supposons que $G[W]$ ne soit pas connexe. Soient W^1 et W^2 deux sous-ensembles de W tels que $W^1 \cup W^2 = W$, $W^1 \cap W^2 = \emptyset$ et $[W^1, W^2] = \emptyset$. Puisque

G est connexe, il en résulte que $[W^1, \overline{W}] \neq \emptyset \neq [W^2, \overline{W}]$. D'après (2.7), on a donc $x([W^1, \overline{W}]) > 0$ et $x([W^2, \overline{W}]) > 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $W^1 \cap S \neq \emptyset$ et par conséquent $x(\delta(W^1)) \geq k$. On a

$$\begin{aligned} k = x(\delta(W)) &= x([W^1, \overline{W}]) + x([W^2, \overline{W}]) \\ &= x(\delta(W^1)) + x([W^2, \overline{W}]) \\ &\geq k + x([W^2, \overline{W}]) \\ &> k, \end{aligned}$$

une contradiction.

Nous avons aussi l'affirmation suivante dont la preuve est similaire à celle de l'affirmation 2 du théorème 2.2.

Affirmation 2. Chaque variable $x(e)$ apparaît dans au moins deux équations du système (2.6) avec des coefficients non nuls.

D'après le lemme 1.6, il existe un sommet v adjacent à exactement deux sommets v_1 et v_2 . On note F_1 (resp. F_2) l'ensemble des arêtes entre v et v_1 (resp. v et v_2). On suppose que $|F_1| \geq |F_2|$ et que si $|F_1| = |F_2|$, alors $x(F_1) \geq x(F_2)$.

Affirmation 3. L'ensemble F_1 (F_2) contient au plus une seule arête e telle que $0 < x(e) < 1$.

Preuve. Supposons qu'il existe deux arêtes $e_1, e_2 \in F_1$ telles que $0 < x(e_1) < 1$ et $0 < x(e_2) < 1$. Soit x' la solution suivante:

$$x'(e) = \begin{cases} x(e) + \omega & \text{si } e = e_1, \\ x(e) - \omega & \text{si } e = e_2, \\ x(e) & \text{si } e \in E \setminus \{e_1, e_2\}, \end{cases}$$

où ω est un scalaire suffisamment petit. Puisque x' est une solution du système (2.6) et $x' \neq x$, ceci contredit le fait que x est un point extrême de $P(G, S, k)$.

Affirmation 4. Le système (2.6) peut être choisi de telle manière que si $|W_i| \geq 2$

et $v \in W_i$, alors $(W_i \setminus \{v\}) \cap S \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, r$.

Preuve. L'affirmation est évidente si $v \notin S$. Supposons qu'il existe W_i , pour un certain $i \in \{1, \dots, r\}$, tel que $W_i \cap S = \{v\}$ et $|W_i| \geq 2$. D'après le lemme 2.4, on peut supposer que $W_j \subseteq W_i$ ou $W_j \subseteq \overline{W_i}$ pour $j \in \{1, \dots, r\} \setminus \{i\}$. Nous avons $x(\delta(W)) \geq k$ pour tout sous-ensemble $W \subset V$ tel que $v_1 \in W$ et $\overline{W} \cap S \neq \emptyset$. En effet, si $W \cap S \neq \emptyset$, alors $x(\delta(W)) \geq k$. Donc supposons que $W \cap S = \emptyset$. Il en résulte que $v \in \overline{W}$ et par conséquent $F_1 \subseteq \delta(W)$. De plus, $\delta(W \cup \{v\})$ est une coupe Steiner. Si $v_2 \in W$, alors $x(\delta(W)) \geq x(\delta(v)) \geq k$. Si $v_2 \in \overline{W}$, alors $\delta(W \cup \{v\}) = (\delta(W) \setminus F_1) \cup F_2$. Comme $x(F_1) \geq x(F_2)$ et $x(\delta(W \cup \{v\})) \geq k$, alors $x(\delta(W)) \geq k$. Donc, x est un point extrême de $P(G, S', k)$, où $S' = S \cup \{v_1\}$. Puisque x est fractionnaire, par la maximalité de S , nous avons $v_1 \in S$. Étant donné que $W_i \cap S = \{v\}$, il s'en suit que $v_1 \in \overline{W_i}$. Alors nous avons $v_2 \in W_i$, car sinon, puisque $\delta(W_i)$ est serrée pour x et $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$, on a $W_i = \{v\}$, ce qui contredit le fait que $|W_i| \geq 2$. Si $v_2 \in S$, alors l'affirmation est démontrée. Donc supposons pour la suite que $v_2 \notin S$.

Supposons que $(W_i \setminus \{v, v_2\}) \neq \emptyset$. Puisque $[v, W_i \setminus \{v_2\}] = \emptyset$ et par le lemme 2.5, $G[W_i]$ est connexe, il s'en suit que $[v_2, W_i \setminus \{v, v_2\}] \neq \emptyset$. Soit $f \in [v_2, W_i \setminus \{v, v_2\}]$. Comme $x(f) > 0$, par l'affirmation 1, f doit appartenir à au moins une coupe Steiner serrée. Soit $\delta(T)$ une telle coupe. D'après notre hypothèse, il s'en suit que $T \subset W_i$. Nous avons

$$\begin{aligned} k = x(\delta(T)) &\geq x(f) + x(\delta(v)) \\ &> k, \end{aligned}$$

une contradiction. En conséquence, $W_i = \{v, v_2\}$ et $E(W_i) = F_2$. Par le lemme 2.4 et notre hypothèse ci-dessus, chaque arête e de F_2 appartient à au plus deux équations du système (2.6), en l'occurrence $x(e) = 1$ et $x(\delta(v)) = k$. Donc on a

$$x(e) = 1 \quad \forall e \in \delta(v). \quad (2.8)$$

Puisque l'équation $x(\delta(v)) = k$ est redondante par rapport aux équations (2.8), chaque arête de F_2 apparait dans exactement une équation du système (2.6). Ce qui contredit l'affirmation 2, terminant ainsi la preuve de notre affirmation.

Dans le reste de la démonstration, on suppose que $v \in W_i$, $i = 1, \dots, r$.

Affirmation 5. $x(F_1) = x(F_2)$ et $|F_1| = |F_2|$.

Preuve. Par l'affirmation 2, il doit exister une coupe W_{i_0} , $i_0 \in \{1, \dots, r\}$, telle que $F_1 \subset \delta(W_{i_0})$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $|W_{i_0}|$ soit maximum. Si $W_{i_0} = \{v\}$, alors, par la maximalité de $|W_{i_0}|$, la coupe $\delta(W_{i_0})$ est l'unique coupe Steiner contenant F_1 dans le système (2.6). Puisque, par l'affirmation 2, chaque arête de F_1 doit appartenir à au moins une autre contrainte serrée, on a $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1$. D'où

$$x(e) = 1 \quad \forall e \in \delta(W_{i_0}).$$

Par conséquent, l'équation $x(\delta(W_{i_0})) = k$ est redondante dans le système (2.6). Ce qui contredit le fait que le système (2.6) soit nonsingulier. En conséquence, $|W_{i_0}| \geq 2$ et $v_2 \in W_{i_0}$. Puisque, par l'affirmation 4, on a $(W_{i_0} \setminus \{v\}) \cap S \neq \emptyset$, il en résulte que $\delta(W_{i_0} \setminus \{v\})$ est une coupe Steiner. D'où

$$\begin{aligned} k \leq x(\delta(W_{i_0} \setminus \{v\})) &= x(\delta(W_{i_0})) + x(F_2) - x(F_1) \\ &= k + x(F_2) - x(F_1) \\ &\leq k. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\begin{cases} x(\delta(W_{i_0} \setminus \{v\})) = k, \\ x(F_2) = x(F_1), \\ |F_1| = |F_2|. \end{cases}$$

Affirmation 6. Le système (2.6) ne contient pas l'équation $x(\delta(v)) = k$.

Preuve. Supposons le contraire. Donc il existe une arête $e_1 \in F_1$ telle que $0 < x(e_1) < 1$. Puisque $x(F_1) = x(F_2)$, il doit exister une arête $e_2 \in F_2$ telle que $x(e_2) = x(e_1)$. Soit $t = |F_1| = |F_2|$. On a

$$\begin{aligned} x(\delta(v)) &= x(F_1) + x(F_2) \\ &= (t - 1) + (t - 1) + x(e_1) + x(e_2) \\ &= 2(t - 1) + 2x(e_1) \\ &= k. \end{aligned}$$

Comme $0 < x(e_1) < 1$, ceci implique que k n'est pas pair, une contradiction. Donc $x(e) = 1$ pour toute arête $e \in \delta(v)$ et par conséquent, le système (2.6) ne peut contenir

l'équation $x(\delta(v)) = k$.

Soit

$$F_i^1 = \{e \in F_i \mid x(e) = 1\}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Soit $J = \{j \in \{1, \dots, r\} \mid F_1 \subset \delta(W_j)\}$. Puisque l'équation $x(\delta(v)) = k$ n'appartient pas au système (2.6), on a alors $|W_j| \geq 2$ pour tout $j \in J$. Soit $W'_j = W_j \setminus \{v\}$ pour tout $j \in J$. D'après l'affirmation 4, la coupe $\delta(W'_j)$ est une coupe Steiner pour tout $j \in J$. Comme $x(F_1) = x(F_2)$, on a $x(\delta(W'_j)) = k$ pour tout $j \in J$.

Considérons le système (2.6)' obtenu à partir du système (2.6) en remplaçant les équations $x(\delta(W_j)) = k$ par $x(\delta(W'_j)) = k$ pour tout $j \in J$ et en supprimant les équations $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1^1$.

Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en contractant F_1 . Soit $S' = (S \setminus \{v, v_1\}) \cup \{v_0\}$ si $\{v, v_1\} \cap S \neq \emptyset$ et $S' = S$ sinon, où v_0 est le sommet qui résulte de la contraction de F_1 . Soit x' la restriction de x dans G' . Il est clair que $x' \in P(G', S', k)$. De plus, x' est une solution du système (2.6)'. Comme $|E'| < |E|$, d'après les hypothèses de récurrence $P(G', S', k)$ est entier. Puisque x' est fractionnaire, il existe alors un point extrême entier y' de $P(G', S', k)$ qui est aussi une solution du système (2.6)'. Nous distinguons deux cas:

Cas 1. $F_1^1 \neq F_1$.

Donc $F_2^1 \neq F_2$. Par conséquent, il existe deux arêtes $e_1 \in F_1$ et $e_2 \in F_2$ telles que $0 < x(e_1) = x(e_2) < 1$. Soit $y \in \mathbb{R}^E$ la solution donnée par

$$y(e) = \begin{cases} y'(e) & \text{si } e \in E \setminus F_1, \\ 1 & \text{si } e \in F_1^1, \\ y'(e_2) & \text{si } e = e_1. \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que y est aussi une solution du système (2.6). Puisque $y \neq x$, ceci contredit le fait que x est la solution unique du système (2.6).

Cas 2. Si $F_1^1 = F_1$.

Donc $F_2^1 = F_2$. Soit $y \in \mathbb{R}^E$ la solution donnée par

$$y(e) = \begin{cases} y'(e) & \text{si } e \in E \setminus F_1, \\ 1 & \text{si } e \in F_1. \end{cases}$$

Comme dans le cas 1, il est facile de voir que y est une solution du système (2.6). Puisque $y_1 \neq x$, ceci contredit le fait que x est la solution unique du système (2.6). Ce qui achève la preuve de notre théorème. $\square$

Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe, $S \subset V$ un ensemble de sommets terminaux, k un entier positif et $w \in \mathbb{R}^E$ un vecteur de poids associé aux arêtes de G . Considérons le problème suivant: déterminer un vecteur entier $x \in \mathbb{N}^E$ tel que $G(E(x))$ soit Steiner k -arête connexe de poids minimum, où $E(x)$ est l'ensemble d'arêtes obtenu en remplaçant chaque arête $e \in E$ par $x(e)$ arêtes. On note par $P_k(G, S)$ l'enveloppe convexe des solutions de ce problème, *i.e.*

$$P_k(G, S) = \text{conv}\{x \in \mathbb{N}^E \mid G(E(x)) \text{ est Steiner } k\text{-arête connexe}\}.$$

Comme conséquence du théorème 2.5, on obtient le résultat suivant qui généralise le résultat de Baïou [4] pour $k = 2$.

Corollaire 2.6 *Si $G = (V, E)$ est un graphe série-parallèle connexe (pas nécessairement k -arête connexe) et k est pair, alors $P_k(G, S)$ est complètement caractérisé par les inégalités (1.1) et (2.5).*

Preuve. Similaire à celle du corollaire 2.3. $\square$

Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle et $S \subset V$ l'ensemble des sommets terminaux de V . Soit $\{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V telle que

- i) $G(V_i)$ soit connexe pour $i = 1, \dots, p$,
- ii) $V_i \cap S \neq \emptyset$ pour $i = 1, \dots, p$.

Alors l'inégalité

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1 \quad (2.9)$$

est valide pour $k\text{SECSP}(G, S)$. Les inégalités (2.9) seront appelées les *inégalités de SP-partitions Steiner*. Elles généralisent les inégalités de SP-partitions données dans le chapitre 1.

Contrairement au cas où $S = V$, les contraintes de SP-partitions Steiner et les contraintes triviales ne sont pas suffisantes pour décrire le polytope $k\text{SECSP}(G, S)$ quand G est série-parallel et k est impair et ce même pour $k = 1$. En effet, considérons le graphe donné par la figure 2.1, où les cercles noirs représentent les sommets terminaux. Et considérons la solution donnée sur les arêtes de ce graphe. Cette solution est un point extrême fractionnaire du polytope défini par les inégalités triviales et les inégalités de SP-partitions Steiner pour $k = 1$.

Cette solution viole l'inégalité de trou impair $x(E) \geq 4$ introduite par Chopra et Rao [17] et qui définit une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$.

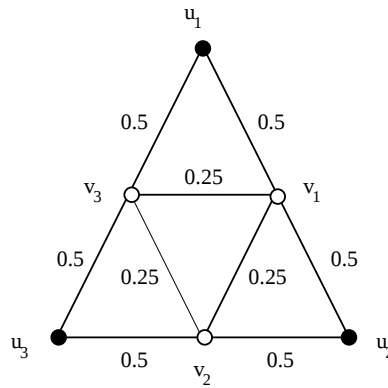


Figure 2.1 :

Dans ce qui suit, nous donnons une classe de contraintes valides pour $k\text{SECSP}(G, S)$ quand k est impair. Cette classe généralise la classe des contraintes de trou impair pour $k = 1$.

Soient $m \geq 3$ un entier impair, k un entier impair et $\tilde{G}_m = (\tilde{V}_m, \tilde{E}_m)$ le graphe tel que

$$\begin{aligned}\tilde{V}_m &= \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m\}, \\ \tilde{E}_m &= \{[u_i, v_i], [u_i, v_{i-1}], (v_i, v_{i-1}) : i = 1, \dots, m\},\end{aligned}$$

où $|[u_i, v_i]| = |[u_i, v_{i-1}]| = \frac{k+1}{2}$; $i = 1, \dots, m$ (les indices sont modulo m). Soit $\tilde{S}_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ l'ensemble des sommets terminaux de $\tilde{G}_m$ (voir figure 2.2 pour $\tilde{G}_3$).

On note $v_m = v_0$. Considérons l'inégalité suivante

$$\sum_{e \in \tilde{E}_m} x(e) \geq (k+1)m - 2. \quad (2.10)$$

Théorème 2.7 *L'inégalité (2.10) est valide pour le polytope $kSECSP(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$.*

Preuve. Il est facile de vérifier le théorème pour $m = 3$. Supposons maintenant que $m > 3$. Soit F un ensemble d'arêtes de $\tilde{E}_m$ induisant un sous-graphe Steiner k -arête connexe de $\tilde{G}_m$. Puisque u_i est un sommet terminal, il en résulte que $|\delta(u_i) \cap F| \geq k$. Soit E_i l'ensemble d'arêtes induit par les sommets $\{u_i, v_i, v_{i-1}\}$ pour $i = 1, \dots, m$. Comme $\delta(u_i) \subseteq E_i$, on a $|F \cap E_i| \geq k$ pour $i = 1, \dots, m$. Supposons qu'il existe trois ensembles E_i, E_j et E_l , $i, j, l \in \{1, \dots, m\}$, tels que $|E_i \cap F| = |E_j \cap F| = |E_l \cap F| = k$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $i < j$ et $V(E_i) \cap V(E_j) = \emptyset$. Puisque $|E_i \cap F| = |E_j \cap F| = k$, il en résulte que $(v_i, v_{i-1}), (v_j, v_{j-1}) \notin F$. On peut aussi supposer, sans perte de généralité, que $|[v_i, u_i] \cap F| = \frac{k-1}{2}$. Aussi, il existe un sommet $w \in \{v_j, v_{j-1}\}$ tel que $|[w, u_j] \cap F| = \frac{k-1}{2}$. Soit $U = \{v_i, \dots, v_{j-1}\} \cup \{u_{i+1}, \dots, u_{j-1}\}$ si $w = \{v_{j-1}\}$ et $U = \{v_i, \dots, v_{j-1}\} \cup \{u_{i+1}, \dots, u_j\}$ sinon. On a $x^F(\delta(U)) = x^F([u_i, v_i] \cup [u_j, w])$. Donc $x^F(\delta(U)) = k - 1$. Comme $\delta(U)$ est une coupe Steiner, ceci est impossible. Donc, il existe au plus deux ensembles E_i et E_j , $i, j \in \{1, \dots, m\}$, tels que $|F \cap E_i| = |F \cap E_j| = k$. Il en résulte que $|F \cap E_l| \geq k+1$ pour tout $l \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, j\}$. En conséquence, $|F| \geq k + k + (m-2)(k+1) = (k+1)m - 2$. $\square$

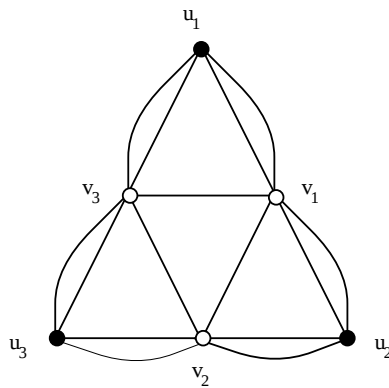


Figure 2.2 : $\tilde{G}_3$

Théorème 2.8 *L'inégalité (2.10) définit une facette du polytope $kSECSP(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$.*

Preuve. Notons par $a^T x \geq \alpha$ la contrainte (2.10) et par $\mathcal{F}$ la face de $k\text{SECSP}(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$ définie par cette contrainte. Supposons qu'il existe une contrainte $b^T x \geq \beta$ définissant une facette de $k\text{SECSP}(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$ telle que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P} = \{x \in k\text{SECSP}(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m) \mid b^T x = \beta\}$. Puisque le polytope $k\text{SECSP}(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$ est de pleine dimension, pour montrer que $\mathcal{F}$ est une facette il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$.

Notons à nouveau par E_i le sous-ensemble d'arêtes induit par les sommets $\{u_i, v_i, v_{i-1}\}$, pour $i \in \{1, \dots, m\}$. Dans ce qui suit, nous allons montrer que

$$b(e) = \alpha_i \quad \forall e \in E_i. \quad (2.11)$$

Soit $F = \bigcup_{i=1, \dots, m} \delta(u_i)$. Soient $e_1, e_2 \in [u_i, v_i]$ et $f \in [u_{i+1}, v_i]$. Considérons les ensembles d'arêtes $C = F \setminus \{f, e_1\}$ et $C' = (C \cup \{e_1\}) \setminus \{e_2\}$. Les deux ensembles C et C' induisent deux sous-graphes Steiner k -arête connexes. De plus, leurs vecteurs d'incidences x^C et $x^{C'}$ satisfont (2.10) à l'égalité. D'où

$$b^T x^C = b^T x^{C'} = \beta.$$

Donc, on a $b(e_1) = b(e_2)$. Comme e_1 et e_2 sont deux arêtes quelconques de $[u_i, v_i]$, ceci implique que

$$b(e) = \alpha_i^1 \quad \forall e \in [u_i, v_i]. \quad (2.12)$$

D'une manière similaire, on montre que

$$b(e) = \alpha_i^2 \quad \forall e \in [u_i, v_{i-1}]. \quad (2.13)$$

Soient $f_1 \in [u_i, v_i]$, $f_2 \in [u_i, v_{i-1}]$, $f_3 \in [u_{i+1}, v_{i+1}]$ et $f_4 \in [u_{i+2}, v_{i+1}]$ pour $i \in \{1, \dots, m\}$. Soit

$$T_i = F \setminus \{f_1, f_2, f_3, f_4\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Considérons les sous-ensembles d'arêtes suivants:

$$\begin{aligned} T_i^1 &= T_i \cup \{f_1, f_2\}, \\ T_i^2 &= T_i \cup \{f_2, (v_i, v_{i-1})\}, \\ T_i^3 &= T_i \cup \{f_1, (v_i, v_{i-1})\}. \end{aligned}$$

Les ensembles T_i^j , $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, 3$, induisent des sous-graphes Steiner k -arête connexes. Comme leurs vecteurs d'incidences $x^{T_i^j}$ satisfont (2.10) à l'égalité, on a

$$b^T x^{T_i^j} = \beta, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, 3.$$

Donc

$$b(f_1) + b(f_2) = b(f_2) + b(v_i, v_{i-1}) = b(f_1) + b(v_i, v_{i-1}).$$

Et par conséquent, on obtient $b(f_1) = b(f_2) = b(v_i, v_{i-1})$. D'après (2.12) et (2.13), on obtient (2.11).

Dans ce qui suit, nous allons montrer que $\alpha_i = \alpha_j$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ($i \neq j$). Puisque m est impair, il suffit de montrer que $\alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, m \pmod{m}$. Soient $g_1 \in [u_i, v_i]$, $g_2 \in [u_{i+1}, v_i]$, $g_3 \in [u_{i-1}, v_{i-1}]$ et $g_4 \in [u_i, v_{i-1}]$. Considérons les sous-ensembles d'arêtes:

$$\begin{aligned} T_i^4 &= F \setminus \{g_1, g_2\}, \\ T_i^5 &= F \setminus \{g_3, g_4\}. \end{aligned}$$

Les ensembles T_i^4 et T_i^5 induisent des sous-graphes Steiner connexes. De plus, on a $a^T x^{T_i^4} = a^T x^{T_i^5} = \alpha$. D'où, $b^T x^{T_i^4} = b^T x^{T_i^5} = \beta$. Et en conséquence, on obtient

$$b(g_1) + b(g_2) = b(g_3) + b(g_4).$$

D'après (2.11), on a $\alpha_{i-1} + \alpha_i = \alpha_i + \alpha_{i+1}$. D'où, $\alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$. Et par conséquent, $\alpha_i = \alpha_j$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, m\}$. Ceci implique que $b(e) = \rho$ pour tout $e \in \tilde{E}_m$ pour un certain scalaire $\rho \in \mathbb{R}$. D'après le lemme 1.5, on a $\rho \geq 0$. Puisque $\mathcal{P} \subset k\text{SECSP}(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$, il s'en suit que $\rho \neq 0$. Ce qui prouve que $\mathcal{F}$ est une facette de $k\text{SECSP}(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$. $\square$

Le problème $k\text{SECSP}$ est une relaxation du problème suivant, introduit par Monma et al. [62]: étant donné un graphe $G = (V, E)$ muni d'un système de poids sur ses arêtes, et $S \subseteq V$, trouver un sous-graphe k -arête connexe de G contenant S de poids minimum. Notons par $Sk\text{ECSP}(G, S)$ le polyèdre associé à ce problème. Dans [6],

Baïou et Mahjoub ont montré que si G est série-parallèle, alors $\text{S2ECSP}(G, S)$ est donné par les inégalités triviales, les inégalités de coupes Steiner et les inégalités

$$x(\delta(W)) - 2x(e) \geq 0 \quad \forall W \subset V, S \subseteq W, e \notin E(W).$$

Notre réflexion sur ce problème nous motive à donner la conjecture suivante:

Conjecture 2.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle et $S \subseteq V$. Si k est pair, alors $k\text{ECSP}(G, S)$ est donné par les inégalités triviales, les inégalités de coupes Steiner et les inégalités*

$$x(\delta(W)) - kx(e) \geq 0 \quad \forall W \subset V, S \subseteq W, e \notin E(W). \quad \square$$

2.4 Le polytope $k\text{ESCP}(G)$ dans la classe $\mathcal{H}_k$

Un graphe $G = (V, T \cup C)$ est dit de *Halin*, si T est un arbre qui ne contient pas de sommets de degré deux et C est un cycle dont les sommets sont les sommets pendants de T . Plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire NP-difficiles dans le cas général, peuvent se résoudre en temps polynomial dans les graphes de Halin [81].

Étant donné un entier $n \geq 3$, une *roue* de taille n est le graphe (U, E) tel que $U = \{w, u_1, \dots, u_n\}$ et $E = \{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$, où $e_i = (u_i, u_{i+1})$ et $f_i = (w, u_i)$, pour $i = 1, \dots, n \pmod{n}$. Si on remplace chaque arête f_i par $(k-1)$ arêtes parallèles ($k \geq 3$), le graphe ainsi obtenu sera appelé une $(k-1)$ -*roue* de taille n .

Un graphe de Halin se décompose en roues par des coupes formées de trois arêtes. Dans [9], Barahona et Mahjoub utilisent cette décomposition pour donner une caractérisation complète du polytope $2\text{ECSP}(G)$ quand G est un graphe de Halin.

Dans cette section, nous étudions le polytope $k\text{ECSP}(G)$ dans une classe de graphes qui généralise celle des graphes de Halin.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit k -arête connexe minimal, si pour toute arête $e \in E$ il existe une coupe $\delta(S) \subseteq E$ contenant e telle que $|\delta(S)| = k + 1$. Les graphes de Halin sont 3-arête connexes minimaux.

Soit $\mathcal{H}_k$ la classe des graphes $G_k = (V, T_k \cup C)$ tels que G_k puisse être obtenu à partir d'un graphe de Halin $G = (V, T \cup C)$ en remplaçant chaque arête $e \in T$ par $(k-1)$ arêtes parallèles. Chaque ensemble d'arêtes multiples F ($|F| = k-1$) est contenu dans une coupe unique $\delta_F = F \cup \{f_1, f_2\}$ telle que $f_1, f_2 \in C$. On note par $V(C)$ l'ensemble des sommets induits par C . Les graphes de type $\mathcal{H}_k$ sont donc des graphes k -arêtes connexes minimaux.

Si u est un sommet de $V \setminus V(C)$, on note par P_u l'ensemble $\bigcup \{\delta_F : F \subset \delta(u)\} \setminus \delta(u)$ et par $N(u)$ le nombre des voisins de u . Soient $u_1, \dots, u_{N(u)}$ les voisins de u . On note par F_{u_i} l'ensemble d'arêtes $[u, u_i]$ et par S_{u_i} l'ensemble de sommets tel que $\delta_{F_{u_i}} = \delta(S_{u_i})$ et $u \notin S_{u_i}$, pour $i = 1, \dots, N(u)$. Soit G'_k le graphe obtenu à partir de G_k en contractant les ensembles S_{u_i} , et soit s_{u_i} le sommet résultant de la contraction de S_{u_i} , $i = 1, \dots, N(u)$. Le graphe G'_k est une $(k-1)$ -roue.

Étant donné un ensemble d'arêtes T qui induit un sous-graphe k -arête connexe de G_k , la restriction de T dans G'_k induit un sous-graphe k -arête connexe de G'_k . Donc, le vecteur d'incidence de T , x^T , vérifie les inégalités suivantes:

$$x(\delta(s_{u_i}) \setminus F_{u_i}) \geq 1, \quad i = 1, \dots, N(u).$$

En sommant ces $N(u)$ inégalités, on obtient

$$2x(P_u) \geq N(u).$$

En divisant par deux, et en arrondissant le membre de droite au plus petit entier supérieur, on obtient

$$x(P_u) \geq \lceil \frac{N(u)}{2} \rceil. \quad (2.14)$$

Remarque 2.2 L'inégalité (2.15) est une inégalité de r -recouvrement généralisée.

Dans ce qui suit, nous allons donner une description complète du polytope $k\text{ECSP}(G)$ quand G est une $(k-1)$ -roue avec $k \geq 3$.

Soit $W_n = (U_n, E_n)$ une $(k-1)$ -roue, $k \geq 3$, de taille n ($n \geq 3$) avec

$$\begin{aligned} U_n &= \{w, u_1, \dots, u_n\}, \\ E_n &= \{e_i = (u_i, u_{i+1}) : i = 1, \dots, n \bmod(n)\} \cup \left(\bigcup_{i=1, \dots, n} F_i \right), \end{aligned}$$

où $F_i = [w, u_i]$ avec $|F_i| = k - 1$, $i = 1, \dots, n$. On note par C le cycle $e_1, \dots, e_n$ (voir figure 2.3).

Lemme 2.9 Soit $P(W_n)$ le polytope donné par

$$\begin{aligned} 0 \leq x(e) &\leq 1 & \forall e \in E_n, \\ x(\delta(u_i)) &\geq k & i = 1, \dots, n, \\ x(C) &\geq \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{si } n \text{ est impair.} \end{aligned}$$

Alors $P(W_n) = kECSP(W_n)$.

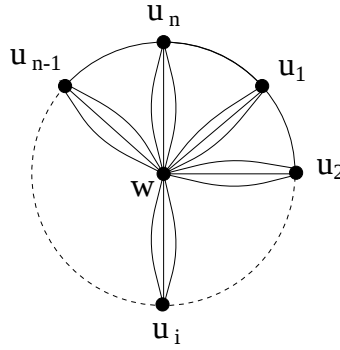


Figure 2.3 : W_n

Preuve. Supposons que $n = 2t + 1$ (le cas où n est pair peut être traité d'une manière similaire).

Si $P(W_n) \neq kECSP(W_n)$, alors il existe un point extrême fractionnaire $\bar{x}$ de $P(W_n)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\bar{x}$ contient le maximum de composantes entières parmi tous les points extrêmes fractionnaires de $P(W_n)$. Soit $S(\bar{x})$ un système de $P(W_n)$ définissant $\bar{x}$ (i.e. $\bar{x}$ est la solution unique de $S(\bar{x})$). D'après l'hypothèse sur $\bar{x}$, on a l'affirmation suivante:

Affirmation 1. Soit e une arête de E_n . Si $0 < \bar{x}(e) < 1$, alors $\bar{x}(e)$ apparaît dans au moins deux équations de $S(\bar{x})$.

Comme conséquence de cette affirmation, on a

Affirmation 2. $\bar{x}(e) \in \{0, 1\}$, $\forall e \in E_n \setminus C$.

Soit G_f le graphe induit par $E_f = \{e \in E_n \mid 0 < \bar{x}(e) < 1\}$. D'après l'affirmation 2, $E_f \subseteq C$.

Preuve. Soit e une arête de F_i pour un certain $i \in \{1, \dots, n\}$. Supposons que $\bar{x}(e)$ soit fractionnaire. Puisque $x(\delta(u_i)) \geq k$ est la seule contrainte non triviale de $P(W_n)$ contenant $\bar{x}(e)$, il en résulte que $\bar{x}(e)$ apparaît au plus dans une équation de $S(\bar{x})$, une contradiction avec l'affirmation 1.

Affirmation 3. Le système $S(\bar{x})$ contient l'équation $x(C) = \lceil \frac{n}{2} \rceil = t + 1$.

Preuve. Supposons le contraire. Dans ce cas (voir Nemhauser and Wolsey [65]), les composantes connexes de G_f sont des cycles impairs et $\bar{x}(e) = \frac{1}{2}$, $\forall e \in E_f$. D'après l'affirmation 2 le graphe G_f est induit par les arêtes de C . Par conséquent, $\bar{x}(C) = t + \frac{1}{2}$, une contradiction.

Maintenant, nous distinguons deux cas:

Cas 1. $E_f \subset C$.

Soit G_1 une composante connexe de G_f . Si G_1 est une chaîne paire que l'on peut supposer, sans perte de généralité, $e_1, \dots, e_{2p}$, $p \geq 1$, alors la solution y donnée par

$$y(e) = \begin{cases} \bar{x}(e) & \text{si } e \in E_n \setminus \{e_1, \dots, e_{2p}\}, \\ \bar{x}(e) + \frac{1}{2} & \text{si } e \in \{e_1, e_3, \dots, e_{2p-1}\}, \\ \bar{x}(e) - \frac{1}{2} & \text{si } e \in \{e_2, e_4, \dots, e_{2p}\}, \end{cases}$$

est une solution de $S(\bar{x})$, une contradiction.

Supposons maintenant que G_1 soit une chaîne impaire. On peut supposer, sans perte de généralité, que cette chaîne est constituée des arêtes $e_1, \dots, e_{2p-1}$ ($p \geq 1$). D'après l'affirmation 1, $\bar{x}(e_{2p-1})$ doit apparaître dans au moins deux équations de $S(\bar{x})$. Par conséquent, $\bar{x}(\delta(v_{2p-1})) = k$ (l'autre équation qui contient $\bar{x}(e_{2p-1})$ est $\bar{x}(C) = t + 1$). Soit $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{E_n}$ la solution donnée par

$$\tilde{x}(e) = \begin{cases} \bar{x}(e) & \text{si } e \in E \setminus \{e_1, \dots, e_{2p-1}\}, \\ 1 & \text{si } e \in \{e_1, e_3, \dots, e_{2p-1}\}, \\ 0 & \text{si } e \in \{e_2, e_4, \dots, e_{2p-2}\}. \end{cases}$$

Il est clair que $\tilde{x} \in P(W_n)$. De plus, $\tilde{x}$ serre toutes les contraintes serrées pour $\bar{x}$ sauf

$x(C) = t + 1$. Nous allons montrer que $\tilde{x}(e) \in \{0, 1\}$, $\forall e \in E_n$. En effet, s'il existe une arête $e \in E_n$ telle que $0 < \tilde{x}(e) = \bar{x}(e) < 1$, alors $\tilde{x}$ ne peut pas être un point extrême de $P(W_n)$; car $\bar{x}$ contient le maximum de composantes entières parmi tous les points extrêmes fractionnaires de $P(W_n)$. Par conséquent, il existe un point extrême $z \in P(W_n)$ qui serre les mêmes contraintes serrées pour $\tilde{x}$. Puisque $\bar{x}$ est supposé contenir le maximum de composantes entières parmi tous les points extrêmes fractionnaires de $P(W_n)$, il en résulte que z est entier. Comme $\tilde{x}(C) < t + 2$, on peut choisir z tel que l'on ait $z(C) < t + 2$. Puisque z est entier, il s'en suit que $z(C) \leq t + 1$. Par conséquent, $z(C) = t + 1$. Donc, z serre toutes les contraintes serrées pour $\bar{x}$, une contradiction.

Puisque $\bar{x}(e) = \tilde{x}(e) \in \{0, 1\}$, $\forall e \in E_n \setminus \{e_1, \dots, e_{2p-1}\}$ et $E_f \subset C$, il existe $j \in \{2p + 1, \dots, 2t + 1\}$ tel que $\bar{x}(\delta(u_j)) = k + 1$. Dans ce cas, on peut choisir le système $S(\bar{x})$ de telle manière qu'il ne contienne pas l'équation $x(C) = t + 1$, ce qui est en contradiction avec l'affirmation 3.

Cas 2. $E_f = C$.

Si $\bar{x}(\delta(u_i)) = k$, $i = 1, \dots, 2t + 1$, alors on a $\bar{x}(e) = \frac{1}{2}$, $\forall e \in C$. Par conséquent, $\bar{x}(C) = t + \frac{1}{2}$, une contradiction.

Supposons qu'il existe deux sommets u_i et u_j , $i, j \in \{1, \dots, 2t + 1\}$, tels que $\bar{x}(\delta(u_i)) > k$ et $\bar{x}(\delta(u_j)) > k$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $i < j$ et que $(j - i)$ est pair. Soit $\tilde{x} \in \mathbb{R}^{E_n}$ la solution suivante:

$$\tilde{x}(e) = \begin{cases} \bar{x}(e) & \text{si } e \in E_n \setminus \{e_i, \dots, e_{j-1}\}, \\ \bar{x}(e) + \frac{1}{2} & \text{si } e \in \{e_i, e_{i+2}, \dots, e_{j-2}\}, \\ \bar{x}(e) - \frac{1}{2} & \text{si } e \in \{e_{i+1}, e_{i+3}, \dots, e_{j-1}\}. \end{cases}$$

Il est clair que $\tilde{x}$ est une solution de $S(\bar{x})$, une contradiction.

Donc, il existe un seul sommet u_i pour un certain $i \in \{1, \dots, 2t + 1\}$, tel que $k < \bar{x}(\delta(u_i)) < k + 1$ et $\bar{x}(\delta(u_j)) = k$ pour $j \in \{1, \dots, 2t + 1\} \setminus \{i\}$. Ce qui implique que $\bar{x}(C) < t + 1$, une contradiction. $\square$

Théorème 2.10 Soit $G_k = (V, E_k) = (V, T_k \cup C)$ un graphe de $\mathcal{H}_k$ ($k \geq 3$). Soit $P(G_k)$ le polytope donné par

$$\begin{aligned}
0 \leq x(e) \leq 1 & \quad \forall e \in E_k, \\
x(\delta_F) \geq k & \quad \forall F, \text{ un ensemble de } (k-1) \text{ arêtes multiples de } E_k, \\
x(P_u) \geq \lceil \frac{|N(u)|}{2} \rceil & \quad \forall u \in V \setminus V(C) \text{ tel que } |N(u)| \text{ est impair.}
\end{aligned}$$

Alors $P(G_k) = kECSP(G_k)$.

Preuve. La démonstration est par récurrence sur $|V|$. D'après le lemme 2.9, le théorème est vrai si G_k est une $(k-1)$ -roue. Supposons que le théorème reste vrai pour tout graphe de type $\mathcal{H}_k$ ayant au plus m sommets et supposons que G_k contienne exactement $m+1$ sommets.

Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que les points extrêmes de $P(G_k)$ sont entiers. Pour cela, supposons que $P(G_k)$ contienne un point extrême fractionnaire x . Sans perte de généralité, on peut supposer que x contient le maximum de composantes entières parmi tous les points extrêmes fractionnaires de $P(G_k)$.

Comme dans l'affirmation 3 du théorème 2.5, on a l'affirmation suivante.

Affirmation 1. Chaque sous-ensemble de $(k-1)$ arêtes multiples de E_k contient au plus une seule arête f telle que $0 < x(f) < 1$.

Soit $S(x)$ un système de $P(G_k)$ linéairement indépendant qui définit x . Comme conséquence de l'hypothèse de maximalité de x , on a l'affirmation suivante dont la démonstration est similaire à celle de l'affirmation 2 du théorème 2.2.

Affirmation 2. Si $e \in E_k$ tel que $0 < x(e) < 1$, alors $x(e)$ apparait dans au moins deux équations de $S(x)$ avec des coefficients non nuls.

Remarquons que dans un graphe de $\mathcal{H}_k$ qui n'est pas une $(k-1)$ -roue, il existe toujours un sommet $s_0 \in V \setminus V(C)$ qui est adjacent à un seul sommet $s_1 \in V \setminus V(C)$. Soient $v_1, \dots, v_t$ les sommets de $V(C)$ adjacents à s_0 . Sans perte de généralité, on peut supposer que le sous-graphe engendré par les sommets $v_1, \dots, v_t$ est une chaîne $(v_1, \dots, v_t)$. On note $W_0 = \{s_0, v_1, \dots, v_t\}$, $F_0 = [s_0, s_1]$ et $F_i = [s_0, v_i]$ pour $i = 1, \dots, t$. Soient $f_1, f_2 \in \delta_{F_0} \setminus F_0$ tels que $f_1 \in \delta(v_1)$ et $f_2 \in \delta(v_t)$ (voir figure 2.4).

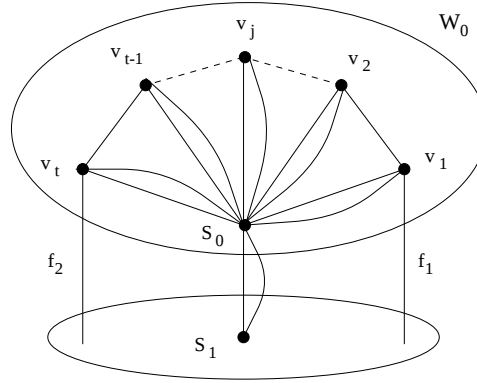


Figure 2.4 :

Sans perte de généralité, on peut supposer que $S(x)$ contient l'équation $x(P_{s_0}) = \lceil \frac{N(s_0)}{2} \rceil$ seulement si tous les systèmes linéairement indépendants de $P(G_k)$ qui définissent x contiennent cette équation. Sous cette hypothèse, on suppose que $S(x)$ contient le nombre maximum d'inégalités triviales serrées pour x .

Puisque pour toute arête $e \in F_i$, il existe au plus une contrainte non triviale de $P(G_k)$ qui contient $x(e)$, en l'occurrence $x(\delta_{F_i}) = k$, d'après l'affirmation 2 on a $x(e) \in \{0, 1\}$ pour tout $e \in F_i$ et pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$. Soit $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, \dots, t-1$. Nous distinguons les cas suivants:

Cas 1. $t = 2p + 1$ ($p \geq 1$).

Cas 1.1. Supposons que $x(e) \in \{0, 1\}$ pour tout $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i = 1, \dots, 2p$.

Dans ce cas, vu l'hypothèse sur $S(x)$ et le fait que $x(e)$ soit entier pour tout $e \in F_i$, le système $S(x)$ ne contient aucune équation de type $x(\delta_{F_i}) = k$, $i = 1, \dots, t$. Par conséquent, la restriction x' de x dans le graphe G'_k obtenu à partir de G_k en contractant W_0 est un point extrême fractionnaire de $P(G'_k)$, une contradiction, car G'_k contient moins de sommets que G_k .

Cas 1.2. Supposons qu'il existe une arête $e_i = (v_i, v_{i+1})$, $i \in \{1, \dots, 2p\}$, telle que $0 < x(e_1) < 1$.

Comme $x(\delta(v_i)) = k$ et $x(\delta(v_{i+1})) = k$ sont les seules équations contenant $x(e_i)$ qui

peuvent appartenir au système $S(x)$, alors, d'après l'affirmation 2, il en résulte que $x(\delta(v_i)) = x(\delta(v_{i+1})) = k$. Puisque $x(e) \in \{0, 1\}$, $\forall e \in F_j$, on en déduit que $0 < x(e_j) < 1$ pour $j = 1, \dots, t$. Donc d'après l'affirmation 2, le système $S(x)$ contient les équations $x(\delta(v_j)) = k$, $j = 1, \dots, 2p$. Ces équations impliquent que $x(\delta(v_j) \setminus F_j) = 1$, $j = 1, \dots, 2p$. D'où, $x(f_1) + x(f_2) = 1$ et par conséquent $x(\delta_{F_0}) = k$. Donc, le système $S(x)$ ne contient pas l'équation $x(\delta_{F_0}) = k$. Soit y la solution donnée par

$$y(e) = \begin{cases} x(e) & \text{si } e \notin \{e_i \mid i = 1, \dots, 2p\}, \\ 1 & \text{si } e \in \{e_i \mid i = 1, \dots, 2p\}. \end{cases}$$

La solution y est une solution du système $S'(x)$ obtenu à partir de $S(x)$ en remplaçant les t équations $x(\delta(v_i)) = k$, $i = 1, \dots, t$, par les équations $x(e_i) = 1$, $i = 1, \dots, 2p$ et $x(\delta(F_0)) = k$. Puisque $S'(x)$ est linéairement indépendant, il en résulte que y est un point extrême fractionnaire de $P(G_k)$. Ceci contredit le fait que x contient le maximum de composantes entières parmi tous les points extrêmes fractionnaires de $P(G_k)$.

Cas 2. $t = 2p$.

Le cas où le système $S(x)$ ne contient pas la contrainte serrée $x(P_{s_0}) = p + 1$ et le cas où $x(e_i) \in \{0, 1\}$, $i = 1, \dots, 2p - 1$, peuvent être traités de la même manière que le cas 1.

Supposons maintenant que le système $S(x)$ contient l'équation $x(P_{s_0}) = p + 1$ et qu'il existe $e_{i_0} = (v_{i_0}, v_{i_0+1})$, $i_0 \in \{1, \dots, 2p - 1\}$, tel que $0 < x(e_{i_0}) < 1$. Nous allons montrer que $0 < x(e_i) < 1$, $i = 1, \dots, 2p - 1$. En effet, supposons qu'il existe une arête $e_j = (v_j, v_{j+1})$, $j \in \{1, \dots, 2p - 1\} \setminus \{i_0\}$, telle que $x(e_j) = 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que j est pair. Alors on a

$$\begin{aligned} x(\delta(v_i) \setminus F_i) &\geq 1, & i = 1, 3, \dots, p - 1, \\ x(e_j) &= 1, \\ x(\delta(v_i \setminus F_i)) &\geq 1, & i = j + 2, j + 4, \dots, 2p. \end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, on obtient $x(P_{s_0}) \geq p + 1$. Ce qui implique que l'équation $x(P_{s_0}) = p + 1$ est dominée par les équations ci-dessus. Et par conséquent, il existe un système $S'(x)$ ne contenant pas l'équation $x(P_{s_0}) = p + 1$, dont x est l'unique solution, une contradiction avec les hypothèses sur $S(x)$. En conséquence, $0 < x(e_i) < 1$,

$\forall i = 1, \dots, 2p - 1$. Donc, d'après l'affirmation 2, $x(\delta(v_i)) = k$, $i = 1, \dots, 2p$.

Puisque $x(P_{s_0}) = p + 1$, on a $x(e) = 1$, $\forall e \in \delta_{F_0} \setminus F_0$. Comme $x(\delta(v_1)) = k$ et $x(F_1)$ est entier, il en résulte que $x(e_1)$ est entier. Ceci contredit le fait que $0 < x(e_i) < 1$, $\forall i = 1, \dots, 2p - 1$. Ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

Conjecture 2.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe $(k + 1)$ -arête connexe minimal obtenu à partir d'un graphe de Halin en ajoutant des arêtes parallèles. Alors le polytope $kECSP(G)$ est donné par les contraintes triviales, de coupes et de r -recouvrement généralisées.*

Chapitre 3

Les graphes parfaitement k -arête connexes

3.1 Introduction

Soient $G = (V, E)$ un graphe et k un entier positif. Soit $Q(G, k)$ le polytope donné par les contraintes triviales et les contraintes de coupe, *i.e.*

$$Q(G, k) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid 0 \leq x(e) \leq 1, \forall e \in E; \ x(\delta(W)) \geq k, \forall W \subset V, W \neq \emptyset\}.$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la classe des graphes G pour lesquels $k\text{ECSP}(G) = Q(G, k)$. Le problème de séparation associé au polytope $Q(G, k)$ étant polynomial, le problème $k\text{ECSP}$ peut donc se résoudre en temps polynomial dans cette classe de graphes. Ceci est la motivation principale pour l'étude de cette classe. Pour $k = 2$, Mahjoub [58] a appelé ces graphes *les graphes parfaitement 2-arête connexes*. Dans la suite, on dit qu'un graphe est *parfaitement k -arête connexe* si $k\text{ECSP}(G) = Q(G, k)$. Dans [27], Didi Biha et Mahjoub ont montré que les graphes série-parallèles font partie de cette classe si k est pair. Dans [58], Mahjoub a donné des conditions suffisantes pour qu'un graphe soit parfaitement 2-arête connexe. Il a aussi décrit certaines opérations qui préservent la propriété "parfaitement 2-arête connexe". Dans [32], Fonlupt et Mahjoub ont étudié les points extrêmes de $Q(G, 2)$. Ils ont établi un ordre sur ces points et ils ont caractérisé les points extrêmes fractionnaires minimaux par rapport à cet ordre. Comme conséquence, ils ont obtenu une caractérisation

des graphes parfaitement 2-arête connexes.

Dans ce qui suit nous allons décrire certaines opérations qui préservent la propriété "parfaitement k -arête connexe". Ces opérations généralisent les opérations décrites par Mahjoub [58] pour $k = 2$. Par la suite, nous étudions les points extrêmes de $Q(G, k)$, et nous généralisons certains résultats obtenus par Fonlupt et Mahjoub [32] pour $k = 2$. Nous décrivons aussi des nouvelles classes de graphes parfaitement k -arête connexes.

3.2 Réduction de graphes

Dans cette section, nous décrivons quelques opérations préservant la propriété "parfaitement k -arête connexe".

Lemme 3.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et f une arête de G . Si G est parfaitement k -arête connexe et $G - f$ est k -arête connexe, alors $G - f$ est parfaitement k -arête connexe.*

Preuve. Supposons qu'il existe un point extrême fractionnaire x' de $Q(G - f, k)$. Soit $x \in \mathbb{R}^E$ la solution donnée par

$$x(e) = \begin{cases} x'(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f\}, \\ 0 & \text{si } e = f. \end{cases}$$

Il est clair que x est un point extrême de $Q(G, k)$. Puisque x est fractionnaire, ceci contredit le fait que G est parfaitement k -arête connexe. $\square$

Lemme 3.2 *Soient $G = (V, E)$ un graphe parfaitement k -arête connexe et W un sous-ensemble de V tel que $G[W]$ soit k -arête connexe. Alors G' , le graphe obtenu à partir de G en contractant W , est parfaitement k -arête connexe.*

Preuve. Supposons qu'il existe un point extrême fractionnaire x' de $Q(G', k)$. Soit $x \in \mathbb{R}^E$ la solution telle que

$$x(e) = \begin{cases} x'(e) & \text{si } e \in E \setminus E(W), \\ 1 & \text{si } e \in E(W). \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que x est un point extrême fractionnaire de $Q(G, k)$. Ceci contredit le fait que G soit parfaitement k -arête connexe. $\square$

Lemme 3.3 *Soient $G = (V, E)$ un graphe parfaitement k -arête connexe et W un sous-ensemble de V tel que $|W| \geq 2$. Si $|\delta(W)| = k + t$ ($t \geq 0$) et si le graphe obtenu en contractant $\overline{W}$ est $(k + t)$ -arête connexe, alors G' , le graphe obtenu à partir de G en contractant W , est parfaitement k -arête connexe.*

Preuve. Supposons que $Q(G', k)$ possède un point extrême fractionnaire x' . Il existe donc un système $S(x')$ de $Q(G', k)$ tel que x' soit la solution unique de ce système. Soit x la solution donnée par

$$x(e) = \begin{cases} x'(e) & \text{si } e \in E \setminus E(W), \\ 1 & \text{si } e \in E(W). \end{cases}$$

Nous allons montrer que x est un point extrême de $Q(G, k)$.

Montrons d'abord que x est une solution de $Q(G, k)$. Soit U un sous-ensemble de V . Si $U \subseteq \overline{W}$ ou $W \subseteq U$, alors $x(\delta(U)) = x'(\delta(U)) \geq k$.

Supposons que $U \subset W$. On a

$$x(\delta(W)) = x'([U, \overline{W}]) + x'([W \setminus U, \overline{W}]) \geq k. \quad (3.1)$$

Comme

$$\begin{aligned} |[W \setminus U, \overline{W}]| + |[U, \overline{W}]| &= k + t, \\ |[U, \overline{W}]| + |[W \setminus U, U]| &\geq k + t, \end{aligned}$$

on obtient $|[W \setminus U, U]| \geq |[W \setminus U, \overline{W}]|$. Et puisque $x'(e) \leq 1$, pour tout $e \in [W \setminus U, \overline{W}]$, il s'en suit que

$$|[W \setminus U, U]| \geq x'([W \setminus U, \overline{W}]). \quad (3.2)$$

D'après (3.1) et (3.2), on a

$$\begin{aligned} x(\delta(U)) &= x'([U, \overline{W}]) + |[U, W \setminus U]| \\ &\geq x'([U, \overline{W}]) + x'([W \setminus U, \overline{W}]) \\ &\geq k. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $U \cap W \neq \emptyset$, $U \cap \overline{W} \neq \emptyset$, $W \not\subset U$ et $\overline{W} \not\subset U$. Soient $U_1 = U \cap W$ et $U_2 = U \cap \overline{W}$ (voir figure 3.1).

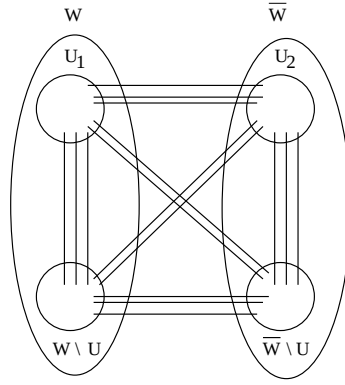


Figure 3.1 :

Notons par P_1 et P_2 les ensembles

$$\begin{aligned} P_1 &= \{e \in [U_1, \overline{W}] \mid x'(e) < 1\}, \\ P_2 &= \{e \in [W \setminus U, \overline{W}] \mid x'(e) < 1\}. \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} t_i &= |P_i|, \quad \varepsilon_i = \sum_{e \in P_i} x'(e) \quad i = 1, 2 \\ l_1 &= |[U_1, U_2]| + |[U_1, \overline{W} \setminus U]|, \\ l_2 &= |[W \setminus U, U_2]| + |[W \setminus U, \overline{W} \setminus U]|. \end{aligned}$$

On a

$$l_1 + l_2 = k + t, \tag{3.3}$$

$$x'([U_1, U_2]) + x'([U_1, \overline{W} \setminus U]) = l_1 - t_1 + \varepsilon_1, \tag{3.4}$$

$$x'([W \setminus U, U_2]) + x'([W \setminus U, \overline{W} \setminus U]) = l_2 - t_2 + \varepsilon_2. \tag{3.5}$$

D'autre part, on a

$$x([U_1, U_2]) + x([U_1, \overline{W} \setminus U]) + x([U_1, W \setminus U]) \geq k + t + \varepsilon_1 - t_1, \quad (3.6)$$

$$x([W \setminus U, U_2]) + x([W \setminus U, \overline{W} \setminus U]) + x([U_1, W \setminus U]) \geq k + t + \varepsilon_2 - t_2, \quad (3.7)$$

$$x'(\delta(U_2)) = x([U_1, U_2]) + x([W \setminus U, U_2]) + x([U_2, \overline{W} \setminus U]) \geq k, \quad (3.8)$$

$$x'(\delta(\overline{W} \setminus U)) = x([U_1, \overline{W} \setminus U]) + x([W \setminus U, \overline{W} \setminus U]) + x([U_2, \overline{W} \setminus U]) \geq k. \quad (3.9)$$

D'après (3.3)-(3.9), on a

$$x([U_1, W \setminus U]) + x([U_2, \overline{W} \setminus U]) \geq k + \frac{(t_1 + t_2) - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2} \geq k.$$

Donc

$$x(\delta(U)) \geq x([U_1, W \setminus U]) + x([U_2, \overline{W} \setminus U]) \geq k.$$

En conséquence, $x \in Q(G, k)$. De plus, x est un point extrême de $Q(G, k)$. En effet, x est la solution unique du système formé par $S(x')$ et les équations $x(e) = 1$ pour tout $e \in E(W)$. Comme x est fractionnaire, ceci contredit le fait que G est parfaitement k -arête connexe. $\square$

Notons par θ_1, θ_2 les opérations décrites respectivement par les lemmes 3.1 et 3.2, et par θ_3 , l'opération décrite par le lemme 3.3 quand $t \in \{0, 1\}$. Le résultat suivant découle directement des lemmes 3.1, 3.2 et 3.3.

Lemme 3.4 *Soit G un graphe parfaitement k -arête connexe. Si G' est un graphe obtenu à partir de G en appliquant successivement les opérations θ_1, θ_2 et θ_3 , alors G' est parfaitement k -arête connexe.* $\square$

3.3 Propriétés structurales des points extrêmes de $Q(G, k)$

Dans cette section, nous étudions certaines propriétés structurales des points extrêmes de $Q(G, k)$. Ces propriétés seront utiles pour étudier, par la suite, les graphes parfaitement k -arête connexes.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et x un point extrême de $Q(G, k)$. On note par $E_0(x)$, $E_1(x)$ et $E_f(x)$ les ensembles d'arêtes

$$\begin{aligned} E_0(x) &= \{e \in E \mid x(e) = 0\}, \\ E_1(x) &= \{e \in E \mid x(e) = 1\}, \\ E_f(x) &= \{e \in E \mid 0 < x(e) < 1\}. \end{aligned}$$

Soit

$$C_d(x) = \{\delta(v) : v \in V \text{ tel que } x(\delta(v)) = k, \delta(v) \cap E_f(x) \neq \emptyset\}.$$

Soit $C_p(x)$ l'ensemble des coupes propres de G dont les contraintes associées sont serrées pour x , *i.e.*

$$C_p(x) = \{\delta(W) : W \subset V \text{ tel que } x(\delta(W)) = k, |W| \geq 2, |\overline{W}| \geq 2\}.$$

Puisque x est un point extrême de $Q(G, k)$, il existe un sous-ensemble $C_p^*(x)$ de $C_p(x)$ tel que x soit la solution unique du système

$$S(x) \quad \begin{cases} x(e) = 0 & \forall e \in E_0(x), \\ x(e) = 1 & \forall e \in E_1(x), \\ x(\delta(v)) = k & \forall \delta(v) \in C_d(x), \\ x(\delta(W)) = k & \forall \delta(W) \in C_p^*(x), \end{cases}$$

où $|E_0(x)| + |E_1(x)| + |C_d(x)| + |C_p^*(x)| = |E|$.

Notons que si $\delta(W)$ est une coupe de $C_p^*(x)$, alors, l'équation $x(\delta(W)) = k$ ne peut pas être obtenue à partir des équations $x(e) = 0$ pour tout $e \in E_0$, $x(e) = 1$ pour tout $e \in E_1$ et $x(\delta(v)) = k$ pour tout $v \in V$ tel que $\delta(v) \in C_d(x)$.

Nous avons le lemme suivant pour lequel nous ne donnons pas de preuve, car elle est similaire à celle donnée par Cornuéjols et al. [21] pour un résultat similaire.

Lemme 3.5 *Soient x un point extrême de $Q(G, k)$ et W un sous-ensemble de V tel que $\delta(W) \in C_p(x)$. Alors le système $S(x)$ peut être choisi de telle manière que si $\delta(Z) \in C_p^*(x)$, alors soit $Z \subseteq W$, soit $Z \subseteq \overline{W}$. $\square$*

Dans ce qui suit, nous allons définir une fonction d'ordre sur les points extrêmes de $Q(G, k)$. Cette fonction n'est rien d'autre qu'une extension de la fonction introduite par Fonlupt et Mahjoub [32] sur les points extrêmes de $Q(G, 2)$.

Définition 3.1 Soient x et y deux points extrêmes de $Q(G, k)$. On dit que x domine y , si les conditions suivantes sont vérifiées:

- (1) $E_0(x) \subseteq E_0(y)$;
- (2) $E_1(x) \subseteq E_1(y)$;
- (3) $E_0(x) \cup E_1(x) \subset E_0(y) \cup E_1(y)$.

Cette relation définit un ordre partiel sur les points extrêmes de $Q(G, k)$. Les points extrêmes minimaux par rapport à cette relation (*i.e.* les points qui sont dominés par tous les points fractionnaires) sont les points extrêmes entiers. Ces points sont dits de rang 0.

Définition 3.2 Un point extrême x de $Q(G, k)$ est dit de rang t ($t \geq 1$), si

- i) tous les points extrêmes de $Q(G, k)$ de rang $\leq t - 1$ sont dominés par x , et
- ii) il existe au moins un point extrême $\bar{x}$ de $Q(G, k)$ de rang $(t - 1)$.

Notons que les points extrêmes de rang 1 ne dominent que des points extrêmes entiers. Dans ce qui suit, nous donnons une propriété de ces points qui est une conséquence de la définition 3.2. Pour nous permettre de nous y référer facilement, elle est énoncée sous forme de remarque.

Remarque 3.3 Soient $G = (V, E)$ un graphe et x un point extrême de $Q(G, k)$ de rang 1. Considérons la solution

$$x'(e) = \begin{cases} x(e) & \forall e \in E \setminus \{f\}, \\ 1 & \text{si } e = f, \end{cases}$$

où f est une arête de E telle que $0 < x(f) < 1$. Alors, x' peut s'écrire comme combinaison convexe de points extrêmes entiers de $Q(G, k)$.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et x un point extrême de $Q(G, k)$ de rang 1. On considère les opérations suivantes:

θ'_1 : supprimer une arête $e \in E$ telle que $x(e) = 0$;

θ'_2 : contracter un ensemble $W \subset V$ tel que $G[W]$ soit k -arête connexe et $x(e) = 1$, pour tout $e \in E(W)$;

θ'_3 : contracter un ensemble $W \subset V$ tel que $|W| \geq 2$, $|\delta(W)| = k$ et $x(e) = 1$ pour tout $e \in E(W)$;

θ'_4 : contracter un ensemble $W \subset V$ tel que $G[W]$ soit $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ -arête connexe, $|\delta(W)| = k + 1$ et $x(e) = 1$ pour tout $e \in E(W)$.

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.6 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et x une solution de $Q(G, k)$. Soit G' un graphe obtenu à partir de G en appliquant l'une des quatre opérations θ'_1 , θ'_2 , θ'_3 et θ'_4 . Soit x' la restriction de x dans G' . Alors x' est un point extrême de $Q(G', k)$ de rang 1 si et seulement si x est un point extrême de $Q(G, k)$ de rang 1.*

Preuve. On démontre ce lemme pour les opérations θ'_3 et θ'_4 . La preuve pour les opérations θ'_1 et θ'_2 est facile.

Considérons d'abord l'opération θ'_3 .

Supposons que x soit un point extrême de $Q(G, k)$ de rang 1. Soit $W \subset V$ avec $|\delta(W)| = k$ et $x(e) = 1$ pour tout $e \in E(W)$. D'après le lemme 3.5 et les hypothèses ci-dessus, la restriction x' de x dans le graphe G' est un point extrême de $Q(G', k)$.

Supposons maintenant qu'il existe un point extrême fractionnaire y' de $Q(G', k)$ qui soit dominé par x' . Soit y la solution telle que

$$y(e) = \begin{cases} y'(e) & \text{si } e \in E \setminus E(W), \\ 1 & \text{si } e \in E(W). \end{cases}$$

Il est clair que y est une solution de $Q(G, k)$. De plus, y est un point extrême de $Q(G, k)$. En effet, y est la solution unique du système formé par les contraintes de $S(y')$ et les équations $y(e) = 1$ pour tout $e \in E(W)$. Aussi, remarquons que y est

dominé par x . Puisque y est fractionnaire, ceci contredit le fait que x est un point extrême de rang 1.

Supposons maintenant que x' soit un point extrême de $Q(G', k)$ de rang 1. Si x n'est pas de rang 1, alors il existe un point extrême y de $Q(G, k)$ de rang 1 qui est dominé par x . La restriction de y dans G' est un point extrême fractionnaire dominé par x' , contredisant le fait que x' est de rang 1.

Considérons maintenant l'opération θ'_4 .

Nous montrons seulement la condition nécessaire, la preuve de la condition suffisante est similaire à celle donnée pour l'opération θ'_3 .

Soit $W \subset V$ tel que $G[W]$ soit $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ -arête connexe, $|\delta(W)| = k + 1$ et $x(e) = 1$ pour tout $e \in E(W)$. Soit x' la restriction de x dans le graphe G' obtenu à partir de G en contractant W . Il est évident que $x' \in Q(G', k)$. Pour montrer que x' est un point extrême de $Q(G', k)$, il suffit de montrer que l'on peut choisir $C_p^*(x)$ de telle façon que si $\delta(W_0) \in C_p^*(x)$, alors $W_0 \subseteq \overline{W}$. Supposons le contraire. Nous distinguons deux cas:

Cas 1. $W_0 \subset W$.

On a

$$x([W_0, \overline{W}]) + x([W_0, W \setminus W_0]) = x([W_0, \overline{W}]) + |[W_0, W \setminus W_0]| = k, \quad (3.10)$$

$$|[W_0, \overline{W}]| + |[W \setminus W_0, \overline{W}]| = k + 1. \quad (3.11)$$

D'après (3.10) et (3.11), on a l'une des deux possibilités suivantes:

- $x(e) = 1, \forall e \in [W_0, \overline{W}]$. Ce qui implique que $|\delta(W_0)| = k$. Et par conséquent, l'équation $x(\delta(W_0)) = k$ est redondante dans le système $S(x)$ par rapport aux équations $x(e) = 1$ pour tout $e \in \delta(W_0)$.
- $x([W \setminus W_0, \overline{W}]) = |[W \setminus W_0, \overline{W}]| = |[W \setminus W_0, W_0]|$. Par conséquent, les deux équations $x(\delta(W_0)) = k$ et $x(\delta(W)) = k$ sont équivalentes.

Cas 2. $W_0^1 = W_0 \cap W \neq \emptyset, W_0^2 = W_0 \cap \overline{W} \neq \emptyset, W \setminus W_0 \neq \emptyset, \overline{W} \setminus W_0 \neq \emptyset$ (voir figure 3.2).

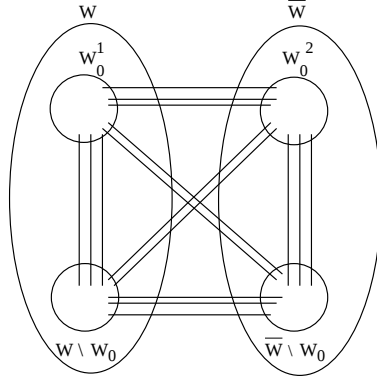


Figure 3.2 :

Puisque $|\delta(W)| = k + 1$, il s'en suit que

$$\min\{|\delta(W, W_0^2)|, |\delta(W, \bar{W} \setminus W_0)|\} \leq \lceil \frac{k}{2} \rceil.$$

Par conséquent, on a

$$x(\delta(W_0^2, \bar{W} \setminus W_0)) \geq \lceil \frac{k-1}{2} \rceil,$$

sinon, on aurait $x(\delta(W_0^2)) < k$ ou $x(\delta(\bar{W} \setminus W_0)) < k$, ce qui est impossible.

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} k &= x(\delta(W_0)) \\ &\geq x(\delta(W_0^1, W \setminus W_0)) + x(\delta(W_0^2, \bar{W} \setminus W_0)) + x(\delta(W_0^1, \bar{W} \setminus W_0)) + x(\delta(W_0^2, W \setminus W_0)) \\ &\geq \lceil \frac{k+1}{2} \rceil + \lceil \frac{k-1}{2} \rceil \\ &\geq k. \end{aligned}$$

Donc, toutes les inégalités sont vérifiées à l'égalité et en conséquence, k est impair (sinon, on aurait $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil + \lceil \frac{k-1}{2} \rceil > k$, une contradiction). Aussi, on a

$$\begin{aligned} x(\delta(W_0^1, \bar{W} \setminus W_0)) &= x(\delta(W \setminus W_0, W_0^2)) = 0, \\ |\delta(W_0^1, W \setminus W_0)| &= \frac{k+1}{2}, \\ x(\delta(W_0^2, \bar{W} \setminus W_0)) &= \frac{k-1}{2}, \\ x(\delta(W_0^1, W_0^2)) &= |\delta(W_0^1, W_0^2)| = \frac{k+1}{2}. \end{aligned}$$

L'équation $x(\delta(W_0)) = k$ peut donc être obtenue à partir de l'équation $x(\delta(W_0^2)) = k$ et des équations $x(e) = 1$ pour toute arête $e \in E_1(x)$. Par conséquent, on peut remplacer

dans le système $S(x)$ l'équation $x(\delta(W_0)) = k$ par l'équation $x(\delta(W_0^2)) = k$.

En conclusion, la solution x' est un point extrême de $Q(G', k)$. Avec le même raisonnement que pour l'opération θ'_3 , on montrera que x' est un point extrême de $Q(G', k)$ de rang 1. $\square$

Remarque 3.4 Les opérations θ'_3 et θ'_4 peuvent être regroupées en une seule opération, qui consiste à contracter un ensemble $W \subset V$ tel que $|\delta(W)| = k + t$, le graphe $G[W]$ soit $\lceil \frac{k+t}{2} \rceil$ -arête connexe et $x(e) = 1$, pour tout $e \in E(W)$, où $t \in \{0, 1\}$.

Définition 3.5 On dit qu'un point extrême fractionnaire x de $Q(G, k)$ est critique si

- i) x est de rang 1, et si
- ii) on ne peut appliquer sur x aucune des opérations θ'_1 , θ'_2 , θ'_3 et θ'_4 .

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser aux sommets critiques de $Q(G, k)$. Le but est d'établir certaines propriétés structurales de ces points. Ceci peut être utile pour développer des procédures de séparation qui permettent de couper ces points du polytope $Q(G, k)$.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et x un point extrême critique de $Q(G, k)$. Les lemmes suivants décrivent des propriétés structurales du couple (G, x) . Les deux premiers lemmes sont des conséquences directes de la définition 3.4 ii).

Lemme 3.7 $x(e) > 0$, $\forall e \in E$. $\square$

Lemme 3.8 Soit $W \subseteq V$ tel que $|W| \geq 2$. Si $G[W]$ est k -arête connexe, alors il existe une arête $f \in E(W)$ telle que $x(f) < 1$. $\square$

Lemme 3.9 Si W est un sous-ensemble de V tel que $|\delta(W)| = k$, alors soit $|W| = 1$, soit $|\overline{W}| = 1$.

Preuve. Supposons que $|W| \geq 2$ et $|\overline{W}| \geq 2$. Comme $|\delta(W)| = k$, il s'en suit que $x(e) = 1$ pour tout $e \in \delta(W)$ et $x(\delta(W)) = k$. D'après le lemme 3.5, on peut supposer que pour tout $Z \subset V$ telle que $\delta(Z) \in C_p^*(x)$, alors soit $Z \subseteq W$ soit $Z \subseteq \overline{W}$.

Soit x_1 (resp. x_2) la restriction de x dans le graphe G_1 (resp. G_2) obtenu à partir de G en contractant W (resp. $\overline{W}$). Alors, x_1 (resp. x_2) est un point extrême de $Q(G_1, k)$ (resp. $Q(G_2, k)$). Si $x(e) = 1$ pour toute arête $e \in E(W)$ (resp $e \in E(\overline{W})$), alors l'opération θ'_3 peut être appliquée. Mais ceci contredit le fait que x soit critique. Donc, $E(W) \cap E_f(x) \neq \emptyset \neq E(\overline{W}) \cap E_f(x)$.

Soient $x'_1, x'_2 \in \mathbb{R}^E$ les solutions données par

$$x'_1(e) = \begin{cases} x_1(e) & \text{si } e \in E(\overline{W}) \cup \delta(W), \\ 1 & \text{si } e \in E(W), \end{cases}$$

$$x'_2(e) = \begin{cases} x_2(e) & \text{si } e \in E(W) \cup \delta(W), \\ 1 & \text{si } e \in E(\overline{W}). \end{cases}$$

Il est clair que x'_1 et x'_2 sont des solutions de $Q(G, k)$. D'après la remarque 3.3, elles peuvent s'écrire comme combinaisons convexes de points extrêmes entiers de $Q(G, k)$. Par conséquent, il existe deux points extrêmes y_1 et y_2 de $Q(G, k)$ tels que toute contrainte de $Q(G, k)$ serrée pour x'_1 (resp. x'_2) est aussi serrée pour y_1 (resp. y_2). D'où, $y_1(e) = y_2(e) = 1 \ \forall e \in \delta(W)$.

Soit $y \in \mathbb{R}^E$ la solution définie par

$$y(e) = \begin{cases} y_1(e) & \text{si } e \in E(\overline{W}), \\ y_2(e) & \text{si } e \in E(W), \\ 1 & \text{si } e \in \delta(W). \end{cases}$$

Il est évident que y serre toutes les contraintes triviales serrées par x . Soit $\delta(Z)$ une coupe de $C_p^*(x)$. Si $Z \subseteq W$, alors $y(\delta(Z)) = y_2(\delta(Z)) = x_2(\delta(Z)) = k$, et si $Z \subseteq \overline{W}$, alors $y(\delta(Z)) = y_1(\delta(Z)) = x_1(\delta(Z)) = k$. D'une manière similaire, on peut montrer que si $v \in V$ tel que $\delta(v) \in C_d(x)$, alors $y(\delta(v)) = k$. Par conséquent, y est une solution du système $S(x)$. Comme $y \neq x$, ceci contredit le fait que x soit l'unique solution du système $S(x)$. $\square$

Lemme 3.10 *Si $\delta(W) \in C_p^*(x)$ avec $|\delta(W)| = k + 1$, alors l'un des sous-ensembles W et $\overline{W}$ est réduit à un seul sommet.*

Preuve. Supposons que $|W| \geq 2$ et $|\overline{W}| \geq 2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|W|$ est minimal (i.e. si $Z \subset W$ tel que $\delta(Z) \in C_p^*(x)$ avec $|\delta(Z)| = k + 1$,

alors $|Z| = 1$). Nous allons montrer d'abord que les graphes $G[W]$ et $G[\overline{W}]$ sont $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ -arête connexes. Supposons par exemple, que $G[W]$ ne soit pas $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ -arête connexe. Il existe donc $W_1 \subset W$ tel que $||W_1, W \setminus W_1|| \leq \lceil \frac{k-1}{2} \rceil$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $||W_1, \overline{W}|| \leq ||W \setminus W_1, \overline{W}||$. Comme $|\delta(W)| = k + 1$, il en résulte que $||W_1, \overline{W}|| = \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Par conséquent, $|\delta(W_1)| = k$. Si k est impair, alors, $|\delta(W \setminus W_1)| = k$ et l'équation $x(\delta(W)) = k$ est donc redondante par rapport aux équations $x(e) = 1$ pour tout $e \in E_1(x)$, ce qui contredit le fait que $\delta(W) \in C_p^*(x)$.

Supposons maintenant que k soit pair. Il s'en suit que $|\delta(W \setminus W_1)| = k + 1$ et par conséquent, $x(\delta(W \setminus W_1)) = k$. D'après l'hypothèse de minimalité sur W , $|W \setminus W_1| = 1$. Il en résulte que l'équation $x(\delta(W)) = k$ est redondante par rapport aux équations $x(e) = 1$ pour tout $e \in E_1(x)$, et l'équation de degré $x(\delta(W \setminus W)) = k$, contredisant ainsi le fait que $\delta(W) \in C_p^*(x)$.

Par conséquent, il existe $f_1 \in E(W)$ et $f_2 \in E(\overline{W})$ tels que $0 < x(f_1) < 1$ et $0 < x(f_2) < 1$, car sinon, on pourrait appliquer l'opération θ'_4 , ce qui contredit le fait que x est critique. Soit $\delta(W) = \{e_1, \dots, e_{k+1}\}$. Puisque $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$, $x(\delta(W)) = k$ et $|\delta(W)| = k + 1$, il existe alors $e \in \delta(W)$ tel que $x(e) < 1$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x(e_{k+1}) < 1$. D'où, $x(\delta(W) \setminus \{e_{k+1}\}) > k - 1$. Soient x_1 et x_2 les solutions données par

$$x_1(e) = \begin{cases} x(e) & \text{si } e \in E(W) \cup \delta(W), \\ 1 & \text{si } e \in E(\overline{W}), \end{cases}$$

$$x_2(e) = \begin{cases} x(e) & \text{si } e \in E(\overline{W}) \cup \delta(W), \\ 1 & \text{si } e \in E(W). \end{cases}$$

Il est clair que $x_1, x_2 \in Q(G, k)$. Donc, x_1 et x_2 peuvent s'écrire comme combinaisons convexes de points extrêmes de $Q(G, k)$. Comme x est de rang 1 et x_1 et x_2 sont fractionnaires, d'après la remarque 3.3 les points extrêmes de $Q(G, k)$ intervenant dans les combinaisons convexes décrivant x_1 et x_2 doivent être entiers. En conséquence, il existe un point extrême entier y_1 (resp. y_2) de $Q(G, k)$ tel que toute contrainte serrée pour x_1 (resp. x_2) soit serrée pour y_1 (resp. y_2). Puisque $x_1(\delta(W) \setminus \{e_{k+1}\}) = x_2(\delta(W) \setminus \{e_{k+1}\}) = x(\delta(W) \setminus \{e_{k+1}\}) > k - 1$, on peut choisir y_1 (resp. y_2) de telle façon que $y_1(\delta(W) \setminus \{e_{k+1}\}) > k - 1$ (resp. $y_2(\delta(W) \setminus \{e_{k+1}\}) > k - 1$). D'où, $y_1(e) = 1, \forall e \in \delta(W) \setminus \{e_{k+1}\}$ et $y_1(e_{k+1}) = 0$ (resp. $y_2(e) = 1, \forall e \in \delta(W) \setminus \{e_{k+1}\}$

et $y_2(e_{k+1}) = 0$). Soit $y \in \mathbb{R}^E$ la solution définie par

$$y(e) = \begin{cases} y_1(e) & \text{si } e \in E(W), \\ y_2(e) & \text{si } e \in E(\overline{W}), \\ 1 & \text{si } e \in \{e_1, \dots, e_k\}, \\ 0 & \text{si } e = e_{k+1}. \end{cases}$$

Le point y est une solution du système $S(x)$. En effet, il serre les contraintes triviales serrées pour x . D'après le lemme 3.5, on peut supposer que toute coupe $\delta(U) \in C_p^*(x)$ est telle que $U \subseteq W$ ou $U \subseteq \overline{W}$. Par conséquent, si $U \subseteq W$, alors $y(\delta(U)) = y_1(\delta(U)) = x_1(\delta(U)) = x(\delta(U)) = k$, et si $U \subseteq \overline{W}$, alors $y(\delta(U)) = y_2(\delta(U)) = x_2(\delta(U)) = x(\delta(U)) = k$. D'une manière similaire, on peut montrer que $y(\delta(v)) = k$ pour tout $v \in V$ tel que $\delta(v) \in C_d(x)$. Donc, y est une solution de $S(x)$. Comme $y \neq x$, ceci contredit le fait que x est un point extrême de $Q(G, k)$. $\square$

Lemme 3.11 *Soit $\delta(W) \in C_p^*(x)$ avec $|\delta(W) \cap E_1(x)| = k - 1$, alors*

- 1) *ou bien un des ensembles W et $\overline{W}$ est réduit à un seul sommet;*
- 2) *ou bien les arêtes d'un des ensembles $E(W)$ et $E(\overline{W})$ ont toutes des valeurs égales à 1, i.e. $x(e) = 1$, pour tout $e \in E(W)$ ou $x(e) = 1$, pour tout $e \in E(\overline{W})$.*

Preuve. Notons d'abord qu'il existe une arête $f \in E(W) \cup E(\overline{W})$ telle que $0 < x(f) < 1$. Sinon, on aurait $C_d(x) \cup C_p^*(x) = \{\delta(W)\}$, et par conséquent, x ne pourrait pas être un point extrême de $Q(G, k)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f \in E(W)$. Soient $e_1, \dots, e_{k-1} \in \delta(W)$ avec $x(e_i) = 1$, pour $i = 1, \dots, k - 1$. Soit $G_1 = (V_1, E_1)$ (resp. $G_2 = (V_2, E_2)$) le graphe obtenu à partir de G en contractant W (resp. $\overline{W}$). Soit x_1 (resp. x_2) la restriction de x dans G_1 (resp. G_2). Il est évident que x_1 est une solution du polytope $Q(G_1, k)$, mais ce n'est pas un point extrême de ce polytope. Sinon, la solution $y_1 \in \mathbb{R}^E$ donnée par

$$y_1(e) = \begin{cases} x_1(e) & \text{si } e \in E_1, \\ 1 & \text{si } e \in E(W), \end{cases}$$

serait un point extrême fractionnaire de $Q(G, k)$ dominé par x . Ce qui contredirait le fait que x est un point extrême de rang 1.

Puisque x_1 n'est pas un point extrême de $Q(G_1, k)$, il peut s'écrire comme combinaison convexe de points extrêmes de $Q(G_1, k)$. Donc, il existe t points extrêmes $y_1^1, \dots, y_t^1$ de $Q(G_1, k)$ et t scalaires positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ tels que

$$x_1 = \sum_{i=1}^t \alpha_i y_i^1 \text{ et } \sum_{i=1}^t \alpha_i = 1.$$

Nous allons montrer que les points extrêmes $y_1^1, \dots, y_t^1$ sont entiers. En effet, supposons que y_j^1 , pour un certain $j \in \{1, \dots, t\}$, soit fractionnaire. Soit $y_j \in \mathbb{R}^E$ la solution définie par

$$y_j(e) = \begin{cases} y_j^1(e) & \text{si } e \in E_1, \\ 1 & \text{si } e \in E(W). \end{cases}$$

La solution y_j est un point extrême fractionnaire de $Q(G, k)$ dominé par x , ce qui contredit le fait que x est un point extrême de rang 1. Donc, les points extrêmes $y_1^1, \dots, y_t^1$ sont entiers. Soit $e_0 \in \delta(W) \setminus \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $y_1^1(e_0) = 1$. Par conséquent, $y_1^1(e) = 0$ pour tout $e \in \delta(W) \setminus \{e_0, e_1, \dots, e_k\}$. De même, on peut trouver un point extrême entier y_1^2 de $Q(G_2, k)$ qui serre les mêmes contraintes serrées pour x_2 tel que $y_1^2(e) = 1$ pour tout $e \in \{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ et $y_1^2(e) = 0$ pour tout $e \in \delta(W) \setminus \{e_0, e_1, \dots, e_k\}$. Soit y la solution donnée par

$$y(e) = \begin{cases} y_1^1(e) & \text{si } e \in E(\overline{W}), \\ y_1^2(e) & \text{si } e \in E(W), \\ 1 & \text{si } e \in \{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\}, \\ 0 & \text{si } e \in \delta(W) \setminus \{e_0, e_1, \dots, e_{k-1}\}. \end{cases}$$

D'une manière similaire à celle de la démonstration du lemme 3.10, on montrera que y est une solution de $S(x)$. Puisque $y \neq x$, ceci est impossible. $\square$

3.4 Exemples de graphes parfaitement k -arête connexes

Dans cette section, nous allons décrire certaines classes de graphes parfaitement k -arête connexes.

Définition 3.6 On dit qu'un graphe $G = (V, E)$ est de type Γ (voir figure 3.3), s'il existe $V_1 \subset V$ tel que

- 1) $|V_1| = 3$ et $E(V \setminus V_1) = \emptyset$;
- 2) $|V \setminus V_1| \geq 3$ et si $|V \setminus V_1| = 3$, alors $E(V_1) = \emptyset$;
- 3) $||v_1, v_2|| \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ pour tous sommets v_1 et v_2 tels que $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V \setminus V_1$.

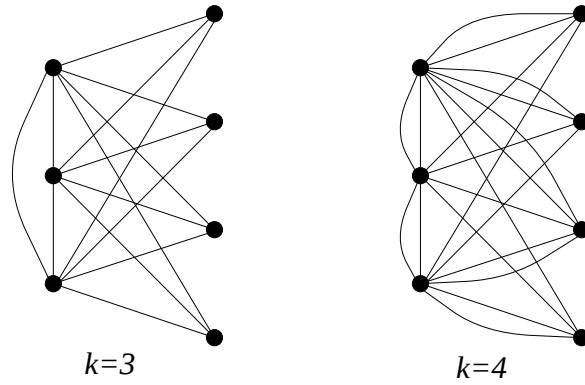


Figure 3.3 : Graphes de type Γ

Le théorème suivant généralise le résultat de Mahjoub [58] pour $k = 2$.

Théorème 3.12 Si G est un graphe de type Γ , alors G est parfaitement k -arête connexe.

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe de type Γ . On note $V_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$ et $V \setminus V_1 = \{u_1, \dots, u_t\}$ ($t \geq 3$). Soit $Q(G)$ le polytope donné par les contraintes triviales et les contraintes de degré, *i.e.*

$$Q(G) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid 0 \leq x(e) \leq 1, \forall e \in E, x(\delta(v)) \geq k, \forall v \in V\}.$$

Nous allons montrer que $Q(G) = k\text{ECSP}(G)$. Supposons que $Q(G) \neq k\text{ECSP}(G)$. Il est facile de voir que tout point extrême entier de $Q(G)$ est aussi un point extrême de $k\text{ECSP}(G)$. Par conséquent, il existe un point extrême fractionnaire x de $Q(G)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que x est de rang 1. Puisque x est un point extrême de $Q(G)$, il existe un sous-ensemble $V^* \subseteq V$ tel que x soit l'unique solution

du système $S(x)$ suivant

$$S(x) \quad \begin{cases} x(e) = 0 & \forall e \in E_0(x), \\ x(e) = 1 & \forall e \in E_1(x), \\ x(\delta(v)) = k & \forall v \in V^*. \end{cases}$$

Soit $f = (v_1, v_2)$ une arête telle que $0 < x(f) < 1$. Alors $v_1, v_2 \in V^*$. Autrement, si par exemple $v_1 \notin V^*$, on pourrait considérer la solution $y \in \mathbb{R}^E$ telle que

$$y(e) = \begin{cases} x(e) & \forall e \in E \setminus \{f\}, \\ 1 & \text{si } e = f, \end{cases}$$

qui est un point extrême fractionnaire de $Q(G)$ dominé par x . Ce qui contredit le fait que x est un point extrême de $Q(G)$ de rang 1. Donc $G(E_f(x)) = (V^*, E_f(x))$. Comme dans le lemme 2.9, on obtient que les composantes connexes de $G(E_f(x))$ sont des cycles impairs. Puisque x est de rang 1, il s'en suit que $G(E_f)$ est un cycle impair. Donc G n'est pas biparti et par conséquent, $t \geq 4$. Aussi, puisque $E(V \setminus V_1) = \emptyset$, ce cycle doit contenir au moins une arête de $E(V_1)$. De plus, tout sommet de ce cycle induit une coupe serrée pour x . Donc, il existe deux sommets de V_1 , disons, s_1 et s_2 , tels que $x([s_1, s_2]) > 0$ et $x(\delta(s_1)) = x(\delta(s_2)) = k$. Comme il existe au plus $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ arêtes multiples entre chaque paire de sommets v_1 et v_2 telle que $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V \setminus V_1$, il s'en suit que

$$x(\{[s_1, s_2], u_i\}) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil \quad \text{pour } i = 1, \dots, t.$$

D'où

$$\begin{aligned} 2k = x(\delta(s_1)) + x(\delta(s_2)) &\geq x([s_1, s_2]) + \sum_{i=1}^t x(\{[s_1, s_2], u_i\}) \\ &> \sum_{i=1}^t x(\{[s_1, s_2], u_i\}) \\ &\geq 4 \lceil \frac{k}{2} \rceil \\ &\geq 2k, \end{aligned}$$

une contradiction. □

Théorème 3.13 *Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe biparti sans arêtes multiples avec $|V_1 \cup V_2| \leq 4k - 1$. Alors G est parfaitement k -arête connexe.*

Preuve. Supposons qu'il existe un point extrême fractionnaire x de $Q(G, k)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que x est de rang 1.

Puisque x est un point extrême de $Q(G, k)$, il existe un sous-ensemble $C_p^*(x)$ de $C_p(x)$ tel que x soit la solution unique du système suivant

$$S(x) \quad \begin{cases} x(e) = 0 & \forall e \in E_0(x), \\ x(e) = 1 & \forall e \in E_1(x), \\ x(\delta(v)) = k & \forall \delta(v) \in C_d(x), \\ x(\delta(W)) = k & \forall \delta(W) \in C_p^*(x), \end{cases}$$

où $|E_0| + |E_1| + |C_d(x)| + |C_p^*(x)| = |E|$.

Nous allons montrer $C_p^*(x) = \emptyset$. En effet, supposons qu'il existe une $W \subset V$ tel que $\delta(W) \in C_p^*(x)$. Comme dans la preuve du lemme 3.10, on peut montrer que les graphes $G[W]$ et $G[\overline{W}]$ sont $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ -arête connexes. Puisque $|V_1 \cup V_2| \leq 4k - 1$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $|W| \leq 2k - 1$. Comme G est biparti et les graphes $G[W]$ et $G[\overline{W}]$ sont $\lceil \frac{k}{2} \rceil$ -arête connexes, on a

$$m_i = |W \cap V_i| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil \quad i = 1, 2,$$

$$\overline{m}_i = |\overline{W} \cap V_i| \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil \quad i = 1, 2.$$

Il en résulte que $k \leq |W| \leq 2k - 1$. Et par conséquent, on peut supposer que $m_1 \leq k - 1$. Si $m_2 > k$, alors on a $k = x(\delta(W)) \geq m_2 > k$, une contradiction. Supposons maintenant que $m_2 = k$. Il s'en suit que $k = x(\delta(W)) \geq x([W \cap V_2, \overline{W}]) \geq k$. D'où

$$x([W \cap V_1, \overline{W}]) = 0,$$

ce qui implique que $x(\delta(v)) = k$ pour tout $v \in W$. Par conséquent, l'équation $x(\delta(W)) = k$ est redondante par rapport aux équations $x(\delta(v)) = k$ pour tout $v \in W$.

Supposons maintenant que $m_2 < k$. On a

$$\begin{aligned} k = x(\delta(W)) &= x([W \cap V_1, \overline{W}]) + x([W \cap V_2, \overline{W}]) \\ &\geq m_1(k - m_2) + m_2(k - m_1) \\ &= 2m_1k - 2m_1m_2 \\ &\geq k. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que $\lceil \frac{k}{2} \rceil \leq m_1 \leq m_2 < k$. D'après les inéquations ci-dessus, on obtient

$$x([W \cap V_1, \overline{W}]) = m_1(k - m_2),$$

$$x([W \cap V_2, \overline{W}]) = m_2(k - m_1).$$

D'après les deux dernières équation, on a $x(\delta(v)) = k$ pour tout $v \in W$. Et par conséquent, l'équation $x(\delta(W)) = k$ est redondante dans le système $S(x)$. Donc $C_p^*(x) = \emptyset$. Comme dans le lemme 2.9, on obtient que les composantes connexes du graphe induit par les arêtes fractionnaires de E sont des cycles impairs. Ceci est impossible, car G est biparti. $\square$

Théorème 3.14 *Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe biparti sans arêtes multiples. Si $|V_1| \leq k + 1$, alors G est parfaitement k -arête connexe.*

Preuve. Similaire à celle du théorème 3.13. $\square$

3.5 Conclusion

Dans [32], Fonlupt et Mahjoub ont donné des conditions nécessaires pour qu'un point extrême fractionnaire de $Q(G, 2)$ soit critique. Ils ont montré que si x est un point extrême critique de $Q(G, 2)$, alors il existe un ensemble $V \subseteq V$ tel que x soit l'unique solution du système suivant

$$(S) \quad \begin{cases} x(e) = 0 & \forall e \in E_0(x), \\ x(e) = 1 & \forall e \in E_1(x), \\ x(\delta(v)) = k & \forall v \in V^*. \end{cases}$$

Notre étude nous laisse penser que ce résultat peut être étendu pour $k \geq 3$. Mais malheureusement, on a pas pu établir un tel résultat.

Une des raisons de la difficulté supplémentaire est liée à la structure des coupes propres serrées minimales. En effet, si $W \subset V$ avec $x(\delta(W)) = k$, alors $G[W]$ est $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ -arête connexe. Pour $k = 2$, cela veut dire que $G[W]$ est 2-arête connexe.

Tous les points extrêmes critiques que l'on a pu étudier, sont portés sur la classe de graphes suivante, qui est une extension d'une classe définie par Fonlupt et Mahjoub [32] pour $k = 2$.

Définition 3.7 Soit Ω la classe des graphes $G = (V, E)$ tels que

- 1) $V = V_1 \cup V_2$ avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$;
- 2) $|V_1| = 2l + 1$ ($l \geq 1$) et $G(V_1)$ contient un cycle hamiltonien C ;
- 3) $|\delta(v)| = k + 1, \forall v \in V_1$;
- 4) $|\delta(W) \setminus C| \geq k, \forall W \subset V$ tel que $|W| \geq 2$ et $|\overline{W}| \geq 2$.

La figure 3.4 montre des exemples de graphes de Ω

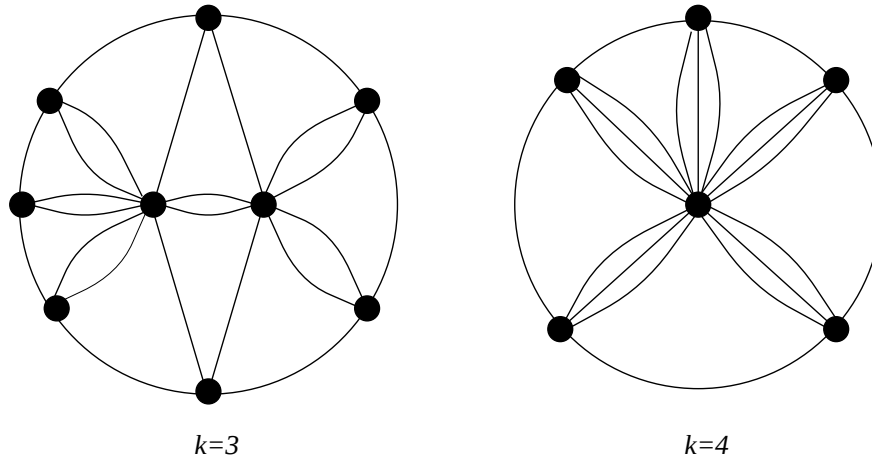


Figure 3.4 : Graphes de type Ω

Si $G = (V, E)$ est un graphe de Ω , alors la solution donnée par

$$x(e) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \forall e \in C, \\ 1 & \forall e \in E \setminus C, \end{cases}$$

est un point extrême de $Q(G, k)$ de rang 1. D'après le lemme 3.6, si G' est un graphe obtenu à partir d'un graphe G de Ω en appliquant successivement les opérations θ_1 , θ_2 et θ_3 , alors G' n'est pas parfaitement k -arête connexe.

L'étude des points extrêmes critiques et des graphes non parfaitement k -arête connexes d'une part et la structure des graphes parfaitement k -arêtes connexes que l'on a pu caractériser d'autre part, nous amène à formuler la conjecture suivante.

Conjecture 3.8 *Un graphe G est parfaitement k -arête connexe, si et seulement si G ne peut être réduit à un graphe de Ω en appliquant les opérations $\theta_1, \theta_2, \theta_3$.*

Chapitre 4

Le polytope des sous-graphes Steiner connexes

4.1 Introduction

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble S de V et un vecteur de poids $w \in \mathbb{R}^E$ associé aux arêtes de G , le *problème de l'arbre Steiner* (STP) consiste à trouver un arbre de G de poids minimum couvrant S . Ce problème a reçu beaucoup d'attention ces deux dernières décennies, vu ses nombreuses applications, en particulier dans la conception des circuits électroniques intégrés (VLSI) et des réseaux de télécommunication [17, 18, 38, 48, 49, 54, 59, 60, 69, 70, 83].

L'enveloppe convexe $\text{STP}(G, S)$ des vecteurs d'incidence des ensembles d'arêtes de G induisant des arbres Steiner est appelé le *polytope des arbres Steiner*.

Il est clair que toute solution réalisable du STP est aussi une solution réalisable du problème 1SECSP. Et si $w(e) > 0$ pour tout $e \in E$, alors les deux problèmes sont identiques.

Dans ce chapitre, nous étudions les polytopes associés à ces deux problèmes. Nous introduisons une nouvelle classe d'inégalités valides pour le polytope 1SECSP(G, S) appelées inégalités de partitions Steiner généralisées. Cette classe est en même temps valide pour le polytope des arbres Steiner $\text{STP}(G, S)$. Elle généralise aussi les inégalités de partitions Steiner et les inégalités de trous impairs introduites par Chopra et Rao [17] pour ce polytope.

Nous étudions également certaines procédures de construction de facettes à partir de facettes pour le polytope $1SECSP(G, S)$. Ces procédures seront utilisées par la suite pour infirmer une conjecture de Chopra et Rao [18] sur le dominant du polytope de l'arbre Steiner dans la classe des 2-arbres. Nous discutons aussi du polytope $1SECSP(G, S)$ et nous en donnons une caractérisation complète dans certaines classes particulières de graphes. En particulier, nous décrivons ce polytope dans les graphes séries-parallèles quand les sommets terminaux ont une certaine disposition. Ceci nous permettra de décrire complètement le dominant du polytope $STP(G, S)$ dans ces classes de graphes. Ce travail a été fait en collaboration avec H. Kerivin.

Dans [43] Grötschel et Monma ont montré le résultat suivant:

Lemme 4.1 *Si $G = (V, E)$ est un graphe 2-arête connexe et S un ensemble de sommets terminaux de V , alors le polytope $1SECSP(G, S)$ est de pleine dimension.* $\square$

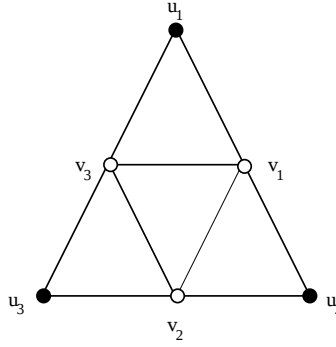
Étant donné que le problème $1SECSP$ est décomposable dans tout graphe contenant un sommet d'articulation [74], les graphes que l'on considère dans ce chapitre seront supposés 2-sommet connexes. En conséquence, par le lemme 4.1, le polytope $1SECSP(G, S)$ est de pleine dimension.

4.2 Les inégalités de partitions Steiner généralisées

Dans [17], Chopra et Rao ont introduit une famille de contraintes valides pour le dominant du polytope $STP(G, S)$. Cette classe peut être présentée de la manière suivante: soient m un entier impair ($m \geq 3$) et $G_m = (V_m, E_m)$ un graphe tel que

$$\begin{aligned} V_m &= \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m\}, \\ E_m &= \{(u_i, v_i), (u_i, v_{i-1}), (v_{i-1}, v_i) : i = 1, \dots, m \pmod{m}\}. \end{aligned}$$

Soit $S_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ l'ensemble des sommets terminaux de G_m (voir figure 4.1).

Figure 4.1 : G_3

La classe des graphes G_m sera notée par Ψ . Soit la contrainte

$$x(E_m) \geq 2(m-1). \quad (4.1)$$

Il n'est pas difficile de voir que la contrainte (4.1) est valide pour le dominant du polytope $STP(G_m, S_m)$. Les contraintes de type (4.1) sont appelées *inégalités de trous impairs*. Chopra et Rao [17] ont montré que la contrainte (4.1) définit une facette du dominant du polytope $STP(G_m, S_m)$. Ils ont aussi montré que si $G = (V_m, E)$, où $E_m \subseteq E$, est un graphe obtenu à partir de G_m en ajoutant des arêtes entre des sommets non adjacents de G_m , alors l'inégalité (4.1) peut être étendue en une contrainte valide pour le dominant du polytope $STP(G, S_m)$, donnée par

$$x(E_m) + 2x(E \setminus E_m) \geq 2(m-1). \quad (4.2)$$

Soient $G = (V, E)$ un graphe et S un sous-ensemble de V . Une partition $\pi = \{V_1, \dots, V_p\}$ de V , $p \geq 2$, est appelée *une partition Steiner*, si

$$V_i \cap S \neq \emptyset \text{ pour } i = 1, \dots, p.$$

Soit $\pi = \{V_1, \dots, V_p\}$ une partition de V . On note $E_\pi = \bigcup_{i=1, \dots, p} \delta(V_i)$. Si π est une partition Steiner de V et $F \subseteq E$ un ensemble d'arêtes qui induit un sous-graphe Steiner connexe, alors le vecteur d'incidence de F , x^F , vérifie la contrainte

$$\sum_{e \in E_\pi} x(e) \geq p-1. \quad (4.3)$$

Les contraintes de type (4.3) sont appelées *inégalités de partitions Steiner*. Considérons maintenant une partition $\pi = \{V_1, \dots, V_p\}$ telle que

- $V_i \cap S = \emptyset$ pour $i = 1, \dots, r$,
- $V_i \cap S \neq \emptyset$ pour $i = r + 1, \dots, p$,

où $1 \leq r < p$. Soient $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant chaque ensemble V_i en un sommet w_i , $i = 1, \dots, p$, et $S_\pi = \{w_i : i = r + 1, \dots, p\}$. Soit

$$d = \max\{|U| \mid U \subseteq V_\pi \setminus S_\pi \text{ et } G_\pi \setminus U \text{ est Steiner connexe par rapport à } S_\pi\}.$$

Considérons l'inégalité suivante

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq p - d - 1. \quad (4.4)$$

Théorème 4.2 *L'inégalité (4.4) est valide pour $1\text{SECSP}(G, S)$.*

Preuve. Si T est un sous-ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe Steiner connexe dans G (par rapport à S), alors T' , la restriction de T dans G_π , induit un sous-graphe Steiner connexe dans G_π (par rapport à S_π). Comme le sous-graphe de G_π induit par T' contient au moins $p - d$ sommets, T' doit contenir au moins $p - d - 1$ arêtes. $\square$

Les inégalités de type (4.4) seront appelées *inégalités de partitions Steiner généralisées*. Notons que ces inégalités généralisent les inégalités (4.1) et (4.3). Pour les inégalités (4.1), $d = 1$ et $p = 2m$ et pour les inégalités (4.3), $d = 0$.

Puisque $\text{STP}(G, S) \subseteq 1\text{SECSP}(G, S)$, les inégalités de type (4.4) sont aussi valides pour $\text{STP}(G, S)$. Aussi, pour tout sous-ensemble d'arêtes $F \subset E$ induisant un arbre Steiner par rapport à S , x^F satisfait l'inégalité (4.4) à l'égalité.

Exemple.

Soit $G = (V, E)$ le graphe représenté par la figure (4.2). Les sommets terminaux sont représentés par les cercles noirs. Considérons la partition de V où chaque ensemble de la partition est réduit à un seul sommet. Nous avons donc $p = 5$ et $d = 1$. L'inégalité de partition Steiner généralisée correspondante est

$$\sum_{e \in E} x(e) \geq 3.$$

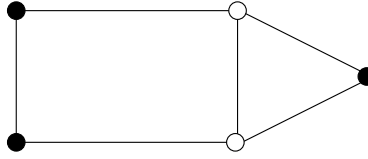


Figure 4.2 : contrainte de partition Steiner généralisée

Dans ce qui suit, nous allons donner des conditions suffisantes pour que les inégalités (4.4) définissent des facettes du polytope $1\text{SECSP}(G, S)$. Soit $m \geq 3$ un entier impair et soit $\overline{G}_m = (\overline{V}_m, \overline{E}_m)$ un graphe tel que

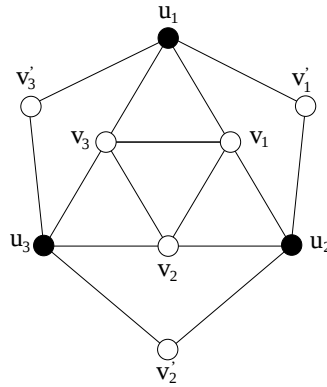
$$\overline{V}_m = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_m\},$$

$$\overline{E}_m = \{(u_i, v_i), (u_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i-1}), (u_i, v'_i), (u_i, v'_{i-1}), (v'_i, v'_{i-1}) : i = 1, \dots, m \pmod{m}\}.$$

Soit $\overline{S}_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ l'ensemble des sommets terminaux de $\overline{G}_m$ (voir figure 4.3 pour $\overline{G}_3$). Considérons la contrainte suivante

$$\sum_{e \in \overline{E}_m} x(e) \geq 2(m-1). \quad (4.5)$$

Les contraintes (4.5) sont des inégalités de type (4.4) avec $d = m + 1$ et $p = 3m$.

Figure 4.3 : $\overline{G}_3$

Théorème 4.3 *L'inégalité (4.5) est valide pour le polytope $1\text{SECSP}(\overline{G}_m, \overline{S}_m)$.*

Preuve. Soit T un sous-ensemble d'arêtes de $\overline{E}_m$ induisant un sous-graphe $G_T = (V_T, T)$ Steiner connexe par rapport à $\overline{S}_m$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|T|$ est minimum. Par conséquent, G_T est connexe. L'ensemble V_T intersecte au moins $(m-1)$ couples parmi les ensembles $\{v_i, v'_i\}$, $i = 1, \dots, m$, car

sinon, le sous-graphe G_T ne serait pas Steiner connexe. Puisque $\overline{S}_m \subseteq V_T$, alors $|V_T| \geq m + (m - 1) = 2m - 1$. Et par conséquent, $|T| \geq |V_T| - 1 = 2m - 2$. $\square$

Théorème 4.4 *L'inégalité (4.5) définit une facette de $1\text{SECSP}(\overline{G}_m, \overline{S}_m)$.*

Preuve. La démonstration est similaire à celle de Chopra et Rao [17] pour montrer que l'inégalité (4.1) définit une facette du dominant de $\text{STP}(G, S)$.

Notons par $a^T x \geq \alpha_0$ la contrainte (4.5) et par $\mathcal{F}$ la face de $1\text{SECSP}(\overline{G}_m, \overline{S}_m)$ définie par cette contrainte. Supposons qu'il existe une contrainte $b^T x \geq \beta_0$ définissant une facette $\mathcal{F}'$ de $1\text{SECSP}(\overline{G}_m, \overline{S}_m)$ telle que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

D'après le lemme 4.1, le polytope $1\text{SECSP}(\overline{G}_m, \overline{S}_m)$ est de pleine dimension et ainsi, pour montrer que $\mathcal{F}$ est une facette, il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$.

Considérons les triangles $B_i = \{(u_i, v_i), (u_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i-1})\}; i = 1, \dots, m$. Soit

$$T_i = \{(u_{i+1}, v_i), (u_{i+2}, v_{i+2})\} \cup \{(u_r, v_r), (u_r, v_{r-1}); r \neq i, i+1, i+2\}, i = 1, \dots, m.$$

Soient

$$\begin{aligned} T_i^1 &= T_i \cup \{(u_i, v_{i-1}), (u_i, v_i)\}, \\ T_i^2 &= T_i \cup \{(u_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i-1})\}, \\ T_i^3 &= T_i \cup \{(u_i, v_i), (v_i, v_{i-1})\}. \end{aligned}$$

Les ensembles $T_i^j, i = 1, \dots, m$ et $j = 1, 2, 3$, induisent des sous-graphes Steiner connexes. De plus, leurs vecteurs d'incidence $x^{T_i^j}$ satisfont (4.5) à l'égalité. D'où

$$b^T x^{T_i^j} = \beta_0, \quad i = 1, \dots, m \text{ et } j = 1, \dots, 3.$$

Donc

$$b(u_i, v_i) + b(u_i, v_{i-1}) = b(u_i, v_{i-1}) + b(v_i, v_{i-1}) = b(u_i, v_i) + b(v_i, v_{i-1}).$$

Et par conséquent, on obtient

$$b(u_i, v_i) = b(u_i, v_{i-1}) = b(v_i, v_{i-1}) = \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (4.6)$$

pour un certain scalaire $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que $\alpha_i = \alpha_j \forall i, j \in \{1, \dots, m\}$.

Puisque m est impair, il suffit de montrer que $\alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$, $i = 1, \dots, m \pmod{m}$.

Considérons les sous-ensembles d'arêtes:

$$\begin{aligned} T_i^4 &= \{(u_j, v_j), (u_j, v_{j-1}); j \neq i, i+1\} \cup \{(u_i, v_{i-1}), (u_{i+1}, v_{i+1})\}, \\ T_i^5 &= \{(u_j, v_j), (u_j, v_{j-1}); j \neq i-1, i\} \cup \{(u_{i-1}, v_{i-2}), (u_i, v_i)\}. \end{aligned}$$

Les ensembles T_i^4 et T_i^5 induisent des sous-graphes Steiner connexes tels que

$$a^T x^{T_i^4} = a^T x^{T_i^5} = \alpha_0.$$

D'où

$$b^T x^{T_i^4} = b^T x^{T_i^5} = \beta_0.$$

Et par conséquent, on obtient

$$b(u_{i-1}, v_{i-1}) + b(u_i, v_{i-1}) = b(u_i, v_i) + b(u_{i+1}, v_i).$$

D'après (4.6), on a $\alpha_{i-1} + \alpha_i = \alpha_i + \alpha_{i+1}$. Donc $\alpha_{i-1} = \alpha_{i+1}$. D'où

$$\alpha_i = \alpha \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad (4.7)$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Considérons les triangles $B'_i = \{(u_i, v'_i), (u_i, v'_{i-1}), (v'_i, v'_{i-1})\}$, $i = 1, \dots, m$. D'une manière similaire au cas précédent, on peut montrer que

$$b(u_i, v'_i) = b(u_i, v'_{i-1}) = b(v'_i, v'_{i-1}) = \alpha' \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad (4.8)$$

pour un certain scalaire $\alpha' \in \mathbb{R}$.

Nous allons montrer que $\alpha = \alpha'$. Soient

$$\begin{aligned} T &= \{(u_i, v_i), (u_i, v_{i-1}) : i = 1, \dots, m\} \setminus \{(u_1, v_1), (u_2, v_1)\}, \\ T' &= (T \setminus \{(u_1, v_m), (u_m, v_m)\}) \cup \{(u_1, v'_1), (u_2, v'_1)\}. \end{aligned}$$

Les sous-ensembles T et T' induisent des sous-graphes Steiner connexes de $\overline{G}_m$. Par ailleurs, $x^T \in \mathcal{F}$ et $x^{T'} \in \mathcal{F}$. D'où

$$b(u_1, v_m) + b(u_m, v_m) = b(u_1, v'_1) + b(u_2, v'_1).$$

D'après (4.7) et (4.8), on a $\alpha = \alpha' = \rho$. Donc, on obtient

$$b(e) = \rho \quad \forall e \in \overline{E}_m.$$

D'après le lemme 1.5, on a $\rho \geq 0$, et comme $\mathcal{F}' \subset 1\text{SECSP}(\overline{G}_m, \overline{S}_m)$, il s'en suit que $\rho > 0$. $\square$

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$ un ensemble de sommets terminaux de V . Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en contractant un ensemble de sommets $W \subseteq V$ qui induit un sous-graphe 2-arête connexe. On note par w le sommet résultant de cette contraction. Soit $S' = S$ si $W \cap S = \emptyset$ et $S' = (S \setminus W) \cup \{w\}$ sinon.

Lemme 4.5 *Supposons que l'inégalité*

$$\sum_{e \in E'} a'(e)x(e) \geq \alpha$$

définisse une facette $\mathcal{F}'$ de $1\text{SECSP}(G', S')$. Alors l'inégalité

$$\sum_{e \in E} a(e)x(e) \geq \alpha \tag{4.9}$$

définit une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$, où $a(e) = a'(e)$ pour tout $e \in E'$ et $a(e) = 0$ pour tout $e \in E(W)$.

Preuve. Soit F un ensemble d'arêtes de E induisant un sous-graphe Steiner connexe de G . La restriction F' de F dans le graphe G' est Steiner connexe. D'où

$$\sum_{e \in E} a(e)x^F(e) = \sum_{e \in E'} a'(e)x^{F'}(e) \geq \alpha.$$

Ce qui montre la validité de (4.9) pour $1\text{SECSP}(G, S)$.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que l'inégalité (4.9) définit une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$. Soit $\mathcal{F}$ la face de $1\text{SECSP}(G, S)$ définie par (4.9). Supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$. Il existe alors une contrainte valide

$$\sum_{e \in E} b(e)x(e) \geq \beta$$

qui définit une facette $\mathcal{F}_1$ de $1\text{SECSP}(G, S)$ telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$.

Nous allons montrer que $b(e) = 0$ pour tout $e \in E(W)$.

Soit $\tilde{T}$ un ensemble d'arêtes de E' induisant un sous-graphe Steiner connexe de G' tel que $x^{\tilde{T}} \in \mathcal{F}'$. Soient $T_1 = \tilde{T} \cup E(W)$ et $T_2 = T_1 \setminus \{e\}$. Comme $G[W]$ est 2-arête connexe, les ensembles T_1 et T_2 induisent des sous-graphes Steiner connexes de G tels que $x^{T_1} \in \mathcal{F}$ et $x^{T_2} \in \mathcal{F}$. Et par conséquent, $x^{T_1} \in \mathcal{F}_1$ et $x^{T_2} \in \mathcal{F}_1$. D'où, $b(e) = 0$.

Considérons l'inégalité

$$\sum_{e \in E'} b(e)x(e) \geq \beta. \quad (4.10)$$

Donc, l'inégalité (4.10) définit une face propre de $1\text{SECSP}(G', S')$, que l'on notera par $\mathcal{F}'_1$. Nous avons $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}'_1$. En effet, soit T' un ensemble d'arêtes de E' induisant un sous-graphe Steiner connexe de G' tel que $x^{T'} \in \mathcal{F}'$. Soit $T = T' \cup E(W)$. Il est clair que $x^T \in \mathcal{F}$. Et par conséquent, $x^T \in \mathcal{F}_1$. D'où

$$\sum_{e \in E} b(e)x^T(e) = \sum_{e \in E'} b(e)x^{T'}(e) = \beta.$$

Donc, $x^{T'} \in \mathcal{F}'_1$. Ce qui prouve que $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}'_1$.

Puisque $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$, il existe un ensemble d'arêtes $F_0 \subseteq E$ induisant un sous-graphe Steiner connexe de G tel que $x^{F_0} \in \mathcal{F}_1$ et $x^{F_0} \notin \mathcal{F}$. La restriction F'_0 de F_0 est telle que $x^{F'_0} \in \mathcal{F}'_1$ et $x^{F'_0} \notin \mathcal{F}'$. On en déduit que $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}'_1$. Ceci contredit le fait que $\mathcal{F}'$ définit une facette de $1\text{SECSP}(G', S')$. $\square$

Soient $G = (V, E)$ un graphe et S l'ensemble de sommets terminaux de V . Soient $W_1, \dots, W_t$, $t \geq 1$, des sous-ensembles de V deux à deux disjoints tels que $G[W_i]$ soit 2-arête connexe par. Considérons le graphe obtenu à partir de G en contractant $W_1, \dots, W_t$. Le sommet w_i , résultant de la contraction de W_i , $i = 1, \dots, t$, sera considéré comme un sommet terminal de ce graphe si et seulement si $S \cap W_i \neq \emptyset$.

Le lemme 4.5 montre que si le graphe ainsi obtenu est un graphe $\overline{G}_m = (\overline{V}_m, \overline{E}_m)$ décrit précédemment, alors la contrainte

$$\sum_{e \in \overline{E}_m} x(e) \geq 2(m-1)$$

définit une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$.

4.3 Construction de facettes

Dans cette section, nous allons décrire certaines procédures de construction de facettes, à partir de facettes, pour le polytope $1SECSP(G)$. Ces procédures seront utilisées pour infirmer une conjecture de Chopra et Rao [18] sur le dominant du polytope des arbres Steiner dans les 2-arbres. Par la suite, elles seront utilisées pour donner une caractérisation complète du polytope $1SECSP(G, S)$ pour les graphes série-parallèles dont les sommets terminaux ont une certaine disposition.

La première procédure consiste à ajouter un sommet.

4.3.1 Ajout d'un sommet

Théorème 4.6 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Supposons que $E = E^* \cup \{f\}$, où $f = (v_1, v_2)$. Soit*

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f) \geq \alpha, \quad (4.11)$$

une inégalité qui définit une facette non triviale de $1SECSP(G, S)$. Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en ajoutant un sommet v_0 de degré deux sur l'arête (v_1, v_2) . On note $f_1 = (v_0, v_1)$ et $f_2 = (v_0, v_2)$ (voir figure 4.4).

(a) *Soit $S' = S$. Alors les inégalités suivantes définissent des facettes du polytope $1SECSP(G', S')$*

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_1) \geq \alpha, \quad (4.12)$$

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_2) \geq \alpha. \quad (4.13)$$

(b) *Soit $S' = S \cup \{v_0\}$.*

(b1) *Si $v_1, v_2 \in S$, alors l'inégalité suivante définit une facette de $1SECSP(G', S')$*

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_1) + a(f)x(f_2) \geq \alpha + a(f). \quad (4.14)$$

(b2) Si $v_1 \in S$ et $v_2 \notin S$, alors l'inégalité

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + (\alpha_0 - \alpha)x(f_1) + a(f)x(f_2) \geq \alpha_0, \quad (4.15)$$

définit une facette de $1\text{SECSP}(G', S')$, où

$$\alpha_0 = \min \left\{ \sum_{e \in E^*} a(e)x^F(e) + a(f)x^F(f_2) \mid F \text{ induit un sous-graphe} \right. \\ \left. \text{Steiner connexe de } G' - f_1 \text{ par rapport à } S' \right\}.$$



Figure 4.4 : Ajout d'un sommet

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ la facette de $1\text{SECSP}(G, S)$ définie par (4.11).

(a) Supposons que $S' = S$. Nous montrons d'abord la validité de (4.12) (la preuve pour (4.13) est similaire).

Soit $F' \subseteq E'$ un sous-ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe Steiner connexe de G' . Soit $F \subseteq E$ tel que $F = (F' \setminus \{f_1, f_2\}) \cup \{f\}$ si $f_1 \in F'$ et $F = F' \setminus \{f_2\}$ sinon.

Il est facile de voir que F induit un sous-graphe Steiner connexe de G . De plus, on a

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^{F'}(e) + a(f)x^{F'}(f_1) = \sum_{e \in E^*} a(e)x^F(e) + a(f)x^F(f) \geq \alpha.$$

D'où la validité de (4.12) pour $1\text{SECSP}(G', S')$.

Notons par $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ les faces de $1\text{SECSP}(G', S')$ définies respectivement par les contraintes (4.12) et (4.13).

Soit

$$\alpha_1 = \min \left\{ \sum_{e \in E^*} a(e)x^T(e) + a(f)x^T(f_1) \mid T \subseteq E' \setminus \{f_2\} \text{ induit un sous-graphe} \right. \\ \left. \text{Steiner connexe de } G' - f_2 \text{ par rapport à } S' \right\}.$$

Nous avons $\alpha_1 = \alpha$. En effet, considérons un sous-ensemble d'arêtes $T' \subset E' \setminus \{f_2\}$ induisant un sous-graphe Steiner connexe de $G' - f_2$ tel que $\sum_{e \in E^*} a(e)x^{T'}(e) + a(f)x^{T'}(f_1) = \alpha_1$ et $|T'|$ soit minimum. On a $f_1 \notin T'$. Si ce n'est pas le cas, puisque $v_0 \notin S'$, l'ensemble $T'_1 = T' \setminus \{f_1\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de $G' - f_2$. Comme $a(f_1) \geq 0$, on a $\sum_{e \in E^*} a(e)x^{T'_1}(e) = \alpha_1$. Mais ceci contredit le fait que $|T'|$ est minimum. Puisque $f_1 \notin T'$, on en déduit que l'ensemble d'arêtes T' induit aussi un sous-graphe Steiner connexe de G . D'où

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^{T'}(e) = \alpha_1 \geq \alpha. \quad (4.16)$$

Comme $\mathcal{F}$ est une facette non triviale de $1\text{SECSP}(G, S)$, il existe $T \subseteq E$ tel que $x^T \in \mathcal{F}$ et $f \notin T$. Par conséquent, T induit aussi un sous-graphe Steiner connexe de $G' - f_2$. D'où

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^T(e) + a(f)x^T(f_1) = \alpha \geq \alpha_1. \quad (4.17)$$

D'après (4.16) et (4.17), on a $\alpha_1 = \alpha$.

Puisque $\mathcal{F}$ est une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$, il existe $n = |E|$ sous-ensembles $F_1, \dots, F_n$ de E induisant des sous-graphes Steiner connexes de G dont les vecteurs d'incidence $x^{F_1}, \dots, x^{F_n}$ appartiennent à $\mathcal{F}$ et sont affinement indépendants. Soient $F'_1, \dots, F'_n \subset E'$ tels que $F'_i = (F_i \setminus \{f\}) \cup \{f_1, f_2\}$ si $f \in F_i$ et $F'_i = F_i \cup \{f_2\}$ sinon, $i = 1, \dots, n$. Les ensembles F'_i , $i = 1, \dots, n$, induisent des sous-graphes Steiner connexes de G' et $x^{F'_i} \in \mathcal{F}_1$, pour $i = 1, \dots, n$.

Soit $F'_0 \subseteq E' \setminus \{f_2\}$ un sous-ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe Steiner connexe de $G' - f_2$ tel que $\sum_{e \in E^*} a(e)x^{F'_0}(e) + a(f)x^{F'_0}(f_1) = \alpha_1$. Remarquons que F'_0 induit en même temps un sous-graphe Steiner connexe de G' et que $x^{F'_0} \in \mathcal{F}_1$.

Les vecteurs $x^{F'_0}, x^{F'_1}, \dots, x^{F'_n}$ forment une famille de $n + 1$ points de $\mathcal{F}_1$ affinement indépendants. Ceci prouve que $\mathcal{F}_1$ est une facette de $1\text{ESCSP}(G', S')$. D'une manière similaire, on démontre que $\mathcal{F}_2$ est une facette de $1\text{ESCSP}(G', S')$.

(b) Supposons que $S' = S \cup \{v_0\}$.

(b1) Supposons que $v_1, v_2 \in S$. Nous montrons d'abord que (4.14) est valide pour $1\text{SECSP}(G', S')$.

Considérons un sous-ensemble d'arêtes $F' \subseteq E'$ induisant un sous-graphe Steiner connexe de G' . Remarquons que $\{f_1, f_2\} \cap F' \neq \emptyset$. Soit $F = (F' \setminus \{f_1, f_2\}) \cup \{f\}$ si $\{f_1, f_2\} \subset F'$ et $F = F' \setminus \{f_1, f_2\}$ sinon. Comme F induit un sous-graphe Steiner connexe de G et $x^{F'}(f_1) + x^{F'}(f_2) = x^F(f) + 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E^*} a(e)x^{F'}(e) + a(f)x^{F'}(f_1) + a(f)x^{F'}(f_2) &= \sum_{e \in E^*} a(e)x^F(e) + a(f)x^F(f) + a(f) \\ &\geq \alpha + a(f). \end{aligned}$$

D'où, la contrainte (4.14) est valide pour $1\text{SECSP}(G', S')$. Notons par $\mathcal{F}_3$ la face de $1\text{SECSP}(G', S')$ définie par (4.14).

Puisque $\mathcal{F}$ est une facette de $1\text{ESCSP}(G, S)$, il existe n sous-ensembles $T_1, \dots, T_n$ de E induisant des sous-graphes Steiner connexes de G dont les vecteurs d'incidence $x^{T_1}, \dots, x^{T_n}$ appartiennent à $\mathcal{F}$ et sont affinement indépendants. Soient $T'_1, \dots, T'_n \subset E'$ tels que $T'_i = (T_i \setminus \{f\}) \cup \{f_1, f_2\}$ si $f \in T_i$ et $T'_i = T_i \cup \{f_2\}$ sinon, $i = 1, \dots, n$. Comme $\mathcal{F}$ est différente d'une facette triviale, il existe un sous-ensemble d'arêtes $T \subseteq E$ tel que $x^T \in \mathcal{F}$ et $f \notin T$. Soit $T'_0 = T \cup \{f_1\}$. Les ensembles T'_i , $i = 0, 1, \dots, n$, induisent des sous-graphes Steiner connexes de G' tels que $x^{T'_i} \in \mathcal{F}_3$, $i = 0, 1, \dots, n$. De plus, les vecteurs $x^{T'_0}, x^{T'_1}, \dots, x^{T'_n}$ forment une famille de $n + 1$ points de $\mathcal{F}_3$ affinement indépendants. Par conséquent, $\mathcal{F}_3$ est une facette de $1\text{ESCSP}(G', S')$.

(b2) Supposons que $v_1 \in S$ et $v_2 \notin S$. Nous allons montrer que (4.15) est valide pour $1\text{SECSP}(G', S')$. Considérons un sous-ensemble d'arêtes $F' \subseteq E'$ induisant un sous-graphe Steiner connexe de G' . Remarquons d'abord que $\{f_1, f_2\} \cap F' \neq \emptyset$. Si $f_1 \notin F'$, alors F' induit aussi un sous-graphe Steiner connexe de $G' - f_1$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E^*} a(e)x^{F'}(e) + (\alpha_0 - \alpha)x^{F'}(f_1) + a(f)x^{F'}(f_2) &= \sum_{e \in E^*} a(e)x^{F'}(e) + a(f)x^{F'}(f_2) \\ &\geq \alpha_0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $f_1 \in F'$.

Si $f_2 \in F'$, alors $F_1 = (F' \setminus \{f_1, f_2\}) \cup \{f\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G . Donc

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^{F_1}(e) + a(f) \geq \alpha.$$

Et par conséquent

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^{F'}(e) \geq \alpha - a(f).$$

Puisque $f_1, f_2 \in F'$, on obtient

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^{F'}(e) + (\alpha_0 - \alpha)x^{F'}(f_1) + a(f)x^{F'}(f_2) \geq \alpha - a(f) + (\alpha_0 - \alpha) + a(f) = \alpha_0.$$

Si $f_2 \notin F'$, alors $F_2 = F' \setminus \{f_1\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G . Il en résulte que

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^{F'}(e) = \sum_{e \in E^*} a(e)x^{F_2}(e) \geq \alpha.$$

Comme $f_1 \in F'$ et $f_2 \notin F'$, on a

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^{F'}(e) + (\alpha_0 - \alpha)x^{F'}(f_1) + a(f)x^{F'}(f_2) \geq \alpha + (\alpha_0 - \alpha) = \alpha_0.$$

Donc l'inégalité (4.15) est valide pour $1\text{SECSP}(G', S')$. La preuve que (4.15) définit une facette de $1\text{SECSP}(G', S')$ est similaire à celle donnée dans (b1). $\square$

Chopra et Rao [18] (voir aussi Goemans [38]) ont conjecturé que si G est un 2-arbre, alors le dominant $D(G, S)$ du polytope des arbres Steiner est décrit par les contraintes de non-négativité, les contraintes de partitions Steiner et les contraintes de trous impairs.

En utilisant la procédure de construction de facettes décrite dans le théorème 4.6.(b2), nous obtenons un contre-exemple de cette conjecture. En effet, considérons le graphe G_1 représenté par la figure (4.5) et soit $S_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$.

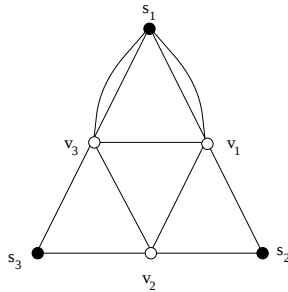
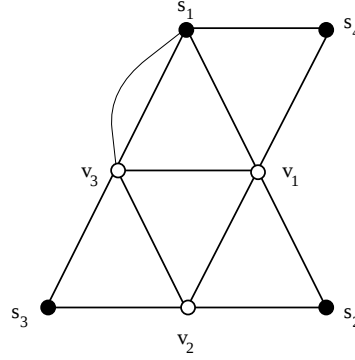


Figure 4.5 : G_1

L'inégalité de trou impair $\sum_{e \in E_1} x(e) \geq 4$ définit une facette de $1\text{SECSP}(G_1, S_1)$.

En ajoutant un sommet terminal s_4 sur une des arêtes entre les sommets s_1 et v_1 et en appliquant la procédure de construction de facettes décrite dans le théorème 4.6.(b2), on obtient l'inégalité $\sum_{e \in E_2} x(e) \geq 5$ qui définit une facette de $1\text{SECSP}(G_2, S_2)$, où G_2 est le graphe représenté par la figure (4.6) et $S_2 = S_1 \cup \{s_4\}$.

Figure 4.6 : G_2

En ajoutant un sommet terminal s_5 sur une des arêtes entre les sommets s_1 et v_3 et en appliquant de nouveau la procédure décrite dans le théorème 4.6.(b2) sur le graphe G_2 , on obtient l'inégalité $\sum_{e \in E} x(e) \geq 6$ qui définit une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$, où G est le graphe donné par la figure (4.7) et $S = S_2 \cup \{s_5\}$.

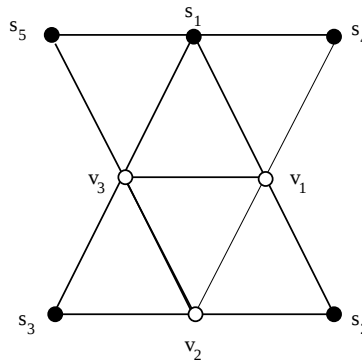


Figure 4.7 : Contre-exemple de la conjecture de Chopra et Rao

L'inégalité $\sum_{e \in E} x(e) \geq 6$ définit aussi une facette de $D(G, S)$. Cette contrainte est une

inégalité de partition Steiner généralisée. Elle est différente d'une inégalité de partition Steiner et d'une inégalité de trou impair. Ce qui infirme la conjecture de Chopra et Rao. Notons que dans cet exemple, la procédure de construction de facettes de $1\text{SECSP}(G, S)$ a permis aussi de construire une facette de $D(G, S)$.

Notre deuxième opération est l'inverse de la précédente. Elle consiste donc à remplacer une chaîne de longueur deux par une seule arête.

4.3.2 Contraction d'une arête

Avant de présenter notre deuxième opération, nous donnons le lemme suivant qui sera utile par la suite.

Lemme 4.7 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et S un ensemble de terminaux de G . Supposons qu'il existe un sommet $v_0 \in V$ tel que $\delta(v_0) = \{f_1, f_2\}$, où $f_1 = (v_0, v_1)$ et $f_2 = (v_0, v_2)$. Soit*

$$a^T x = \sum_{e \in E \setminus \{f_1, f_2\}} a(e)x(e) + a(f_1)x(f_1) + a(f_2)x(f_2) \geq \alpha \quad (4.18)$$

une contrainte qui définit une facette non triviale de $1\text{SECSP}(G, S)$.

(a) *Si $v_0 \notin S$, alors $a(f_1).a(f_2) = 0$.*

(b) *Supposons que $v_0 \in S$.*

(b1) *Si $v_1, v_2 \in S$, alors $a(f_1) = a(f_2)$.*

(b2) *Si $v_1 \in S$ et $v_2 \notin S$, alors $a(f_1) \geq a(f_2)$.*

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ la facette de $1\text{SECSP}(G, S)$ définie par la contrainte (4.18)

(a) Supposons que $a(f_1) \neq 0 \neq a(f_2)$.

Puisque $\mathcal{F}$ est une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$, il existe un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que $x^F \in \mathcal{F}$ et $|F \cap \{f_1, f_2\}| = 1$. Sinon, pour tout ensemble $T \subset E$ tel que $G(T)$ soit Steiner connexe et $x^T \in \mathcal{F}$, on a ou bien $\{f_1, f_2\} \subset T$ ou bien $\{f_1, f_2\} \cap T = \emptyset$. Mais ceci implique que l'inégalité (4.16) est, à une multiplication près par un scalaire

positif, l'équation $x(f_1) - x(f_2) = 0$. Puisque $\mathcal{F}$ est une facette non triviale, ceci contredit le lemme 1.5.

Sans perte de généralité, on peut supposer que $f_1 \in F$ et $f_2 \notin F$. Soit $F_1 = F \setminus \{f_1\}$. Puisque $v_0 \notin S$, l'ensemble F_1 induit un sous-graphe Steiner connexe de G . D'où, $a(f_1) = 0$, une contradiction.

(b) Supposons que $v_0 \in S$.

(b1) Supposons que $a(f_1) \neq a(f_2)$.

Sans perte de généralité, on suppose que $a(f_1) > a(f_2)$. Puisque $\mathcal{F}$ est différente d'une facette triviale, il existe un ensemble d'arêtes $F \subset E$ ne contenant pas f_2 tel que $x^F \in \mathcal{F}$. Comme $v_0 \in S$, il en résulte que $f_1 \in F$. L'ensemble $F' = (F \setminus \{f_1\}) \cup \{f_2\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G avec $a^T x^{F'} < \alpha$, une contradiction.

(b2) Supposons que $a(f_1) < a(f_2)$.

Puisque $\mathcal{F}$ est différente d'une facette triviale, il existe un ensemble d'arêtes $F \subset E$ qui ne contient pas f_1 tel que $x^F \in \mathcal{F}$. Puisque $v_0 \in S$, il en résulte que $f_2 \in F$. L'ensemble d'arêtes $F' = (F \setminus \{f_2\}) \cup \{f_1\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G tel que $a^T x^{F'} < \alpha$, une contradiction. $\square$

Théorème 4.8 Soient $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ un graphe et $\overline{S} \subseteq \overline{V}$ un ensemble de terminaux de $\overline{G}$. Supposons que $\overline{E} = E^* \cup \{f_1, f_2\}$, où $f_1 = (v_0, v_1)$, $f_2 = (v_0, v_2)$ et $\delta(v_0) = \{f_1, f_2\}$ (voir figure 4.8).

Soit

$$a^T x = \sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f_1)x(f_1) + a(f_2)x(f_2) \geq \alpha, \quad (4.19)$$

une contrainte qui définit une facette de $1SECSP(\overline{G}, \overline{S})$. Soit $G = (V, E)$ le graphe tel que $V = \overline{V} \setminus \{v_0\}$ et $E = E^* \cup \{f = (v_1, v_2)\}$. Soit $S = \overline{S} \setminus \{v_0\}$.

(a) Si $S = \overline{S}$, alors la contrainte

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f) \geq \alpha, \quad (4.20)$$

définit une facette de $1SECSP(G, S)$, où $a(f) = \max\{a(f_1), a(f_2)\}$.

(b) Supposons que $S \neq \overline{S}$.

(b1) Si $v_1, v_2 \in \overline{S}$, alors la contrainte

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + \delta x(f) \geq \alpha - \delta, \quad (4.21)$$

définit une facette de $1SECSP(G, S)$, où $\delta = a(f_1)$.

(b2) Si $v_1 \in \overline{S}$ et $v_2 \notin \overline{S}$, alors la contrainte

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f_2)x(f) \geq \alpha - a(f_1), \quad (4.22)$$

définit une facette de $1SECSP(G, S)$.



Figure 4.8 : Contraction d'une arête

Preuve. Soit $\overline{\mathcal{F}}$ la facette de $1SECSP(\overline{G}, \overline{S})$ définie par la contrainte (4.19).

(a) D'après le lemme 4.7.(a), on a $a(f_1).a(f_2) = 0$. Sans perte de généralité, on suppose que $a(f_2) = 0$. Et par conséquent $a(f) = a(f_1)$.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que (4.20) est valide pour $1SECSP(G, S)$. Soit $F \subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe Steiner connexe de G . Soit $\overline{F} = (F \setminus \{f\}) \cup \{f_1, f_2\}$ si $f \in F$, et $\overline{F} = F \cup \{f_2\}$ sinon. Comme $v_0 \notin S$, $\overline{F}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de $\overline{G}$. D'où

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^F(e) + a(f)x^F(f) = \sum_{e \in E^*} a(e)x^{\overline{F}}(e) + a(f_1)x^{\overline{F}}(f_1) + a(f_2)x^{\overline{F}}(f_2) \geq \alpha,$$

et par conséquent, la contrainte (4.20) est valide pour $1SECSP(G, S)$.

Soit

$$\mathcal{F} = \{x \in 1SECSP(G, S) \mid \sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f) = \alpha\}.$$

Notons que $\mathcal{F}$ est une face propre de $1\text{SECSP}(G, S)$. Supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$. Alors il existe une facette $\mathcal{F}_1$ de $1\text{SECSP}(G, S)$ telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$. Supposons que $\mathcal{F}_1$ soit définie par une contrainte

$$\sum_{e \in E^*} a'(e)x(e) + a'(f)x(f) \geq \alpha'.$$

Puisque $S = \overline{S}$, d'après le théorème 4.6.(a), la contrainte

$$\sum_{e \in E^*} a'(e)x(e) + a'(f)x(f_1) \geq \alpha'$$

définit une facette $\overline{\mathcal{F}}_1$ de $1\text{SECSP}(\overline{G}, \overline{S})$.

Nous allons montrer que $\overline{\mathcal{F}} \subset \overline{\mathcal{F}}_1$.

Soit $\tilde{F}$ un sous-ensemble d'arêtes de $\overline{E}$ tel que $x^{\tilde{F}} \in \overline{\mathcal{F}}$. Donc

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^{\tilde{F}}(e) + a(f_1)x^{\tilde{F}}(f_1) = \alpha.$$

Soit $F^* = (\tilde{F} \setminus \{f_1, f_2\}) \cup \{f\}$ si $f_1 \in \tilde{F}$ et $F^* = \tilde{F} \setminus \{f_2\}$ sinon. L'ensemble F^* induit un sous-graphe Steiner connexe de G tel que $x^{F^*} \in \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$. Donc

$$\sum_{e \in E^*} a'(e)x^{F^*}(e) + a'(f)x^{F^*}(f_1) = \alpha'.$$

Et par conséquent, on obtient

$$\sum_{e \in E^*} a'(e)x^{\tilde{F}}(e) + a'(f)x^{\tilde{F}}(f_1) = \alpha'.$$

D'où, $x^{\tilde{F}} \in \overline{\mathcal{F}}_1$. Ainsi, on a montré que $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}_1$.

Puisque $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1$, il existe un sous-ensemble $T \subseteq E$ tel que $x^T \in \mathcal{F}_1$ et $x^T \notin \mathcal{F}$, i.e

$$\sum_{e \in E^*} a'(e)x^T(e) + a'(f)x^T(f) = \alpha' \text{ et } \sum_{e \in E^*} a(e)x^T(e) + a(f_1)x^T(f) > \alpha.$$

Soit $\overline{T} = (T \setminus \{f\}) \cup \{f_1, f_2\}$ si $f \in T$ et $\overline{T} = T \cup \{f_2\}$ sinon. Il est clair que $\overline{T}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de $\overline{G}$ et que $x^{\overline{T}} \in \overline{\mathcal{F}}_1$ et $x^{\overline{T}} \notin \overline{\mathcal{F}}$. D'où $\overline{\mathcal{F}} \subset \overline{\mathcal{F}}_1$. Mais ceci contredit le fait que $\overline{\mathcal{F}}$ est une facette de $1\text{SECSP}(\overline{G}, \overline{S})$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$.

(b) Supposons que $v_0 \in \overline{S}$.

(b1) Supposons que $v_1, v_2 \in \overline{S}$. D'après le lemme 4.7.(b1), on a $a(f_1) = a(f_2) = a(f)$. Considérons un sous-ensemble d'arêtes F de E induisant un sous-graphe Steiner connexe de G . Soit $F' = (F \setminus \{f\}) \cup \{f_1, f_2\}$ si $f \in F$, et $F' = F \cup \{f_2\}$ sinon. L'ensemble F' induit un sous-graphe Steiner connexe de $\overline{G}$. D'où

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^{F'}(e) + a(f_1)x^{F'}(f_1) + a(f_2)x^{F'}(f_2) \geq \alpha.$$

Comme $f_2 \in F'$ et $x^{F'}(f_1) = x^F(f)$, on obtient

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x^F(e) + a(f)x^F(f) \geq \alpha - a(f).$$

Ce qui implique que la contrainte (4.21) est valide pour $1\text{SECSP}(G, S)$.

Soit $\mathcal{F}^*$ la face de $1\text{SECSP}(G, S)$ définie par (4.21). Supposons que $\mathcal{F}^*$ ne soit pas une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$. Alors il existe une facette $\mathcal{F}_1^*$ de $1\text{SECSP}(G, S)$ telle que $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}_1^*$. Supposons que $\mathcal{F}_1^*$ soit définie par la contrainte $\sum_{e \in E^*} a'(e)x(e) + a'(f)x(f) \geq \alpha'$. D'après le théorème 4.6.(b1), la contrainte

$$\sum_{e \in E^*} a'(e)x(e) + a'(f)x(f_1) + a'(f)x(f_2) \geq \alpha' + a'(f)$$

définit une facette $\tilde{\mathcal{F}}$ de $1\text{SECSP}(\overline{G}, \overline{S})$. Nous allons montrer que $\overline{\mathcal{F}} \subset \tilde{\mathcal{F}}$.

Soit $\overline{T}$ un sous-ensemble d'arêtes de $\overline{E}$ tel que $x^{\overline{T}} \in \overline{\mathcal{F}}$. Soit $T = (\overline{T} \setminus \{f_1, f_2\}) \cup \{f\}$ si $f_1, f_2 \in \overline{T}$ et $T = \overline{T} \setminus \{f_1, f_2\}$ sinon. Donc $x^T(f) = x^{\overline{T}}(f_1) + x^{\overline{T}}(f_2) - 1$. L'ensemble T induit un sous-graphe Steiner connexe de G tel que $x^T \in \mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}_1^*$. Donc

$$\sum_{e \in E^*} a'(e)x^T(e) + a'(f)x^T(f) = \alpha'.$$

Puisque $x^T(f) = x^{\overline{T}}(f_1) + x^{\overline{T}}(f_2) - 1$, on obtient

$$\sum_{e \in E^*} a'(e)x^{\overline{T}}(e) + a'(f)x^{\overline{T}}(f_1) + a'(f)x^{\overline{T}}(f_2) = \alpha' + a'(f).$$

D'où, $x^{\overline{T}} \in \tilde{\mathcal{F}}$. Ainsi, on a montré que $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \tilde{\mathcal{F}}$.

Puisque $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}_1^*$, il existe un sous-ensemble $F_1 \subseteq E$ tel que $x^{F_1} \in \mathcal{F}_1^*$ et $x^{F_1} \notin \mathcal{F}^*$, i.e

$$\sum_{e \in E^*} a'(e)x^{F_1}(e) + a'(f)x^{F_1}(f) = \alpha' \text{ et } \sum_{e \in E^*} a(e)x^{F_1}(e) + a(f_1)x^{F_1}(f) > \alpha - a(f).$$

Soit $\overline{F}_1 = (F_1 \setminus \{f\}) \cup \{f_1, f_2\}$ si $f \in F_1$ et $\overline{F}_1 = F_1 \cup \{f_2\}$ sinon. Il est clair que $G(\overline{F}_1)$ est un sous-graphe Steiner connexe de $\overline{G}$. De plus, $x^{\overline{F}_1} \in \tilde{\mathcal{F}}$ et $x^{\overline{F}_1} \notin \overline{\mathcal{F}}$. D'où $\overline{\mathcal{F}} \subset \tilde{\mathcal{F}}$. Mais ceci contredit le fait que $\mathcal{F}$ est une facette de $1\text{SECSP}(\overline{G}, \overline{S})$. Par conséquent, $\mathcal{F}^*$ est une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$.

La preuve de (b2) est similaire à celle de (b1). $\square$

4.3.3 Explosion d'un sommet

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $S \subset V$ un ensemble de terminaux de G . Soit $W \subset V$ un sous-ensemble de sommets tel que $W = W_1 \cup W_2$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, $W_i \cap S \neq \emptyset$ et $G[W_i]$ soit 2-arête connexe, pour $i = 1, 2$. Supposons que $[W_1, W_2] = \{g\}$.

Soit $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ le graphe obtenu à partir de G en contractant W . Notons par w_0 le sommet résultant de cette contraction. Soit $\overline{S} = (S \setminus W) \cup \{w_0\}$ (voir figure 4.9).

Le théorème suivant montre que toute facette de $1\text{SECSP}(\overline{G}, \overline{S})$ donne lieu à une facette

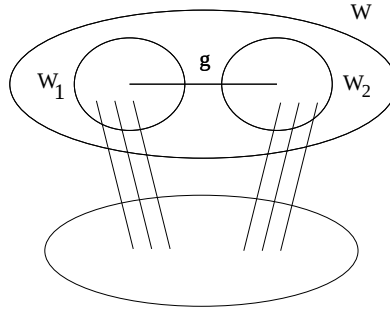


Figure 4.9 : Explosion d'un sommet

de $1\text{SECSP}(G, S)$.

Théorème 4.9 *Soit*

$$\sum_{e \in \overline{E}} \overline{a}(e)x(e) \geq \overline{\alpha} \quad (4.23)$$

une contrainte qui définit une facette $\overline{\mathcal{F}}$ de $1\text{SECSP}(\overline{G}, \overline{S})$. Soit $a^T x \geq \alpha$ telle que

$$a(e) = \begin{cases} \overline{a}(e) & \text{si } e \in \overline{E}, \\ 0 & \text{si } e \in E(W) \setminus \{g\}, \\ \alpha - \overline{\alpha} & \text{si } e = g, \end{cases}$$

où

$$\alpha = \min\left\{\sum_{e \in \overline{E}} a(e)x^T(e) \mid T \subseteq E \setminus \{g\} \text{ induit un sous-graphe Steiner connexe de } G - g \text{ par rapport à } S\right\}.$$

Alors $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$.

Preuve. Nous montrons d'abord que $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $1\text{SECSP}(G, S)$.

Soit $F \subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe Steiner connexe de G .

Si $g \notin F$, alors F induit aussi un sous-graphe Steiner connexe de $G - g$. Donc

$$\sum_{e \in \overline{E}} a(e)x^F(e) + (\alpha - \overline{\alpha})x^F(g) + \sum_{e \in E(W) \setminus \{g\}} a(e)x^F(e) = \sum_{e \in \overline{E}} a(e)x^F(e) \geq \alpha.$$

Si $g \in F$, alors $F \setminus E(W)$ induit un sous-graphe Steiner connexe dans $\overline{G}$. D'où

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \overline{E}} a(e)x^F(e) + (\alpha - \overline{\alpha})x^F(g) &= \sum_{e \in \overline{E}} \overline{a}(e)x^F(e) + (\alpha - \overline{\alpha})x^F(g) \\ &\geq \overline{\alpha} + (\alpha - \overline{\alpha}) = \alpha. \end{aligned}$$

Donc $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $1\text{SECSP}(G, S)$.

Notons par $\mathcal{F}$ la face de $1\text{SECSP}(G, S)$ définie par $a^T x \geq \alpha$.

Supposons qu'il existe une contrainte $b^T x \geq \beta$ qui définit une facette $\mathcal{F}'$ de $1\text{SECSP}(G, S)$ telle que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Puisque le polytope $1\text{SECSP}(G, S)$ est de pleine dimension, pour montrer que $\mathcal{F}$ définit une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$ il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$.

Nous allons montrer que $b(e) = 0$, pour tout $e \in E(W) \setminus \{g\}$.

Soit $\overline{F} \subseteq \overline{E}$ un ensemble d'arêtes qui induit un sous-graphe Steiner connexe de $\overline{G}$ tel que $x^{\overline{F}} \in \overline{\mathcal{F}}$. Soit $F_1 = \overline{F} \cup E(W)$. Il est clair que $G(F_1)$ est Steiner connexe. De plus, $x^{F_1} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. Soit e une arête quelconque de $E(W) \setminus \{g\}$. Considérons l'ensemble d'arêtes $F' = F_1 \setminus \{e\}$. Puisque les sous-graphes $G[W_1]$ et $G[W_2]$ sont 2-arête connexes, il en résulte que $G(F')$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G . De plus, $x^{F'} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$. D'où, $b(e) = 0$.

Soit

$$\overline{\mathcal{F}}' = \{x \in 1\text{SECSP}(\overline{G}, \overline{S}) \mid \sum_{e \in \overline{E}} b(e)x(e) = \beta - b(g)\}.$$

On a $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}'$. En effet, soit $\overline{T} \subseteq \overline{E}$ tel que $x^{\overline{T}} \in \overline{\mathcal{F}}$. Soit $T = \overline{T} \cup E(W)$. Alors $x^T \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$, i.e

$$\sum_{e \in \overline{E}} b(e)x^T(e) + b(g) = \beta.$$

Par conséquent

$$\sum_{e \in \overline{E}} b(e)x^T(e) = \beta - b(g).$$

D'où, $x^{\overline{T}} \in \overline{\mathcal{F}}'$. Donc, on a $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}'$. Ce qui implique que $\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}'$ (car $\overline{\mathcal{F}}$ est une facette). Puisque le polytope $1\text{SECSP}(\overline{G}, \overline{S})$ est de pleine dimension, il existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ tel que $b(e) = \rho \overline{a}(e) = \rho a(e)$, $\forall e \in \overline{E}$, et $\beta - b(g) = \rho \overline{\alpha}$. Nous allons montrer que la facette $\mathcal{F}'$ est différente de la facette définie par $x(g) \leq 1$. En effet, supposons le contraire. Dans ce cas, comme $\rho > 0$ et $b(e) = 0$ pour tout $e \in \overline{E}$, il en résulte que $\overline{a}(e) = 0$ pour tout $e \in \overline{E}$, contredisant le fait que $\overline{\mathcal{F}}$ définit une facette de $1\text{SECSP}(\overline{G}, \overline{S})$. Il existe donc un ensemble d'arêtes $T \subseteq E \setminus \{g\}$ tel que $x^T \in \mathcal{F}'$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \min\left\{\sum_{e \in \overline{E}} b(e)x(e) + b(g)x(g) \mid x \in 1\text{SECSP}(G, S)\right\} = \\ \min\left\{\sum_{e \in \overline{E}} b(e)x(e) \mid x \in 1\text{SECSP}(G - g, S)\right\} = \beta. \end{aligned}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\left\{\sum_{e \in \overline{E}} \overline{a}(e)x(e) + \sum_{e \in E(W) \setminus \{g\}} b(e)x(e) \mid x \in 1\text{SECSP}(G - g, S)\right\} \\ &= \frac{1}{\rho} \min\left\{\sum_{e \in \overline{E}} b(e)x(e) \mid x \in 1\text{SECSP}(G - g, S)\right\} \\ &= \frac{\beta}{\rho} \end{aligned}$$

On en déduit que $b(g) = \beta - \rho \overline{\alpha} = \rho \alpha - \rho \overline{\alpha} = \rho(\alpha - \overline{\alpha})$. D'où, $b = \rho a$. Ce qui termine la preuve de notre théorème. $\square$

4.4 Le polytope $1SECSP(G, S)$ dans certaines classes de graphes

Dans cette section, nous allons étudier le polytope $1SECSP(G, S)$ dans deux classes particulières de graphes. D'abord, nous considérons les graphes série-parallèles avec une certaine disposition des sommets terminaux. Ensuite, nous discutons du cas où G est un graphe de type Ψ . Nous donnons dans les deux cas une caractérisation complète de $1SECSP(G, S)$.

4.4.1 Les graphes série-parallèles

Dans [29], Duffin a montré qu'un graphe série-parallèle, peut être obtenu à partir d'un graphe constitué de deux sommets liés par une arête, en appliquant d'une manière récursive les deux opérations suivantes:

O1: dupliquer une arête,

O2: subdiviser une arête (*i.e.* remplacer une arête (u, v) par deux arêtes (u, w) et (w, v) , où w est un nouveau sommet).

Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. On dit que S vérifie la propriété P (par rapport à G), si le graphe G peut être construit au moyen des opérations *O1* et *O2* de telle manière que si un sommet terminal est ajouté par l'opération *O2* entre deux sommets v_1 et v_2 , alors au moins un de ces deux sommets est un terminal.

Le lemme suivant sera utile par la suite.

Lemme 4.10 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et S un ensemble de sommets terminaux de V . Soient g et f deux arêtes parallèles de E . Supposons que la contrainte $\sum_{e \in E} x(e) \geq \alpha$ définisse une facette de $1SECSP(G, S)$. Alors la contrainte*

$$\sum_{e \in E \setminus \{g\}} x(e) \geq \alpha \text{ (resp. } \sum_{e \in E \setminus \{f\}} x(e) \geq \alpha)$$

définit une facette de $1SECSP(G - g, S)$ (resp. $1SECSP(G - f, S)$).

Preuve. Similaire à celle donnée pour le théorème 4.8. $\square$

Théorème 4.11 *Si $G = (V, E)$ est un graphe série-parallèle et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux vérifiant la propriété P , alors le polytope $1\text{SECSP}(G, S)$ est caractérisé par les contraintes triviales et les contraintes de partitions Steiner.*

Preuve. La démonstration est par récurrence sur $|E|$. Le théorème est vrai pour tout graphe série-parallèle ayant au plus 4 sommets et dont l'ensemble des sommets terminaux vérifie la propriété P , *i.e.* un graphe outerplanaire de 4 sommets avec au moins un sommet terminal. Supposons que le théorème reste vrai pour tout graphe ayant au plus m arêtes et supposons que G contient exactement $m + 1$ arêtes.

Nous considérons d'abord le cas où la dernière opération dans la construction de G est l'ajout d'un sommet v_0 . On note $\delta(v_0) = \{f_1, f_2\}$ où $f_1 = (v_0, v_1)$ et $f_2 = (v_0, v_2)$. Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte définissant une facette $\mathcal{F}$ de $1\text{SECSP}(G, S)$. Supposons que $a^T x \geq \alpha$ soit différente d'une contrainte triviale et d'une contrainte de coupe Steiner. Nous allons montrer que $a^T x \geq \alpha$ est précisément une contrainte de partition Steiner. Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant v_0 et en remplaçant les deux arêtes f_1 et f_2 par une arête f entre v_1 et v_2 . Soit $S' = S \setminus \{v_0\}$. On considère trois cas :

Cas 1. $v_0 \notin S$.

D'après le théorème 4.8.(a), l'inégalité

$$\sum_{e \in E' \setminus \{f\}} a(e)x(e) + a(f)x(f) \geq \alpha, \quad (4.24)$$

définit une facette $\mathcal{F}'$ de $1\text{SECSP}(G', S')$, où $a(f) = \max\{a(f_1), a(f_2)\}$. Et par le lemme 4.7.(a), on a $a(f_1).a(f_2) = 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a(f_2) = 0$ et donc $a(f) = a(f_1)$. Comme $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale et d'une contrainte de coupe Steiner, alors (4.24) l'est aussi. Puisque $|E'| < |E|$, d'après l'hypothèse de récurrence il s'en suit que (4.24) est définie par une contrainte de partition Steiner. Donc, il existe une partition Steiner $\{V'_1, \dots, V'_p\}$ de V' et un nombre positif β tels que

$$\begin{cases} a(e) = \beta & \forall e \in \delta(V'_1, \dots, V'_p), \\ a(e) = 0 & \text{si } e \notin \delta(V'_1, \dots, V'_p), \\ \alpha = \beta(p-1). \end{cases}$$

Sans perte de généralité, supposons que $v_2 \in V'_1$. Soit $\{V_1, \dots, V_p\}$ la partition Steiner de V donnée par

$$\begin{aligned} V_1 &= V'_1 \cup \{v_0\}, \\ V_i &= V'_i, \quad i = 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathcal{F}$. On a

$$\sum_{e \in E' \setminus \{f_1, f_2\}} a(e)x(e) + a(f_1)x(f_1) + a(f_2)x(f_2) = \alpha.$$

D'où

$$\beta \sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_p)} x(e) = \beta(p-1).$$

Et donc

$$\sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_p)} x(e) = p-1.$$

Par conséquent, $\mathcal{F} \subseteq \{x \in 1\text{SECSP}(G, S) \mid \sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_p)} x(e) = p-1\}$.

D'après le lemme 4.1, le polytope $1\text{SECSP}(G, S)$ est de pleine dimension, ce qui implique que $a^T x \geq \alpha$ correspond à la contrainte de partition Steiner

$$\sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_p)} x(e) \geq p-1.$$

Cas 2. $v_0, v_1, v_2 \in S$.

D'après le lemme 4.7.(b1), on a $a(f_1) = a(f_2) = \delta$. Aussi, par le théorème 4.8.(b1), l'inégalité

$$\sum_{e \in E' \setminus \{f\}} a(e)x(e) + \delta x(f) \geq \alpha - \delta \tag{4.25}$$

définit une facette $\mathcal{F}^*$ de $1\text{SECSP}(G', S')$.

Comme $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale et d'une contrainte de coupe

Steiner, alors (4.25) l'est aussi. Puisque $|E'| < |E|$, par l'hypothèse de récurrence, il s'en suit que (4.25) est une contrainte de partition Steiner. D'où, il existe une partition Steiner $\{V'_1, \dots, V'_p\}$ de V' et un nombre positif β tels que

$$\begin{cases} a(e) = \beta & \forall e \in \delta(V'_1, \dots, V'_p), \\ a(e) = 0 & \text{si } e \notin \delta(V'_1, \dots, V'_p), \\ \alpha - \delta = \beta(p-1). \end{cases}$$

Supposons que $\delta > 0$ (le cas où $\delta = 0$ est similaire). Il s'en suit que $f \in \delta(V'_1, \dots, V'_p)$. Soit $\{V_1, \dots, V_{p+1}\}$ la partition Steiner de V telle que

$$\begin{aligned} V_i &= V'_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ V_{p+1} &= \{v_0\}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathcal{F}$. On a

$$\sum_{e \in E \setminus \{f_1, f_2\}} a(e)x(e) + a(f_1)x(f_1) + a(f_2)x(f_2) = \alpha.$$

D'où

$$\beta \sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p+1})} x(e) = \beta + \beta(p-1).$$

Et donc

$$\sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p+1})} x(e) = p.$$

Par conséquent, $\mathcal{F} \subseteq \{x \in 1\text{SECSP}(G, S) \mid \sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p+1})} x(e) = p\}$.

D'une manière analogue à celle du cas précédent, on déduit que $a^T x \geq \alpha$ n'est rien d'autre que la contrainte $\sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p+1})} x(e) \geq p$.

Cas 3. $v_0, v_1 \in S, v_2 \notin S$ (le cas $v_0, v_2 \in S, v_1 \notin S$ est similaire).

Par le lemme 4.7.(b2), on a $a(f_1) \geq a(f_2)$. Et d'après le théorème 4.8.(b2), l'inégalité

$$\sum_{e \in E'} a(e)x(e) + a(f_2)x(f_2) \geq \alpha - a(f_1)$$

définit une facette $\mathcal{F}'$ de $1\text{SECSP}(G', S')$.

Comme précédemment, d'après l'hypothèse de récurrence, la facette $\mathcal{F}^*$ est définie par

une contrainte de partition Steiner. D'où, il existe une partition Steiner $\{V'_1, \dots, V'_p\}$ de V' et un nombre positif β tels que

$$\begin{cases} a(e) = \beta & \forall e \in \delta(V'_1, \dots, V'_p), \\ a(e) = 0 & \text{si } e \notin \delta(V'_1, \dots, V'_p), \\ \alpha - a(f_1) = \beta(p-1). \end{cases}$$

On distingue deux cas:

Cas 3.1. $v_1 \in V'_i$ et $v_2 \in V'_j$ ($i \neq j$).

Ceci implique que $a(f_2) > 0$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $v_1 \in V'_1$ et $v_2 \in V'_2$. Soit $\{V_1, \dots, V_{p+1}\}$ la partition Steiner de V telle que

$$\begin{aligned} V_i &= V'_i, \quad i = 1, \dots, p, \\ V_{p+1} &= \{v_0\}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathcal{F}$. On a

$$\sum_{e \in E' \setminus \{f\}} a(e)x(e) + a(f_1)x(f_1) + a(f_2)x(f_2) = \alpha.$$

D'où

$$\beta \sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p+1})} x(e) = \beta + \beta(p-1).$$

Et donc

$$\sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p+1})} x(e) = p.$$

Par conséquent, $\mathcal{F} \subseteq \{x \in 1\text{SECSP}(G, S) \mid \sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p+1})} x(e) = p\}$ et donc $a^T x \geq \alpha$ correspond à la contrainte $\sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p+1})} x(e) \geq p$.

Cas 3.2 $v_1, v_2 \in V'_1$.

Puisque $f \notin \delta(V'_1, \dots, V'_p)$, on a $a(f_2) = 0$. Nous allons montrer qu'il existe une partition $\{W_1, W_2\}$ de V'_1 telle que $[W_1, W_2] = \{f\}$. En effet, supposons le contraire, et soit C une chaîne de $G(V'_1)$ entre v_1 et v_2 qui ne contient pas f .

Puisque $\mathcal{F}$ est une facette non triviale, il existe un ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que

$x^F \in \mathcal{F}$ et $f_1 \in F$. Soit $F' = (F \setminus \{f_1\}) \cup (C \cup \{f_2\})$. Comme F' induit un sous-graphe Steiner connexe de G , il en résulte que $a(f_1) = 0$, une contradiction.

Donc il existe une partition $\{W_1, W_2\}$ de V'_1 telle que $[W_1, W_2] = \{f\}$. Sans perte de généralité, on suppose que $v_1 \in W_1$ et $v_2 \in W_2$. Soit $\{V_1, \dots, V_{p+1}\}$ la partition Steiner de V donnée par

$$\begin{aligned} V_1 &= W_1, \\ V_2 &= W_2 \cup \{v_0\}, \\ V_{i+1} &= V'_i, \quad i = 2, \dots, p. \end{aligned}$$

D'une manière similaire aux cas précédents, on obtient que $\mathcal{F} = \{x \in 1\text{SECSP}(G, S) \mid \sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p+1})} x(e) = p\}$.

Supposons maintenant que la dernière opération dans la construction de G consiste à ajouter une arête parallèle g entre deux sommets de V . Soit $\sum_{e \in E} x(e) \geq \alpha$ une contrainte différente d'une contrainte triviale et d'une contrainte de coupe Steiner et qui définit une facette de $1\text{SECSP}(G, S)$. D'après le lemme 4.10, la contrainte $\sum_{e \in E \setminus \{g\}} x(e) \geq \alpha$ définit une facette de $1\text{SECSP}(G - g, S)$. Cette facette, d'après l'hypothèse de récurrence, est une facette de partition Steiner. En utilisant la même démarche que dans les cas précédents, nous pouvons montrer que $\sum_{e \in E} x(e) \geq \alpha$ est une contrainte de partition Steiner. Ce qui termine la preuve de notre théorème. $\square$

4.4.2 Le polytope $1\text{SECSP}(G, S)$ dans la classe Ψ

Considérons la classe des graphes Ψ introduite dans la section 4.2 et définie par les graphes $G_m = (V_m, E_m)$ tels que

$$\begin{aligned} V_m &= \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m\}, \\ E_m &= \{(u_i, v_{i-1}), (u_i, v_i), (v_{i-1}, v_i); i = 1, \dots, m \pmod{m}\}, \end{aligned}$$

où $m \geq 3$ est un entier impair. Soit $S_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ l'ensemble des terminaux de V_m . On note $e_i^1 = (u_i, v_i)$, $e_i^2 = (u_i, v_{i-1})$ et $e_i^3 = (v_{i-1}, v_i)$, pour $i = 1, \dots, m \pmod{m}$.

Dans [17], Chopra et Rao ont montré que pour un graphe G_m de Ψ , la contrainte

$$x(E_m) \geq 2(m-1) \quad (4.26)$$

définit une facette de $1\text{SECSP}(G_m, S_m)$. Le théorème suivant donne une description complète de $1\text{SECSP}(G, S)$ dans la classe Ψ .

Théorème 4.12 *Si $G_m = (V_m, E_m)$ est un graphe de type Ψ et $S_m = \{u_1, \dots, u_m\}$ l'ensemble des terminaux de V_m , alors $1\text{SECSP}(G_m, S_m)$ est caractérisé par les contraintes triviales, de partitions Steiner et l'inégalité (4.26).*

Preuve. Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte valide qui définit une facette $\mathcal{F}$ de $1\text{SECSP}(G_m, S_m)$ différente d'une facette définie par une contrainte triviale ou par une contrainte de coupe Steiner. D'après le lemme 1.5, $a(e) \geq 0, \forall e \in E_m$. Dans ce qui suit, nous allons montrer que $a^T x \geq \alpha$ est une contrainte de trou impair ou une contrainte de partition Steiner.

Affirmation 1. $a(e_i^3) = \max\{a(e_i^1), a(e_i^2)\}$, pour $i = 1, \dots, m$.

Preuve. Sans perte de généralité, on suppose que $a(e_i^1) \geq a(e_i^2)$.

Puisque $\delta(u_i)$ est une coupe Steiner et $\mathcal{F}$ est une facette différente d'une facette définie par une contrainte de coupe Steiner, il existe un ensemble d'arêtes $F \subseteq E_m$ contenant $\{e_i^1, e_i^2\}$ tel que $x^F \in \mathcal{F}$. Si $e_i^3 \in F$, alors les ensembles $F \setminus \{e_i^1\}$, $F \setminus \{e_i^2\}$ et $F \setminus \{e_i^3\}$ induisent des sous-graphes Steiner connexes de G_m . D'où, $a(e_i^1) = a(e_i^2) = a(e_i^3) = 0$. Supposons maintenant que $e_i^3 \notin F$. Comme $(F \setminus \{e_i^1\}) \cup \{e_i^3\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G_m , il s'en suit que

$$a(e_i^3) \geq a(e_i^1) \geq a(e_i^2). \quad (4.27)$$

Puisque $\mathcal{F}$ est une facette différente d'une facette définie par une contrainte triviale, il existe un ensemble d'arêtes $F' \subseteq E_m$ contenant e_i^3 tel que $x^{F'} \in \mathcal{F}$.

Si $e_i^1, e_i^2 \in F'$, alors en considérant F' à la place de F , on obtient $a(e_i^1) = a(e_i^2) = a(e_i^3) = 0$. Si $e_i^1 \in F'$ et $e_i^2 \notin F'$, alors l'ensemble d'arêtes $F'' = (F' \setminus \{e_i^3\}) \cup \{e_i^2\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G_m . D'où, $a(e_i^2) \geq a(e_i^3)$, et donc d'après (4.27), on a $a(e_i^1) = a(e_i^2) = a(e_i^3)$.

Si $e_i^2 \in F'$ et $e_i^1 \notin F'$, alors l'ensemble d'arêtes $F''' = (F' \setminus \{e_i^3\}) \cup \{e_i^1\}$ induit un

sous-graphe Steiner connexe de G_m . D'où, $a(e_i^1) \geq a(e_i^3)$, et d'après (4.27), on a $a(e_i^3) = a(e_i^1)$.

Affirmation 2. Si $a(e) > 0$ pour tout $e \in E_m$, alors $\mathcal{F}$ est la facette définie par l'inégalité (4.26).

Preuve. Soit $F \subset E_m$ tel que $G(F)$ soit Steiner connexe et $x^F \in \mathcal{F}$. Alors F doit contenir au moins une arête de chaque triangle $B_i = (e_i^1, e_i^2, e_i^3)$, $i = 1, \dots, m$; notamment une arête parmi e_i^1 et e_i^2 . De plus, F ne peut contenir exactement une seule arête de trois triangles distincts B_j , B_l et B_t , $j, l, t \in \{1, \dots, m\}$; autrement $G(F)$ ne serait pas Steiner connexe. Aussi, il doit exister au moins un triangle B_i tel que $|B_i \cap F| = 1$. Sinon, F contiendrait un cycle et l'ensemble d'arêtes $F \setminus \{e\}$, où e est une arête quelconque de ce cycle, induirait un sous-graphe Steiner connexe de G_m , ce qui impliquerait que $a(e) = 0$, une contradiction. Maintenant, supposons qu'il existe un seul triangle B_{i_0} , $i_0 \in \{1, \dots, m\}$, tel que $|B_{i_0} \cap F| = 1$. Donc $|\{e_{i_0}^1, e_{i_0}^2\} \cap F| = 1$. On considère le cas où $B_{i_0} \cap F = \{e_{i_0}^1\}$ (le cas où $B_{i_0} \cap F = \{e_{i_0}^2\}$ peut être traité de la même manière). Notons que dans ce cas $|\{e_{i_0-1}^1, e_{i_0-1}^3\} \cap F| \leq 1$. Sinon, l'ensemble $(F \setminus \{e_{i_0-1}^1, e_{i_0-1}^3\}) \cup \{e_{i_0-1}^2\}$ induirait un sous-graphe Steiner connexe, ce qui impliquerait que $a(e_{i_0-1}^1) + a(e_{i_0-1}^3) \leq a(e_{i_0-1}^2)$, une contradiction avec l'affirmation 1. Soit $F' = F \setminus \{f\}$, où $f = e_{i_0-1}^3$ si $e_{i_0-1}^3 \in F$ et $f = e_{i_0-1}^1$ sinon. Il est clair que F' induit un sous-graphe Steiner connexe. Ceci implique que $a(f) = 0$, une contradiction. Comme F ne peut contenir un triangle B_i (sinon le graphe $G(F \setminus \{e_i^3\})$ serait aussi Steiner connexe, ce qui impliquerait que $a(e_i^3) = 0$, une contradiction), l'ensemble F contient deux arêtes de $(m-2)$ triangles parmi les triangles B_i et exactement une seule arête des deux autres triangles. D'où, $|F| = 2(m-1)$. Et par conséquent, $\mathcal{F} \subseteq \{x \in 1\text{SECSP}(G_m, S_m) \mid x(E_m) = 2(m-1)\}$. Ce qui implique que $\mathcal{F}$ est la facette définie par (4.26).

Soient $G(W_1), \dots, G(W_p)$ les composantes connexes de $G_m \setminus \{e \in E_m \mid a(e) > 0\}$. Alors pour toute arête $e \in \delta(W_i)$, $i = 1, \dots, p$, on a $a(e) > 0$. Si $W_i \cap S_m \neq \emptyset$, pour $i = 1, \dots, p$, alors $\{W_1, \dots, W_p\}$ est une partition Steiner de V_m et $\mathcal{F} = \{x \in 1\text{SECSP}(G_m, S_m) \mid x(\delta(W_1, \dots, W_p)) = p-1\}$. En effet, soit $F \subseteq E_m$ un ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe Steiner connexe de G_m tel que $x^F \in \mathcal{F}$. Nous allons montrer que $|F \cap \delta(W_1, \dots, W_p)| = p-1$. Supposons que ceci ne soit pas

vrai. Soit $F' = F \cup \{e \in E_m \mid a(e) = 0\}$. Il est clair que $x^{F'} \in \mathcal{F}$. Soit G'_m le graphe obtenu à partir de G_m en contractant les ensembles W_i , $i = 1, \dots, p$. Puisque $|F' \cap \delta(W_1, \dots, W_p)| = |F \cap \delta(W_1, \dots, W_p)| > p - 1$, il s'en suit que la restriction de F' dans G'_m contient un cycle C . Soit $F'' = F' \setminus \{e\}$ où e est une arête quelconque de C . L'ensemble F'' induit un sous-graphe Steiner connexe de G_m . Comme $a(e) > 0$, il en résulte que $a^T x^{F''} < \alpha$, une contradiction.

Maintenant, supposons qu'il existe un entier q ($1 \leq q < p$) tel que $W_i \cap S_m \neq \emptyset$, pour $i = 1, \dots, q$ et $W_i \cap S_m = \emptyset$, pour $i = q + 1, \dots, p$. Si $p - q = m$, alors les ensembles W_i , $i = q + 1, \dots, p$, correspondent aux sommets v_i , $i = 1, \dots, m$. Puisque $a(e) > 0$ pour toute arête $e \in \delta(W_i)$, $i = 1, \dots, p$, et $E_m = \bigcup_{\{i=1, \dots, m\}} \delta(v_i)$, il s'en suit que $a(e) > 0$ pour toute arête $e \in E_m$. Et donc par l'affirmation 2, $a^T x \geq \alpha$ est une contrainte de trou impair.

Maintenant, on suppose que $0 < p - q < m$.

Affirmation 3. Les sous-graphes $G(W_i)$, $i = 1, \dots, q$, sont Steiner 2-arête connexes.

Preuve. Supposons qu'il existe une partition $\{W_i^1, W_i^2\}$ de W_i , pour un certain $i \in \{1, \dots, q\}$, telle que $W_i^1 \cap S_m \neq \emptyset \neq W_i^2 \cap S_m$ et $[W_i^1, W_i^2] = \{g\}$. Notons que $a(g) = 0$. Puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, il existe un ensemble d'arêtes $F \subseteq E_m$ ne contenant pas g tel que $x^F \in \mathcal{F}$. Comme l'ensemble F induit un sous-graphe Steiner connexe de G_m , il doit exister une chaîne $C = (e_1, \dots, e_t)$, $t \geq 2$, de F telle que $e_1 \in \delta(W_i^1)$ et $e_t \in \delta(W_i^2)$. Remarquons que $a(e_1) > 0$ et $a(e_t) > 0$. Soit $F' = (F \setminus \{e_1\}) \cup \{e \in E_m \mid a(e) = 0\}$. L'ensemble F' induit un sous-graphe Steiner connexe de G_m et $a^T x^{F'} < \alpha$, une contradiction.

Affirmation 4. $|W_j| = 1$ pour $j = q + 1, \dots, p$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du fait que $a(e_i^3) = \max\{a(e_i^1), a(e_i^2)\}$. En effet, supposons que $|W_j| \geq 2$ pour un certain $j \in \{q + 1, \dots, p\}$. Comme $W_j \cap S_m = \emptyset$ et $G(W_j)$ est connexe, il en résulte que W_j contient $\{v_i, v_{i-1}\}$ pour un certain $i \in \{1, \dots, m\}$. Ce qui implique que $a(e_i^3) = 0$. Puisque $u_i \notin W_j$, on en déduit que $a(e_i^1) > 0$. Ceci est en contradiction avec le fait que $a(e_i^3) = \max\{a(e_i^1), a(e_i^2)\}$.

A partir de la partition $\pi = \{W_1, \dots, W_p\}$, nous allons construire une partition Steiner $\pi' = \{V_1, \dots, V_{p'}\}$, $p' \leq q$, de V_m et nous allons montrer que

$$\mathcal{F} \subseteq \{x \in 1\text{SECSP}(G_m, S_m) \mid \sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p'})} x(e) = p' - 1\}.$$

Soient W_i et W_j deux sous-ensembles de la partition π tels que $i, j \in \{q+1, \dots, p\}$ et $i < j$. D'après l'affirmation 4, on a $W_i = \{v_{i_0}\}$ et $W_j = \{v_{j_0}\}$ avec $i_0, j_0 \in \{1, \dots, m\}$. D'après la structure du graphe, on peut supposer, sans perte de généralité, que $i_0 < j_0$. On note par v_{r_i} , $r_i \in \{1, \dots, m\}$, le sommet Steiner tel que $W_i = \{v_{r_i}\}$, pour tout $i \in \{q+1, \dots, p\}$. Puisque $a(e) > 0$ pour tout $e \in \delta(v_{r_i})$, on a $a(e_{r_i}^1) > 0$, $a(e_{r_i}^3) > 0$, $a(e_{r_i+1}^2) > 0$ et $a(e_{r_i+1}^3) > 0$ (voir figure 4.10).

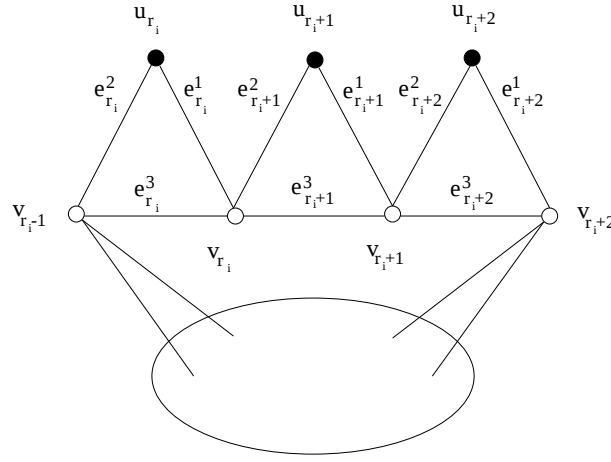


Figure 4.10 :

Afin de mettre le sommet v_{r_i} dans un ensemble de sommets intersectant S_m , nous distinguons les quatre cas suivants.

Cas 1. $a(e_{r_{i+1}}^1) = 0$.

Dans ce cas, il existe $t \in \{1, \dots, q\}$ tel que $\{u_{r_{i+1}}, v_{r_{i+1}}\} \subseteq W_t$. D'après l'affirmation 3, il s'en suit que $W_t \cap S_m = \{u_{r_{i+1}}\}$. Donc $a(e_{r_{i+2}}^2) > 0$ et par l'affirmation 1, $a(e_{r_{i+2}}^3) > 0$. Et ainsi, on a $W_t = \{u_{r_{i+1}}, v_{r_{i+1}}\}$.

Cas 2. $a(e_{r_{i+1}}^1) > 0$ et $a(e_{r_{i+2}}^2) > 0$ (et par l'affirmation 1, $a(e_{r_{i+2}}^3) > 0$).

Dans ce cas, il existe $t \in \{1, \dots, q\}$ tel que $W_t = \{u_{r_{i+1}}\}$ et $s \in \{q+1, \dots, p\}$ tel que

$$W_s = \{v_{r_i+1}\}.$$

Cas 3. $a(e_{r_i+1}^1) > 0$, $a(e_{r_i+2}^2) = 0$ et $a(e_{r_i+2}^3) > 0$ (et par l'affirmation 1, $a(e_{r_i+2}^1) > 0$). Dans ce cas, il existe $t, j \in \{1, \dots, q\}$ tels que $W_t = \{u_{r_i+1}\}$ et $W_j = \{v_{r_i+1}, u_{r_i+2}\}$. Nous allons montrer que $a(e_{r_i+1}^1) > a(e_{r_i+1}^2)$.

Puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, il existe alors un ensemble d'arêtes $F \subseteq E_m$ ne contenant pas $e_{r_i+2}^2$ tel que $x^F \in \mathcal{F}$. On peut choisir F tel que $|F \cap \{e_{r_i}^1, e_{r_i}^2\}|$ soit maximum.

Puisque $e_{r_i+2}^2 \notin F$, on a $e_{r_i+2}^1 \in F$. D'où, $e_{r_i+2}^3 \notin F$, car sinon, l'ensemble d'arêtes $F_1 = (F \setminus e_{r_i+2}^1) \cup \{e_{r_i+2}^2\}$ induirait un sous-graphe Steiner connexe de G_m tel que $a^T x^{F_1} < \alpha$, une contradiction.

Comme $e_{r_i+2}^3 \notin F$, on a $e_{r_i+1}^2 \in F$. En effet, si $e_{r_i+1}^2 \notin F$, alors $e_{r_i+1}^1, e_{r_i+1}^3 \in F$, autrement, le graphe induit par F ne serait pas Steiner connexe. Soit $F_2 = (F \setminus \{e_{r_i+1}^1, e_{r_i+1}^3\}) \cup \{e_{r_i+1}^2\}$. L'ensemble F_2 induit un sous-graphe Steiner connexe. Comme $a(e_{r_i+1}^3) + a(e_{r_i+1}^1) > a(e_{r_i+1}^2)$, on a $a^T x^{F_2} < \alpha$, une contradiction. Donc $e_{r_i+1}^2 \in F$ et par conséquent $F \cap \{e_{r_i+1}^1, e_{r_i+1}^3\} = \emptyset$, sinon, l'ensemble $F_3 = F \setminus \{e_{r_i+1}^1, e_{r_i+1}^3\}$ induirait un sous-graphe Steiner connexe de G_m tel que $a^T x^{F_3} < \alpha$, une contradiction.

Nous allons montrer que $e_{r_i}^1, e_{r_i}^2 \in F$. Si ceci n'est pas le cas, alors $e_{r_i}^3 \in F$ et $F' = (F \setminus \{e_{r_i}^3\}) \cup \{e_{r_i}^1, e_{r_i}^2\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G_m avec $a^T x^{F'} \leq a^T x^F = \alpha$. Donc $a^T x^{F'} = \alpha$. Mais ceci contredit le fait que $|F \cap \{e_{r_i}^1, e_{r_i}^2\}|$ est maximum.

Soit $F'' = (F \setminus \{e_{r_i+1}^2, e_{r_i}^1\}) \cup \{e_{r_i+1}^1, e_{r_i+2}^2\}$. L'ensemble F'' induit un sous-graphe Steiner connexe de G_m . Et donc, $a(e_{r_i+1}^1) + a(e_{r_i+2}^2) = a(e_{r_i+1}^1) \geq a(e_{r_i+1}^2) + a(e_{r_i}^1) > a(e_{r_i+1}^2)$. Ainsi, on a montré que $a(e_{r_i+1}^1) > a(e_{r_i+1}^2)$.

Par conséquent, si T est un sous-ensemble d'arêtes qui induit un sous-graphe Steiner connexe de G_m tel que $x^T \in \mathcal{F}$, alors T contient au plus une seule arête parmi l'ensemble $\{e_{r_i+1}^1, e_{r_i+1}^3\}$. En effet, si ceci n'est pas le cas, alors l'ensemble $T' = (T \setminus \{e_{r_i+1}^1\}) \cup \{e_{r_i+1}^2\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe, et comme $a(e_{r_i+1}^1) > a(e_{r_i+1}^2)$, on a $a^T x^{T'} < \alpha$, une contradiction.

Cas 4. $a(e_{r_i+1}^1) > 0$, $a(e_{r_i+2}^2) = 0$ et $a(e_{r_i+2}^3) = 0$ (et par l'affirmation 1, $a(e_{r_i+2}^1) = 0$). Dans ce cas, il existe $t, j \in \{1, \dots, q\}$ tels que $W_t = \{u_{r_i+1}\}$ et $\{v_{r_i+1}, u_{r_i+2}, v_{r_i+2}\} \subseteq W_j$.

Nous allons montrer que $a(e_{r_{i+1}}^1) \geq a(e_{r_{i+1}}^2)$.

Puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, il existe un ensemble d'arêtes $F \subseteq E_m$ ne contenant pas $e_{r_{i+1}}^1$ tel que $a^T x^F = \alpha$. On peut choisir F tel que $|F \cap \{e_{r_i}^1, e_{r_i}^2\}|$ soit maximum.

Si $e_{r_{i+1}}^3 \notin F$, alors $e_{r_i}^1, e_{r_i}^2 \in F$, sinon, $e_{r_i}^3 \in F$ et $F' = (F \setminus \{e_{r_i}^3\}) \cup \{e_{r_i}^1, e_{r_i}^2\}$ induirait un sous-graphe Steiner connexe de G_m tel que $x^{F'} \in \mathcal{F}$, une contradiction avec le fait que $|F \cap \{e_{r_i}^1, e_{r_i}^2\}|$ soit maximum. Soit $F_1 = (F \setminus \{e_{r_i}^1, e_{r_{i+1}}^2\}) \cup \{e_{r_{i+1}}^1, e_{r_{i+2}}^2\}$. Comme F_1 induit un sous-graphe Steiner connexe de G_m , on a $a(e_{r_{i+1}}^1) + a(e_{r_{i+2}}^2) = a(e_{r_{i+1}}^1) \geq a(e_{r_{i+1}}^2) + a(e_{r_i}^1) > a(e_{r_{i+1}}^2)$.

Supposons, maintenant que $e_{r_{i+1}}^3 \in F$. Alors, l'ensemble $F_2 = (F \setminus \{e_{r_{i+1}}^3\}) \cup \{e_{r_{i+1}}^1\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G_m . D'où, $a(e_{r_{i+1}}^1) \geq a(e_{r_{i+1}}^3)$. Et d'après l'affirmation 1, on a $a(e_{r_{i+1}}^1) \geq a(e_{r_{i+1}}^2)$.

Maintenant, nous donnons un algorithme permettant de construire la partition Steiner π' à partir de la partition π .

Étape 1. Poser $l \leftarrow 0$, $N \leftarrow \emptyset$ et $J \leftarrow \emptyset$

Étape 2. Tant que $N \neq \{v_{r_{q+1}}, \dots, v_{r_p}\}$ Faire

$i \leftarrow \min\{q+1, \dots, p \mid v_{r_i} \notin N\};$

$l \leftarrow l + 1;$

Si $a(e_{r_{i+1}}^1) = 0$ Alors /* Cas 1 */

$V_l \leftarrow W_t \cup \{v_{r_i}\};$

$J \leftarrow J \cup \{t\};$

$N \leftarrow N \cup \{v_{r_i}\};$

Sinon

Si $a(e_{r_{i+2}}^2) > 0$ Alors /* Cas 2 */

$V_l \leftarrow \{v_{r_i}, v_{r_{i+1}}, u_{r_{i+1}}\};$

$J \leftarrow J \cup \{t\};$

$N \leftarrow N \cup \{v_{r_i}, v_{r_{i+1}}\};$

Sinon

Si $a(e_{r_{i+2}}^3) > 0$ Alors /* Cas 3 */

$V_l \leftarrow \{v_{r_i}, u_{r_{i+1}}\};$

$$J \leftarrow J \cup \{t\};$$

$$N \leftarrow N \cup \{v_{r_i}\};$$

Sinon

Si $a(e_{r_i+1}^1) > a(e_{r_i+1}^2)$ Alors /* Cas 4 */

$$V_l \leftarrow \{v_{r_i}, u_{r_i+1}\};$$

$$J \leftarrow J \cup \{t\};$$

$$N \leftarrow N \cup \{v_{r_i}\};$$

Sinon

$$V_l \leftarrow W_j \cup \{v_{r_i}, u_{r_i+1}\};$$

$$J \leftarrow J \cup \{t, j\};$$

$$N \leftarrow N \cup \{v_{r_i}\};$$

Fin Si;

Fin Si;

Fin Si;

Fin Si;

Fin Tant que

Étape 3. Sans perte de généralité, on peut supposer que $J = \{1, \dots, |J|\}$

Pour $i = 1$ à $q - |J|$ Faire

$$V_{l+i} \leftarrow W_{|J|+1};$$

La partition $\{V_1, \dots, V_{p'}\}$, où $p' = l + q - |J|$, est une partition Steiner de V_m . D'après la discussion détaillée dans les cas 1, 2, 3 et 4, cette partition est construite de telle manière que si F est un ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe Steiner connexe de G_m tel que $x^F \in \mathcal{F}$, alors $G(F \cap E(V_j))$ est Steiner connexe, pour $j = 1, \dots, p'$, et $|F \cap [V_j, V_t]| \leq 1, \forall j, t \in \{1, \dots, p'\} (j \neq t)$. D'où, $|F \cap \delta(V_1, \dots, V_{p'})| = p' - 1$. Et par conséquent, $\mathcal{F} \subseteq \{x \in 1SECS P(G_m, S_m) \mid x(\delta(V_1, \dots, V_{p'})) = p' - 1\}$. Donc, la contrainte $a^T x \geq \alpha$ correspond à la contrainte $\sum_{e \in \delta(V_1, \dots, V_{p'})} x(e) \geq p' - 1$. Ce qui termine la preuve du théorème. □

Les résultats précédents et l'étude qu'on a faite, nous suggèrent la conjecture suivante.

Conjecture 4.1 Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallel et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux de V . Si G n'est pas contractible à un graphe de Ψ , alors le polytope

$1SECSP(G, S)$ est donné par les contraintes triviales et les contraintes de partitions Steiner. $\square$

4.5 Le dominant du polytope des arbres Steiner

Plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire consistent (ou peuvent se ramener) à minimiser une fonction wx sur un certain polyèdre. Si $w \geq 0$, minimiser wx sur un polyèdre P est équivalent à minimiser wx sur le dominant de P . Ceci est la motivation principale d'étudier le dominant d'un polyèdre donné.

Le théorème suivant établit une relation entre le dominant du polytope des arbres Steiner $D(G, S)$ et le polytope $1SECSP(G, S)$.

Théorème 4.13 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$ l'ensemble des sommets terminaux de V . Si le polytope $1SECSP(G, S)$ est donné par les contraintes triviales et les contraintes de partitions Steiner généralisées, alors le dominant $D(G, S)$ du polytope $STP(G, S)$ est donné par les contraintes de non-négativité et les contraintes de partitions Steiner généralisées.*

Preuve. Soit $P(G)$ le polyèdre donné par les contraintes de non-négativité et les contraintes de partitions Steiner généralisées, et soit x un point extrême de $P(G)$.

Affirmation 1. $x(e) \leq 1, \forall e \in E$.

Preuve. Supposons qu'il existe $e \in E$ tel que $x(e) > 1$. L'arête e doit appartenir à une partition Steiner généralisée $\delta(W_1, \dots, W_p)$ serrée pour x . Puisque $x(e) > 1$, il s'en suit que $p \geq 3$. Sans perte de généralité, on suppose que $e \in [W_1, W_2]$. Soit $\{W'_1, \dots, W'_{p-1}\}$ la partition définie comme suit

$$\begin{aligned} W'_1 &= W_1 \cup W_2, \\ W'_i &= W_{i+1}, \quad i = 2, \dots, p-1. \end{aligned}$$

Soit G_π (resp. G'_π) le graphe obtenu à partir de G en contractant les ensembles $W_1, \dots, W_p$ (resp. $W'_1, \dots, W'_{p-1}$). Le sommet w_i (resp. w'_i) résultant de la contraction de W_i (resp. W'_i) est un sommet terminal de G_π (resp. G'_π) si et seulement si $W_i \cap S \neq \emptyset$

(resp. $W'_i \cap S \neq \emptyset$). Soit d (resp. d') la cardinalité maximum d'un ensemble U (resp. U') de sommets Steiner de G_π (resp. G'_π) tel que le graphe $G_\pi \setminus U$ (resp. $G'_\pi \setminus U'$) soit Steiner connexe. Il est clair que $d' \leq d$. On a

$$\begin{aligned} x(\delta(W'_1, \dots, W'_{p-1})) &= x(\delta(W_1, \dots, W_p)) - x([W_1, W_2]) \\ &= p - d - 1 - x([W_1, W_2]) \\ &\leq p - d - 1 - x(e) \\ &< (p - 1) - d - 1. \end{aligned}$$

Comme $d' \leq d$, on obtient

$$x(\delta(W'_1, \dots, W'_{p-1})) < (p - 1) - d' - 1.$$

Puisque $x \in P(G)$, ceci est une contradiction.

Donc $x(e) \leq 1$, $\forall e \in E$, et par conséquent, x est également un point extrême de $1\text{SECSP}(G, S)$. Ce qui implique que x est entier.

Soit G_x le graphe induit par les arêtes $e \in E$ telles que $x(e) = 1$. Le graphe G_x est acyclique. En effet, supposons que G_x contient un cycle $C = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_t, v_1)\}$. Notons par f_i l'arête (v_i, v_{i+1}) , pour $i = 1, \dots, t \pmod t$. Comme $x(f_i)$ appartient à au moins une contrainte de $P(G)$ serrée pour x , il doit exister une partition Steiner généralisée, $\{W_1, \dots, W_p\}$, telle que $f_i \in \delta(W_1, \dots, W_p)$ et $\sum_{e \in \delta(W_1, \dots, W_p)} x(e) = p - d - 1$. Supposons que $W_i \cap C \neq \emptyset$, pour $i = 1, \dots, p^*$ ($2 \leq p^* < p$). Soit $\{W_1^*, \dots, W_{p-p^*+1}^*\}$ la partition Steiner définie par

$$\begin{aligned} W_1^* &= \bigcup_{i=1, \dots, p^*} W_i, \\ W_j^* &= W_{p^*+j-1}, \quad j = 2, \dots, p - p^* + 1. \end{aligned}$$

On définit d^* de la même manière que d et d' . On a

$$\begin{aligned} x(\delta(W_1^*, \dots, W_{p-p^*+1}^*)) &= x(\delta(W_1, \dots, W_p)) - x(\delta(W_1, \dots, W_{p^*})) \\ &\leq (p - d - 1) - p^* \\ &< (p - p^* + 1) - d - 1. \end{aligned}$$

Comme $d^* \leq d$, on obtient

$$x(\delta(W_1^*, \dots, W_{p-p^*+1}^*)) < (p - p^* + 1) - d^* - 1.$$

Ceci contredit le fait que $x \in P(G)$. Ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

Comme conséquence de ce théorème, on obtient les deux corollaires suivants.

Corollaire 4.14 *Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux vérifiant la propriété P (par rapport à G). Alors $D(G, S)$ est donné par les contraintes de non-négativité et les contraintes de partitions Steiner.* $\square$

Corollaire 4.15 *Soient $G_m = (V_m, E_m)$ un graphe de type Ψ et S_m l'ensemble des sommets terminaux de V_m . Alors $D(G_m, S_m)$ est caractérisé par les contraintes de non-négativité, les contraintes de partitions Steiner et les contraintes de trou impair.* $\square$

Nous donnons aussi la conjecture suivante.

Conjecture 4.2 *Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux de V . Si G n'est pas contractible à un graphe de Ψ , alors $D(G, S)$ est donné par les contraintes triviales et les contraintes de partitions Steiner.* $\square$

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons considéré une approche polyédrale pour certains problèmes de connexité dans les graphes.

Nous avons introduit des nouvelles classes d'inégalités valides pour le polytope des sous-graphes k -arête connexes $k\text{ECSP}(G)$ et nous avons donné des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que ces inégalités définissent des facettes de ce polytope. Le problème de séparation des contraintes de SP-partitions dans un graphe quelconque et les contraintes de roue-paires reste ouvert. Il serait donc intéressant de trouver un algorithme ou une heuristique efficace pour séparer ces contraintes et d'utiliser ces contraintes dans un algorithme de coupes pour résoudre le problème $k\text{ECSP}$ pour des instances réelles.

Nous avons donné une caractérisation linéaire complète du polytope $k\text{ECSP}(G)$ dans les graphes série-parallèles, ainsi que dans une autre classe de graphes généralisant la classe de Halin. Nous avons également donné une description complète du polytope des sous-graphes Steiner k -arête connexes $k\text{SECSP}(G, S)$ dans les graphes série-parallèles quand k est pair. Il serait toujours intéressant de donner une caractérisation complète de ces deux polytopes dans d'autres classes de graphes. Nous pensons par exemple aux graphes bipartis $(k + 1)$ -arête connexes minimaux.

Nous nous sommes intéressés aux graphes dits parfaitement k -arête connexes, c'est-à-dire les graphes pour lesquels le polytope $k\text{ECSP}(G)$ est donné par les contraintes triviales et les contraintes de coupes. Nous avons étudié la structure des points extrêmes du polytope donné par les contraintes triviales et les contraintes de coupes. Des nouvelles classes de graphes parfaitement k -arête connexes ont été introduites. Le problème $k\text{ECSP}$ est polynomial dans les graphes parfaitement k -arête connexes. Une

question importante est donc de caractériser ces graphes.

Vu la relation étroite entre le problème du sous-graphe Steiner connexe et le problème de l'arbre Steiner, une attention particulière a été accordée au polytope $1SECSP(G, S)$. Nous avons introduit une nouvelle classe d'inégalités valides pour ce polytope. Ces inégalités sont en même temps valides pour le polytope des arbres Steiner. Des procédures de construction de facettes de $1SECSP(G, S)$ ont été introduites. Nous avons donné une caractérisation complète du polytope $1SECSP(G, S)$ dans les graphes série-parallèles dont les sommets terminaux ont une certaine disposition. Nous avons établi une relation entre le polytope $1SECSP(G, S)$ et le dominant de l'arbre Steiner. Ce qui nous a permis de donner une description complète de ce dernier dans certaines classes de graphes. A la suite de cette étude, deux questions restent ouvertes et méritent d'être étudiées. La première consiste à trouver une heuristique pour séparer les contraintes de partitions Steiner généralisées. La deuxième est la caractérisation des graphes pour lesquels le polytope $1SECSP(G, S)$ est donné par les contraintes triviales et les contraintes de partitions Steiner et par conséquent, le dominant de l'arbre Steiner dans ces graphes est donné par les contraintes de non-négativité et les contraintes de partitions Steiner généralisées.

Références

- [1] S. Arnborg, J. Lagergren, and D. Seese. "Problems easy for tree-decomposable graphs". *Research Report*, (1989).
- [2] S. Arnborg and A. Proskurowski. "Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k -trees". *Discrete Applied Mathematics* 23, (1989) 11-24.
- [3] M. Baïou. "Le problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe: Approche polyédrale". *Thèse de doctorat*, Université de Rennes 1, (1996).
- [4] M. Baïou. "On the dominant of the Steiner 2-edge connected subgraph polytope". *Cahiers du Laboratoire d'Économétrie*, École polytechnique, No. 475, (1998).
- [5] M. Baïou, F. Barahona, and A.R. Mahjoub. "Separation of partition Inequalities". *IBM Research Report*, RC 20539, Optimization, T.J. Watson Research Center.
- [6] M. Baïou and A.R. Mahjoub. "Steiner 2-edge connected subgraph polytopes on series-parallel graphs". *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 10, No. 3, (1997) 505-514.
- [7] A. Balakrishnan, T.L. Magnanti, and P. Mirchandani. "Doubling or splitting: strategies for survivable network design". *Technical Report*, OR 297-94, Operations Research Center, MIT, Cambridge, MA, (1994).
- [8] F. Barahona. "Separating from the dominant of the spanning tree polytope". *Operations Research Letters* 12, (1992) 201-203.
- [9] F. Barahona and A.R. Mahjoub. "On two-connected subgraph polytopes". *Discrete Mathematics* 147, (1995) 19-34.
- [10] C. Berge. "Graphs and hypergraphs". North-Holland, Amsterdam (1973).

- [11] D. Bienstock, E.F. Brickell, and C.L. Monma. "On the structure of minimum weight k -connected networks". *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 3, (1990) 320-329.
- [12] M. Boulala and J-P. Uhry. "Polytope des indépendants d'un graphe série-parallèle". *Discrete Mathematics* 27, (1979) 225-243.
- [13] S.C. Boyd and T. Hao. "An integer polytope related to the design of survivable communication networks". *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 6, No. 4, (November 1993) 612-630.
- [14] G-R. Cai and Y-G. Sun. "The minimum augmentation of any graph to a k -edge connected graph". *Networks* 19, (1989) 151-172.
- [15] J. Cheriyan, A. Sebő, and Z. Sziget. "An improved approximation algorithm for minimum size 2-edge connected spanning subgraphs". Preprint, (1998).
- [16] S. Chopra. "The k -edge connected spanning subgraph polyhedron". *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 7, (1994) 245-259.
- [17] S. Chopra and M.R. Rao. "The Steiner tree problem I : Formulations, compositions and extension of facets". *Mathematical Programming* 64, (1994) 209-229.
- [18] S. Chopra and M.R. Rao. "The Steiner tree problem II : Properties and classes of facets". *Mathematical Programming* 64, (1994) 231-246.
- [19] S. Chopra and M. Stoer. Private communication.
- [20] W. Chou and H. Frank. "Survivable communication networks and the terminal capacity matrix.". *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-17, (1970) 183-192.
- [21] G. Cornuéjols, J. Fonlupt, and D. Naddef. "The traveling salesman problem on a graph and some related integer polyhedra". *Mathematical Programming* 33, (1985) 1-27.
- [22] R. Coullard, A. Rais, R.L. Rardin, and D.K. Wagner. "The 2-connected Steiner subgraph polytope for series-parallel graphs". Report No. CC-91-23, School of Industrial Engineering, Purdue University.

- [23] R. Coullard, A. Rais, R.L. Rardin, and D.K. Wagner. "Linear time algorithm for the 2-connected Steiner subgraph problem on special classes of graphs". *Networks* 23, (1993) 195-206.
- [24] R. Coullard, A. Rais, R.L. Rardin, and D.K. Wagner. "The dominant of the 2-connected Steiner subgraph polytope for W_4 -free graphs". *Discrete Applied Mathematics* 66, (1996) 195-206.
- [25] W. Cunningham. "Optimal attack and reinforcement of a network". *Journal of ACM* 32, (1985) 549-561.
- [26] M. Didi Biha, H. Kerivin, and A.R. Mahjoub. "Steiner trees and polyhedra". Preprint (1998), soumis à Discrete Applied Mathematics.
- [27] M. Didi Biha and A.R. Mahjoub. "k-edge connected polyhedra on series-parallel graphs". *Operations Research Letters* 19, (1996) 71-78.
- [28] M. Didi Biha and A.R. Mahjoub. "Steiner k -edge connected subgraph polyhedra". Preprint (1997), soumis à *Journal of Combinatorial Optimization*.
- [29] R.J. Duffin. "Topology of series-parallel networks". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 10, (1965) 125-130.
- [30] J. Edmonds. "Maximum Matching and a Polyhedron With 0,1 Vertices". *J. Res. Natl. Bur. Stand.* 69, (1965) 125-130.
- [31] K.P. Eswaran and R.E. Tarjan. "Augmentation problems". *SIAM Journal on Computing* 5, (1976) 653-665.
- [32] J. Fonlupt and A.R. Mahjoub. "Critical noninteger extreme points of the 2-edge connected subgraph polytope". Preprint, (1996).
- [33] A. Frank. "Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements". *SIAM J. on Discrete Mathematics* 5, (1992) 22-53.
- [34] H. Frank and W. Chou. "Connectivity considerations in the design of survivable networks". *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-17, (1970) 486-490.

- [35] G.N. Frederickson and J. Ja'Ja'. "On the relationship between the biconnectivity augmentations and traveling salesman problem". *Theoretical Computer Science* 13, (1982) 189-201.
- [36] H.N. Gabow, M.X. Goemans, and D.P. Williamson. "An efficient approximation algorithm for the survivable network design problem". *Proc. 3rd MPS Conf. Integer Pro. and Comb. Opt.*, (1993) 57-74.
- [37] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, San Francisco, (1979).
- [38] M.X. Goemans. "The Steiner tree polytope and related polyhedra". *Mathematical Programming* 63, (1994) 157-182.
- [39] M.X. Goemans and D.J. Bertsimas. "Survivable networks, linear programming and the parsimonious property". *Mathematical Programming* 60, (1993) 145-166.
- [40] M.X. Goemans and K.T. Talluri. "2-change for k -connected networks". *Operations Research Letters* 10, (1991) 113-117.
- [41] M.X. Goemans and D.P. Williamson. "A general approximation technique for constrained forest problems". *SIAM J. Comput.* 24, (1995) 296-317.
- [42] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver. "The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization". *Combinatorica* 1, (1981) 169-197 [Corrigendum: 4, 291-295].
- [43] M. Grötschel and C. Monma. "Integer polyhedra arising from certain network design problems with connectivity constraints". *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, Vol. 3, No. 4, (1990) 502-523.
- [44] M. Grötschel, C. Monma, and M. Stoer. "Polyhedral approaches to network survivability". In F. Roberts, F. Hwang and C. L. Monma, eds, *Reliability of computer and Communication Networks*, Vol. 5, Series Discrete Mathematics and Computer Science, 121-141. AMS/ACM, 1991.
- [45] M. Grötschel, C. Monma, and M. Stoer. "Computational results with a cutting plane algorithm for designing communication networks with low-connectivity constraints". *Operations Research* 40 (2), (1992) 309-330.

- [46] M. Grötschel, C. Monma, and M. Stoer. "Facets for polyhedra arising in the design of communication networks with low-connectivity constraints". *SIAM Journal on Optimization* 2 (3), (1992) 474-504.
- [47] M. Grötschel, C. Monma, and M. Stoer. "Polyhedral and computational investigations for designing communications networks with high survivability requirements". *Operations Research* 43, (1995) 1012-1024.
- [48] F.W. Hwang and D.S. Richards. "Steiner tree problems". *Networks* 22, (1992) 55-90.
- [49] F.W. Hwang, D.S. Richards, and P. Winter. "The Steiner tree problem". *Annals of Discrete Mathematics* 53, North-Holland, Amsterdam (1992).
- [50] S. Khuller and B. Raghavachari. "Improved approximation algorithms for uniform connectivity problems". *J. Algorithms* 21, (1996) 434-450.
- [51] C.-W. Ko and C.L. Monma. "Heuristic methods for designing highly survivable communication networks". *Technical Report*, Bellcore, Morristown, New Jersey, (1989).
- [52] J.B. Kruskal. "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem". *Proceedings of the American Mathematical Society* 7, (1956) 48-50.
- [53] E.L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [54] N. Maculan. "The Steiner problem in graphs". *Ann. Discrete Math.* 31, (1987) 285-312.
- [55] T.L. Magnanti and S. Raghavan. "A dual-ascent algorithm for low-connectivity network design". *Technical Report*, Operations Research Center, MIT, Cambridge, MA, (1997).
- [56] A.R. Mahjoub. "On the stable set polytope of a series-parallel graphs". *Mathematical Programming* 40, (1988) 53-57.

- [57] A.R. Mahjoub. "Two-edge connected spanning subgraphs and polyhedra". *Mathematical Programming* 64, (1994) 199-208.
- [58] A.R. Mahjoub. "On perfectly two-edge connected graphs". *Discrete Mathematics* 170, (1997) 153-172.
- [59] F. Margot, A. Prodon, and T.M. Liebling. "Tree polyhedron on 2-tree and $(n-2, n)$ Steiner polyhedron". *Technical Report* RO 910222, Département de Mathématiques, EPF Lausanne (Lausanne, 1991).
- [60] F. Margot, A. Prodon, and T.M. Liebling. "Tree polytope on 2-trees". *Mathematical Programming* 63, (1994) 183-191.
- [61] R.K. Martin, R.L. Rardin, and B.A. Cambell. "Polyhedral characterization of discrete dynamic programming". *Operations Research*, Vol. 38, No. 1, (1990) 127-138.
- [62] C.L. Monma, B.S. Munson, and W.R. Pulleyblank. "Minimum weight two-connected spanning networks". *Mathematical programming* 46, (1990) 153-171.
- [63] C.L. Monma and D.F. Shallcross. "Methods for designing communication networks with certain two-connected survivability constraints". *Operations Research* 37, (1989) 531-541.
- [64] D. Naor, D. Gusfield, and Ch. Martel. "A fast algorithm for optimally increasing the edge-connectivity". In *Proceedings of the Foundation of Computer Science'90*, St. Louis, (1990) 698-707.
- [65] G.L. Nemhauser and L.A. Wolsey. *Integer and Combinatorial optimization*, Wiley, (1988).
- [66] M.W. Padberg and M.R. Rao. "Odd minimum cut sets and b -matchings". *Mathematics of Operation Research* 7, (1982) 67-80.
- [67] N.W. Padberg and M.R. Rao. "The Russian method for linear inequalities III : Bounded integer programs". GBA Working paper 81-39 New York University, New York (1981).
- [68] R.C. Prim. "Shortest connection networks and some generalization". *Bell System Technical Journal* 36, (1957) 1389-1401.

- [69] A. Prodon. "Steiner trees with n terminals among $n + 1$ nodes". *Operations Research Letters* 11, (1992) 125-133.
- [70] A. Prodon, T.M. Liebling, and H. Gröfin. "Steiner's problem on two-trees". *Technical Report* RO 850315, Département de Mathématiques, EPF Lausanne (Lausanne, 1985).
- [71] W.R. Pulleyblank. "Polyhedral combinatorics". In G. L Nemhauser et al, eds, *Handbooks in OR-MS*, vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 371-446.
- [72] R. Ravi and D. Williamson. "An approximation algorithm for minimum-cost vertex connectivity problems". *Proc 6th Annual ACM-SIAM Symp. Discr. Algorithms*, (1995) 332-341.
- [73] M. Schaffers. "A polynomial algorithm for the single source network flow design problem on series-parallel graphs". *CORE Discussion Paper 9062*, Université Catholique de Louvain, (1990).
- [74] M. Stoer. "Design of Survivable Networks". *Lecture Notes in Mathematics*, 1531, Springer-Verlag, (1992).
- [75] J.W. Suurballe. "Disjoints paths in a network". *Networks* 4, (1974) 125-145.
- [76] J.W. Suurballe and R.E. Tarjan. "A quick method for finding shortest pairs of disjoint paths". *Networks* 14, (1984) 325-336.
- [77] K. Takamizawa, T. Nishizeki, and N. Saito. "Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs". *Journal of the Association for Computing Machinery* 29, (1982) 623-641.
- [78] J.A. Wald and C.J. Colbourn. "Steiner trees in outerplanar graphs". *Congressus Numeratum* 36, (1982) 15-22.
- [79] J.A. Wald and C.J. Colbourn. "Steiner trees, partial 2-trees and minimum IFI networks". *Networks* 13, (1983) 159-167.
- [80] D.P. Williamson, M.X. Goemans, M. Mihail, and V. Vazirani. "A primal-dual approximation algorithm for generalized Steiner network problems". *Combinatorica* 15, (1995) 435-454.

- [81] P. Winter. "Generalized Steiner problem in Halin networks". *Proceedings of the 12th International Symposium on Mathematical Programming*, MIT, (1985).
- [82] P. Winter. "Generalized Steiner problem in series-parallel networks". *Journal of Algorithms* 7, (1986) 549-566.
- [83] P. Winter. "Steiner problem in networks : A survey". *Networks* 17, (1987) 129-167.