

THÈSE

Présentée devant

l'Université de Rennes 1

Institut de Formation Supérieure en Informatique et
Communication

Pour obtenir

Le Titre de Docteur de l'Université de Rennes 1

Mention INFORMATIQUE

par

Mustapha BOUCHAKOUR

I: COMPOSITION DE GRAPHS ET LE POLYTOPE
DES ABSORBANTS

II: UN ALGORITHME DE COUPES POUR LE PROBLÈME
DU FLOT À COÛTS FIXES

Soutenue le 17 décembre 1996 devant la commission d'examen

MM.:	Reymond	MARIE	Président
	Jean François	MAURRAS	Rapporteur
	Andras	SEBÖ	Rapporteur
	Michel	BALINSKI	Examineur
	Jean Pierre	BANÂTRE	Examineur
	Ali Ridha	MAHJOUB	Directeur
	Francisco	BARAHONA	Invité

THÈSE

Présentée devant

l'Université de Rennes 1

Institut de Formation Supérieure en Informatique et
Communication

Pour obtenir

Le Titre de Docteur de l'Université de Rennes 1

Mention INFORMATIQUE

par

Mustapha BOUCHAKOUR

I: COMPOSITION DE GRAPHS ET LE POLYTOPE
DES ABSORBANTS

II: UN ALGORITHME DE COUPES POUR LE PROBLÈME
DU FLOT À COÛTS FIXES

Soutenue le 17 décembre 1996 devant la commission d'examen

MM.:	R.	MARIE	Professeur à l'université de RENNES 1	Président
	J.F.	MAURRAS	Professeur à l'université de MARSEILLES	Rapporteur
	A.	SEBÖ	Directeur de recherche I.N.P. GRENOBLE	Rapporteur
	M.	BALINSKI	Directeur de recherche Ecole Polytechnique PARIS	Examineur
	J.P.	BANÂTRE	Professeur à l'université de RENNES 1	Examineur
	A.R.	MAHJOUB	Professeur à l'université de BREST	Directeur
	F.	BARAHONA	Chercheur IBM Watson Research Center, NEW YORK	Invité

*A mes
Parents.*

Remerciements

Il m'est agréable d'exprimer ma profonde reconnaissance et mes remerciements à Monsieur Ali Ridha MAHJOUB, mon directeur de thèse, pour m'avoir aidé par sa constante disponibilité et son soutien et qui, par ses précieux conseils et ses permanents encouragements m'a aidé à structurer mes idées et donner forme à cette thèse.

Je remercie Monsieur Reymond MARIE de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider la commission d'examens de cette thèse.

Je suis très reconnaissant envers Messieurs Jean François MAURRAS et Andras SEBÖ pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail et de m'avoir fait l'honneur d'accepter la charge de rapporteur.

*J'*adresse mes vifs remerciements à Monsieur Michel BALINSKI pour avoir bien voulu examiner ce travail et pour l'intérêt et les critiques qu'il a porté à cette thèse. Aussi je remercie Monsieur Jean Pierre BANÂTRE qui a accepté d'examiner ce travail.

Mes remerciements vont également à Monsieur Francisco BARAHONA qui a accepté d'examiner ce travail et qui m'a aidé par sa compétence et par sa collaboration dans la seconde partie de cette thèse.

Je voudrais également remercier tous les membres de l'équipe Système de Production et Optimisation du département Informatique à l'U.B.O, en particulier Sophie GIRE, Hervé KERIVIN et Abdallah ZEMIRLINE dont la disponibilité pendant la phase de rédaction m'a été d'une grande aide.

Enfin, ces remerciements seraient bien incomplets si je n'exprimais ma profonde reconnaissance à mes parents et à tous les miens, à tous ceux qui me sont chers.

RÉSUMÉ

Cette thèse est composée de deux parties :

La première partie porte sur le problème des absorbants de poids minimum. Nous nous intéressons au polytope associé à ce problème. Dans un premier temps, nous décrivons certaines facettes de base de ce polytope et nous discutons de certaines propriétés structurales.

Par la suite, nous considérons ce polytope dans les graphes décomposables par des sommets d'articulation. Si G est un graphe qui se décompose en deux graphes G_1 et G_2 , alors on montre que le polytope des absorbants dans G peut être décrit à partir de deux systèmes linéaires liés à G_1 et G_2 . Ceci donne lieu à une technique permettant de caractériser le polytope des absorbants dans les classes de graphes qui sont récursivement décomposables. nous obtenons également une procédure de composition de facettes dans ce type de graphes. Nous montrons que le problème de l'absorbant peut être aussi décomposé. Des applications de cette technique sont discutées pour la classe des cactus. Nous étudions aussi des procédures générales de construction de facettes.

Dans la deuxième partie, nous étudions le problème du flot quand des coûts fixes et des coûts variables sont associés aux arcs du graphe. Nous développons une approche polyédrale pour ce problème. Nous introduisons des nouvelles contraintes valides pour le polyèdre associé, appelées contraintes de coupes. Ces contraintes sont utilisées par la suite dans une méthode de coupes pour résoudre des instances du problème. Les résultats expérimentaux montrent que ces contraintes peuvent être utiles pour la résolution du problème dans les graphes peu denses.

Mots clés : Composition de polyèdres, sommet d'articulation, problème de l'absorbant, facettes, cactus, problème du flot, contrainte de coupes, méthode de coupes.

ABSTRACT

This thesis is divided into two parts :

In the first part, we consider the dominating set polytope. We describe basic facets of this polytope and we study some structural properties. These properties are used to discuss this polytope in graphs which are decomposable by one node cutsets. If G decomposes into G_1 and G_2 , we show that the dominating set polytope of G can be described from two linear systems related to G_1 and G_2 . This gives a way to characterize this polytope for classes of graphs that can be recursively decomposed. This also gives a procedure to describe facets for this polytope. We also show that the dominating set problem can be decomposed. Applications of this composition (decomposition) technique are discussed for the class of the cactus. Some procedures of construction of facets from facets are also discussed.

In the second part of the thesis, we study a polyedral approach for the fixed charge network flow problem. We introduce new valid inequalities for the associated polyhedron, called cut inequalities. These inequalities are used in the framework of a cutting plane algorithm for solving instances of that problem. Experiment results show that the cut inequalities can be efficient for sparse graphs.

Key words : Composition of polyhedra, one-node cutset, dominating set polytope, facets, cactus, network flow problem, cut inequalities, cutting plane algorithm.

TABLE DES MATIÈRES

PRÉAMBULE	1
I Composition de graphes et le polytope des absorbants	3
Introduction	5
1 Etude faciale du polytope des absorbants	9
1.1 Introduction	9
1.2 Facettes et propriétés structurales	11
2 Composition de polyèdres: 1-sommes	21
2.1 1-somme et le polyèdre des absorbants	22
2.1.1 Contraintes mixées	22
2.1.2 Propriétés structurales	24
2.1.3 Le polytope $P_D(G)$	28
2.2 Aspects algorithmiques	41
2.3 Applications aux cactus	43
2.3.1 Les classes Γ et Γ'	44
2.3.2 $P_D(G)$ dans les cactus	48
2.3.3 Exemples	64
3 Construction de facettes	73
3.1 Ajout d'un sommet universel	73
3.2 Ajout d'une paire de pôles	76
3.3 Substitution d'une arête par une chaîne	79
3.4 Duplication de sommets	82
3.5 2-somme et facettes	87

3.5.1	Graphes auxiliaires et contraintes mixées	88
Conclusion		101
II Un algorithme de coupes pour le problème du flot à coûts fixes		103
Introduction		105
4	Approche polyédrale pour le PFCF	107
4.1	Formulation du problème PFCF	107
4.2	Le problème de l'arborescence Steiner et le PFCF	108
4.3	Le polyèdre associé	109
4.4	Contraintes de coupes	114
5	Un algorithme de coupes et branchement pour le problème PFCF	123
5.1	Introduction	123
5.2	L'algorithme	124
5.2.1	Séparation des contraintes de coupes	125
5.2.2	Bref aperçu sur MINTO	125
5.3	Résultats expérimentaux	126
Conclusion		131
Bibliographie		133

Préambule

Plusieurs problèmes réels se modélisent comme des problèmes d'optimisation combinatoire (les problèmes dont la structure sous jacente est discrète et généralement caractérisée par un graphe). la résolution de ces problèmes, qui sont généralement difficiles, a suscité des méthodes d'optimisation efficaces. Plusieurs approches ont ainsi été développées et se sont révélées très puissantes comme la programmation linéaire et non linéaire, la programmation en nombres entiers, les techniques d'optimisation dans les réseaux et les approches algorithmiques et polyédrales d'optimisation combinatoire.

Une des méthodes récentes et puissantes pour les problèmes d'optimisation combinatoire est la méthode dite polyédrale. Cette méthode introduite par J. Edmonds dans le cadre du problème du couplage [34], cherche à décrire l'enveloppe convexe des solutions du problème par un système d'inégalités linéaires et donc à se ramener à la résolution d'un programme linéaire. Dantzig est le premier à avoir proposé un algorithme, la méthode du simplexe, pour résoudre de tels programmes [32]. Ce passage de l'optimisation sur un ensemble discret à l'optimisation sur un domaine convexe (généralement plus facile) a permis un nouvel essor de l'optimisation combinatoire et a propulsé en puissance l'approche polyédrale.

Dans cette thèse, nous discutons de cette approche pour deux problèmes d'optimisation combinatoire :

Le premier est celui de l'absorbant de poids minimum. Nous nous intéressons en particulier au polyèdre associé à ce problème dans les graphes décomposables par des sommets d'articulation. Nous montrons que si un graphe G peut être décomposé en deux graphes G_1 et G_2 , alors le polytope des absorbants de G peut être obtenu à partir des polytopes des absorbants dans deux graphes liés à G_1 et G_2 . Nous montrons

également que le problème de l'absorbant de poids minimum peut être décomposé. Ceci donne lieu à une technique de composition de polyèdres dans les graphes qui sont récursivement décomposables.

Le deuxième problème est celui du flot généralisé où des coûts fixes et des coûts variables sont associés aux arcs du graphe. Nous étudions le polytope associé à ce problème. Nous décrivons des nouvelles contraintes valides pour ce polytope. Ces contraintes sont utilisées, par la suite, dans une méthode de coupes pour résoudre certaines instances de ce problème. Les résultats expérimentaux montrent que ces contraintes peuvent être utiles pour la résolution du problème dans les graphes peu denses.

Partie I

Composition de graphes et le polytope des absorbants

Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. Un sous ensemble S de V est dit *Absorbant (ou Dominant)* de G si tout sommet dans $V \setminus S$ est adjacent à au moins un sommet de S . Etant donné un système de poids $c(c(v), v \in V)$ sur les sommets, le *problème de l'absorbant de poids minimum* (PAPM) est de trouver un absorbant S dans G tel que $\sum_{v \in S} c(v)$ soit minimum. Ce problème est un des problèmes classiques de la théorie des graphes. Ore [64] et Berge [13] sont parmi les premiers à avoir discuté de ce problème.

La notion d'absorbant apparaît naturellement dans plusieurs situations relevant de la stratégie de placement d'hommes (ou d'appareils) aux sommets d'un graphe. Un des problèmes classiques qui illustre ce type de situation est le problème des reines, mentionné par Ore [64]: quel est le nombre minimum de reines nécessaires sur un échiquier pour que chaque case soit couverte (contrôlée) par au moins une reine (une case est couverte par une reine si elle est dans la ligne, la colonne ou la diagonale dans laquelle se trouve la reine). Un problème similaire mentionné par Berge [14] concerne le contrôle des sommets du réseau par un ensemble de stations radars. Une autre application du problème de l'absorbant minimum se trouve dans le domaine des télécommunications où les sommets représentent des cités qui doivent être liées par des centres de transmission, et les arêtes, les connexions possibles entre ces cités. L'ensemble absorbant dans ce cas représente les cités à munir d'un centre de transmission afin de pouvoir communiquer avec l'ensemble des cités du réseau [55]. Le problème PAPM a aussi des applications dans la théorie des couplages [13].

Un autre concept très lié à celui de l'absorbant dans les graphes est celui de l'indépendant. Un *indépendant* (ou *stable*) dans un graphe est un sous-ensemble de sommets deux à deux non adjacents. La relation entre ces deux notions a été largement explorée [1, 2, 28, 37, 53]. Certains problèmes d'optimisation combinatoire (en théorie

des jeux et en analyse multicritère) se ramènent à la recherche d'un sous-ensemble de sommets dans un graphe G qui soit à la fois absorbant et indépendant de G . Un tel ensemble est dit *noyau*.

Le problème PAPM est NP-dur dans le cas général [46]. Il a été montré polynomial dans plusieurs classes particulières de graphes comme les cactus [50] et les graphes série-parallèles [52]. Une synthèse complète sur la complexité du PAPM peut être consultée dans Corneil et Stewart [28].

Une des approches qui s'est avérée puissante pour ce type de problème est l'approche polyédrale. Le but de cette approche est de ramener le problème à la résolution d'un programme linéaire par la description complète du polyèdre, enveloppe convexe de ses solutions, par un système d'inégalités linéaires. Un tel système est généralement difficile à obtenir pour un graphe G donné. Mais en décomposant le graphe en *blocs* (des sous graphes qui ne sont plus décomposables par rapport à certaines opérations de décomposition), il est parfois possible de décrire le polyèdre associé à G à partir des systèmes linéaires qui caractérisent les polyèdres associés aux blocs. Cette partie de la thèse discute de cette approche pour le problème de l'absorbant.

Des techniques de composition/décomposition ont été étudiées pour plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire [6, 9, 10, 11, 49, 58].

Dans [6], Barahona, Fonlupt et Mahjoub décrivent une technique de composition pour le polyèdre des sous graphes acycliques. En utilisant cette technique, ils donnent une caractérisation complète de ce polyèdre dans les graphes non contractibles à $K_{3,3}$ (les graphes qui ne peuvent pas se ramener à $K_{3,3}$ par contractions et suppressions d'arêtes). Dans [9] Barahona et Mahjoub étudient des compositions similaires pour le polytope des graphes équilibrés. Dans [10, 11] ils considèrent le polytope du stable et donnent une description complète de ce polytope dans les graphes non contractibles à W_4 (la roue sur 5 sommets). Margot [58] étudie une approche générale de composition de polyèdres basée sur les techniques de projection. Dans [49], Hadjar discute d'une approche similaire. En particulier, il introduit la notion de polyèdres parfaitement composables par rapport à un certain mariage de solutions. Si deux polyèdres sont parfaitement composables, alors ils engendrent une formulation étendue du problème et, en conséquence, un système linéaire décrivant les solutions du problème peut être

obtenu par projection. il donne une condition nécessaire et suffisante pour que deux polyèdres soient parfaitement composables.

Le problème de l'absorbant a été largement étudié sur le plan algorithmique [14, 16, 25, 26, 28, 37, 38, 39]. Mais contrairement à plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire NP-durs, l'approche polyédrale pour ce problème n'a pas été très explorée. A notre connaissance, le polytope des absorbants a été seulement étudié dans les graphes à seuil par Mahjoub [57] et les graphes fortement à corde par Farber [37] dans le cadre des matrices totalement équilibrées.

Dans cette partie de la thèse, nous nous intéressons à certains aspects polyédraux du PAPM. Dans un premier temps, nous caractérisons certaines classes de facettes de ce polyèdre et nous décrivons des procédures de construction de facettes. Par la suite nous étudions le problème PAPM dans les graphes décomposables par des sommets d'articulation. Si G est un graphe qui se décompose en G_1 et G_2 alors nous montrons que le système décrivant le polyèdre des absorbants associé à G peut être obtenu à partir de deux systèmes linéaires décrivant les polyèdres des absorbants de certains graphes liés à G_1 et G_2 . Nous montrons que le problème PAPM peut être, également, décomposé. Par la suite nous étudions les applications de cette approche dans les cactus. Enfin nous donnons quelques procédures de constructions de facettes.

Chapitre 1

Etude faciale du polytope des absorbants

1.1 Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Si $S \subseteq V$ alors le vecteur $x^S \in \{0, 1\}^{|V|}$, où $x(i) = 1$ si $i \in S$ et $x(i) = 0$ sinon, est appelée le *vecteur d'incidence* de S . L'enveloppe convexe $P_D(G)$ des vecteurs d'incidence des absorbants de G est appelée le *polytope des absorbants de G* , i.e.

$$P_D(G) = \text{conv}\{x^S \in \mathbb{R}^{|V|} \mid S \subseteq V \text{ est un absorbant de } G\}.$$

Le problème PAPM est donc équivalent au programme linéaire

$$\min\{cx; x \in P_D(G)\}.$$

Le problème PAPM peut donc être ramené à la résolution d'un programme linéaire par la description du polytope $P_D(G)$. Etant donné que le problème PAPM est NP-dur, il y a peu d'espoir de trouver une caractérisation complète de $P_D(G)$ pour tout graphe. Mais une description partielle de ce polytope peut être suffisante pour résoudre le problème PAPM à optimalité. Aussi, pour certaines classes de graphes, le polytope $P_D(G)$ peut être décrit par quelques familles d'inégalités linéaires dont le problème de séparation est polynomial. Par conséquent le problème PAPM peut être résolu en temps polynomial dans ces classes de graphes en utilisant la méthode des ellipsoïdes [47].

Dans le reste de cette section, nous donnons quelques définitions de base et notations qui seront utilisées dans ce mémoire. Nous commençons par quelques notions

relatives aux polyèdres. Pour plus de détails, on pourra consulter [72].

Un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $x^1, x^2, \dots, x^k \in \mathbb{R}^m$ si pour un certain vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^k$, $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i$.

De plus, si $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ (resp. $\lambda \geq 0$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$), alors que x est une *combinaison affine* (resp. *convexe*) des vecteurs $x^1, x^2, \dots, x^k$.

Soit un sous ensemble $S \subset \mathbb{R}^m$ non vide. L'*enveloppe convexe* de S , notée $\text{conv}(S)$, est l'ensemble des points, combinaisons convexes des éléments de S .

Un ensemble fini de points $S \subset \mathbb{R}^m$ est dit *linéairement indépendant* (resp. *affinement indépendant*) si aucun de ses éléments n'est combinaison linéaire (resp. affine) des autres points avec au moins deux coefficients positifs non nuls. Sinon, S est dit linéairement (resp. affinement) dépendant.

Un polyèdre P de $\mathbb{R}^m$ est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^m$. Un polyèdre P peut être aussi défini comme l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires, *i.e.*

$$P = \{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax \leq b\}.$$

On dit que ce système *caractérise* le polyèdre P

Un polyèdre borné est dit *polytope*. Un polytope est également l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points.

La *dimension* d'un polyèdre P , notée $\dim(P)$, est le nombre maximum de points affinement indépendants de P . Si $\dim(P) = m$, alors P est dit de *pleine dimension*. Dans ce cas, il existe un système linéaire unique, à une multiplication près par un scalaire positif, définissant P .

Soit $a \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ et $a_0 \in \mathbb{R}^m$. L'inéquation $a^T x \leq a_0$ est dite *contrainte valide* pour le polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^m$, si $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^T x \leq a_0\}$.

La contrainte valide $a^T x \leq a_0$ définit une *face* de P si $\emptyset \neq P \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^T x = a_0\} \neq P$.

Dans ce cas, le polyèdre $P \cap \{x \in \mathbb{R}^m \mid a^T x = a_0\}$ est dit la face associée à la contrainte $a^T x \leq a_0$.

Une contrainte valide $a^T x \leq a_0$ définit une *facette* de P si elle est une face de P et, si elle est de dimension $\dim(P) - 1$.

Les *sommets* (ou *points extrêmes*) de P sont des faces de dimension nulle.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Si $e \in E$ est une arête ayant pour extrémités les sommets u et v , alors nous écrivons $e = uv$. Si $u \in V$ est un sommet non adjacent à aucun autre sommet de V , alors u est dit *isolé*.

Une chaîne P de $G = (V, E)$ est une séquence de sommets $v_0, v_1, \dots, v_k$ telle que pour tout $i = 0, \dots, k-1$, $v_i v_{i+1}$ est une arête de E . Les sommets v_0 et v_k sont appelés les extrémités de la chaîne P . De plus, si $v_0 v_k \in E$, alors la séquence $v_0, v_1, \dots, v_k$ forme un cycle.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. L'ensemble des voisins d'un sommet $u \in V$ dans G , noté $N_G(u)$, est l'ensemble formé de u et de tous les sommets de G adjacents à u . Cet ensemble sera noté $N(u)$ s'il n'y a pas nécessité de préciser le graphe.

Nous notons par $N^*(u)$ l'ensemble $N(u) \setminus \{u\}$.

Etant donnée une application $b : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $b(S)$ représente $\sum_{u \in S} b(u)$.

Nous notons aussi par $D(G)$ l'ensemble de tous les absorbants dans G .

1.2 Facettes et propriétés structurales

Dans cette section, nous décrivons certaines facettes de base de $P_D(G)$ et présentons quelques propriétés structurales de ce polytope.

Si $S \subseteq V$ est un sous ensemble de V , alors le vecteur d'incidence de S , x^S , vérifie les contraintes suivantes

$$x(u) \geq 0 \quad \forall u \in V, \quad (1.1)$$

$$x(u) \leq 1 \quad \forall u \in V, \quad (1.2)$$

$$x(N(u)) \geq 1 \quad \forall u \in V. \quad (1.3)$$

Les inéquations (1.1) et (1.2) seront appelées *contraintes triviales*. Et les inéquations (1.3) seront appelées *contraintes de voisinage*.

Dans la suite nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que les contraintes (1.1) - (1.3) définissent des facettes. Mais d'abord nous discutons de certaines propriétés de $P_D(G)$.

Lemme 1.1 *Si G n'a pas de sommets isolés alors $P_D(G)$ est de pleine dimension.*

Preuve. Il est simple de voir que lorsque G n'a pas de sommets isolés, les ensembles $V \setminus \{u\}$, $\forall u \in V$ et l'ensemble V forment une famille de $n + 1$ absorbants affinement indépendants. $\square$

Donc si $G = (V, E)$ ne contient pas de sommets isolés, un système linéaire $Ax \geq b$ qui définit $P_D(G)$ est minimal si et seulement si il existe une bijection entre les inégalités du système et les facettes de $P_D(G)$. Si $G = (V, E)$ contient un sous ensemble $V_0 \subset V$ de sommets isolés, alors tout absorbant de G contient V_0 . L'étude de PPM peut se ramener alors au graphe $G' = (V \setminus V_0, E)$.

On supposera dans la suite que G ne contient pas de sommets isolés.

Lemme 1.2 *Toute facette de $P_D(G)$, différente d'une contrainte triviale de type $x(u) \leq 1$, est de la forme $\sum_{i=1, \dots, k} a_i x_i \geq a_0$ avec $a_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, k$.*

Preuve. Supposons que $a_{i_0} < 0$ pour un certain $i_0 \in \{1, \dots, k\}$. Comme $\sum_{i=1, \dots, k} a_i x_i \geq a_0$ est différente de l'inéquation $x_{i_0} \leq 1$, il doit donc exister un absorbant S ne contenant pas i_0 et tel que $\sum_{i=1, \dots, k} a_i x_i = a_0$. Soit $S' = S \cup \{i_0\}$. Il est clair que S' est un absorbant, mais on a $\sum_{i=1, \dots, k} a_i x_i < a_0$, une contradiction. $\square$

Théorème 1.3 i) *L'inéquation (1.2) définit une facette de $P_D(G)$.*

ii) *L'inéquation (1.1) définit une facette de $P_D(G)$ si et seulement si $|N(v)| \geq 3$ pour tout $v \in N(u)$.*

Preuve. i) Etant donné que le graphe G est sans sommets isolés, les ensembles V et $V \setminus \{v\}$, $v \neq u$ forment une famille de $|V|$ absorbants dont les vecteurs d'incidence serrent la contrainte (1.2) et sont affinement indépendants.

ii) Supposons qu'il existe un sommet v de $N(u)$ tel que $|N(v)| \leq 2$. Comme G n'a pas de sommets isolés, il doit alors exister un sommet u' , différent de u , tel que $N(v) = \{u, u'\}$ où v est représenté soit par u , soit par u' . Ainsi pour tout absorbant S de G , nous aurons

$$u \notin S \implies u' \in S.$$

Mais ceci implique que la face $\{x \in P_D(G) \mid x(u) = 0\}$ est contenue dans la face $\{x \in P_D(G) \mid x(u') = 1\}$. En conséquence, (1.1) ne peut définir une facette.

Inversement, supposons que $|N(v)| \geq 3$ pour tout sommet $v \in N(u)$. Donc, les ensembles $V \setminus \{u\}$ et $V \setminus \{u, v\}$ pour tout $v \in V \setminus \{u\}$ constituent une famille de $|V|$ absorbants dont les vecteurs d'incidence vérifient à l'égalité l'inéquation (1.1) et sont affinement indépendants. Il s'ensuit que (1.1) induit une facette. $\square$

Théorème 1.4 *Une contrainte de type (1.3) définit une facette de $P_D(G)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

- i) *Il n'existe pas de sommet u' tel que $N(u') \subset N(u)$.*
- ii) *Pour tout sommet $w \in V \setminus N(u)$ tel que $N^*(w) \subseteq N^*(u)$, il existe au moins un sommet $z \in N^*(w)$ tel que tout sommet $y \in N^*(w) \setminus \{z\}$ soit adjacent soit à z , soit à un sommet de $V \setminus (N(u) \cup \{w\})$.*

Preuve. S'il existe un sommet u' tel que $N(u') \subset N(u)$, alors l'inéquation associée à $N(u)$ pourrait être obtenue en combinant celle associée à $N(u')$ et des contraintes de type (1.1). Ainsi elle ne peut définir une facette.

Si la condition ii) n'est pas vérifiée pour un sommet $w \in V \setminus N(u)$, alors pour tout absorbant S de G , nous avons

$$|S \cap N(u)| = 1 \implies w \in S. \tag{1.4}$$

En effet, supposons que $S \cap N(u) = \{z\}$. Si $S \cap N^*(w) = \emptyset$, alors il est clair que $w \in S$. Si cela n'est pas le cas alors $S \cap N^*(w) = \{z\}$, et comme ii) n'est pas vérifiée pour w ,

il doit exister un sommet $y \in N^*(w) \setminus \{z\}$ qui ne soit adjacent ni à z ni à un sommet de $V \setminus (N(u) \cup \{w\})$. Puisque $N(y) \cap S \neq \emptyset$, on doit avoir $w \in S$ et donc (1.4) est vérifiée.

Donc tout absorbant contenant exactement un sommet de $N(u)$ doit aussi contenir w . On déduit alors que la face $\{x \in P_D(G) \mid x(N(u)) = 1\}$ est contenue dans la face $\{x \in P_D(G) \mid x(w) = 1\}$, d'où (1.2) ne peut induire une facette.

Supposons maintenant que les deux conditions du théorème sont vérifiées. Nous noterons la contrainte (1.3) par $a^T x \geq a_0$ et supposons qu'il existe une facette induite par une contrainte $b^T x \geq b_0$ telle que

$$\{x \in P_D(G) \mid a^T x = a_0\} \subseteq \{x \in P_D(G) \mid b^T x = b_0\}.$$

Pour montrer que (1.3) définit une facette, il suffit de montrer qu'il existe un scalaire $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$.

Pour cela nous allons d'abord établir que $b(u) = b(v)$, $\forall v \in N^*(u)$. Pour ce faire, considérons les ensembles

$$\begin{aligned} S_1 &= V \setminus N^*(u), \\ S_v &= (V \setminus N(u)) \cup \{v\}, \quad \forall v \in N^*(u), \end{aligned}$$

qui définissent des absorbants de G . Il est clair que ceci est le cas pour S_1 . Si S_v n'est pas un absorbant de G , alors il existe un sommet $u' \in N^*(u) \setminus \{v\}$ qui n'est adjacent à aucun sommet de $(V \setminus N(u)) \cup \{v\}$. Il en résulte donc que $N(u') \subset N(u)$, ce qui contredit la condition i).

De plus, les vecteurs d'incidence de S_1 et S_v , vérifient à l'égalité la contrainte (1.3). Donc

$$0 = bx^{S_1} - bx^{S_v} = b(u) - b(v).$$

D'où

$$b(u) = b(v) = \rho \quad \forall v \in N^*(u) \text{ et } \rho \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, montrons que $b(w) = 0$, $\forall w \in V \setminus N(u)$.

Nous considérons d'abord le cas où $N^*(w) \cap (V \setminus N(u)) \neq \emptyset$. Soit $\tilde{S} = V \setminus (N^*(u) \cup \{w\})$. $\tilde{S}$ est un absorbant de G . Comme $a^T x^{\tilde{S}} = a_0$, il s'ensuit que $b^T x^{\tilde{S}} = b_0$, et donc

$$\begin{aligned} 0 &= bx^{S_1} - bx^{\tilde{S}} \\ &= b(w) \end{aligned}$$

où S_1 est l'absorbant précédemment défini.

Si $N^*(w) \cap (V \setminus N(u)) = \emptyset$, par la condition ii) il existe un sommet $z \in N^*(w)$ tel que tout sommet $y \in N^*(w) \setminus \{z\}$ soit adjacent à z ou à un sommet de $V \setminus (N(u) \cup \{w\})$. Soit $\bar{S} = S_z \setminus \{w\}$, où $S_z = (V \setminus N(u)) \cup \{z\}$. Il est facile de voir que $\bar{S}$ est un absorbant de G . De plus, nous avons $a^T x^{\bar{S}} = a_0$. Ceci implique que $a^T x^{\bar{S}} = a_0$, et par conséquent

$$\begin{aligned} 0 &= bx^{S_z} - bx^{\bar{S}} \\ &= b(w) \end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$\begin{aligned} b(v) &= \rho \quad \forall v \in N(u), \\ b(v) &= 0 \quad \forall v \in V \setminus N(u). \end{aligned}$$

Comme pour tout $v \in V$ il existe un absorbant S tel que $a^T x^S = a_0$ et $v \notin S$, cela implique que la facette définie par $b^T x \geq b_0$ n'est contenue dans aucune des facettes triviales $\{x \in P_D(G) \mid x(w) = 1; w \in V\}$. D'après le lemme 1.2, on a donc $b \geq 0$ et par conséquent $\rho > 0$. Ce qui termine la preuve de notre théorème. $\square$

Lemme 1.5 *Soit C_n un cycle sans corde à n sommets. L'inéquation*

$$x(C_n) \geq \left\lceil \frac{|C_n|}{3} \right\rceil \tag{1.5}$$

est valide pour $P_D(C_n)$. De plus, elle définit une facette de $P_D(C_n)$ si et seulement si C_n n'est pas un multiple de 3.

Preuve. Il n'est pas difficile de voir que (1.5) est valide pour $P_D(C_n)$.

Si $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$, la contrainte (1.5) peut être obtenue en sommant les contraintes de voisinage $x(N(u_i))$, i multiple de 3. Donc (1.5) ne définit pas une facette.

Maintenant, supposons que $n \neq 3k$ et $C_n = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Considérons les sous ensembles de C_n suivants:

$$S_i = \{u_{i+3p}, p = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\}, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

où les indices sont pris modulo n .

Les ensembles S_i forment une famille de n absorbants de C_n dont les vecteurs d'incidence vérifient (1.5) à l'égalité et sont affinement indépendants. $\square$

Nous passons maintenant à l'étude de quelques propriétés structurales des facettes de $P_D(G)$. Ces propriétés vont nous être utiles lors de l'étude de la composition de

polyèdres dans le chapitre suivant.

Soit $a^T x \geq a_0$ une contrainte non triviale qui définit une facette de $P_D(G)$. D'après le lemme 1.2, nous avons $a \geq 0$ et $a_0 > 0$. Nous notons par V_a l'ensemble

$$V_a = \{v \in V \mid a(v) > 0\}.$$

L'ensemble V_a est appelé le *support* de la contrainte $a^T x \geq a_0$, et le graphe $G_a = (V_a, E(V_a))$ est appelé le *graphe induit* par la contrainte $a^T x \geq a_0$. Nous représentons par D_a l'ensemble des absorbants de G dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq a_0$ à l'égalité, *i.e.*

$$D_a = \{S \subseteq V \mid S \in D(G) \text{ et } a^T x = a_0\}.$$

Nous avons les lemmes suivants.

Lemme 1.6 *Le graphe G_a est connexe.*

Preuve. Supposons que G_a est constitué de deux composantes disjointes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$. Soient a_1 et a_2 les restrictions de a dans V_1 et V_2 respectivement. Soit

$$a_0^i = \min\{a^T x^{S \setminus V_{i'}}, S \in D(G)\}, \quad i = 1, 2,$$

où $i' = \{1, 2\} \setminus \{i\}$. Nous avons alors que $a_0 = a_0^1 + a_0^2$, et la contrainte $a_i^T x \geq a_0^i$ est valide pour $P_D(G_i)$, $i = 1, 2$. Ainsi $a^T x \geq a_0$ peut être obtenue comme la somme de deux contraintes valides. Mais ceci est en contradiction avec le fait que $a^T x \geq a_0$ induit une facette. $\square$

Lemme 1.7 *Soit G le graphe obtenu à partir d'un graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ et d'un cycle C , où $C = \{u, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ et $u = C \cap V_1$ (voir la figure. 1.1). Si $a^T x \geq a_0$ est différente des contraintes de voisinage et de l'inéquation (1.5) associée au cycle C alors, nous avons*

- 1) $a(w_1) = a(w_4) \leq a(u)$,
- 2) $a(w_2) = a(w_3) = 0$.

Preuve. D'abord nous montrons que $a(w_1) = a(w_4)$. Pour ce faire, nous allons montrer que $a(w_4) \geq a(w_1)$. L'égalité est alors établie par symétrie. Sans perte de généralité,

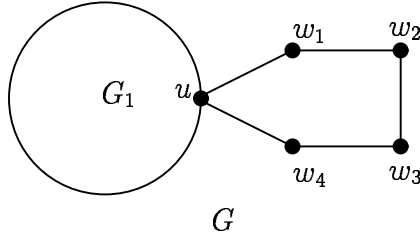


Figure 1.1 :

on peut supposer que $a(w_1) > 0$. Comme $a^T x \geq a_0$ est différente de l'inéquation $x(C) \geq 2$, il doit exister un absorbant $S^1 \in D_a$ avec $|S^1 \cap C| \geq 3$. Nous distinguons 3 cas.

Cas 1. $w_1, w_4 \notin S^1$. Ainsi $\{u, w_2, w_3\} \subseteq S^1$. Puisque $S^1 \setminus \{w_2\}$ et $S^1 \setminus \{w_3\}$ sont des absorbants de G , il en résulte que $a(w_2) = a(w_3) = 0$.

Maintenant, comme $a^T x \geq a_0$ est différente des contraintes triviales, il doit exister un absorbant $S^2 \in D_a$ avec $w_1 \in S^2$. Soit $\tilde{S}^2 = (S^2 \setminus \{w_1\}) \cup \{w_2, w_3, w_4\}$. Il est clair que $\tilde{S}^2 \in D(G)$. Comme $a(w_2) = a(w_3) = 0$, il s'ensuit que $a(w_4) \geq a(w_1)$.

Cas 2. $w_1, w_4 \in S^1$. Supposons d'abord que $\{w_2, w_3\} \cap S^1 \neq \emptyset$.

- Si $w_2 \in S^1$, alors l'ensemble $S^1 \setminus \{w_1\} \in D(G)$. Mais ceci implique que $a(w_1) = 0$, ce qui est impossible.

- Si $w_3 \in S^1$, alors les ensembles $S^1 \setminus \{w_4\}$ et $S^1 \setminus \{w_3\}$ sont des absorbants de G , et donc nous avons $a(w_3) = a(w_4) = 0$. Considérons l'ensemble $S^2 \in D_a$ introduit dans le cas 1. Notons que $w_1 \in S^2$. Comme l'ensemble $(S^2 \setminus \{w_1\}) \cup \{w_3, w_4\}$ est un absorbant de G et $a(w_3) = a(w_4) = 0$, nous obtenons $a(w_1) = 0$, une contradiction.

En conséquence, $\{w_2, w_3\} \cap S^1 = \emptyset$ et donc $\{u, w_1, w_4\} \subseteq S^1$. Ainsi les ensembles $(S^1 \setminus \{w_1\}) \cup \{w_3\}$ et $(S^1 \setminus \{w_4\}) \cup \{w_3\}$ sont des absorbants de G . Nous obtenons donc

$$a(w_3) \geq a(w_1), a(w_4). \quad (1.6)$$

Comme $a^T x \geq a_0$ est différente de la contrainte de voisinage associée au sommet w_2 , il existe un absorbant $S^3 \in D_a$ tel que $|S^3 \cap \{w_1, w_2, w_3\}| \geq 2$.

- Si $\{w_1, w_2\} \subseteq S^3$, alors l'ensemble $(S^3 \setminus \{w_1\}) \cup \{w_4\}$ est un absorbant de G et donc $a(w_4) \geq a(w_1)$.
- Si $\{w_1, w_3\} \subseteq S^3$ ou $\{w_2, w_3\} \subseteq S^3$, alors l'ensemble $(S^3 \setminus \{w_3\}) \cup \{w_4\}$ est un absorbant de G et donc $a(w_4) \geq a(w_3)$. De (1.6), nous déduisons que $a(w_4) \geq a(w_1)$.

Cas 3. $|\{w_1, w_4\} \cap S^1| = 1$. Considérons d'abord le cas où $w_1 \in S^1$. Si $u \in S^1$, comme $S^1 \cap \{w_2, w_3\} \neq \emptyset$, il s'ensuit que $S^1 \setminus \{w_1\}$ est un absorbant de G . Donc $a(w_1) = 0$, une contradiction. Comme conséquence, nous avons $\{w_1, w_2, w_3\} \subseteq S^1$. Puisque $S^1 \setminus \{w_2\}$ appartient à $D(G)$, il en résulte que $a(w_2) = 0$. Maintenant considérons de nouveau l'ensemble S^2 défini dans le cas 1. Comme $(S^2 \setminus \{w_1\}) \cup \{w_2, w_4\}$ est un absorbant, il s'ensuit que $a(w_4) \geq a(w_1)$.

Si $w_4 \in S^1$ nous obtenons, de manière similaire, que $a(w_4) \geq a(w_1)$.

Dans tous les cas, nous avons $a(w_4) \geq a(w_1)$. Par symétrie, nous avons également $a(w_1) \geq a(w_4)$, et par conséquent $a(w_1) = a(w_4)$.

Maintenant nous montrons que $a(w_2) = a(w_3) = 0$. Pour cela, nous considérons deux cas.

Cas 1'. $a(w_1) = a(w_4) = 0$. Comme $a^T x \geq a_0$ est une contrainte non triviale, il existe deux absorbants S et T de D_a tels que $w_2 \in S$ et $w_3 \in T$. Soient $S' = (S \setminus \{w_2\}) \cup \{w_1, w_4\}$ et $T' = (T \setminus \{w_3\}) \cup \{w_1, w_4\}$. Il est évident que S' et T' sont des absorbants de G , ce qui nous donne $a(w_2) \leq a(w_1) + a(w_4)$ et $a(w_3) \leq a(w_1) + a(w_4)$. Comme, par hypothèse, $a(w_2) \geq 0$ et $a(w_3) \geq 0$, on a alors $a(w_2) = a(w_3) = 0$.

Cas 2'. $a(w_1) = a(w_4) > 0$. Considérons l'absorbant S^1 introduit dans le Cas 1. Notons que $|S^1 \cap C| \geq 3$.

D'abord supposons que $\{w_2, w_3\} \cap S^1 = \emptyset$. Ainsi $S^1 \cap C = \{u, w_1, w_4\}$. Soient $T^1 = (S^1 \setminus \{w_1\}) \cup \{w_2\}$ et $T^2 = (S^1 \setminus \{w_4\}) \cup \{w_3\}$. T^1 et T^2 sont dans $D(G)$. En conséquence

$$\begin{aligned} a(w_2) &\geq a(w_1), \\ a(w_3) &\geq a(w_4). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Nous montrons dans ce qui suit qu'il existe $i \in \{2, 3\}$ tel que $a(w_1) = a(w_4) = a(w_i)$.

En effet, considérons l'absorbant $S^3 \in D_a$, vérifiant $|S^3 \cap \{w_1, w_2, w_3\}| \geq 2$.

- Si $\{w_1, w_2\} \subseteq S^3$, alors $(S^3 \setminus \{w_2\}) \cup \{w_4\} \in D(G)$, et donc $a(w_4) \geq a(w_2)$. Comme $a(w_1) = a(w_4)$, de (1.7) nous avons que $a(w_1) = a(w_4) = a(w_2)$.
- Si $\{w_1, w_3\} \subseteq S^3$, alors $(S^3 \setminus \{w_3\}) \cup \{w_4\} \in D(G)$ et, de façon similaire, nous obtenons $a(w_1) = a(w_4) = a(w_3)$.
- Si $\{w_2, w_3\} \subseteq S^3$, alors les ensembles $(S^3 \setminus \{w_2\}) \cup \{w_1\}$ et $(S^3 \setminus \{w_3\}) \cup \{w_4\}$ sont dans $D(G)$. Ainsi $a(w_1) \geq a(w_2)$ et $a(w_4) \geq a(w_3)$, ce qui nous donne, par (1.7), $a(w_1) = a(w_4) = a(w_2) = a(w_3)$.

Ainsi, l'égalité posée est vérifiée. Supposons maintenant, par exemple, que $a(w_1) = a(w_2) = a(w_4)$. Soit $\bar{S}^1 = (S^1 \setminus \{w_1, w_4\}) \cup \{w_2\}$. Il est évident que $\bar{S}^1 \in D(G)$. D'où $a(w_2) \geq a(w_1) + a(w_4)$. Puisque $a(w_2) = a(w_4)$, il en découle que $a(w_1) = 0$, ce qui est une contradiction.

Maintenant supposons que $|\{w_2, w_3\} \cap S^1| = 1$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $S^1 \cap \{w_2, w_3\} = \{w_2\}$. Si $w_1 \in S^1$ (resp. $w_4 \in S^1$), comme $|S^1 \cap C| \geq 3$ et donc $S^1 \cap \{u, w_4\} \neq \emptyset$ (resp. $S^1 \cap \{u, w_1\} \neq \emptyset$), l'ensemble $S^1 \setminus \{w_1\}$ (resp. $S^1 \setminus \{w_4\}$) est un absorbant de G . Mais ceci implique que $a(w_1) = 0$ (resp. $a(w_4) = 0$), une contradiction.

En conséquence, $\{w_2, w_3\} \subseteq S^1$. Si $u \in S^1$, alors les ensembles $S^1 \setminus \{w_2\}$ et $S^1 \setminus \{w_3\}$ sont dans $D(G)$, d'où $a(w_2) = a(w_3) = 0$. Sinon on aura $\{w_1, w_4\} \cap S^1 \neq \emptyset$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $w_1 \in S^1$. Il est clair que les ensembles $S^1 \setminus \{w_2\}$ et $(S^1 \setminus \{w_1, w_3\}) \cup \{w_4\}$ sont dans $D(G)$. Puisque $a(w_1) = a(w_4)$, on a donc $a(w_2) = a(w_3) = 0$.

Maintenant il nous reste à montrer que $a(w_1) (= a(w_4)) \leq a(u)$. Considérons l'absorbant $S^2 \in D_a$ introduit dans le Cas 1. Notons que $w_1 \in S^2$. Comme l'ensemble $(S^2 \setminus \{w_1\}) \cup \{u, w_2\}$ est aussi un absorbant et $a(w_2) = 0$, il s'ensuit que $a(w_1) \leq a(u)$, ce qui complète notre preuve. $\square$

Chapitre 2

Composition de polyèdres: 1-sommes

Une approche classique pour la description par un système d'inéquations linéaires de l'enveloppe convexe des solutions d'un problème d'optimisation combinatoire donné est la composition. Elle réside en la décomposition d'un problème en sous-problèmes dont est connue la caractérisation des enveloppes convexes associées. Une recombinaison de ces polyèdres nous permet d'aboutir à la description recherchée.

Pour un problème d'optimisation défini sur un graphe G , étant posées des opérations de décomposition (composition) appropriées, cette approche s'interprète par une décomposition de G en graphes indécomposables par ces opérations. Ces graphes sont dits *blocs* (ou *graphes primitifs*), et le graphe G est dit obtenu par *composition* à partir des blocs. Avec les descriptions des enveloppes convexes des structures combinatoires associées aux graphes primitifs, on compose successivement les polyèdres dans l'ordre inverse de la décomposition de G , afin de caractériser l'enveloppe convexe des structures combinatoires associées au graphe G .

L'état de l'art répertorie plusieurs travaux sur (ou ayant trait à) la composition de polyèdres qui ont été réalisés pour des problèmes d'optimisation combinatoire. Nous citons par exemple : les polytopes des stables [10, 21, 24, 71, 78], des systèmes indépendants [31, 45, 63], des sous-graphes bipartis [41, 40], des sous-graphes acycliques [6, 9], des sous-graphes équilibrés [9], des sous-graphes deux-connexes [8], des partitions [27], des coupes [3, 4], du voyageur de commerce [29, 30, 49, 60], des sous-graphes fortement connexes et des arbres enracinés [58].

Un graphe $G = (V, E)$ est dit k -somme ($k \in \mathbb{N}$) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ si $V = V_1 \cup V_2$; $|V_1 \cap V_2| = k$ et le sous graphe $(V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$ est complet.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de l'absorbant dans les graphes décomposables par des opérations de 1-sommes. Dans un premier temps, nous montrons que si G est la 1-somme de deux graphes G_1 et G_2 , alors un système linéaire décrivant le polytope $P_D(G)$ peut être obtenu à partir des systèmes décrivant les polytopes des absorbants associés à deux graphes liés à G_1 et G_2 . Par la suite, nous étudions des aspects algorithmiques de cette composition et nous présentons certaines applications de cette approche à la classe des cactus.

2.1 1-somme et le polyèdre des absorbants

Considérons un graphe $G = (V, E)$, la 1-somme de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$. Soit $\{u\} = V_1 \cap V_2$. Remarquons que u est un sommet d'articulation dans G .

Soit $\bar{G}_1 = (\bar{V}_1, \bar{E}_1)$ (resp. $\bar{G}_2 = (\bar{V}_2, \bar{E}_2)$) le graphe obtenu à partir de $G_1 = (V_1, E_1)$ (resp. $G_2 = (V_2, E_2)$) en ajoutant les sommets w_1, w_2, w_3 et w_4 , et les arêtes $\{uw_1, w_1w_2, w_2w_3, w_3w_4, w_4u\}$. Ces arêtes forment un cycle que l'on notera par C . Le graphe $\bar{G}_1$ (resp. $\bar{G}_2$) peut être également vu comme la 1-somme de G_1 (resp. G_2) et du cycle C (figure 2.1).

Dans la suite nous allons montrer qu'un système caractérisant le polytope $P_D(G)$ peut être obtenu à partir de deux systèmes caractérisant les polytopes $P_D(\bar{G}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$

2.1.1 Contraintes mixées

D'après les lemmes 1.5 et 1.7, un polytope $P_D(\bar{G}_k)$ pour $k = 1, 2$ peut être décrit par un système linéaire minimal ayant la forme suivante :

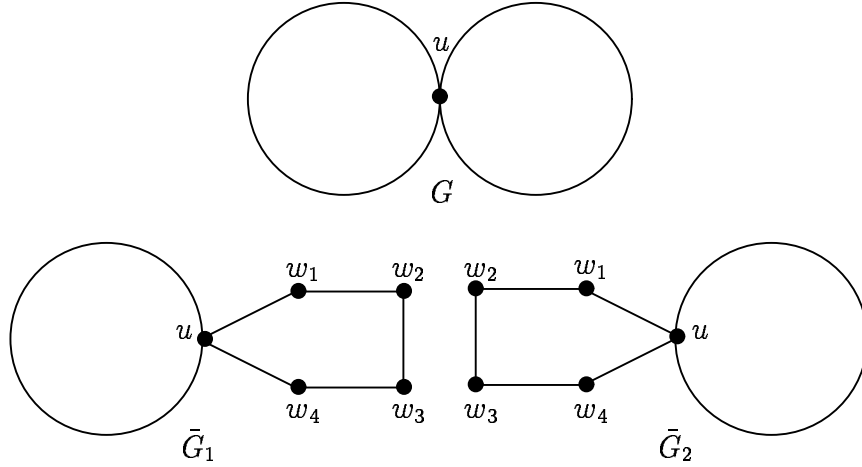


Figure 2.1 :

$$P_D(\bar{G}_k) \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{j \in V_k} a_i^k(j)x(j) \geq \alpha_i^k, & i \in I_1^k, \quad (2.1) \\ \sum_{j \in V_k} a_i^k(j)x(j) + x(w_1) + x(w_4) \geq \alpha_i^k, & i \in I_2^k, \quad (2.2) \\ x(u) + x(w_1) + x(w_2) \geq 1, & (2.3) \\ x(w_1) + x(w_2) + x(w_3) \geq 1, & (2.4) \\ x(w_2) + x(w_3) + x(w_4) \geq 1, & (2.5) \\ x(u) + x(w_4) + x(w_3) \geq 1, & (2.6) \\ x(u) + x(w_1) + x(w_2) + x(w_3) + x(w_4) \geq 2, & (2.7) \\ x(j) \leq 1, & \forall j \in \bar{V}_k, \quad (2.8) \\ x(j) \geq 0, & \forall j \in \bar{V}_k. \quad (2.9) \end{array} \right.$$

L'ensemble d'indices I_1^k est associé aux contraintes non triviales dont le support n'a aucune intersection avec les sommets de C . Et l'ensemble I_2^k est associé aux contraintes dont le support contient les sommets w_1 et w_4 , mais aucun des deux autres sommets w_2 et w_3 .

Notons par $[i,k]$ la contrainte de type (2.2) qui correspond à $i \in I_2^k$.

Définissons alors ce qui est une contrainte mixée et montrons qu'elle est valide pour le polyèdre associé à G .

Définition 2.1 Etant données deux contraintes $[i,1]$ et $[1,2]$, nous appelons *contrainte mixée* de $[i,1]$ et $[1,2]$, notée par $\langle i,1 \rangle$, la contrainte donnée par

$$\sum_{j \in V_1 \setminus \{u\}} a_i^1(j)x(j) + \sum_{j \in V_2 \setminus \{u\}} a_l^2(j)x(j) + (a_i^1(u) + a_l^2(u) - 1)x(u) \geq \alpha_i^1 + \alpha_l^2 - 1 \quad (2.10)$$

Lemme 2.1 *Les contraintes mixées sont valides pour $P_D(G)$.*

Preuve. Soit S un absorbant de G . Nous distinguons deux cas.

Cas 1. $u \in S$. Soient $S_1 = (S \cap V_1) \cup \{w_2\}$ et $S_2 = (S \cap V_2) \cup \{w_2\}$. Il est facile de voir que S_1 et S_2 sont des absorbants de $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$, respectivement. Ainsi nous avons

$$\sum_{j \in V_1} a_i^1(j)x^{S_1}(j) \geq \alpha_i^1, \quad (2.11)$$

$$\sum_{j \in V_2} a_l^2(j)x^{S_2}(j) \geq \alpha_l^2. \quad (2.12)$$

Des inégalités (2.11), (2.12) et du fait que $x^{S_1}(u) = x^{S_2}(u) = 1$, il s'ensuit que (2.10) est vérifiée par x^S .

Cas 2. $u \notin S$. Donc il existe un sommet $v \in N^*(u)$ qui appartient à S . Sans perte de généralité, on peut supposer que $v \in V_1$. Soit

$$S_3 = (S \cap V_1) \cup \{w_2, w_3\},$$

$$S_4 = (S \cap V_2) \cup \{w_1, w_3\}.$$

Les ensembles S_3 et S_4 sont respectivement des absorbants de $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$. Alors

$$\sum_{j \in V_1 \setminus \{u\}} a_i^1(j)x^{S_3}(j) \geq \alpha_i^1, \quad (2.13)$$

$$\sum_{j \in V_2 \setminus \{u\}} a_l^2(j)x^{S_4}(j) \geq \alpha_l^2 - 1, \quad (2.14)$$

En additionnant (2.13) et (2.14) nous obtenons que (2.10) est bien vérifiée par x^S . $\square$

2.1.2 Propriétés structurales

Maintenant nous donnons certaines propriétés structurales des polytopes $P_D(\bar{G}_k)$, $k = 1, 2$. Ces propriétés seront très utiles pour donner une description du polyèdre $P_D(G)$.

Définition 2.2 Soit un graphe $G = (V, E)$. Supposons que $P_D(G)$ est défini par un système $\{Ax \geq b, x \geq 0\}$ où A est une matrice de $\mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Si $a_1^T x \geq \alpha_1$ et $a_2^T x \geq \alpha_2$ sont deux contraintes valides pour $P_D(G)$, alors on dit que $a_2^T x \geq \alpha_2$ domine $a_1^T x \geq \alpha_1$ si:

i) Il existe un vecteur $y \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $a_2 = y^T A$, $\alpha_2 = y^T b$ (i.e. $a_2^T x \geq \alpha_2$ est une combinaison linéaire des contraintes du système $Ax \geq b$), et

ii) $a_2 \leq a_1$,
 $\alpha_2 \geq \alpha_1$.

Lemme 2.2 Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte valide pour $P_D(\bar{G}_k)$ $k \in \{1, 2\}$ avec $a(w_2) = a(w_3) = 0$ et $a(w_1) = a(w_4)$. Alors, il existe une contrainte $\bar{a}^T x \geq \bar{\alpha}$ valide pour $P_D(\bar{G}_k)$, qui domine $a^T x \geq \alpha$ avec $\bar{a}(w_2) = \bar{a}(w_3) = 0$ et $\bar{a}(w_1) = \bar{a}(w_4)$.

De plus, si $a(w_1) \neq 0 \neq a(w_4)$, (resp. $a(w_1) = a(w_4) = 0$) alors $\bar{a}^T x \geq \bar{\alpha}$ peut être considérée comme combinaison linéaire des contraintes (2.1), (2.2) (resp. (2.1)) et des contraintes $x(j) \leq 1$ pour tout $j \in V_k$.

Preuve. Supposons que $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(\bar{G}_1)$. Nous montrons le lemme pour $k = 1$. Soit $A_1 x \geq b_1$ le système donné par les contraintes (2.1) et (2.2). Puisque $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(\bar{G}_1)$, le programme linéaire

$$\min\{a^T x; x \in P_D(\bar{G}_1)\}, \quad (2.15)$$

admet une solution optimale x_0 telle que $a^T x_0 \geq \alpha$. (Remarquons que x_0 peut être considérée ici comme le vecteur d'incidence d'un absorbant de $\bar{G}_1$, ce que nous supposons par la suite.) Par la dualité en programmation linéaire, il doit exister une solution optimale duale $(y, z, t) \geq 0$, où $y = (y(i), i \in I_1^1 \cup I_2^1)$ est associé aux contraintes (2.1) et (2.2), $z = (z(j), j \in \bar{V}_1)$ aux contraintes $x(j) \geq 1, j \in \bar{V}_1$ et, $t = (t(w_1), \dots, t(w_4), t(C))$ aux contraintes (2.3) - (2.7), telle que

$$\begin{cases} yA_1^{(i)} - z(i) \leq a(i), & \forall i \in \bar{V}_1 \setminus C, \\ yA_1^{(u)} - z(u) + t(w_1) + t(w_4) + t(C) \leq a(u), \\ yA_1^{(w_1)} + t(w_1) + t(w_2) + t(C) - z(w_1) \leq a(w_1), \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{cases} yA_1^{(w_4)} + t(w_3) + t(w_4) + t(C) - z(w_4) \leq a(w_4), \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} t(w_1) + t(w_2) + t(w_3) + t(C) - z(w_2) \leq 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} t(w_2) + t(w_3) + t(w_4) + t(C) - z(w_3) \leq 0, \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\begin{cases} yb_1 - \sum_{i \in \bar{V}_1} z(i) + t(w_1) + t(w_2) + t(w_3) + t(w_4) + 2t(C) = a^T x_0 \geq \alpha, \end{cases}$$

où $A_1^{(i)}$ est la colonne de la matrice A_1 , associé au sommet i .

Le dual étant un programme linéaire à maximiser, les contraintes (2.18) et (2.19) impliquent que

$$\begin{aligned} z(w_2) &= z(w_3) = 0, \\ t(w_1) &= t(w_2) = t(w_3) = t(w_4) = t(C) = 0. \end{aligned}$$

De plus, nous avons $z(w_1) = z(w_4) = 0$. Pour montrer cela, notons d'abord qu'il existe au moins un sommet de $\{w_1, w_4\}$ pour lequel $x_0(w_i) = 0$. En effet, si $x_0(w_1) = x_0(w_4) = 1$, alors soit $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^{|V_1|}$ tel que

$$\bar{x}_0(i) = \begin{cases} x_0(i) & \text{si } i \in V_1, \\ 1 & \text{si } i \in \{w_1, w_3\}, \\ 0 & \text{si } i \in \{w_2, w_4\}. \end{cases}$$

$\bar{x}_0$ induit un absorbant de $\bar{G}_1$. Ainsi $\bar{x}_0$ est une solution du programme (2.15). Mais comme $a^T \bar{x}_0 < a^T x_0$, cela contredit le fait que x_0 soit une solution optimale pour ce programme.

En conséquence, nous pouvons supposer, par exemple, que $x_0(w_1) = 0$. Par les conditions des écarts complémentaires, on obtient $z(w_1) = 0$. Si $x_0(w_4) = 0$, alors d'une manière similaire on aura $z(w_4) = 0$. Si ceci n'est pas le cas, alors on peut considérer encore la solution $\bar{x}_0$ déjà définie. Comme $a(w_1) = a(w_4)$, nous avons $a^T \bar{x}_0 = a^T x_0$. Donc $\bar{x}_0$ est une solution optimale du programme linéaire (2.15), ce qui nous donne $z(w_4) = 0$.

Soit alors

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}(i) &= y A_1^{(i)} - z(i), & \forall i \in V_1, \\ \bar{a}(i) &= y A_1^{(i)}, & \forall i \in \{w_1, w_4\}, \\ \bar{a}(w_2) &= \bar{a}(w_3) = 0, \\ \bar{\alpha} &= y b_1 - \sum_{i \in V_1} z(i). \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Ainsi $\bar{a}^T x \geq \bar{\alpha}$ est la contrainte désirée.

Maintenant si $a(w_1) \neq 0 \neq a(w_4)$, il est clair, au vu du système (2.20), que $\bar{a}^T x \geq \bar{\alpha}$ est une combinaison linéaire des contraintes (2.1), (2.2) et des contraintes $x(i) \leq 1, \forall i \in V_1$.

Si $a(w_1) = a(w_4) = 0$, comme $z(w_1) = z(w_4) = 0$, il s'ensuit des contraintes (2.16) et

(2.17) que

$$yA_1^{(w_1)} = yA_1^{(w_4)} = \sum_{i \in I_2^1} y(i) \leq 0.$$

Puisque $y(i) \geq 0$ pour $i \in I_2^1$, nous obtenons $y(i) = 0$ pour tout $i \in I_2^1$. De plus, par le système (2.20), il en résulte que $\bar{a}^T x \geq \bar{\alpha}$ est une combinaison linéaire des contraintes (2.1) et $x(i) \leq 1$, $\forall i \in V_1$. $\square$

Lemme 2.3 *Soit les deux contraintes*

$$\sum_{i \in V_1} a^1(i)x(i) + a^1(w_1)x(w_1) + a^1(w_4)x(w_4) \geq \alpha_1 \quad (2.21)$$

$$\sum_{i \in V_2} a^2(i)x(i) + a^2(w_1)x(w_1) + a^2(w_4)x(w_4) \geq \alpha_2 \quad (2.22)$$

respectivement valides pour $P_D(\bar{G}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$, telles que

$$a^1(w_1) = a^1(w_4) = a^2(w_1) = a^2(w_4) = \sigma \neq 0.$$

Supposons que la contrainte (2.21) (resp. (2.22)) est une combinaison linéaire des contraintes (2.1), (2.2) et des contraintes $x(i) \leq 1$, pour tout $i \in V_1$ (resp. $i \in V_2$). Alors la contrainte mixée

$$\sum_{i \in V_1 \setminus \{u\}} a^1(i)x(i) + \sum_{i \in V_2 \setminus \{u\}} a^2(i)x(i) + (a^1(u) + a^2(u) - \sigma)x(u) \geq \alpha_1 + \alpha_2 - \sigma \quad (2.23)$$

est redondante par rapport au système défini par les contraintes triviales et les contraintes (2.1) et (2.2).

Preuve. La contrainte (2.21) (resp. (2.22)) peut être écrite comme la somme de trois inéquations

$c^1x \geq \alpha^1$, $b^1x + b^1(w_1)x(w_1) + b^1(w_4)x(w_4) \geq \beta^1$ et $d^1x \geq \delta^1$ (resp. $c^2x \geq \alpha^2$, $b^2x + b^2(w_1)x(w_1) + b^2(w_4)x(w_4) \geq \beta^2$ et $d^2x \geq \delta^2$) qui sont respectivement des combinaisons linéaires des contraintes (2.1), (2.2) et des contraintes $x(i) \leq 1$, $i \in V_1$ (resp. $i \in V_2$). Soit $y^1 = (y_i^1, i \in I_2^1)$ (resp. $y^2 = (y_i^2, i \in I_2^2)$) le vecteur impliquant la contrainte dont le support contient les sommets w_1 et w_4 . Nous avons

$$\sum_{i \in I_2^1} y_i^1 = \sum_{j \in I_2^2} y_j^2 = \sigma.$$

Ainsi, il existe $|I_2^1| \times |I_2^2|$ valeurs $x_{ij} \geq 0$ qui forment une solution du système de transport suivant

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_2^1} x_{ij} &= y_j^2, & \forall j \in I_2^2, \\ \sum_{j \in I_2^2} x_{ij} &= y_i^1, & \forall i \in I_2^1. \end{aligned}$$

Maintenant, pour toute paire $(i, j) \in I_2^1 \times I_2^2$ telle que $x_{ij} \neq 0$, mixons les contraintes $[i, 1]$ et $[j, 2]$ et multiplions la contrainte ainsi obtenue par x_{ij} . Soit $\tilde{a}^T x \geq \tilde{\alpha}$ la somme de toutes les contraintes mixées ainsi obtenues. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \tilde{a}(v) &= \sum_{i \in I_2^1} y_i^1 a_i^1(v), & \text{si } v \in V_1 \setminus \{u\}, \\ \tilde{a}(v) &= \sum_{j \in I_2^2} y_j^2 a_j^2(v), & \text{si } v \in V_2 \setminus \{u\}, \\ \tilde{a}(u) &= \sum_{i \in I_2^1} y_i^1 a_i^1(u) + \sum_{j \in I_2^2} y_j^2 a_j^2(u) - \sigma, \\ \tilde{\alpha} &= \sum_{i \in I_2^1} y_i^1 \alpha_i^1 + \sum_{j \in I_2^2} y_j^2 \alpha_j^2 - \sigma. \end{aligned}$$

En additionnant les contraintes $\tilde{a}^T x \geq \tilde{\alpha}$, $c^k x \geq \alpha^k$ et $d^k x \geq \delta^k$, pour $k = 1, 2$, nous obtenons la contrainte (2.23). $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser à la caractérisation du polytope des absorbants du graphe G à partir des polytopes associés à G_1 et G_2 .

2.1.3 Le polytope $P_D(G)$

Remarquons tout d'abord que les contraintes (2.1), pour $k = 1, 2$, sont valides pour $P_D(G)$.

Soit $P_0(G)$ le polytope dans $\mathbb{R}^{|V|}$ décrit par les contraintes triviales et les contraintes (2.1) et (2.10). Nous allons montrer dans ce qui suit que le polytope $P_0(G)$ est précisément le polytope $P_D(G)$. Pour démontrer ce résultat nous avons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 2.4 *Les contraintes de voisinage sont redondantes par rapport au système définissant $P_0(G)$.*

Preuve. Soit $v \in V$. Nous pouvons supposer que $v \in V_1$. Nous considérons deux cas.

Cas 1. $v \neq u$. Alors la contrainte

$$\sum_{i \in N(v)} x(i) \geq 1, \quad (2.24)$$

est valide pour $P_D(\bar{G}_1)$. D'après le lemme 2.2, la contrainte (2.24) est dominée par une contrainte valide de $P_D(\bar{G}_1)$, combinaison linéaire des contraintes (2.1) et $x(i) \leq 1$, pour $i \in V_1$. Donc (2.24) est redondante par rapport à $P_0(G)$.

Cas 2. $v = u$. Les contraintes suivantes

$$\sum_{i \in V_1 \cap N(u)} x(i) + x(w_1) + x(w_4) \geq 1, \quad (2.25)$$

$$\sum_{i \in V_2 \cap N(u)} x(i) + x(w_1) + x(w_4) \geq 1, \quad (2.26)$$

associées aux ensembles des voisins de u respectivement dans $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ sont valides pour $P_D(\bar{G}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$. Ainsi du lemme 2.2, il existe une contrainte valide $a^1 x \geq \alpha^1$ (resp. $a^2 x \geq \alpha^2$) de $P_D(\bar{G}_1)$ (resp. $P_D(\bar{G}_2)$), qui domine (2.25) (resp. (2.26)). De plus cette contrainte est combinaison linéaire des contraintes (2.1), (2.2) et $x(i) \leq 1$, $i \in V_1$ (resp. $i \in V_2$). D'où, nous avons le système suivant

$$\begin{cases} a^1(w_1) = a^1(w_4) \leq 1, \\ a^2(w_1) = a^2(w_4) \leq 1, \\ a^k(i) \leq 1 & \forall i \in \bar{V}_k \cap N(u), \quad k = 1, 2, \\ a^k(i) = 0 & \forall i \in \bar{V}_k \setminus N(u), \quad k = 1, 2, \\ \alpha^1 \geq 1, \quad \alpha^2 \geq 1. \end{cases}$$

Soit $\rho^1 = 1 - a^1(w_1)$, $\rho^2 = 1 - a^2(w_1)$. Notons que $\rho^1 \geq 0$ et $\rho^2 \geq 0$. Soit $b^{k^T} x \geq \beta^k$, pour $k = 1, 2$, la contrainte obtenue en additionnant $a^{k^T} x \geq \alpha^k$ et les contraintes $\rho^k(w_1) \geq 0$ et $\rho^k(w_4) \geq 0$. Donc $b^k(w_1) = b^k(w_4) = 1$, for $k = 1, 2$. Par le lemme 2.3 la contrainte mixée

$$\sum_{i \in V_1 \setminus \{u\}} b^1(i)x(i) + \sum_{j \in V_2 \setminus \{u\}} b^2(j)x(j) + (b^1(u) + b^2(u) - 1)x(u) \geq \beta^1 + \beta^2 - 1,$$

est redondante par rapport au système définissant $P_0(G)$. Il est simple de constater maintenant que cette contrainte domine (2.24). $\square$

Lemme 2.5 *Soit*

$$\sum_{i \in V_k} a(i)x(i) + x(w_1) + x(w_4) \geq \alpha$$

une contrainte valide de $P_D(\tilde{G}_k)$. Alors la contrainte

$$\sum_{i \in V_k \setminus \{u\}} a(i)x(i) + (a(u) - 1)x(u) \geq \alpha - 1 \quad (2.27)$$

est valide pour $P_D(G)$.

Preuve. Posons $k = 1$. Soit S un absorbant de G . Si $u \in S$, alors soit $S' = (S \cap V_1) \cup \{w_3\}$. Comme $S' \in D(\tilde{G}_1)$, nous avons alors $\sum_{i \in V_1} a(i)x^{S'}(i) \geq \alpha$. Ceci implique que (2.27) est vérifiée par x^S . Si au contraire $u \notin S$, alors il existe un sommet $w \neq u$ tel que $w \in N(u) \cap S$. Si $w \in V_1 \setminus \{u\}$, alors soit $S^1 = (S \cap V_1) \cup \{w_2, w_3\}$. Ainsi $S^1 \in D(\tilde{G}_1)$ et, en conséquence, $\sum_{i \in V_1} a(i)x^{S^1}(i) \geq \alpha$. Ce qui implique que (2.27) est vérifiée par x^S . Et si $w \in V_2 \setminus \{u\}$, alors soit $S^2 = (S \cap V_1) \cup \{w_1, w_3\}$. Il est évident que $S^2 \in D(\tilde{G}_1)$, et donc $\sum_{i \in V_1 \setminus \{u\}} a(i)x^{S^2}(i) + x(w_1) \geq \alpha$. Il s'ensuit donc que

$$\sum_{i \in V_1 \setminus \{u\}} a(i)x^S(i) = \sum_{i \in V_1 \setminus \{u\}} a(i)x^{S^2}(i) \geq \alpha - 1,$$

et par conséquent (2.27) est vérifiée par x^S , ce qui termine notre démonstration. $\square$

A ce niveau, nous avons mis en évidence les ingrédients nécessaires pour pouvoir montrer le principal résultat de ce chapitre. Ce résultat est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.6 $P_0(G) = P_D(G)$.

Preuve. D'après le lemme 2.4, toute solution réalisable entière de $P_0(G)$ constitue un vecteur d'incidence d'un absorbant de G . Comme $P_D(G) \subseteq P_0(G)$, il suffit, pour démontrer notre résultat, de vérifier que tout point extrême de $P_0(G)$ est entier. Supposons le contraire et considérons un point extrême fractionnaire x de $P_0(G)$. Deux cas peuvent se présenter.

Cas 1. $x(u) = 1$. Soit $\bar{x}_k \in \mathbb{R}^{|V_k|}$, pour $k = 1, 2$, la solution définie comme suit

$$\bar{x}_k(i) = \begin{cases} x(i) & \text{si } i \in V_k, \\ 1 & \text{si } i = w_3, \\ 0 & \text{si } i \in \{w_1, w_2, w_4\}. \end{cases}$$

Assertion 1. $\bar{x}_k \in P_D(\bar{G}_k)$.

Preuve. Nous montrons cette assertion pour $\bar{x}_1$, (la preuve étant similaire pour $\bar{x}_2$). Il est simple de voir que toutes les contraintes de $P_D(\bar{G}_1)$ dont le support n'intersecte pas $\{w_1, w_4\}$ sont vérifiées par $\bar{x}_1$. Considérons alors la contrainte

$$\sum_{j \in V_1} a_i^1(j)x(j) + x(w_1) + x(w_4) \geq \alpha_i^1 \quad (2.28)$$

de type (2.2) (*i.e.* le support contient $\{w_1, w_4\}$ mais pas $\{w_2, w_3\}$). D'après le lemme 2.5, la contrainte

$$\sum_{j \in V_1 \setminus \{u\}} a_i^1(j)x(j) + (a_i^1(u) - 1)x(u) \geq \alpha_i^1 - 1$$

est valide pour $P_D(G)$. Comme $x(u) = 1$, il s'ensuit que la contrainte (2.28) est vérifiée par $\bar{x}_1$.

Ainsi $\bar{x}_1 \in P_D(\bar{G}_1)$ et $\bar{x}_2 \in P_D(\bar{G}_2)$. Donc $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ peuvent s'écrire comme deux combinaisons convexes de sommets de $P_D(\bar{G}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$ respectivement, *i.e.*

$$\bar{x}_1 = \sum_{i=1, \dots, s} \lambda_i y_i, \quad (2.29)$$

$$\bar{x}_2 = \sum_{j=1, \dots, t} \mu_j z_j, \quad (2.30)$$

où $\sum_{i=1, \dots, s} \lambda_i = 1$, $\sum_{j=1, \dots, t} \mu_j = 1$, $\lambda_i \geq 0$, $\mu_j \geq 0$ et, y_i et z_j sont des points extrêmes entiers respectivement de $P_D(\bar{G}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$, pour $i = 1, \dots, s$, et $j = 1, \dots, t$. Ici nous remarquons que toute contrainte de $P_D(\bar{G}_1)$ (resp. $P_D(\bar{G}_2)$) qui est serrée pour $\bar{x}_1$ (resp. $\bar{x}_2$) est aussi serrée pour y_i , $i = 1, \dots, s$ (resp. z_j , $j = 1, \dots, t$). En particulier, comme $\bar{x}_1(u) = \bar{x}_2(u) = 1$, nous devons avoir $y_i(u) = 1$ et $z_j(u) = 1$, pour tout $i = 1, \dots, s$, et $j = 1, \dots, t$.

Soit $x^* \in \mathbb{R}^{|V|}$ la solution telle que

$$x^*(i) = \begin{cases} y_1(i) & \text{si } i \in V_1, \\ z_1(i) & \text{si } i \in V_2 \setminus \{u\}. \end{cases}$$

Assertion 2. Toute contrainte de $P_0(G)$ serrée pour x est aussi serrée pour x^* .

Preuve. Comme nous l'avons déjà noté, toute contrainte de type (2.1), (2.8) ou (2.9) qui est serrée pour x et donc pour $\bar{x}_k$ est aussi serrée pour x^* . Considérons alors une contrainte mixée $\langle i, l \rangle$ qui est serrée pour x . Etant donnée $x(u) = 1$, nous avons

$$\sum_{j \in V_1 \setminus \{u\}} a_i^1(j)x(j) + \sum_{j \in V_2 \setminus \{u\}} a_l^2(j)x(j) = \alpha_i^1 + \alpha_l^2 - a_i^1(u) - a_l^2(u).$$

Au vu du lemme 2.5, nous avons aussi

$$\sum_{j \in V_1 \setminus \{u\}} a_i^1(j)x(j) \geq \alpha_i^1 - a_i^1(u),$$

$$\sum_{j \in V_2 \setminus \{u\}} a_l^2(j)x(j) \geq \alpha_l^2 - a_l^2(u).$$

Il en résulte que les contraintes ci dessus sont serrées pour x et donc pour $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$, respectivement. Ce qui implique que la contrainte mixée $\langle i, l \rangle$ est aussi vérifiée à l'égalité par x^* .

En conséquence, toute contrainte de $P_0(G)$, serrée pour x est aussi serrée pour x^* . Comme $x \neq x^*$, ceci contredit le fait que x est un point extrême de $P_0(G)$.

Cas 2. $x(u) < 1$. Deux éventualités se présentent pour ce cas. En effet, soit il y a, au moins, une contrainte mixée qui est serrée pour x , soit aucune ne l'est.

Cas 2.1. x ne serre aucune contrainte mixée.

Toute contrainte non triviale de $P_0(G)$ qui est serrée pour x fait partie des contraintes de type (2.1). Soient $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{\bar{V}_1}$ et $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{\bar{V}_2}$ les deux solutions définies comme suit

$$\bar{x}_1(j) = \begin{cases} x(j) & \text{si } j \in V_1, \\ 1 & \text{si } j \in \{w_1, w_4\}, \\ 0 & \text{si } j \in \{w_2, w_3\}, \end{cases}$$

et

$$\bar{x}_2(j) = \begin{cases} x(j) & \text{si } j \in V_2, \\ 1 & \text{si } j \in \{w_1, w_4\}, \\ 0 & \text{si } j \in \{w_2, w_3\}. \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ appartiennent à $P_D(\bar{G}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$ respectivement. Ainsi $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ peuvent s'écrire sous la forme donnée par (2.29) et (2.30). Comme $x(u) < 1$ et par conséquent $\bar{x}_1(u) < 1$ et $\bar{x}_2(u) < 1$, il doit exister $i_0 \in \{1, \dots, s\}$ et $j_0 \in \{1, \dots, t\}$ tels que $y_{i_0}(u) = z_{j_0}(u) = 0$.

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^{|V|}$ la solution donnée par

$$\bar{x}(j) = \begin{cases} y_{i_0}(j) & \text{si } j \in V_1, \\ z_{j_0}(j) & \text{si } j \in V_2 \setminus \{u\}. \end{cases} \quad (2.31)$$

Il en résulte donc, que toute contrainte serrée pour x est en même temps serrée pour $\bar{x}$. Puisque $x \neq \bar{x}$, nous avons une contradiction.

Cas 2.2. Il existe une contrainte mixée serrée pour x .

Soient $r \in I_2^1$ et $s \in I_2^2$ tels que la contrainte mixée $\langle r, s \rangle$ soit serrée pour x . Nous avons alors

$$\sum_{j \in V^1 \setminus \{u\}} a_r^1(j)x(j) + \sum_{k \in V^2 \setminus \{u\}} a_s^2(k)x(k) + (a_r^1(u) + a_s^2(u) - 1)x(u) = \alpha_r^1 + \alpha_s^2 - 1 \quad (2.32)$$

Posons $\epsilon = x(u)$.

Assertion 3. Il existe $0 \leq \lambda \leq 1$ tel que

$$\sum_{j \in V^1} a_r^1(j)x(j) = \alpha_r^1 - 1 + \lambda, \quad (2.33)$$

$$\sum_{k \in V^2} a_s^2(k)x(k) = \alpha_s^2 - \lambda + \epsilon. \quad (2.34)$$

Preuve. En effet, notons d'abord que du lemme 2.5 et de l'égalité (2.32), il existe λ , $\lambda \geq \epsilon \geq 0$, pour lequel (2.33) et (2.34) sont vérifiées. Si $\lambda > 1$, alors de l'égalité (2.32) on obtient

$$\sum_{k \in V^2 \setminus \{u\}} a_s^2(k)x(k) + a_s^2(u)x(u) < \alpha_s^2 - 1 + \epsilon.$$

Comme $x(u) = \epsilon$, ceci contredit le lemme 2.5.

Soient $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^{|\bar{V}_1|}$ et $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}^{|\bar{V}_2|}$ les solutions définies comme suit

$$\bar{x}_1(j) = \begin{cases} x(j) & \text{si } j \in V_1, \\ 1 - \lambda & \text{si } j = w_1, \\ 1 & \text{si } j = w_3, \\ \lambda - \epsilon & \text{si } j = w_2, \\ 0 & \text{si } j = w_4, \end{cases}$$

et

$$\bar{x}_2(j) = \begin{cases} x(j) & \text{si } j \in V_2, \\ \lambda - \epsilon & \text{si } j = w_1, \\ 1 & \text{si } j = w_3, \\ 1 - \lambda & \text{si } j = w_2, \\ 0 & \text{si } j = w_4. \end{cases}$$

Nous allons vérifier que $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ appartiennent respectivement à $P_D(\bar{G}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$. Nous montrons que $\bar{x}_1 \in P_D(\bar{G}_1)$ (la démonstration étant similaire pour $\bar{x}_2 \in P_D(\bar{G}_2)$). Il est évident que $\bar{x}_1$ ($\bar{x}_2$) vérifie les contraintes (2.1) et les contraintes triviales. Considérons donc une inéquation de type

$$\sum_{j \in V^1} a_i^1(j)x(j) + x(w_1) + x(w_4) \geq \alpha_i^1. \quad (2.35)$$

Assertion 4. Il existe $\lambda' \geq \lambda$, tel que

$$\sum_{j \in V^1} a_i^1(j)\bar{x}_1(j) = \sum_{j \in V^1} a_i^1(j)x(j) = \alpha_i^1 - 1 + \lambda'. \quad (2.36)$$

Preuve. En effet, du lemme 2.5, il existe $\lambda' \geq 0$ tel que (2.36) soit vérifiée. Si $\lambda' < \lambda$, alors il est simple de voir qu'en mixant les contraintes (2.35) et $[s, 2]$, nous obtenons une inéquation non vérifiée par x , une contradiction. $\square$

Par l'assertion 4, $\bar{x}_1$ vérifie l'inéquation (2.35). Donc, $\bar{x}_1 \in P_D(\bar{G}_1)$ et $\bar{x}_2 \in P_D(\bar{G}_2)$ et par conséquent, $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ peuvent s'écrire respectivement sous les formes données par (2.29) et (2.30). Comme $0 \leq \lambda \leq 1$ et $\epsilon < 1$, nous avons alors $\sigma = \max(1 - \lambda, \lambda - \epsilon) > 0$. Sans perte de généralité, on suppose que $\sigma = 1 - \lambda > 0$. Donc, il doit exister $i_0 \in \{1, \dots, s\}$ et $j_0 \in \{1, \dots, t\}$ tels que $y_{i_0}(w_1) = z_{j_0}(w_2) = 1$. Puisque y_{i_0} (resp. z_{j_0}) vérifie à l'égalité les contraintes de $P_D(\bar{G}_1)$ (resp. $P_D(\bar{G}_2)$) qui sont serrées pour $\bar{x}_1$ (resp. $\bar{x}_2$), nous avons alors

$$\begin{cases} y_{i_0}(u) & = & z_{j_0}(u) & = & 0, \\ y_{i_0}(w_3) & = & z_{j_0}(w_3) & = & 1, \\ y_{i_0}(C) & = & z_{j_0}(C) & = & 2. \end{cases}$$

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^{|V|}$ la solution définie par (2.31). Alors toute contrainte serrée pour x est aussi serrée pour $\bar{x}$. En effet, toute contrainte de type (2.1), serrée pour x et donc

pour $\bar{x}_1$ (resp. $\bar{x}_2$), est aussi serrée pour y_{i_0} (resp. z_{i_0}) et donc l'est aussi pour $\bar{x}$.

En outre, considérons une contrainte mixée $\langle i, l \rangle$ vérifiée à l'égalité par x ,

$$\sum_{j \in V^1 \setminus \{u\}} a_i^1(j)x(j) + \sum_{k \in V^2 \setminus \{u\}} a_l^2(k)x(k) + (a_i^1(u) + a_l^2(u) - 1)x(u) = \alpha_i^1 + \alpha_l^2 - 1. \quad (2.37)$$

Alors, on a les égalités suivantes

$$\sum_{j \in V^1} a_i^1(j)x(j) = \alpha_i^1 - 1 + \lambda, \quad (2.38)$$

$$\sum_{k \in V^2} a_l^2(k)x(k) = \alpha_l^2 - \lambda + \epsilon. \quad (2.39)$$

En effet, d'après l'assertion 4, il existe un $\lambda' \geq \lambda$ tel que (2.36) soit vérifiée. Si $\lambda' > \lambda$, alors (2.37) implique que

$$\sum_{k \in V^2} a_l^2(k)x(k) < \alpha_l^2 - \lambda + \epsilon. \quad (2.40)$$

En additionnant (2.33) et (2.40) et en posant $a_0 = a_r^1(u) + a_l^2(u) - 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V^1 \setminus \{u\}} a_r^1(j)x(j) + \sum_{k \in V^2 \setminus \{u\}} a_l^2(k)x(k) + a_0x(u) &< \alpha_r^1 - 1 + \lambda + \alpha_l^2 \\ &< \alpha_r^1 + \alpha_l^2 - 1, \end{aligned}$$

une contradiction. Ainsi $\lambda' = \lambda$ et donc les égalités (2.38) et (2.39) sont vérifiées.

En conséquence, les solutions $\bar{x}_1$ et $\bar{x}_2$ vérifient les contraintes $[i, 1]$ et $[1, 2]$ à l'égalité. Donc les contraintes $[i, 1]$ et $[1, 2]$ sont serrées respectivement pour y_{i_0} et z_{i_0} . Ceci implique que la contrainte mixée $\langle i, l \rangle$ est serrée pour $\bar{x}$. Ce qui termine la preuve de notre théorème. $\square$

Le théorème 2.6 nous permet de donner un système linéaire caractérisant $P_D(G)$, le polytope des absorbants d'un graphe G qui est la 1-somme de deux graphes G_1 et G_2 , à partir des systèmes linéaires caractérisant les polytopes $P_D(\bar{G}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$. Dans ce qui suit nous allons montrer que ce système est aussi minimal. Mais tout d'abord, nous donnons quelques lemmes techniques.

Lemme 2.7 *Si le vecteur d'incidence d'un absorbant A de G vérifie à l'égalité une contrainte $a_i^k x \geq \alpha_i$ de type (2.2) alors $|A \cap \{u, w_1, w_4\}| \leq 1$.*

Preuve. Si $|A \cap \{u, w_1, w_4\}| \geq 2$, alors il existe un sommet $z \in \{u, w_1, w_4\}$ tel que $A' = (A \setminus \{z\}) \cup \{w_2, w_3\}$ soit un absorbant de G . Ceci implique que $a_i^k x^{A'} < a_i^k x^A = \alpha_i$, ce qui est une contradiction. $\square$

Lemme 2.8 *Soit $F(\bar{G}_k)$ le polytope défini par les contraintes (2.1)-(2.9) et la contrainte*

$$-x(u) - x(w_1) - x(w_2) - x(w_3) - x(w_4) \geq -2.$$

Alors les inégalités (2.2) définissent des facettes de $F(\bar{G}_k)$.

Preuve. Puisque (2.2) définit une facette de $P_D(\bar{G}_k)$ alors il existe $|\bar{V}_k|$ absorbants $S_1, \dots, S_{|\bar{V}_k|}$ de $\bar{G}_k$ dont les vecteurs d'incidence vérifient (2.2) à l'égalité. De plus, d'après le lemme 2.7 ces absorbants vérifient $|S_i \cap \{u, w_1, w_4\}| \leq 1 \ \forall i = 1, \dots, |\bar{V}_k|$.

Maintenant, on va ordonner les ensembles S_i de telle manière que $S_1, \dots, S_r$ soient tels que $|S_i \cap \{u, w_1, w_4\}| = 1$ et $|S_i \cap \{w_2, w_3\}| = 1 \ \forall i = 1, \dots, r$, $S_{r+1}, \dots, S_{r+s}$ soient tels que $|S_i \cap \{u, w_1, w_4\}| = 1$ et $w_2, w_3 \in S_i \ \forall i = r+1, \dots, r+s$ et $S_{r+s+1}, \dots, S_{|\bar{V}_k|}$ soient tels que $S_i \cap \{u, w_1, w_4\} = \emptyset \ \forall i = r+s+1, \dots, |\bar{V}_k|$. Notons que $w_2, w_3 \in S_i$, $\forall i = r+s+1, \dots, |\bar{V}_k|$. Notons aussi que pour chaque ensemble S_i , $i = r+1, \dots, r+s$ il existe un sommet $\bar{v} \in \{w_2, w_3\}$ tel que $S_i \setminus \{\bar{v}\}$ est un absorbant de $\bar{G}_k$. On suppose que $\bar{v} = w_2$ pour $i = r+1, \dots, r+p$ et $\bar{v} = w_3$ pour $i = r+p+1, \dots, r+s$. Considérons les ensembles suivants

$$\begin{aligned} S'_i &= S_i && \text{pour } i = 1, \dots, r \text{ et } i = r+s+1, \dots, |\bar{V}_k|, \\ S'_i &= S_i \setminus \{w_2\} && \text{pour } i = r+1, \dots, r+p, \\ S'_i &= S_i \setminus \{w_3\} && \text{pour } i = r+p+1, \dots, r+s. \end{aligned}$$

Il est évident que les ensembles S'_i , $i = 1, \dots, |\bar{V}_k|$ sont des absorbants de $\bar{G}_k$ dont les vecteurs d'incidence sont des solutions de $F(\bar{G}_k)$. Maintenant il suffit de montrer que la matrice donnée par ces vecteurs est de rang $|\bar{V}_k| - 1$.

Supposons que pour $i = 1, \dots, l$, $l \leq r$, $S_i \cap \{w_2, w_3\} = \{w_3\}$ et pour $i = l+1, \dots, r$, $S_i \cap \{w_2, w_3\} = \{w_2\}$. Puisque (2.2) est une contrainte non triviale, il existe un absorbant S_j contenant u . On peut supposer que les ensembles S_1 et S_{l+1} sont respectivement $(S_j \setminus \{w_2\}) \cup \{w_3\}$ et $(S_j \setminus \{w_3\}) \cup \{w_2\}$.

Soit M (resp. M') la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|\bar{V}_k|}}$ (resp.

$x^{S'_1}, \dots, x^{S'_{|\bar{V}_k|}}$). La matrice M a la forme suivante

$$M = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ w_2 & 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & 1 \dots 1 & 1 \dots 1 & 1 \dots 1 \\ w_3 & \underbrace{1 \dots 1}_l & \underbrace{0 \dots 0}_{r-l} & \underbrace{1 \dots 1}_p & \underbrace{1 \dots 1}_{s-p} & \underbrace{1 \dots 1}_{|\bar{V}_k| - r - s} \end{bmatrix}.$$

Soit $\bar{M}$ la matrice obtenue de M en retranchant la première colonne de M de la colonne $l + 1$ et en ajoutant le vecteur résultant à chacune des colonnes $r + p + 1, \dots, r + s$. La matrice M' peut être obtenue en modifiant une ligne de $\bar{M}$ (la ligne correspondant à w_2). Puisque $\bar{M}$ est non singulière alors M' est de rang $|\bar{V}_k| - 1$. $\square$

Théorème 2.9 *Les contraintes (2.10) définissent des facettes de $P_D(G)$.*

Preuve. Pour ce faire, nous montrons qu'il existe un vecteur $\bar{x} \in P_D(G)$ qui vérifie à l'égalité une contrainte (2.10) et avec inégalité stricte toutes les autres contraintes. Soit $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ (resp. $T = \{T_1, \dots, T_m\}$) l'ensemble des absorbants de $\bar{G}_1$ (resp. $\bar{G}_2$) dont les vecteurs d'incidence vérifient à l'égalité la contrainte [i,1] (resp. [1,2]) et la contrainte $x(C) \geq 2$. Notons que les vecteurs $x^{S_1}, \dots, x^{S_n}$ (resp. $x^{T_1}, \dots, x^{T_m}$) sont des points extrêmes de $F(\bar{G}_1)$ (resp. $F(\bar{G}_2)$). Pour chaque contrainte de $F(\bar{G}_1)$ (resp. $F(\bar{G}_2)$) différente de [i,1] (resp. [1,2]), il existe un S_i (resp. T_j) tel que x^{S_i} (resp. x^{T_j}) vérifie cette contrainte avec inégalité stricte.

Par le lemme 2.7, nous avons $|S_i \cap \{u, w_1, w_4\}| \leq 1$, pour $i = 1, \dots, n$ (resp. $|T_j \cap \{u, w_1, w_4\}| \leq 1$, pour $j = 1, \dots, m$). Comme (2.2) est différente des contraintes triviales, il doit exister $S_{i_1}, S_{i_2}, S_{i_3} \in S$ tels que $u \in S_{i_1}$, $w_1 \in S_{i_2}$ et $w_4 \in S_{i_3}$.

Assertion. Il existe un absorbant $S_{i_4} \in S$ tel que $S_{i_4} \cap \{u, w_1, w_4\} = \emptyset$.

Preuve. En effet, si un tel absorbant n'existe pas alors pour tout absorbant S_i nous devons avoir $|S_i \cap \{u, w_1, w_4\}| = 1$. Or ceci implique que la facette définie par (2.2) est contenue dans l'hyperplan défini par l'équation $x(u) + x(w_1) + x(w_4) = 1$. Ce qui est impossible. De la même manière, il existe $T_{j_1}, T_{j_2}, T_{j_3}, T_{j_4} \in T$ tels que

$u \in T_{i_1}$, $w_1 \in T_{i_2}$, $w_4 \in T_{i_3}$ et $T_{i_4} \cap \{u, w_1, w_4\} = \emptyset$. $\square$

En conséquence, pour tout absorbant S_i , $i = 1, \dots, n$, on peut associer un absorbant T_{j_i} tel que $Z_i = (S_i \cup T_{j_i}) \setminus \{w_1, \dots, w_4\}$ soit un absorbant de G dont le vecteur d'incidence vérifie à l'égalité la contrainte (2.10). De même, à chaque absorbant T_j , $j = 1, \dots, m$, on peut associer un absorbant S_{i_j} tel que $Z_{n+i} = (S_{i_j} \cup T_j) \setminus \{w_1, \dots, w_4\}$ soit un absorbant de G dont le vecteur d'incidence serre aussi la contrainte (2.10). Soit $\{Z_1, \dots, Z_r\}$, avec $r = n + m$, l'ensemble de tous les absorbants ainsi construits. Alors

$$\bar{x} = \frac{1}{r} (x^{Z_1} + \dots + x^{Z_r})$$

sera le vecteur désiré. $\square$

Aussi, il n'est pas difficile de voir que les contraintes (2.1) définissent des facettes pour $P_D(G)$. En conséquence, d'après les théorèmes 1.3 et 2.9 toute contrainte non triviale de $P_0(G)$ définit une facette de $P_D(G)$, et par conséquent $P_0(G)$ est une description minimale de $P_D(G)$.

Remarque 2.3 Une contrainte mixée obtenue à partir de deux contraintes de voisinage associées à u est une contrainte de voisinage.

Corollaire 2.10 *Si les systèmes décrivant $P_D(\bar{G}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$ sont minimaux alors le système décrivant $P_D(G)$ est minimal.*

Corollaire 2.11 *Si les contraintes de $P_D(\bar{G}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$ non triviales et différentes de la contrainte du cycle $C = \{u, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ sont toutes des contraintes de voisinage, alors les contraintes non triviales de $P_D(G)$ sont également toutes des contraintes de voisinage.*

Un exemple de polytopes vérifiant le corollaire ci-dessus est le polytope des absorbants des arbres.

Soit $\bar{G}$ (resp. $\bar{\bar{G}}_1$) obtenu à partir de G (resp. $\bar{G}_1$) en ajoutant les sommets u_1, u_2, u_3, u_4 et les arêtes $uu_1, u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u$. Il est à noter que $\bar{G}$ (resp. $\bar{\bar{G}}_1$) est la 1-somme de G (resp. $\bar{G}_1$) et du cycle (u_1, u_2, u_3, u_4) (voir figure 2.2).

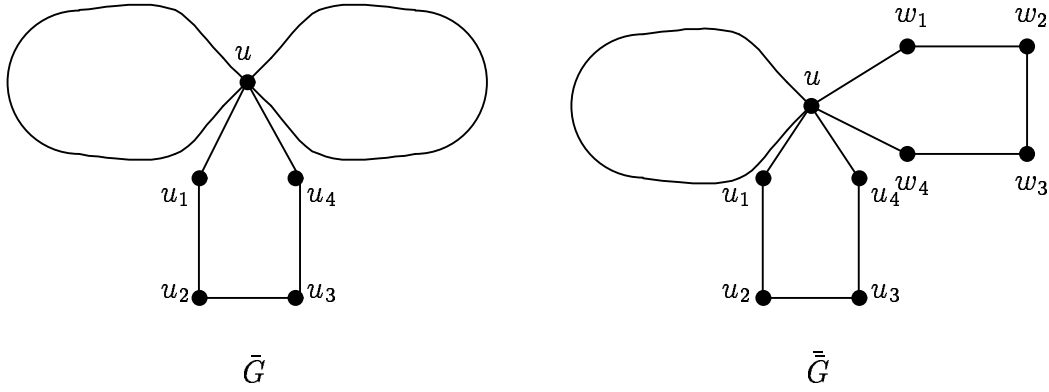


Figure 2.2 :

Si on connaît une description des polytopes $P_D(\bar{\bar{G}}_1)$ et $P_D(\bar{G}_2)$, une caractérisation complète du polytope $P_D(\bar{G})$ peut être obtenue par les procédures du théorème 2.6. Dans ce qui suit, nous allons montrer qu'une description de $P_D(\bar{G})$ peut être obtenue d'une manière très simple à partir de celle de $P_D(G)$. Ceci est basé sur le lemme suivant.

Lemme 2.12 *Les contraintes définissant des facettes de $P_D(\bar{\bar{G}}_1)$ dont le support intersecte $\{w_1, w_4, u_1, u_4\}$ et qui sont différentes des contraintes triviales, des contraintes de voisinage et des deux contraintes de cycles de type (1.5) sont de la forme*

$$\sum_{j \in V_1} a_i^1(j)x(j) + x(w_1) + x(w_4) + x(u_1) + x(u_4) \geq \alpha_i^1, \quad i \in I_2^1$$

où I_2^1 est l'ensemble d'indices des contraintes (2.2).

Preuve. Soit $a^T x \geq \alpha$ une telle contrainte. D'après le lemme 1.7 on a

$$a(w_2) = a(w_3) = a(u_2) = a(u_3) = 0, \quad a(w_1) = a(w_4) \quad \text{et} \quad a(u_1) = a(u_4).$$

Puisque $a^T x \geq \alpha$ est non triviale, il existe un absorbant S_1 tel que $w_1 \in S_1$ et $a^T x^{S_1} = \alpha$. Soit $S'_1 = (S_1 \setminus \{w_1\}) \cup \{w_2, u_1\}$. Il est clair que $S'_1 \in D(\bar{\bar{G}}_1)$.

Puisque $a(w_2) = 0$, ceci implique que $a(u_1) \geq a(w_1)$. Par symétrie on obtient $a(w_1) \geq a(u_1)$ et donc

$$a(u_1) = a(u_4) = a(w_1) = a(w_4)$$

Donc $a^T x \geq \alpha$ est bien de la forme

$$\sum_{j \in V_1} a_i^1(j)x(j) + x(w_1) + x(w_4) + x(u_1) + x(u_4) \geq \alpha$$

Ainsi, pour montrer ce lemme il suffit de montrer que la contrainte

$$\sum_{j \in V_1} a_i^1(j)x(j) + x(w_1) + x(w_4) \geq \alpha \quad (2.41)$$

définit une facette de $P_D(\bar{G}_1)$.

Il est simple de voir que (2.41) est valide pour $P_D(\bar{G}_1)$. Maintenant, puisque $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(\bar{G}_1)$, il existe $|\bar{V}_1| = r$ absorbants $S_1, \dots, S_r$ dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité et sont linéairement indépendants. On peut ordonner les ensembles S_i de telle manière que $S_1, \dots, S_{r_1}$ contiennent u_1 , $S_{r_1+1}, \dots, S_{r_2}$ contiennent u_4 et $S_{r_2+1}, \dots, S_r$ ne contiennent ni u_1 ni u_4 . Notons que $|S_i \cap \{u_1, u_4, w_1, w_4\}| \leq 1 \ \forall i = 1, \dots, r$. En effet, si ceci n'est pas le cas alors il existerait pour un certain ensemble S_i , un sommet $\bar{u} \in \{u_1, u_4, w_1, w_4\}$ tel que l'ensemble $\bar{S}_i = (S_i \setminus \{\bar{u}\}) \cup \{u_2, u_3, w_2, w_3\}$ serait un absorbant de $\bar{G}_1$. De plus, on aurait $a^T x^{\bar{S}_i} < \alpha$, une contradiction. En conséquence, $\{w_2, w_3\} \subseteq S_i, \forall i = 1, \dots, r_2$. Soient les ensembles

$$\begin{aligned} S'_i &= (S_i \setminus \{u_1, \dots, u_4\}) \cup \{w_1\}, \quad \forall i = 1, \dots, r_1, \\ S'_i &= (S_i \setminus \{u_1, \dots, u_4\}) \cup \{w_4\}, \quad \forall i = r_1 + 1, \dots, r_2, \\ S'_i &= S_i \setminus \{u_1, \dots, u_4\}, \quad \forall i = r_2 + 1, \dots, r, \end{aligned}$$

qui sont des absorbants de $\bar{G}_1$. De plus, les vecteurs $x^{S'_i}, i = 1, \dots, r$, vérifient tous (2.41) à l'égalité. Soit M la matrice donnée par les vecteurs $x^{S_1}, \dots, x^{S_r}$. M peut s'écrire sous la forme suivante

$$M = \begin{bmatrix} & & & M_1 & & & \\ & & & & & & \\ w_1 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & & & & \\ w_4 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & & & & M_6 \\ & & & & & & \\ w_2 & & & & & & \\ w_3 & M_2 & M_4 & & & & M_7 \\ u_1 & 1 \dots 1 & 0 \dots 0 & 0 \dots 0 & & & \\ u_4 & 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & 0 \dots 0 & & & \\ u_2 & & & & & & \\ u_3 & M_3 & M_5 & & & & M_8 \end{bmatrix}$$

où $M_1, \dots, M_8$ sont des matrices en 0 – 1. Soit M' la matrice obtenue de M en ajoutant la ligne correspondant à u_1 (resp. u_4) à celle correspondant à w_1 (resp. w_4). Et soit M'' la matrice obtenue de M' en supprimant les 4 dernières lignes correspondant à $u_1, \dots, u_4$. On remarque que M'' n'est rien d'autre que la matrice formée des vecteurs d'incidence des ensembles $S'_1, \dots, S'_r$. Puisque M' est non singulière alors M'' est de rang $r - 4$ et par conséquent (2.41) définit une facette de $P_D(\bar{G}_1)$. $\square$

Corollaire 2.13 *Le polytope $P_D(\bar{G})$ est défini par les contraintes triviales, les contraintes (2.1), les contraintes $a^T x + x(u_1) + x(u_4) \geq \alpha$ où $a^T x \geq \alpha$ est une contrainte de type (2.10) et les contraintes de la forme (2.3) - (2.7) liées au cycle $\{u, u_1, u_2, u_3, u_4\}$.*

2.2 Aspects algorithmiques

Les aspects polyédraux et algorithmiques pour les problèmes d'optimisation combinatoire sont généralement très liés. Dans cette section nous allons examiner les conséquences algorithmiques de la décomposition étudiée dans la section précédente. Nous allons montrer que le problème de l'absorbant minimum peut être lui aussi décomposé quand le graphe $G = (V, E)$ est la 1-somme de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$. Nous allons montrer que le calcul d'un absorbant minimum dans G peut se ramener au calcul d'un absorbant minimum dans $\bar{G}_2$ en associant des poids appropriés aux sommets du cycle C .

Soit $c \in \mathbb{R}_+^{|V|}$ un système de poids associé aux sommets de G . Soient c^1 et c^2 les restrictions de c dans V_1 et V_2 . Notons par ω_k (resp. $\bar{\omega}_k$) le poids d'un absorbant minimum dans G_k contenant u (resp. ne contenant pas u). Soit $\bar{\bar{\omega}}_k$ le poids d'un absorbant minimum du graphe $G \setminus u$ ne contenant aucun des sommets adjacents à u . Soient S_k , $\bar{S}_k$ et $\bar{\bar{S}}_k$ les ensembles dont les poids sont respectivement ω_k , $\bar{\omega}_k$ et $\bar{\bar{\omega}}_k$. Remarquons que ces absorbants peuvent être calculés dans $\bar{G}_k$ en considérant un système de poids approprié sur les sommets u, w_1, w_2, w_3 et w_4 .

Théorème 2.14 Soit $\bar{c}_2 \in \mathbb{R}_+^{|\bar{V}_2|}$ le système de poids associé à $\bar{V}_2$ défini par :

$$\begin{aligned}\bar{c}_2(v) &= c_2(v), \quad \forall v \in V_2 \setminus \{u\} \\ \bar{c}_2(u) &= \omega_1, \\ \bar{c}_2(w_1) &= \bar{\omega}_1, \\ \bar{c}_2(w_2) &= \bar{\bar{\omega}}_1, \\ \bar{c}_2(w_3) &= 0, \\ \bar{c}_2(w_4) &= M,\end{aligned}$$

où M est un scalaire suffisamment grand. Soit S_2^* un absorbant de poids minimum dans $\bar{G}_2$ par rapport à $\bar{c}_2$ et soit ω_2^* son poids. Si $\bar{\bar{\omega}}_1 \leq \bar{\omega}_1$ (resp. $\bar{\bar{\omega}}_1 > \bar{\omega}_1$) alors l'ensemble S^* tel que

$$S^* = \begin{cases} (S_2^* \setminus C) \cup S_1 & \text{si } u \in S_2^*, \\ (S_2^* \setminus C) \cup \bar{S}_1 & \text{si } N(u) \cap S_2^* = \emptyset, \\ (S_2^* \setminus C) \cup \bar{\bar{S}}_1 & \text{si } u \notin S_2^* \text{ et } (N(u) \setminus \{u\}) \cap S_2^* \neq \emptyset. \end{cases}$$

resp.

$$S^* = \begin{cases} (S_2^* \setminus C) \cup S_1 & \text{si } u \in S_2^*, \\ (S_2^* \setminus C) \cup \bar{S}_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est un absorbant de poids minimum dans G dont le poids ω^* est égal à ω_2^* .

Preuve. On a

$$\omega^* = \min(\omega_1 + \omega_2 - c(u), \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_1 + \bar{\bar{\omega}}_2, \bar{\bar{\omega}}_1 + \bar{\omega}_2). \quad (2.42)$$

On distingue deux cas.

Cas 1. $\bar{\bar{\omega}}_1 \leq \bar{\omega}_1$:

Par (2.42), on a

$$\begin{aligned}\omega^* &= \min(\omega_1 + \omega_2 - c(u), \bar{\omega}_1 + \bar{\bar{\omega}}_2, \bar{\bar{\omega}}_1 + \bar{\omega}_2) \\ &= \min(\omega_2 + \bar{c}_2(u) + \bar{c}_2(w_3) - c(u), \bar{\bar{\omega}}_2 + \bar{c}_2(w_1) + \bar{c}_2(w_3), \bar{\omega}_2 + \bar{c}_2(w_2) + \bar{c}_2(w_3)) \\ &= \omega_2^*.\end{aligned}$$

Cas 2. $\bar{\bar{\omega}}_1 > \bar{\omega}_1$:

Par (2.42), on a

$$\begin{aligned}\omega^* &= \min(\omega_1 + \omega_2 - c(u), \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_1 + \bar{\bar{\omega}}_2) \\ &= \min(\omega_1 + \bar{c}_2(u) + \bar{c}_2(w_3) - c(u), \bar{\bar{\omega}}_2 + \bar{c}_2(w_1) + \bar{c}_2(w_3), \bar{\bar{\omega}}_2 + \bar{c}_2(w_1) + \bar{c}_2(w_3)) \\ &= \omega_2^*.\square\end{aligned}$$

Le théorème 2.14 décrit une procédure de décomposition dans le calcul d'un absorbant minimum dans un graphe G où G est obtenu par des opérations de 1-sommes

à partir d'au moins deux graphes. En effet, considérons un graphe $G = (V, E)$ obtenu par des opérations de 1-sommes à partir des graphes $G_1, \dots, G_n$. Supposons que G est construit en composant dans l'ordre les graphes $G_1, \dots, G_n$. Posons $H_1 = G_1$, $H_n = G$. Et soit H_{i+1} le graphe, la 1-somme de H_i et G_{i+1} pour $i = 1, \dots, n-1$.

D'après le lemme précédent, un absorbant minimum dans G peut être déterminé en calculant un absorbant minimum dans $\bar{H}_{n-1}$ par rapport à un système de poids approprié, déduit de G_n . Ce problème peut maintenant être décomposé de la même manière et ainsi de suite.

Soit $\tilde{G}_i$, $i = 1, \dots, n$ le graphe obtenu à partir de G_i en ajoutant un 5-cycle C (un cycle sur 5 sommets) adjacent à chaque sommet $v \in V_i \cap V_j$, $j \neq i$. En d'autre terme, $\tilde{G}_i$ est le graphe obtenu par des opérations de 1-sommes à partir des graphes G_i et les cycles $C_1, \dots, C_k$ où $C_j = C \forall j = 1, \dots, k$; $C_j \cap V_i = v_j$ et $\{v_1, \dots, v_k\} = \bigcup_{j \neq i} \{V_i \cap V_j\}$.

Nous considérons la séquence de graphes suivante

$$G^n = G, \quad T_n = G^n, \quad M_{n-1} = H_{n-1},$$

$$G^i \text{ est la 1-somme de } T_i \text{ et } M_{i-1}, \text{ pour } i = n-1, \dots, 1, \quad G^{i-1} = \bar{M}_{i-1}.$$

$$\text{Où } \bar{T}_i = \tilde{G}_i \text{ pour } i = 1, \dots, n.$$

Un absorbant de poids minimum dans G^i peut être calculé dans G^{i-1} en considérant un système de poids approprié déduit de $\bar{T}_i$. Donc, un absorbant minimum dans G peut être déterminé d'une manière récursive à partir des graphes $\tilde{G}_i$, $i = 1, \dots, n$. Pour ce faire on a besoin de calculer dans chaque graphe $\tilde{G}_i$, $i = 1, \dots, n$, 3 absorbants minimums. Donc on a le corollaire suivant

Corollaire 2.15 *Soit G un graphe obtenu par des opérations de 1-sommes à partir des graphes $G_1, \dots, G_n$. Si le problème de l'absorbant minimum est polynomial dans $\tilde{G}_1, \dots, \tilde{G}_n$, alors il est polynomial dans G .*

Dans la section suivante, nous discutons des applications des résultats présentés ci-dessus dans la classe des cactus.

2.3 Applications aux cactus

La technique discutée dans la section 2.1 est très utile pour les graphes qui se décomposent par des sommets d'articulation. Ceci est le cas des cactus.

Un *cactus* est un graphe où chaque composante connexe maximale ne contenant pas de sommets d'articulation est soit une arête, soit un cycle sans corde (voir figure 2.3). Pour décrire le polytope $P_D(G)$ quand G est un cactus, nous devons décomposer d'une manière récursive le graphe. Pour chaque sommet d'articulation nous devons ajouter un cycle à 5 sommets à chaque composante. On peut être obligé d'ajouter plus d'un cycle à 5 sommets pour le même sommet. S'il y a p composantes qui contiennent toutes un même sommet d'articulation alors à chacune d'elles on ajoute $p - 1$ cycles à 5 sommets.

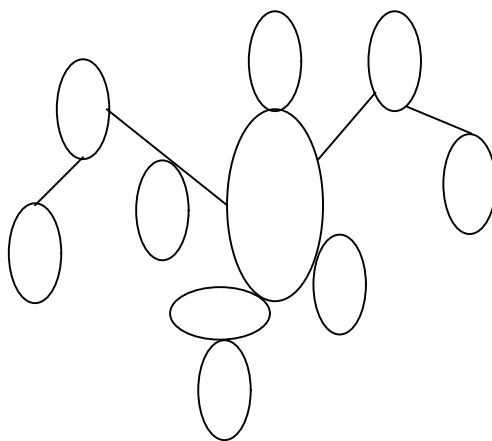


Figure 2.3 : un cactus

2.3.1 Les classes Γ et Γ'

Soit Γ (resp. Γ') la classe des graphes G qui peuvent être obtenus par des opérations de 1-sommes à partir d'un cycle sans corde C (resp. une arête e) et une famille de cycles à 5 sommets de telle manière que les sommets d'articulation appartiennent tous à C (resp. e). Pour donner une caractérisation complète du polytope $P_D(G)$ quand G est un cactus, nous avons besoin de connaître de telles caractérisations pour les graphes de Γ et Γ' .

Si G est un graphe de Γ' , il n'est pas difficile de voir que le polytope $P_D(G)$ est donné par les contraintes (1.1) - (1.3) et les contraintes associées aux cycles. Par

conséquent d'après le corollaire 2.11, si G est un arbre alors le polytope $P_D(G)$ est complètement décrit par les contraintes triviales et les contraintes de voisinage. Ceci peut être également obtenu comme un cas particulier d'un résultat plus général concernant les graphes fortement à cordes [37].

Un *ordre d'élimination fort* d'un graphe $G = (V, E)$ est un ordre $v_1, \dots, v_n$ des sommets tel que

- a) Pour tout triplet (i, j, k) , si $i < j < k$ et $v_j, v_k \in N(v_i)$ alors $v_k \in N(v_j)$.
- b) Pour chaque quadruplet (i, j, k, l) , si $i < j < k < l$, $v_k, v_l \in N(v_i)$ et $v_k \in N(v_j)$ alors $v_l \in N(v_j)$.

Un graphe est dit *fortement à cordes* (strongly chordal) s'il admet un ordre d'élimination fort. La classe des graphes fortement à cordes contient par exemple les arbres.

Une matrice en $0 - 1$ est dite *équilibrée* [15] si elle ne contient pas comme sous matrice, la matrice d'incidence d'un cycle impair (une matrice d'incidence d'un cycle est telle que la somme des coefficients dans chaque ligne et chaque colonne est égale à 2). Et elle est dite *totalement équilibrée* [43] si elle ne contient pas comme sous matrice une matrice d'incidence d'un cycle de longueur ≥ 3 .

Dans [43] Fulkerson, Hoffman et Oppenheim ont démontré le résultat suivant.

Théorème 2.16 ([43]) *Si A est une matrice équilibrée, alors le polytope*

$$\begin{cases} Ax \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a tous ses points extrêmes en $0 - 1$.

La matrice de voisinage d'un graphe $G = (V, E)$ est la matrice carrée d'ordre $|V|$ donnée par les inégalités de voisinage associées aux sommets de G . Dans [37] Farber a étudié la relation entre les graphes fortement à cordes et les matrices totalement équilibrées. En particulier, il a montré qu'un graphe G est fortement à cordes si et seulement si la matrice de voisinage de G est totalement équilibrée. Ce résultat et le théorème 2.16 nous permettent d'établir le théorème suivant.

Théorème 2.17 *Si $G = (V, E)$ est fortement à cordes alors $P_D(G)$ est défini par les inégalités (2.1) - (2.3).*

L'inverse de ce théorème n'est pas vrai. En effet, considérons le cycle à 6 sommets (numérotés de 1 à 6). Il est simple de voir que la contrainte (1.5) associé à ce cycle est

redondante par rapport aux contraintes de voisinages. Et en conséquence le polytope des absorbants de ce cycle est caractérisé par les contraintes (1.1) - (1.3). Par contre la matrice de voisinage de ce graphe, donnée ci dessous, contient une sous matrice d'un cycle à 4 sommets et donc le graphe n'est pas fortement à cordes.

$$\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Il serait intéressant de caractériser les graphes dans lesquels $P_D(G)$ peut être décrit par les contraintes (1.1) - (1.3). A la lumière des remarques ci-dessus, une telle caractérisation devrait considérer la structure de la matrice de voisinage du graphe. D'après le théorème 2.15, si cette matrice est équilibrée, alors le polytope $P_D(G)$ est donnée par (1.1) - (1.3). L'exemple suivant montre que l'inverse de cette assertion n'est pas aussi vrai. En effet considérons le graphe G de la figure 2.4.

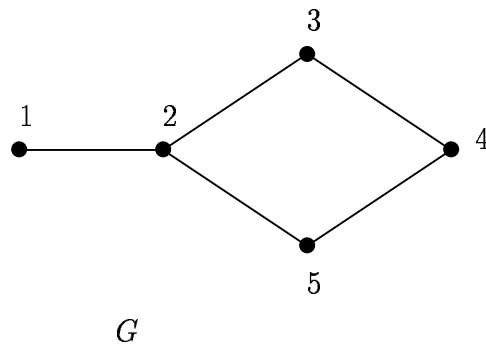


Figure 2.4 :

Il n'est pas difficile de voir que le polytope des absorbants dans ce graphe est donné par les contraintes (1.1) - (1.3). Cependant la matrice de voisinage de ce graphe, donnée ci dessous n'est pas équilibrée.

$$\begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & \\ & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

En général, si G est un cactus contenant des cycles, les contraintes (1.1) - (1.3) peuvent ne pas suffir pour caractériser complètement le polytope $P_D(G)$. En effet, considérons par exemple le cactus $G = (V, E)$ de la figure 2.5.

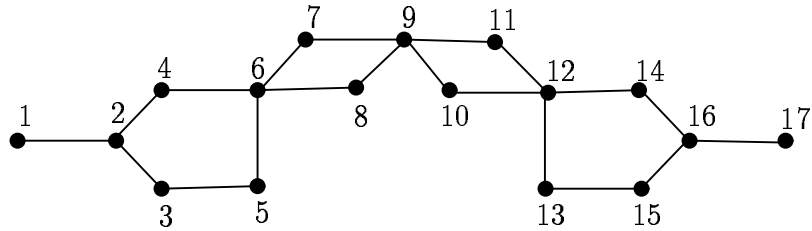


Figure 2.5 :

Pour caractériser $P_D(G)$, nous avons besoin de connaître les descriptions des polytopes $P_D(H_1)$ et $P_D(H_2)$ où H_1 et H_2 sont les graphes de la figure 2.6.

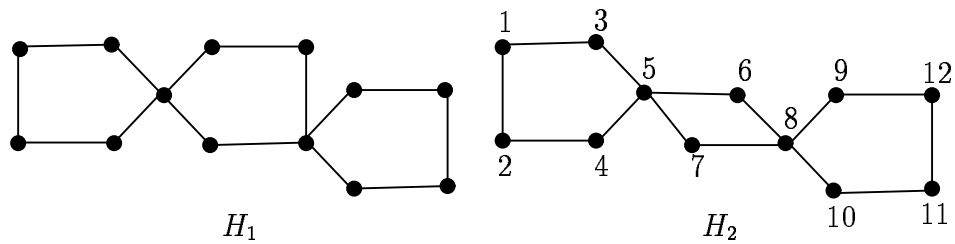


Figure 2.6 :

Il est simple de voir qu'un système minimal décrivant $P_D(H_1)$ est donné par les contraintes (1.1) - (1.3) et les contraintes de type (1.5) associées aux 5-cycles du graphe.

Le système minimal caractérisant $P_D(H_2)$ est donné par les mêmes types de contraintes et la contrainte

$$\sum_{u=3,\dots,10} x(u) \geq 2.$$

Des théorèmes 2.6 et 2.9, il s'ensuit qu'une description minimale de $P_D(G)$ est définie par le système de contraintes suivant.

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq x(u) \leq 1, & \text{pour tout } u \in V, \\ x(N(u)) \geq 1, & \text{pour } u \in V \setminus \{2, 16\}, \\ \sum_{u=2,\dots,6} x(u) \geq 2, \\ \sum_{u=12,\dots,16} x(u) \geq 2, \\ \sum_{u=4,\dots,14} x(u) \geq 3. \end{array} \right.$$

2.3.2 $P_D(G)$ dans les cactus

Dans cette section nous allons discuter du polytope $P_D(G)$ dans les cactus. Nous décrivons quelques propriétés structurales des facettes de $P_D(G)$ quand G est un graphe de Γ . Et nous identifions certaines familles de ces facettes. Comme conséquence, nous obtenons une description complète du polytope $P_D(G)$ quand G est un cycle. Aussi en utilisant la technique de composition présentée ci-dessus, nous montrons que pour tout entier $p > 0$ fixé, il existe un graphe G qui est un cactus et une contrainte définissant une facette de $P_D(G)$ avec les coefficients $0, 1, \dots, p$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe de Γ obtenu par des opérations de 1-somme à partir d'un cycle sans corde $C = \{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$, $n \geq 3$ et une famille de r 5-cycles, $T_1, \dots, T_r$, $r \geq 1$ où $T_j = \{u_{i_j}, w_1^j, w_2^j, w_3^j, w_4^j\}$ pour $j = 1, \dots, r$. Ici $u_{i_j} \in C$ et w_1^j et w_4^j sont les sommets de T_{i_j} adjacents à u_{i_j} . On suppose $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r$. Pour deux sommets u_i et u_j , $i < j$, de C , on dénote par $C(u_i, u_j)$ la chaîne $u_i, u_{i+1}, \dots, u_j$ de C . D'abord nous décrivons une famille de facettes de $P_D(C)$.

Théorème 2.18 *Soit $W = \{u_{j_1}, \dots, u_{j_p}\}$ un ensemble de p sommets de C où p est impair et $j_1 < j_2, \dots, < j_p$ si $i < j$. Supposons que $|C(u_{j_i}, u_{j_{i+1}})| = 3k_i$, $k_i \geq 1$ pour $i = 1, \dots, p$ (modulo p). Alors la contrainte*

$$2 \sum_{v \in W} x(v) + \sum_{v \in C \setminus W} x(v) \geq \sum_{i=1}^p k_i + \lceil \frac{p}{2} \rceil \quad (2.43)$$

définit une facette de $P_D(C)$.

Preuve. Nous montrons d'abord que (2.43) est valide pour $P_D(C)$. Puisque les contraintes de voisinage sont valides pour $P_D(C)$ alors nous avons

$$\begin{aligned} x(u_{j_i}) &\geq 0, \\ x(N(u_{j_i})) &\geq 1, \\ x(N(u_{j_i+3t+1})) &\geq 1, \quad \forall t = 0, \dots, k_i - 1, \\ x(N(u_{j_i+3t+3})) &\geq 1, \quad \forall t = 0, \dots, k_i - 1, \end{aligned}$$

pour $i = 1, \dots, p$.

En sommant ces contraintes, on obtient

$$4 \sum_{v \in W} x(v) + 2 \sum_{v \in C \setminus W} x(v) \geq 2 \sum_{i=1}^p k_i + p. \quad (2.44)$$

Comme p est impair, en divisant la contrainte (2.44) par deux et en arrondissant à la valeur entière supérieure nous obtenons la validité de (2.43).

Maintenant notons par $a^T x \geq \alpha$ la contrainte (2.43) et supposons qu'il existe une contrainte $b^T x \geq \beta$ qui définit une facette de $P_D(C)$ telle que

$$\{x \in P_D(C) \mid a^T x = \alpha\} \subseteq \{x \in P_D(C) \mid b^T x = \beta\}.$$

Nous allons montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$.

Nous allons montrer dans un premier temps que

$$b(v) = \beta_i \quad \forall v \in C(u_{j_i}, u_{j_{i+1}}) \setminus \{u_{j_i}, u_{j_{i+1}}\}, \quad \left. \begin{array}{l} i = 1, \dots, p \text{ et } \beta_i \in \mathbb{R}. \end{array} \right\} \quad (2.45)$$

Soit $t_i = k_i + k_{i+1} + k_{i+2}$. Considérons les ensembles suivants

$$\begin{aligned} S_i^1 &= \{u_{j_i}, u_{j_i+3t}; t = 1, \dots, t_i\} \cup \left(\bigcup_{\substack{l=i+2s+1 \\ s=1, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor - 1}} R_l \right), \\ S_i^2 &= (S_i^1 \setminus \{u_{j_i}\}) \cup \{u_{j_{i-1}}, u_{j_{i+1}}\} \\ S_i^3 &= (S_i^1 \setminus \{u_{j_i}\}) \cup \{u_{j_{i-1}}, u_{j_{i+2}}\} \end{aligned}$$

où $R_l = \{u_{j_{l-1}}, u_{j_{l+2+3t}}; t = 0, \dots, k_l + k_{l+1} - 1\}$.

Il n'est pas difficile de vérifier que S_i^1 , S_i^2 et S_i^3 sont des absorbants de C dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité, ceci implique que $b^T x^{S_i^j} = \beta$, $\forall j = 1, \dots, 3$. D'où

$$b(u_{j_i}) = b(u_{j_i-1}) + b(u_{j_i+1}) \quad (2.46)$$

$$b(u_{j_i+1}) = b(u_{j_i+2}) \quad (2.47)$$

Maintenant, nous allons établir (2.45) d'une manière récursive. Considérons les trois ensembles suivants.

$$\begin{aligned} A_1^t &= (S_i^1 \setminus C(u_{j_i}, u_{j_i+1})) \cup (\{u_{j_i+3l+2} ; l = 0, 1, \dots, t-1\} \cup \{u_{j_i+3q} ; q = t, \dots, k_i\}), \\ A_2^t &= (A_1^T \setminus \{u_{j_i+3t}\}) \cup \{u_{j_i+3t+1}\}, \\ A_2^t &= (A_1^T \setminus \{u_{j_i+3t}\}) \cup \{u_{j_i+3t+2}\}, \end{aligned}$$

où $t \in \{1, \dots, k_i - 1\}$.

On peut facilement vérifier que ces ensembles sont des absorbants de C dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité. Par conséquent on a $b^T x^{A_j^t} = \beta$, $\forall j = 1, \dots, 3$. De là, on déduit

$$b(u_{j_i+3t}) = b(u_{j_i+3t+1}) = b(u_{j_i+3t+2}), \quad \forall t = 1, \dots, k_i - 1. \quad (2.48)$$

Maintenant si on inverse les rôles de u_{j_i} et u_{j_i+1} on obtient par symétrie

$$\left. \begin{aligned} b(u_{j_i+3k_i}) &= b(u_{j_i+3k_i-1}), \\ b(u_{j_i+3t'-2}) &= b(u_{j_i+3t'-3}) = b(u_{j_i+3t'-4}), \quad \forall t' = 1, \dots, k_i - 1. \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

En combinant (2.47), (2.48) et (2.49) on obtient (2.45).

Comme $b^T x^{S_i^1} = \beta \quad \forall i = 1, \dots, p$, d'après (2.45) et (2.46) on obtient

$$\sum_{t=0, \dots, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \beta_{i+2t} = \lambda \quad \forall i = 1, \dots, p \text{ (modulo } p),$$

pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque p est impair, le système ci-dessus est non singulier et il admet, par conséquent, une solution unique. Ceci implique que

$$\beta_i = \beta_j \quad \forall i, j \in \{1, \dots, p\}; \quad i \neq j. \quad (2.50)$$

De (2.46) et (2.50) il en résulte qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} b(v) &= \rho \quad \forall v \in C \setminus W, \\ b(v) &= 2\rho \quad \forall v \in W. \end{aligned}$$

Puisque $a^T x \geq \alpha$ n'est pas une contrainte triviale, alors $b^T x \geq \beta$ ne définit pas une facette triviale. D'après le lemme 1.2, il en résulte que les coefficients de b sont tous non négatifs et au moins un est positif. Cela implique que $\rho > 0$. Ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

Considérons maintenant un graphe $G = (V, E)$ de Γ . Soit $A_0 = \{w_2^j, w_3^j ; j = 1, \dots, r\}$. Dans ce qui suit nous décrivons certaines familles de facettes de $P_D(G)$.

Théorème 2.19 Si $|C| = 3k + 1$ où k est un entier positif, alors la contrainte

$$\sum_{j \in C} x(j) + \sum_{j=1, \dots, r} (x(w_1^j) + x(w_4^j)) \geq k + 1 \quad (2.51)$$

définit une facette de $P_D(G)$.

Preuve. Notons par $a^T x \geq \alpha$ la contrainte (2.51) et montrons d'abord qu'elle est valide pour $P_D(G)$. Soit $S \in D(G)$. Soit $R \subset \{1, \dots, r\}$ l'ensemble des indices tels que $\{w_1^j, w_4^j\} \cap S \neq \emptyset$. Soit $S' = \left(S \setminus \bigcup_{j \in R} \{w_1^j, w_4^j\} \right) \cup \{u_{i_j}, w_2^j, w_3^j, \forall j \in R\}$. Il est clair que $S' \in D(G)$. D'après le lemme 1.5 on a $a^T x^{S'} \geq k + 1$. Or comme $a^T x^S \geq a^T x^{S'}$, il en résulte que x^S vérifie (2.51).

Maintenant soit $b^T x \geq \beta$ une contrainte définissant une facette de $P_D(G)$ telle que $\{x \in P_D(G) \mid a^T x = \alpha\} \subseteq \{x \in P_D(G) \mid b^T x = \beta\}$. Pour montrer que $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G)$, il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $\rho a = b$.

Puisque $\sum_{j \in C} x(j) \geq k + 1$ définit une facette de $P_D(C)$, il existe $|C|$ absorbants, $S_1, \dots, S_{|C|}$ tels que $a^T x^{S_i} = \alpha \forall i = 1, \dots, |C|$ et $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|C|}}$ sont linéairement indépendants. Puisque les ensembles $S'_i = S_i \cup A_0$, $i = 1, \dots, |C|$ sont aussi des absorbants de G , on a $b^T x^{S'_i} = \beta \forall i = 1, \dots, |C|$. Soit M la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|C|}}$. Le système ci dessus peut s'écrire sous la forme suivante

$$b^T M = (\beta', \dots, \beta'),$$

où $\beta' = \beta - \sum_{j \in A_0} b(j)$. Comme M est non singulière, ce système admet une solution unique donnée par

$$b(v) = \frac{\beta'}{k + 1} \quad \forall v \in C. \quad (2.52)$$

Maintenant considérons un sommet $u_{i_j} \in C$. Soit $S_1 = \{u_{i_j}, u_{i_j+2+3t}; t = 0, \dots, k - 1\}$. Il est simple de vérifier que $S_1 \in D(G)$. Soient

$$\begin{aligned} S_2 &= (S_1 \setminus \{u_{i_j}\}) \cup \{w_1^j\}, & S_4 &= S_1 \cup \{w_2^j\}, \\ S_3 &= (S_1 \setminus \{u_{i_j}\}) \cup \{w_4^j\}, & S_5 &= S_1 \cup \{w_3^j\}. \end{aligned}$$

Comme $S_i \in D(G)$ et $a^T x^{S_i} = \alpha \forall i = 1, \dots, 5$, alors $b^T x^{S_i} = \beta \forall i = 1, \dots, 5$. Ceci implique que

$$\left. \begin{aligned} b(w_1^j) &= b(w_4^j) = b(u_{i_j}), \\ b(w_2^j) &= b(w_4^j) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.53)$$

Puisque u_{i_j} est arbitraire, d'après (2.52) et (2.53) on déduit qu'il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $\rho a = b$. De plus nous avons $\rho > 0$. $\square$

Théorème 2.20 *Supposons que $|C| = 4k + 2$, pour un certain entier $k \geq 1$. Supposons que les sommets $u_{i_1}, \dots, u_{i_r}$ sont tels que $r = 2k + 1$ et $u_{i_{j+1}} = u_{i_{j+2}}$ pour $j = 0, \dots, r - 1$. Alors la contrainte*

$$\sum_{j \in C} x(j) \geq k + 1 \quad (2.54)$$

définit une facette de $P_D(G)$.

Preuve. Supposons, sans perte de généralité, que $u_{i_1} = u_0, u_{i_2} = u_2, \dots, u_{i_r} = u_{n-2}$. On montre d'abord que (2.54) est valide pour $P_D(G)$. Considérons, pour ce faire, les contraintes de voisinage et triviales suivantes

$$\begin{aligned} x(N(u_j)) &\geq 1, \quad \forall j = 1, 3, \dots, n-1. \\ x(u_j) &\geq 0, \quad \forall j = 1, 3, \dots, n-1. \end{aligned}$$

En sommant ces contraintes, on obtient

$$2 \sum_{j \in C} x(j) \geq 2k + 1.$$

En divisant par deux et en arrondissant le second membre à la partie entière supérieure, on obtient la validité de (2.54).

Notons maintenant la contrainte (2.54) par $a^T x \geq \alpha$. Et supposons qu'il existe une contrainte $b^T x \geq \beta$ définissant une facette de $P_D(G)$ telle que

$$\{x \in P_D(G) \mid a^T x = \alpha\} \subseteq \{x \in P_D(G) \mid b^T x = \beta\}.$$

Nous allons montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$.

Soit $V_0 = V \setminus C$. Considérons les ensembles suivants.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{u_0, u_4, u_8, \dots, u_{n-6}, u_{n-4}\} \cup V_0, \\ S_2 &= (S_1 \setminus \{u_{n-4}\}) \cup \{u_{n-3}\}, \\ S_3 &= (S_1 \setminus \{u_{n-4}\}) \cup \{u_{n-2}\}. \end{aligned}$$

Il est simple de voir que ces ensembles définissent des absorbants de G et leurs vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité. D'où $b^T x^{S_j} = \beta, \forall j = 1, 2, 3$. Il en résulte que

$$b(u_{n-4}) = b(u_{n-3}) = b(u_{n-2}).$$

Puisque les sommets $u_0, u_2, \dots, u_{n-2}$ jouent le même rôle, on obtient par symétrie

$$b(u_j) = b(u_{j'}) \quad j \neq j'. \quad (2.55)$$

Puisque pour $j \in V_0$, l'ensemble $S_1^j = S_1 \setminus \{j\}$ est un absorbant de G dont le vecteur d'incidence vérifie $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité, il en résulte que

$$b(j) = 0 \quad \forall j \in V_0. \quad (2.56)$$

Par (2.55) et (2.56), il existe $\rho \in \mathbb{R}$, tel que $b = \rho a$. De plus, comme dans les démonstrations précédentes, nous avons $\rho > 0$. $\square$

Nous allons donner maintenant quelques propriétés structurales des facettes de $P_D(G)$ quand G est un graphe de Γ .

Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P_D(G)$, différente d'une contrainte triviale, de voisinage et de cycle à 5 sommets. Par le lemme 1.7, il s'ensuit que

$$\left. \begin{array}{l} a(w_1^j) = a(w_4^j) \quad \forall j = 1, \dots, r, \\ a(w_2^j) = a(w_3^j) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, r. \end{array} \right\} \quad (2.57)$$

Soit

$$\Delta_a = \{A \in D(G) \mid a^T x^A = \alpha\},$$

D'après (2.57), si $A \in \Delta_a$ alors $A \cup A_0 \in D(G)$. Pour le reste de cette section tous les absorbants de Δ_a qui seront considérés sont supposés contenant A_0 .

Puisque G ne contient pas de sommets isolés, par le lemme 1.1, $P_D(G)$ est de pleine dimension. Ceci implique que $P_D(G)$ possède une description minimale unique (à des coefficients multiplicateurs près) par des contraintes linéaires. Par conséquent, les seules inégalités satisfaites à l'égalité par les vecteurs d'incidence de tous les membres de Δ_a sont des multiples, par des coefficients positifs, de $a^T x \geq \alpha$.

Soit C^* l'ensemble des sommets v de C tel que v soit de degré 2 ou $v = u_{i_j}$ pour un certain $j \in \{1, \dots, r\}$ où $a(w_1^j) > 0$. Nous avons les lemmes suivants.

Lemme 2.21 *Si $v \in C^*$, alors il existe un absorbant $A \in \Delta_a$ tel que $|A \cap N(v)| \geq 2$ et $(A \cap N(v)) \subseteq C$.*

Preuve. Puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente des contraintes de voisinage, il doit exister un absorbant $A \in \Delta_a$ tel que $|A \cap N(v)| \geq 2$. Si v est de degré 2, alors il est clair que $(A \cap N(v)) \subseteq C$. Maintenant supposons que $v = u_{i_j}$ et $(A \cap N(v)) \not\subseteq C$. Donc on peut supposer, sans perte de généralité, que $w_1^j \in A$. Soit $A' = (A \setminus \{w_1^j\}) \cup \{w_2^j, w_3^j\}$. Puisque $A \cap (N(u_{i_j}) \setminus \{w_1^j\}) \neq \emptyset$, il en résulte que A' est un absorbant de G . Puisque $a(w_1^j) > 0$ et $a(w_2^j) = a(w_3^j) = 0$, cela implique que $a^T x^{A'} < \alpha$, ce qui est impossible. $\square$

Lemme 2.22 *Si $a(u_i) \leq a(u_{i+1}), a(u_{i+2})$ (resp. $a(u_i) \leq a(u_{i-1}), a(u_{i-2})$) pour un certain i et $u_{i+2} \in C^*$ (resp. $u_{i-2} \in C^*$) alors, on a l'une des deux égalités suivantes.
 $a(u_i) = a(u_{i+1})$ ou $a(u_i) = a(u_{i+2})$
 (resp. $a(u_i) = a(u_{i-1})$ ou $a(u_i) = a(u_{i-2})$).
 (Les indices sont considérés modulo r .)*

Preuve. Nous montrons le lemme pour u_{i+2} . Le résultat s'établit par symétrie pour u_{i-2} . Considérons $u_{i+2} \in C^*$. Par le lemme 2.21, il existe un absorbant $A \in \Delta_a$ tel que $|A \cap N(u_{i+2})| \geq 2$ et $(A \cap N(u_{i+2})) \subseteq \{u_{i+1}, u_{i+2}, u_{i+3}\}$.

- Si $\{u_{i+1}, u_{i+2}\} \in A$ ou $\{u_{i+1}, u_{i+3}\} \in A$, alors soit $A' = (A \setminus \{u_{i+1}\}) \cup \{u_i\}$. Comme $A' \in D(G)$, il s'ensuit que $a(u_i) \geq a(u_{i+1})$. Puisque $a(u_i) \leq a(u_{i+1})$ alors on a $a(u_i) = a(u_{i+1})$.

- Si $\{u_{i+2}, u_{i+3}\} \in A$, alors considérons l'ensemble $A'' = (A \setminus \{u_{i+2}\}) \cup \{u_i\}$. Puisque $A'' \in D(G)$ on a $a(u_i) \geq a(u_{i+2})$ et par conséquent $a(u_i) = a(u_{i+2})$. $\square$

Lemme 2.23 *Soient u_{i_j} et u_{i_k} , $k > j$, deux sommets de C tels que $a(w_1^j) = a(w_1^k) = 0$. Supposons que la chaîne $C(u_{i_{j+1}}, u_{i_{k-1}}) \subset C^*$ et $|C(u_{i_{j+1}}, u_{i_{k-1}})| \geq 2$. Soit $a_0 = \min\{a(u_l), l = i_j + 1, \dots, i_k - 1\}$. Alors*

i) $a(u_{i_{j+1}}) = a(u_{i_{j-1}}) = a_0$.

ii) Si $|C(u_{i_{j+1}}, u_{i_{k-1}})| \geq 3$ et $a(u_l) > a_0$ pour un certain $l \in \{i_j + 1, \dots, i_k - 1\}$, tel que $l - 2 \geq i_j + 1$ et $l + 2 \leq i_k - 1$, alors

$$a(u_{l-2}) = a(u_{l-1}) = a_0 \text{ et } a(u_{l+2}) = a(u_{l+1}) = a_0 \quad (2.58)$$

Preuve. i) Puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, il existe deux absorbants A_1 et A_2 de Δ_a tels que $u_{i_{j+1}} \in A_1$ et $u_{i_{k-1}} \in A_2$. (Les deux absorbants

A_1 et A_2 peuvent être les mêmes.)

Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} A'_1 &= (A_1 \setminus \{u_{i_j+1}\}) \cup \{w_1^j, u_{i_j+2}\}, \\ A'_2 &= (A_2 \setminus \{u_{i_k-1}\}) \cup \{w_1^k, u_{i_k-2}\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $A'_1, A'_2 \in D(G)$. Comme $a(w_1^j) = a(w_1^k) = 0$, il en résulte que

$$a(u_{i_j+2}) \geq a(u_{i_j+1}) \text{ et } a(u_{i_k-2}) \geq a(u_{i_k-1}). \quad (2.59)$$

Maintenant, on montre que

$$\forall l \in \{i_j + 1, \dots, i_k - 1\}, \quad a(u_l) = a_0 \text{ ou } a(u_{l+1}) = a_0. \quad (2.60)$$

En effet, si ceci n'est pas le cas alors il existerait une chaîne $u_l, u_{l+1}, \dots, u_{l+t}$, telle que $l \geq i_j + 1$, $t \geq 1$, $l + t \leq i_k$, $a(u_p) > a_0$ pour $p = l, \dots, l + t$ et $a(u_{l-1}) = a_0$ ou $a(u_{l+t+1}) = a_0$.

Si $a(u_{l+t+1}) = a_0$, (dans ce cas $l + t + 1 \leq i_{k-1}$) puisque $u_{l+t+1} \in C^*$, ceci contredit le lemme 2.22 par rapport à $u_{l+t-1}, u_{l+t}, u_{l+t+1}$. Si $a(u_{l-1}) = a_0$ on obtient une contradiction d'une manière similaire. En conséquence, par (2.59) et (2.60), on obtient $a(u_{i_j+1}) = a(u_{i_k-1}) = a_0$.

De plus si $|C(u_{i_j+1}, u_{i_k-1})| = 3$ (resp. $|C(u_{i_j+1}, u_{i_k-1})| = 4$) alors pour aux moins deux (resp. trois) sommets dans $C(u_{i_j+1}, u_{i_k-1})$ on a $a(u_l) = a_0$.

ii) Maintenant, supposons pour un certain $l \in \{u_{i_j+1}, u_{i_k-1}\}$, où $l - 2 \geq i_j + 1$ et $l + 2 \leq i_k - 1$ que l'on a $a(u_l) > a_0$. Alors par (2.60), on a

$$a(u_{l-1}) = a(u_{l+1}) = a_0.$$

Si $l - 2 = i_j + 1$ et $l + 2 = i_k - 1$, alors d'après i) on a $a(u_{l-2}) = a(u_{l+2}) = a_0$ et donc (2.58) est vérifiée.

Supposons par exemple que $l + 2 < i_k - 1$ et $a(u_{l+2}) > a_0$. Par (2.60) on a $a(u_{l+3}) = a_0$. Puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte de voisinage et $u_{l+1} \in C^*$, par le lemme 2.21, il existe un absorbant $A \in \Delta_a$ tel que $|A \cap N(u_{l+1})| \geq 2$ et $A \cap N(u_{l+1}) \subseteq C$. Si $u_l \in A$ (resp. $u_{l+2} \in A$), alors $A' = (A \setminus \{u_l\}) \cup \{u_{l-1}\}$ (resp. $A' = (A \setminus \{u_{l+2}\}) \cup \{u_{l+3}\}$) est un absorbant de G . Ceci implique que $a(u_{l-1}) \geq a(u_l)$ (resp. $a(u_{l+3}) \geq a(u_{l+2})$) ce qui est impossible. $\square$

Lemme 2.24 Si $u_{i_j} \in C \setminus C^*$ et $u_{i_j-1}, u_{i_j+1} \in C^*$ alors

$$a(u_{i_j}) = a(u_{i_j-1}) = a(u_{i_j+1}). \quad (2.61)$$

Preuve. D'abord nous montrons que

$$\left. \begin{array}{l} a(u_{i_j}) \geq a(u_{i_j-1}), \\ a(u_{i_j}) \geq a(u_{i_j+1}). \end{array} \right\} \quad (2.62)$$

Comme $a^T x \geq \alpha$ est une contrainte non triviale, il existe un absorbant $A \in \Delta_a$ contenant u_{i_j-1} .

Si $u_{i_j-2} \notin C^*$ alors soit $A' = (A \setminus \{u_{i_j-1}\}) \cup \{w_1^{j-2}, u_{i_j}\}$. Puisque $A' \in D(G)$ on a $a(u_{i_j-1}) \leq a(w_1^{j-2}) + a(u_{i_j})$. Comme $a(w_1^{j-2}) = 0$, il en résulte que $a(u_{i_j-1}) \leq a(u_{i_j})$. Maintenant, supposons que $u_{i_j-2} \in C^*$. Soit $A'' = (A \setminus \{u_{i_j-1}\}) \cup \{u_{i_j-2}, w_1^j\}$. Puisque $A'' \in D(G)$, on a $a(u_{i_j-2}) \geq a(u_{i_j-1})$. D'autre part, comme $a^T x \geq \alpha$ est différente de la contrainte de voisinage associée au sommet u_{i_j-2} , par le lemme 2.21, il existe un ensemble $\bar{A} \in \Delta_a$ tel que $|\bar{A} \cap N(u_{i_j-2})| \geq 2$ et $\bar{A} \cap N(u_{i_j-2}) \subseteq C$.

Si $u_{i_j-1} \in \bar{A}$, alors l'ensemble $(\bar{A} \setminus \{u_{i_j-1}\}) \cup \{u_{i_j}\}$ est un absorbant de G . Ce qui implique que $a(u_{i_j}) \geq a(u_{i_j-1})$.

Si $u_{i_j-1} \notin \bar{A}$, alors u_{i_j-3} et $u_{i_j-2} \in \bar{A}$ et par conséquent l'ensemble de sommets $(\bar{A} \setminus \{u_{i_j-2}\}) \cup \{u_{i_j}\}$ est un absorbant de G . D'où $a(u_{i_j}) \geq a(u_{i_j-2})$. Puisque $a(u_{i_j-2}) \geq a(u_{i_j-1})$ il en résulte que $a(u_{i_j}) \geq a(u_{i_j-1})$. Par conséquent, nous avons $a(u_{i_j}) \geq a(u_{i_j-1})$. Maintenant, par symétrie, nous obtenons aussi $a(u_{i_j}) \geq a(u_{i_j+1})$. Ce qui établit (2.62).

Puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte de voisinage et $u_{i_j+1} \in C$, par le lemme 2.21, il existe un ensemble $A_1 \in \Delta_a$ tel que $|A_1 \cap N(u_{i_j+1})| \geq 2$ et $A_1 \cap N(u_{i_j+1}) \subseteq C$.

Cas 1. $u_{i_j+1}, u_{i_j+2} \in A_1$. Alors les ensembles $(A_1 \setminus \{u_{i_j+1}\}) \cup \{u_{i_j}\}$ et $(A_1 \setminus \{u_{i_j+1}\}) \cup \{u_{i_j-1}\}$ sont tous les deux des absorbants de G . Ce qui implique que

$$\left. \begin{array}{l} a(u_{i_j}) \geq a(u_{i_j+1}), \\ a(u_{i_j-1}) \geq a(u_{i_j+1}). \end{array} \right\} \quad (2.63)$$

Puisque $u_{i_j-1} \in C^*$, par le lemme 2.22, on doit avoir soit $a(u_{i_j+1}) = a(u_{i_j})$ soit $a(u_{i_j+1}) = a(u_{i_j-1})$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $a(u_{i_j+1}) = a(u_{i_j})$. D'où par (2.63), $a(u_{i_j-1}) \geq a(u_{i_j})$. D'après (2.62), on obtient $a(u_{i_j-1}) = a(u_{i_j}) =$

$a(u_{i_j+1})$.

(Si $a(u_{i_j-1}) = a(u_{i_j+1})$, on peut montrer d'une manière similaire, en considérant un absorbant $A_2 \in \Delta_a$ tel que $|A_2 \cap N(u_{i_j-1})| \geq 2$ et $A_2 \cap N(u_{i_j-1}) \subseteq C$, que (2.61) est vérifiée.)

Cas 2. $u_{i_j} \in A_1$. Puisque $(A_1 \setminus \{u_{i_j}\}) \cup \{u_{i_j-1}\}$ est un absorbant de G on obtient $a(u_{i_j-1}) \geq a(u_{i_j})$. Et par (2.62), on a $a(u_{i_j-1}) = a(u_{i_j})$.

Maintenant en considérant l'absorbant A_2 introduit ci dessus, on peut montrer d'une manière similaire que $a(u_{i_j}) = a(u_{i_j+1})$ et par conséquent (2.61) est vérifiée. $\square$

Lemme 2.25 *Soit $G \in \Gamma$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, au moins une des deux assertions suivantes est vérifiée.*

- a) $a(u_i) \leq a(u_{i+1})$,
- b) $a(u_{i+1}) \leq a(u_{i+2})$,

Preuve. Nous distinguons deux cas :

Cas 1. $u_i \in C^*$. Puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte de voisinage, par le lemme 2.21 il existe A tel que $|A \cap \{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}\}| \geq 2$.

- Si $u_i, u_{i+1} \in A$, soit $A' = (A \setminus \{u_{i+1}\}) \cup \{u_{i+2}\}$. Comme $A' \in D(G)$ alors on a $a(u_{i+1}) \leq a(u_{i+2})$.

- Si $u_{i-1}, u_i \in A$, alors considérons l'ensemble $A' = (A \setminus \{u_i\}) \cup \{u_{i+1}\}$. Il est clair que $A' \in D(G)$. D'où $a(u_i) \leq a(u_{i+1})$.

Cas 2. $u_i \notin C^*$

Cas 2.1. $u_{i-1}, u_{i+1} \in C^*$. D'après le lemme 2.24 on a $a(u_i) = a(u_{i+1})$ et donc a) est vérifiée.

Cas 2.2. $u_{i-1} \notin C^*$. Il existe un absorbant $A \in \Delta_a$ tel que $u_i \in A$. D'où $(A \setminus \{u_i\}) \cup \{w_1^{i-1}, w_4^{i-1}, u_{i+1}\}$ est un absorbant de G et donc $a(u_i) \leq a(u_{i+1})$.

Cas 2.3. $u_{i-1} \in C^*$ et $u_{i+1} \notin C^*$. Il existe un absorbant $A \in \Delta_a$ tel que $u_{i+1} \in A$. Soit l'ensemble $A' = (A \setminus \{u_{i+1}\}) \cup \{w_1^i, w_4^i, u_{i+2}\}$. On a $A' \in D(G)$ et donc $a(u_{i+2}) \geq a(u_{i+1})$. $\square$

Lemme 2.26 *Il n'existe pas de sommet $u_i \in C$ tel que $\min(a(u_i), a(u_{i+1})) > \min(a(u_{i-1}), a(u_{i+2}))$*

Preuve. Supposons qu'il existe un sommet $u_i \in C$ qui contredit le lemme. Sans perte de généralité on peut supposer que $a(u_{i-1}) \leq a(u_{i+2})$.

Cas 1. $u_{i+1} \in C^*$.

D'après le lemme 2.21, il existe un absorbant $A \in \Delta_a$ tel que $|\{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}\} \cap A| \geq 2$.

- Si $u_i \in A$ alors soit $A' = (A \setminus \{u_i\}) \cup \{u_{i-1}\}$. Puisque $A' \in D(G)$, il en résulte que $a(u_i) \leq a(u_{i-1})$, une contradiction.

- Si $u_i \notin A$ alors $u_{i+1} \in A$. Soit $A'' = (A \setminus \{u_{i+1}\}) \cup \{u_{i-1}\}$. Comme $A'' \in D(G)$, on doit avoir $a(u_{i+1}) \leq a(u_{i-1})$, ce qui est impossible.

Cas 2. $u_{i+1} \notin C^*$.

Puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, il doit exister un absorbant $\bar{A} \in \Delta_a$ tel que $u_i \in \bar{A}$. Soit $\bar{A}' = (\bar{A} \setminus \{u_i\}) \cup \{u_{i-1}, w_1^{i+1}, w_4^{i+1}\}$. Puisque $\bar{A}' \in D(G)$ et $a(w_1^{i+1}) = a(w_4^{i+1}) = 0$, il s'ensuit que $a(u_{i-1}) \geq a(u_i)$, ce qui est impossible. $\square$

Lemme 2.27 *Si pour un sommet $u_i \in C$ on a $a(u_i) > a(u_{i+1})$, alors*

$$a(u_{i-2}) = a(u_{i-1}) = a(u_{i+1}) = a(u_{i+2}) \quad (2.64)$$

Preuve. Par le lemme 2.25, il en résulte que $a(u_{i+1}) \leq a(u_{i+2})$. Supposons que $a(u_{i+1}) < a(u_{i+2})$. Alors par le lemme 2.26 on a $a(u_{i+3}) = a(u_{i+1})$. Aussi par le même lemme, on déduit que $a(u_{i-1}) = a(u_{i+1})$.

Cas 1. $u_{i+1} \in C^*$.

Par le lemme 2.21, il existe un absorbant $A \in \Delta_a$ tel que $|\{u_i, u_{i+1}, u_{i+2}\} \cap A| \geq 2$.

Donc $A \cap \{u_i, u_{i+2}\} \neq \emptyset$. Si $u_i \in A$ (resp. $u_{i+2} \in A$) alors $A' = (A \setminus \{u_i\}) \cup \{u_{i-1}\}$ (resp. $A' = (A \setminus \{u_{i+2}\}) \cup \{u_{i+3}\}$) est un absorbant de G . Mais on a $a^T x^{A'} < \alpha$, ce qui est impossible.

Cas 2. $u_{i+1} \notin C^*$.

Puisque $a^T x \geq \alpha$ est une contrainte non triviale, il existe un absorbant $\bar{A} \in \Delta_a$ tel que $u_{i+2} \in \bar{A}$. Soit $\bar{A}' = (\bar{A} \setminus \{u_{i+2}\}) \cup \{u_{i+3}, w_1^{i+2}, w_4^{i+2}\}$. On a $\bar{A}' \in D(G)$.

Puisque $a(w_1^{i+2}) = a(w_4^{i+2}) = 0$ et $a(u_{i+2}) > a(u_{i+3})$, il en résulte que $a^T x^{\bar{A}'} < \alpha$, ce qui est une contradiction. D'où $a(u_{i+1}) = a(u_{i+2})$. Les égalités (2.64) s'obtiennent donc par symétrie. $\square$

Remarque 2.4 D'après les lemmes 2.26 et 2.27, une des assertions suivantes est vérifiée.

- i) $a(u_i) = a(u_j) \forall i, j \in \{0, \dots, n-1\}$,
- ii) Il existe p sommets $v_1, \dots, v_p$ de C tels que $a(v_i) > a_0 \forall i = 1, \dots, p$ et $a(u_j) = a_0 \forall u_j \in C \setminus \{v_1, \dots, v_p\}$ où $a_0 = \min\{a(u_i), i = 0, \dots, n-1\}$.

Lemme 2.28 Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte valide pour $P_D(G)$. Soient u_i et u_j , $i \leq j$ deux sommets de C tels que

- i) $a(u_{i-1}) = a(u_l) \quad \forall u_l \in C(u_{i+1}, u_{j-1})$,
- ii) $a(u_{i-1}) < a(u_i), a(u_j)$,
- iii) u_l soit de degré 2, $\forall u_l \in C(u_{i+1}, u_{j-1})$.

Alors $|C(u_{i+1}, u_{j-1})| = 3t$ où t est un entier positif.

Preuve. Supposons le contraire. Considérons un absorbant A de G tel que $a^T x^A = \alpha$.

Assertion 1. Si $|C(u_{i+1}, u_{j-1})| = 3t' + 2$, $t' \geq 0$ alors $u_i \in A$ si et seulement si $u_j \in A$.

Preuve. En effet, si A contient u_i alors A doit contenir les sommets u_{i+3s} , $s = 0, \dots, t' + 1$. Supposons que ceci n'est pas le cas, et que A contient par exemple u_{i+3s_0-1} pour un certain $s_0 \in \{0, \dots, t' + 1\}$. On peut supposer, sans perte de généralité, que u_{i+3s_0-1} est le premier sommet rencontré en allant de u_i à u_j qui ne soit pas de type u_{i+3s} et qui appartienne à A . Donc $u_{i+3}, \dots, u_{i+3(s_0-1)} \in A$. Maintenant, considérons l'ensemble $A' = (A \setminus \{u_i, u_{i+3}, \dots, u_{i+3(s_0-1)}\}) \cup \{u_{i-1}, u_{i+2}, \dots, u_{i+3s_0-4}\}$. Il est simple de voir que A' est un absorbant de G . Puisque $a(u_{i-1}) = a(u_l) \forall u_l \in C(u_{i+1}, u_{j-1})$ et $a(u_{i-1}) < a(u_i)$ il en résulte que $a^T x^{A'} < \alpha$, ce qui est impossible. Par conséquent, $u_{i+3s} \in A, \forall s = 0, \dots, t' + 1$. D'où $u_j \in A$. Si $u_j \in A$, alors par symétrie $u_i \in A$.

Assertion 2. Si $|C(u_{i+1}, u_{j-1})| = 3t' + 1$, $t' \geq 0$ alors

$$|A \cap C(u_i, u_j)| = t' + 1. \quad (2.65)$$

Preuve. Supposons d'abord que $u_i \in A$. Alors comme on a vu dans l'assertion 1, A doit contenir les sommets u_{i+3s} $s = 1, \dots, t' + 1$ (notez ici que $i + 3(t' + 1) = j + 1$). Alors (2.65) est vérifiée. Si $u_i \notin A$, alors on peut supposer par symétrie que $u_j \notin A$. Il n'est pas difficile de voir dans ce cas qu'exactly $t' + 1$ sommets de $C(u_{i+1}, u_{j-1})$ sont nécessaires pour absorber cette chaîne. D'où (2.65) est vérifiée.

D'après l'assertion 1 (resp. l'assertion 2) tout absorbant $A \in \Delta_a$ vérifie l'équation

$$x(u_i) - x(u_j) = 0 \quad (2.66)$$

$$\left(\text{resp. } \sum_{j \in C(u_i, u_j)} x(j) = t' + 1 \right) \quad (2.67)$$

Puisque $a^T x = \alpha$ n'est ni un multiple de (2.66) ni un multiple de (2.67) alors le fait que $a^T x \geq \alpha$ définisse une facette est contredit. $\square$

Théorème 2.29 $P_D(C)$ est défini par les contraintes triviales, de voisinage et les contraintes (1.5) et (2.43)

Preuve. Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte qui définit une facette de $P_D(C)$ différente d'une facette triviale et d'une facette de voisinage. Si $a(u) = a(v) \forall u, v \in V$, alors $a^T x \geq \alpha$ est de la forme de (1.5) $\left(i.e. \sum_{j \in C} x(j) \geq \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil \right)$. Maintenant supposons qu'il existe p sommets $u_{j_1}, \dots, u_{j_p}$ de V tels que $a(u_{j_i}) > a_0, \forall i = 1, \dots, p$ où $a_0 = \min\{a(v); v \in V\}$ et $j_1 < j_2 < \dots < j_p$. D'après la remarque 2.4, nous avons $a(u) = a_0 \forall v \in V \setminus \{u_{j_1}, \dots, u_{j_p}\}$. Et d'après le lemme 2.28, nous avons $|C(u_{j_k+1}, u_{j_{k+1}-1})| = 3t_k, t_k > 0, \forall k = 1, \dots, p$ (modulo p).

Dans ce qui suit, nous allons montrer que $a(u_{j_k}) = 2a_0 \forall k = 1, \dots, p$. Puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, il existe un absorbant $A \in \Delta_a$ contenant u_{j_k} . Soit $A' = (A \setminus \{u_{j_k}\}) \cup \{u_{j_k-1}, u_{j_k+1}\}$. Il est évident que $A' \in D(G)$. D'où

$$a(u_{j_k}) \leq a(u_{j_k-1}) + a(u_{j_k+1}) \quad (2.68)$$

D'autre part on peut voir, comme cela est fait dans la démonstration du théorème 2.18, que tout absorbant $A \in \Delta_a$ contient dans ce cas, au plus un sommet parmi

$\{u_{j_1}, \dots, u_{j_p}\}$. Et il doit exister au moins un absorbant $\bar{A} \in \Delta_a$ ne contenant aucun u_{j_k} . Pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, on peut construire un absorbant A' de telle manière que $u_{j_k} \notin \bar{A}$, et

$\{u_{j_k-1}, u_{j_k-3}, u_{j_k+1}, u_{j_k+3}\} \subseteq \bar{A}$. Soit $\bar{A}' = (\bar{A} \setminus \{u_{j_k-1}, u_{j_k+1}\}) \cup \{u_{j_k}\}$. Puisque $\bar{A}' \in D(C)$ il en résulte que

$$a(u_{j_k}) \geq a(u_{j_k-1}) + a(u_{j_k+1}) \quad (2.69)$$

Par (2.68) et (2.69), on a $a(u_{j_k}) = 2a_0$. Ceci implique que $a^T x \geq \alpha$ est de la forme (2.43). $\square$

Le *dominant* d'un polyèdre $P \subset \mathbb{R}_+^n$ est donnée par $D_0(P) = P + \mathbb{R}_+^n$. Etant donné un vecteur $c \in \mathbb{R}_+^n$ de poids non négatif le problème $\min\{cx, x \in P\}$ est équivalent au programme $\min\{cx, x \in D_0(P)\}$. En conséquence, étant donné un problème d'optimisation combinatoire de la forme $\min\{c(F), F \in \mathcal{F} \subseteq 2^E\}$ où E est un ensemble fini donné et $c \geq 0$, pour ramener le problème à un programme linéaire, il suffit d'avoir une description du dominant du polyèdre des solutions. Une telle description est généralement plus simple à obtenir que celle du polyèdre lui même. Dans certains cas, une caractérisation du polyèdre peut être obtenue de celle du dominant en ajoutant les contraintes de bornes.

Etant donné un ensemble fini E , un ensemble $\mathcal{F} \subseteq 2^E$ est dit *fermé* si étant donnés $F \in \mathcal{F}$ et $F' \subseteq E$ avec $F \subseteq F'$ alors $F' \in \mathcal{F}$. Dans [67], Rais montre que $\mathcal{F}$ est fermé si et seulement si $P = D_0(P) \cap \{x(e) \leq 1, \forall e \in E\}$ où $P = \text{conv}\{x^F, F \in \mathcal{F}\}$.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, les absorbants de G forment un ensemble fermé. Donc d'après le résultat de Rais

$$P_D(G) = D_0(P_D(G)) \cap \{x(i) \leq 1, \forall i \in V\}.$$

Ceci montre que déterminer le dominant du polytope des absorbants est un problème aussi difficile que déterminer le polyèdre lui même.

Remarquons ici que si $\mathcal{F}$ est fermé, le polyèdre obtenu à partir de P en supprimant les contraintes $x(e) \leq 1, e \in E$ ne définit pas nécessairement le dominant de P .

Dans la suite nous étudions la relation entre les facettes de $P_D(G)$ et celles de $P_D(\bar{G})$ où $\bar{G}$ est la 1-somme du graphe G est du 5-cycle. Ici le graphe G est quelconque. Le théorème suivant décrit une procédure de construction de facettes de $P_D(\bar{G})$.

Théorème 2.30 Soient $G = (V, E)$ un graphe et $a^T x \geq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P_D(G)$. Soient $u \in V$ et $\delta = \min\{a(v), v \in N(u)\}$. Soit $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ un graphe obtenu comme la 1-somme de G et un 5-cycle $C = \{u, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ où $\{u\} = C \cap V$.

i) Si $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(\bar{G})$ alors $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(\bar{G})$.
 ii) Si $a^T x \geq \alpha$ n'est pas valide pour $P_D(\bar{G})$ et s'il existe un absorbant A^* de G tel que $a^T x^{A^*} = \alpha$, $A^* \cap N_G(u) = \{\bar{u}\} \neq \{u\}$ et $A^* \cap N_{\bar{G}}(\bar{u}) \neq \emptyset$ où $\bar{u}$ est un sommet de $N_G(u)$ tel que $a(\bar{u}) = \delta$. Alors

$$a^T x + \delta(x(w_1) + x(w_4)) \geq \alpha. \quad (2.70)$$

définit une facette de $P_D(\bar{G})$.

Preuve. i) Puisque $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(\bar{G})$, il suffit d'exhiber $|\bar{V}| = |V| + 4$ absorbants de $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$, dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité et ils sont linéairement indépendants. Comme $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G)$, il existe $|V|$ absorbants de G , $S_1, \dots, S_{|V|}$ tels que $a^T x^{S_i} = \alpha$, $\forall i = 1, \dots, |V|$ et $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|V|}}$ sont linéairement indépendants. Considérons les ensembles suivants

$$\begin{aligned} S'_i &= S_i \cup \{w_2, w_3\}, & \text{pour } i = 1, \dots, |V|, \\ S'_{|V|+1} &= S'_1 \cup \{w_1\}, \\ S'_{|V|+2} &= S'_1 \cup \{w_4\}, \\ S'_{|V|+3} &= (S'_1 \setminus \{w_2\}) \cup \{w_1\}, \\ S'_{|V|+4} &= (S'_1 \setminus \{w_3\}) \cup \{w_4\}. \end{aligned}$$

Il est clair que $S'_j \in D(\bar{G})$ et $a^T x^{S'_j} = \alpha \forall j = 1, \dots, |\bar{V}|$. De plus, il n'est pas difficile de vérifier que $x^{S'_1}, \dots, x^{S'_{|\bar{V}|}}$ sont linéairement indépendants.

ii) Notons la contrainte (2.70) par $a'^T x \geq \alpha'$. Montrons d'abord que $a'^T x \geq \alpha'$ est valide pour $P_D(\bar{G})$. Soient $\bar{S}$ un absorbant de $\bar{G}$ et $S = \bar{S} \setminus \{w_1, \dots, w_4\}$. Si S est un absorbant de G , alors $a'^T x^{\bar{S}} \geq a^T x^S \geq \alpha$. Si S n'est pas un absorbant de G alors $\bar{S} \cap \{w_1, w_4\} \neq \emptyset$ et $S \cap N_G(u) = \emptyset$. Supposons que $w_1 \in \bar{S}$ et soit $S' = S \cup \{\bar{u}\}$. Il est clair que $S' \in D(G)$. D'où $a'^T x^{\bar{S}} \geq a^T x^S + a(w_1) \geq a^T x^{S'} \geq \alpha$. Ce qui implique

que $a'^T x \geq \alpha'$ est valide pour $P_D(\bar{G})$.

Maintenant considérons les ensembles suivants

$$\begin{aligned} A_i &= S'_i, \text{ pour } i = 1, \dots, |V|, \\ A_{|V|+1} &= (A^* \setminus \{\bar{u}\}) \cup \{w_1, w_2, w_3\}, \\ A_{|V|+2} &= (A^* \setminus \{\bar{u}\}) \cup \{w_4, w_2, w_3\}, \\ A_{|V|+3} &= (A^* \setminus \{\bar{u}\}) \cup \{w_1, w_3\}, \\ A_{|V|+4} &= (A^* \setminus \{\bar{u}\}) \cup \{w_4, w_2\}. \end{aligned}$$

Il est simple de voir que $A_j \in D(\bar{G})$ et $a'^T x^{A_j} = \alpha' \quad \forall j = 1, \dots, |V|$. De plus $x^{A_1}, \dots, x^{A_{|V|}}$ sont linéairement indépendants. $\square$

Le théorème suivant décrit la procédure inverse du théorème 2.30.

Théorème 2.31 *Soit $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ un graphe qui est la 1-somme d'un graphe $G = (V, E)$ et un cycle $C = \{u, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ où $\{u\} = C \cap V$. Soit $a'^T x \geq \alpha'$ une contrainte définissant une facette de $P_D(\bar{G})$ telle que $a'(\bar{u}) = a'(w_1) = a'(w_4) > 0$ où $\bar{u}$ est un sommet de $N_G(u)$ tel que $a'(\bar{u}) = \min\{a'(v); v \in N_G(u)\}$. Soit*

$$\begin{aligned} a(v) &= a'(v) \quad \forall v \in V, \\ \alpha &= \alpha'. \end{aligned}$$

Alors $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G)$.

Preuve. Il est évident que $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(G)$. Puisque $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette de $P_D(\bar{G})$, alors il existe $|\bar{V}|$ absorbants $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_{|\bar{V}|}$ de $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ dont les vecteurs d'incidence vérifient $a'^T x \geq \alpha'$ à l'égalité et sont linéairement indépendants. On peut supposer que les ensembles $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_{|\bar{V}|}$ de $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ sont ordonnés de telle manière que $N_G(u) \cap \bar{S}_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, \dots, t$ et $N_G(u) \cap \bar{S}_i = \emptyset$ pour $i = t+1, \dots, |\bar{V}|$. Comme $a'(w_1) = a'(w_4) > 0$, on a alors $w_1, w_4 \notin \bar{S}_i \quad \forall i = 1, \dots, t$ et $|\{w_1, w_4\} \cap \bar{S}_i| = 1 \quad \forall i = t+1, \dots, |\bar{V}|$.

Soient $A_i = \bar{S}_i \setminus \{w_1, w_2, w_3, w_4\} \quad \forall i = 1, \dots, |\bar{V}|$. Considérons les ensembles suivants

$$\begin{aligned} S_i &= A_i \quad \forall i = 1, \dots, t, \\ S_i &= A_i \cup \{\bar{u}\} \quad \forall i = t+1, \dots, |\bar{V}|. \end{aligned}$$

Soit $\bar{M}$ (resp. M) la matrice dont les colonnes sont les vecteurs d'incidence de $\bar{S}_1, \dots, \bar{S}_{|\bar{V}|}$ (resp. $S_1, \dots, S_{|\bar{V}|}$). Soit $\bar{M}'$ la matrice obtenue de $\bar{M}$ en sommant les lignes correspondant à w_1 et w_4 et en ajoutant la ligne obtenue à celle qui correspond

à $\bar{u}$. On peut remarquer que M est la sous matrice de $\bar{M}'$ obtenue en supprimant les lignes correspondant à $w_1, \dots, w_4$. Ceci implique que M est de rang $|V|$, et par conséquent il existe $|V|$ absorbants de G parmi $S_1, \dots, S_{|\bar{V}|}$ dont les vecteurs d'incidence vérifient à l'égalité $a^T x \geq \alpha$ et sont linéairement indépendants. D'où $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G)$. $\square$

2.3.3 Exemples

Dans cette section nous appliquons les procédures ci-dessus pour construire des facettes de $P_D(G)$ où G est un cactus. Ces procédures vont permettre de construire des facettes avec des coefficients $1, 2, \dots, p$ où p est un entier fixé. Considérons les graphes (a) et (b) de la figure 2.7.

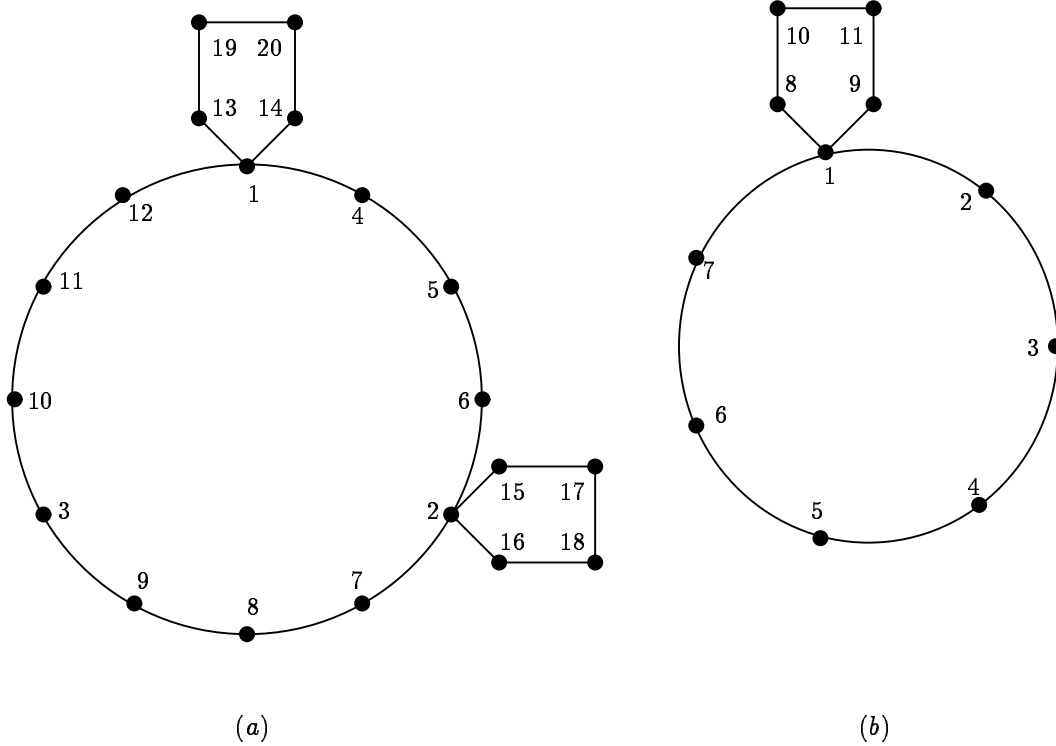


Figure 2.7 :

D'après les théorèmes 2.18 et 2.30, la contrainte

$$2 \sum_{j=1,2,3} x(j) + \sum_{j=1,\dots,16} x(j) \geq 5$$

définit une facette pour le polytope des absorbants du premier graphe, et par le théorème 2.19 la contrainte

$$\sum_{j=1,\dots,9} x(j) \geq 3$$

définit une facette pour le polytope des absorbants du deuxième graphe.

En identifiant le sommet 1 de chaque graphe et en supprimant les 5-cycles correspondants, on obtient le graphe de la figure 2.8.

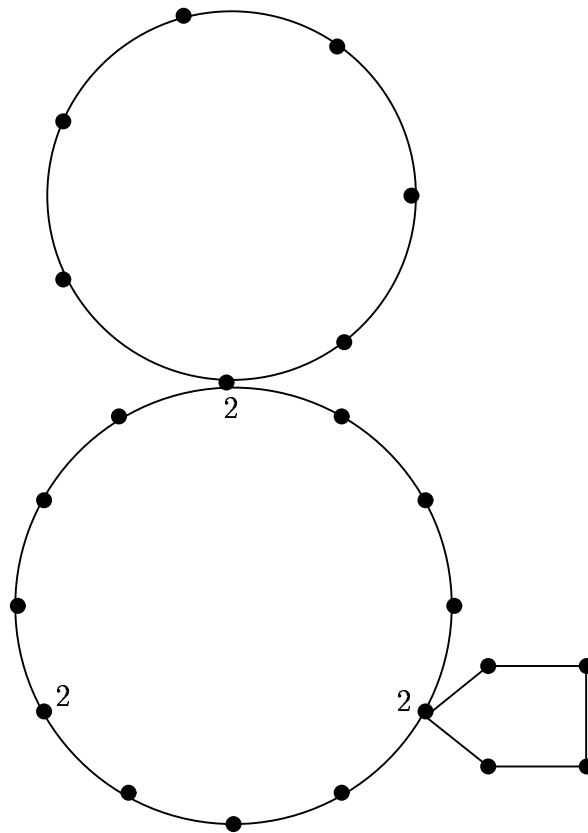


Figure 2.8 :

Le théorème 2.9 permet de construire une facette pour le polytope des absorbants du graphe de la figure 2.8. Cette contrainte a pour second membre 7 et pour support,

tous les sommets du graphes. Seuls les coefficients différents de 1 sont mentionnés sur la figure.

Considérons maintenant le graphe de la figure 2.9. Ce graphe est obtenu comme une 1-somme du graphe de la figure 2.8 et du graphe H après suppression des 5-cycles. Ici H est le graphe obtenu à partir du graphe (a) de la figure 2.7 en supprimant les sommets $\{15, \dots, 18\}$.

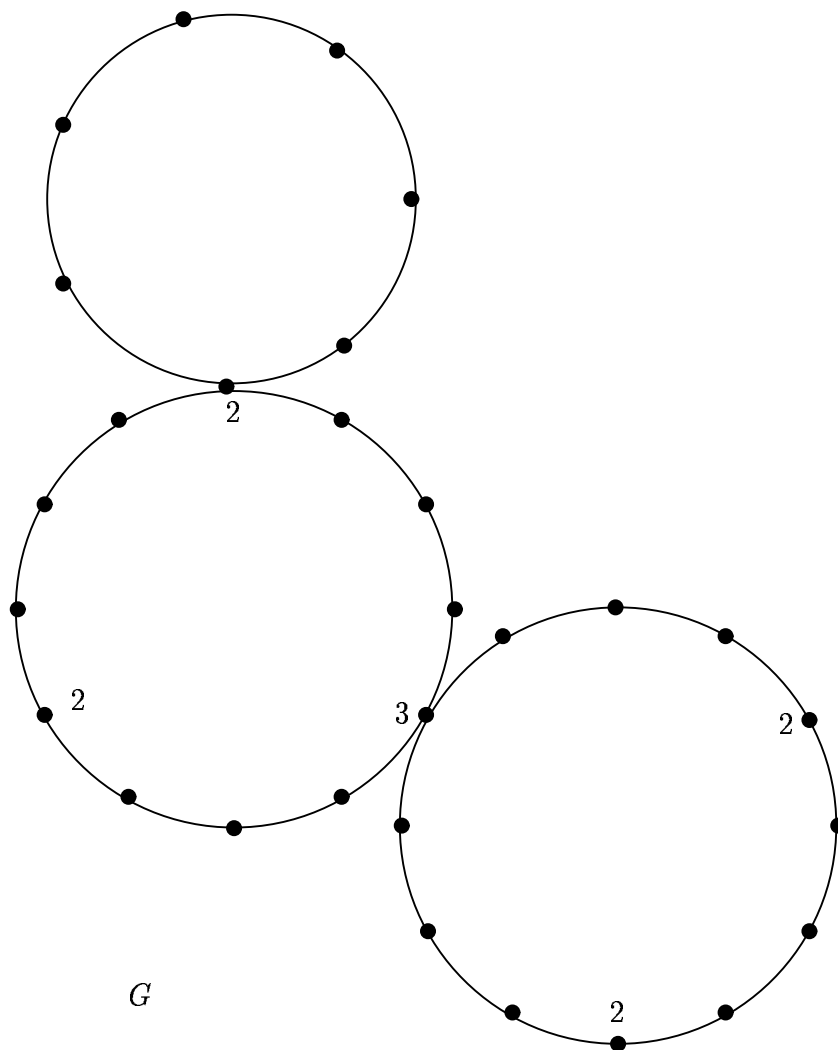


Figure 2.9 :

D'après le théorème 2.31, la contrainte

$$2 \sum_{j=1,2,3} x(j) + \sum_{j=1,\dots,14} x(j) \geq 5$$

définit une facette pour le polytope $P_D(H)$.

Par le théorème 2.9, le graphe G de la figure 2.9 est le support d'une facette du polytope $P_D(G)$. Les coefficients différents de 1 de la contrainte définissant cette facette, sont mentionnés sur la figure. Notons qu'un des coefficients est 3. Ceci nous permet de donner la remarque suivante.

Remarque 2.5 Etant donné un entier $p > 0$, il existe un graphe $G \in \mathcal{C}$ ($\mathcal{C}$ est la classe des cactus) tel que $P_D(G)$ ait une facette avec les coefficients $1, 2, \dots, p$.

Bien que le problème de l'absorbant minimum dans un cactus soit linéaire, le polytope associé ne paraît pas avoir une description simple. Une telle description doit utiliser la procédure décrite par le théorème 2.9 ainsi qu'une description complète du polytope $P_D(G)$ dans la classe Γ . Pour cette classe les résultats donnés ci dessus nous motivent à donner la conjecture suivante.

Conjecture 2.6 *Si G est un graphe de Γ , alors une contrainte différente des contraintes triviales et des contraintes de voisinage définit une facette de $P_D(G)$ si et seulement si elle peut être obtenue à partir d'une contrainte de $P_D(C)$ par application répétitive de la procédure du théorème 2.30.*

La caractérisation de plusieurs polytopes associés à des problèmes d'optimisation combinatoire (comme les problèmes du stable, du voyageur de commerce, du sous graphe biparti et de l'absorbant) dans un graphe G décomposable en G_1 et G_2 suivant une certaine opération de décomposition, dépend des systèmes caractérisant les polyèdres associés à deux graphes $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$ liés à G_1 et G_2 . Si ces systèmes sont simples à déterminer pour les briques de G , la procédure de composition des polyèdres permettrait d'avoir une description complète du polyèdre dans G .

Dans le cas du polytope des absorbants, les graphes augmentés $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$ sont définis en ajoutant un cycle à 5 sommets adjacent au sommet d'articulation. Pour définir

de tels graphes, on peut également penser à une opération plus simple qui consisterait à ajouter une arête adjacente au sommet d'articulation (au lieu d'ajouter un 5-cycle). Les graphes $\bar{G}_1$ et $\bar{G}_2$ ainsi définis ne peuvent donner lieu à des opérations de mixage de contraintes qui permettraient d'avoir une description complète du polytope $P_D(G)$. Par exemple considérons le graphe G de la figure 2.10.

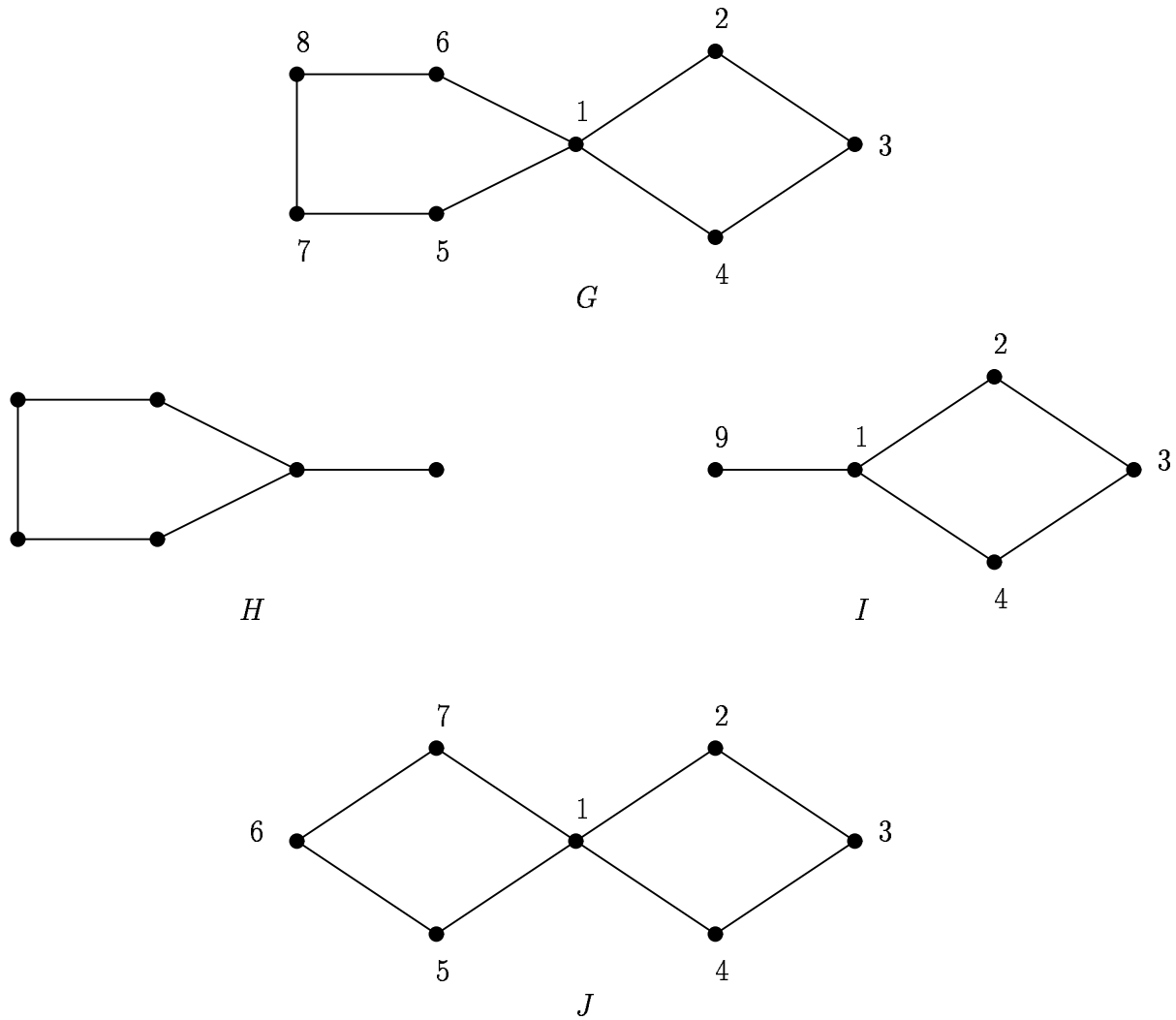


Figure 2.10 :

Le polytope $P_D(G)$ ne peut pas être décrit (par des opérations de mixage simples) à partir des systèmes décrivant les polytopes $P_D(H)$ et $P_D(I)$. En effet, il est facile de

voir que les contraintes

$$\sum_{j=1,\dots,6} x(j) \geq 2$$

$$x(N(1)) \geq 1$$

définissent des facettes de $P_D(G)$. Par contre aucune de ces contraintes ne peut être obtenue en mixant des contraintes définissant des facettes de $P_D(H)$ et $P_D(I)$, respectivement. Ici le polytope $P_D(I)$ est donné par les contraintes de voisinage associées aux sommets $\{2, 3, 4, 9\}$.

Aussi pour le graphe J de la figure 2.10, la contrainte

$$\sum_{j=1,\dots,7} x(j) \geq 3$$

définit une facette de $P_D(J)$. Par contre cette contrainte ne peut pas être générée à partir des facettes de $P_D(I)$.

Nous concluons ce chapitre en mentionnant deux généralisations du problème de l'absorbant qui méritent d'être étudiées.

La première généralisation possible est la suivante: Soit $G = (V, E)$ un graphe. Soit $T \subseteq V$ un sous ensemble donné de V . Un sous ensemble $S \subseteq V$ est dit T -absorbant si pour tout $j \in T \setminus S$, il existe au moins un sommet de S adjacent à j . Le problème considéré correspond au cas où $T = V$.

A notre connaissance, cette version généralisée du problème de l'absorbant n'a pas été considérée dans la littérature. Il serait donc intéressant d'avoir des résultats (même préliminaires) sur cette généralisation.

La deuxième généralisation consiste à considérer le problème de l'absorbant dans les graphes orientés. Etant donné un graphe orienté $G = (V, E)$, un sous ensemble $S \subseteq V$ est dit absorbant si pour tout $i \in V \setminus S$, il existe au moins un sommet $j \in S$ tel que (i, j) soit un arc de E . Ainsi le problème de l'absorbant dans un graphe G non orienté peut être ramené au problème de l'absorbant dans un graphe orienté en considérant deux arcs (i, j) et (j, i) pour toute arête ij du graphe G .

Le problème de l'absorbant dans les graphes orientés est très lié au problème dit du mariage.

Le *problème de mariage* (cf. Gale et Shapley [44]) consiste à former des couples à partir de deux ensembles M et W (hommes et femmes) où chaque élément d'un ensemble a un ordre de préférence sur les éléments de l'autre ensemble. Chaque élément d'un ensemble doit se trouver dans un nombre déterminé de couples.

Un couple (x, y) est dit *acceptable* si x (y) appartient à la liste des éléments préférés par y (x). Un *mariage* est un ensemble de couples acceptables où chaque élément est marié ou resté célibataire.

Un problème de mariage peut être modélisé par un graphe orienté où les sommets représentent les couples acceptables et les arcs représentent les ordres de préférence. Il y a un arc entre deux sommets si et seulement si un individu x est présent dans les deux sommets. L'orientation de l'arc est fixée par la préférence de x entre les deux autres individus présents dans ces sommets.

Un mariage est dit *stable* (cf. Gale et Shapley [44]) est un mariage dans lequel il n'existe pas deux éléments qui, en réalisant ensemble un nouveau couple, obtiendraient tous deux un meilleur résultat. En d'autres termes, il n'existe pas un couple (x, y) du mariage et deux éléments $x' \in M$ et $y' \in W$ tel que x' soit préférable à y de x et y' soit préférable à x de y . Gale et Shapley [44] ont donné un algorithme permettant de calculer un mariage stable.

Etant donné un graphe orienté $G = (V, E)$, un ensemble de sommets $S \subseteq V$ est dit *stable* si pour tout $s \in S$, il n'existe pas de successeurs à s dans S . S est dit *noyau* de G si S est à la fois un stable et un absorbant de G .

Le résultat suivant établi par Maffray [56] caractérise les sommets d'un graphe correspondant aux mariages stables.

Théorème 2.32 ([56]) *Un ensemble de sommets S de G (définissant un problème de mariage) est l'ensemble des sommets réalisés par un mariage stable si et seulement si S est un noyau de G .*

Dans [68] Ratier introduit des simplifications sur les graphes du mariage, qui ont permis de mieux clarifier certains résultats et propriétés connus sur les mariages stables. Il a également étudié le polytope dont les points extrêmes sont les vecteurs représentatifs des mariages stables. Il a donné une caractérisation des faces de ce polytope. Une

description complète de ce polytope est obtenue par Vande Vate [76] et Rothblum [70]. Pour plus de détails sur ce sujet le lecteur peut consulter [2, 48, 68, 69].

Chapitre 3

Construction de facettes

Dans ce chapitre, nous allons étudier certaines procédures qui permettent de construire des facettes de $P_D(G)$ à partir de facettes où G est obtenu à partir d'un autre graphe.

Un sommet u dans un graphe est dit *universel* si u est adjacent à tous les sommets du graphe G .

Une paire de sommets (u, v) dans un graphe $G = (V, E)$ est dite une *paire de pôles*, si u (resp. v) est universel dans $G \setminus v$ (resp. $G \setminus u$) et u et v ne sont pas adjacents. Ici $G \setminus u$ (resp. $G \setminus v$) est le graphe obtenu de G en supprimant u (resp. v) et toutes les arêtes adjacentes à u (resp. v).

3.1 Ajout d'un sommet universel

Soit $G = (V, E)$ un graphe et soit $G_u = (V', E')$ le graphe obtenu de G en ajoutant un sommet universel u . Par conséquent G_u est obtenu en ajoutant le sommet u et les arêtes uv , pour tout $v \in V$. L'objet de ce paragraphe est d'examiner la relation qui existe entre les facettes de $P_D(G)$ et celles de $P_D(G_u)$.

Lemme 3.1 *Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte non triviale définissant une facette pour $P_D(G_u)$. Alors $a(u) = \alpha$.*

Preuve. D'abord il est clair que $a(u) \geq \alpha$. Sinon, pour l'ensemble $A = \{u\}$, qui est un absorbant de G_u , on aurait $a^T x^A < \alpha$, une contradiction.

Maintenant supposons que $a(u) > \alpha$. Alors tout absorbant A' dont le vecteur d'incidence vérifie $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité ne contient pas u . Mais dans ce cas, $a^T x \geq \alpha$ serait équivalente à la contrainte $x(u) \geq 0$. Ceci contredit le fait que $a^T x \geq \alpha$ est non triviale. $\square$

Théorème 3.2 *Soit $a^T x + a(u)x(u) \geq \alpha$ une contrainte non triviale qui définit une facette de $P_D(G_u)$. Et soient les deux conditions suivantes :*

i) *Il existe un absorbant S_0 de G tel que $S_0 \cap (V \setminus V_a) = \emptyset$ et $a^T x^{S_0} = \alpha$.*

ii) $V = V_a$.

Si une des conditions i) et ii) est vérifiée alors $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G)$.

Preuve. Il n'est pas difficile de voir que $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(G)$. Dans la suite, nous allons montrer qu'il existe $|V|$ absorbants de G dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité et sont linéairement indépendants.

Supposons que i) est vérifiée. Puisque $a^T x + a(u)x(u) \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G_u)$, il existe $|V| + 1$ absorbants de G_u , $S_1, \dots, S_{|V|+1}$ dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x + a(u)x(u) \geq \alpha$ à l'égalité et sont linéairement indépendants. Sans perte de généralité, on peut supposer que les absorbants $S_1, \dots, S_{|V|+1}$ sont ordonnés de telle manière que $S_1, \dots, S_r$ contiennent u et $S_{r+1}, \dots, S_{|V|+1}$ ne contiennent pas u . Puisque les ensembles S_0 et $\{u\}$ ont des vecteurs d'incidence qui vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité et sont linéairement indépendants, on peut poser $S_0 = S_{r+1}$ et $S_1 = \{u\}$.

Soit M la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|V|+1}}$. Supposons que la dernière ligne de M est associée à u . M peut être écrite de la manière suivante

$$M = \begin{array}{c} \\ \\ u \end{array} \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ \vdots & M_1 & & M_2 & & \\ 0 & & & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

où M_1 et M_2 sont des matrices en 0 – 1. Maintenant faisons les remarques suivantes : Tout ensemble S_i , $i \in \{r+1, \dots, |V|+1\}$, est aussi un absorbant de G . Et pour tout absorbant S_i , $i \in \{1, \dots, r\}$, on a

$$a(v) = 0 \quad \forall v \in S_i \setminus \{u\}. \quad (3.1)$$

Considérons maintenant les ensembles suivants.

$$\begin{aligned} S'_i &= S_{r+1} \cup (S_i \setminus \{u\}), & i &= 2, \dots, r, \\ S'_i &= S_i, & i &= r+1, \dots, |V|+1. \end{aligned}$$

Il est évident que les S'_i sont des absorbants dans G . De plus, par (3.1) on a $a^T x = \alpha$, pour $i = 1, \dots, |V| + 1$.

Si M' est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs d'incidence des absorbants S'_i , $i = 2, \dots, |V| + 1$, alors M' peut être obtenue à partir de la matrice

$$M'' = \begin{bmatrix} & M_1 & M_2 \end{bmatrix},$$

par des opérations élémentaires sur les colonnes. Puisque la matrice M'' est non singulière alors M' l'est aussi.

Si $V = V_a$ alors dans ce cas $r = 1$, et les restrictions des ensembles S_i , $i = 2, \dots, |V| + 1$ sont des absorbants dans G dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité et sont linéairement indépendants. $\square$

Théorème 3.3 *Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte qui définit une facette de $P_D(G)$. Alors $a^T x + \alpha x(u) \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G_u)$.*

Preuve. Il est évident que $a^T x + \alpha x(u) \geq \alpha$ est valide pour $P_D(G_u)$. Maintenant, puisque $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G)$ alors il existe $|V|$ absorbants $S_1, \dots, S_{|V|}$ dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x^{S_i} = \alpha$ pour $i = 1, \dots, |V|$ et sont linéairement indépendants.

Les ensembles $S_1, \dots, S_{|V|}$, $S_{|V|+1} = \{u\}$ sont des absorbants de G_u et leurs vecteurs d'incidence vérifient $a^T x + \alpha x(u) \geq \alpha$ à l'égalité et sont linéairement indépendants. $\square$

La procédure décrite par le théorème 3.2 permet de construire des facettes de G à partir des facettes de G_u si les conditions i) et/ou ii) sont vérifiées. Les conditions i) et ii) ne peuvent être vérifiées si le graphe G contient des sommets isolés. Mais même dans ce cas, la contrainte $a^T x \geq \alpha$ peut définir une facette de G , comme le montre l'exemple suivant :

Considérons le graphe G_u donné par la figure 3.1

Le sommet 5 est universel dans G_u . La contrainte de voisinage $x(1) + x(2) + x(5) \geq 1$ associée au sommet 2 (et au sommet 1) définit une facette de $P_D(G_u)$. Et la contrainte

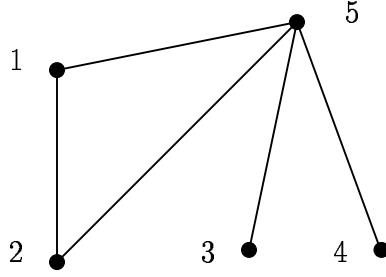


Figure 3.1 :

$x(1) + x(2) \geq 1$ définit une facette dans $P_D(G)$, alors que les sommets 3 et 4 sont des sommets isolés dans G .

Cette discussion motive la conjecture suivante.

Conjecture : *Si $a^T x + \alpha x(u) \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G_u)$ alors $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G)$.*

3.2 Ajout d'une paire de pôles

Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu de $G = (V, E)$ en ajoutant une paire de pôles (u, v) . Par conséquent G' est obtenu de G en ajoutant les sommet u et v , et les arêtes uj, vj pour tout $j \in V$. Nous donnons dans ce paragraphe une procédure de construction de facettes pour $P_D(G')$.

Théorème 3.4 (a) *Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte non triviale qui définit une facette de $P_D(G)$. Supposons que G ne contient pas de sommet universel. Soit $a_0 = \min\{a(j), j \in V\}$. Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu de G en ajoutant une paire de pôles (u_1, u_2) à G . Soient*

$$\begin{aligned} a'(j) &= a(j) & \forall j \in V, \\ a'(j) &= \alpha - a_0 & \forall j \in \{u_1, u_2\}, \\ \alpha' &= \alpha. \end{aligned}$$

Alors $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette de $P_D(G')$.

(b) *Soit $G' = (V', E')$ un graphe et $a'^T x \geq \alpha'$ une contrainte non triviale définissant*

une facette de $P_D(G')$. Supposons qu'il existe deux sommets (u_1, u_2) formant une paire de pôles dans G' . Alors

i) $a'(u_1) = a'(u_2) > 0$,

ii) S'il existe un absorbant $S_0 \in D(G')$ contenant u_1, u_2 dont le vecteur d'incidence vérifie $a'^T x \geq \alpha'$ à l'égalité, alors $a'^T x \geq \alpha'$ est la contrainte

$$\sum_{j \in V'} x(j) \geq 2. \quad (3.2)$$

Preuve. (a) Montrons d'abord que $a'^T x \geq \alpha'$ est valide pour $P_D(G')$. Soit $S \in D(G')$. Si $u_1, u_2 \notin S$ alors il est clair que $a'^T x^S \geq \alpha'$. Maintenant supposons que $S \cap \{u_1, u_2\} = 1$. Puisque S doit contenir au moins un sommet de V pour absorber u_1 ou u_2 , on doit avoir $a'^T x^S \geq \alpha'$. Si $u_1, u_2 \in S$ alors $a'^T x^S \geq 2\alpha - 2a_0$. Puisque $a^T x \geq \alpha$ définit une facette non triviale de $P_D(G)$, il doit exister un absorbant $A \in D(G)$ contenant un sommet j_0 tel que $a(j_0) = a_0$ et dont le vecteur d'incidence vérifie $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité. Puisque G ne contient pas de sommets universels, A doit contenir au moins un autre sommet différent de j_0 . Mais cela implique que $2a_0 \leq \alpha$. Et par conséquent, on a $a'^T x^S \geq \alpha'$, ce qui montre que $a'^T x \geq \alpha'$ est valide pour $P_D(G')$.

Maintenant, puisque $a^T x \geq \alpha$ définit une facette non triviale de $P_D(G)$, il doit exister $|V|$ absorbants $S_1, \dots, S_{|V|}$ tels que $a^T x^{S_i} = \alpha$ pour $i = 1, \dots, |V|$ et $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|V|}}$ sont linéairement indépendants. Soient les ensembles

$$\begin{aligned} S'_i &= S_i & i = 1, \dots, |V|, \\ S'_{|V|+1} &= \{u_1, j_0\}, \\ S'_{|V|+2} &= \{u_2, j_0\}. \end{aligned}$$

Il est évident que les S'_i définissent des absorbants dans G' . De plus on a $a'^T x^{S'_i} = \alpha'$ pour $i = 1, \dots, |V| + 2$ et $x^{S'_i}, i = 1, \dots, |V| + 2$ sont linéairement indépendants.

(b) i) Comme $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette non triviale de $P_D(G')$, il doit exister un absorbant S contenant u_1 tel que $a'^T x^S = \alpha'$.

Si $S = \{u_1, u_2\}$ alors $a'(u_1) = a'(u_2)$. En effet si ce n'était pas le cas, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $a'(u_1) > a'(u_2)$, et nous aurons $a'(j) \geq a'(u_1), \forall j \in V$. Comme G ne contient pas de sommet isolé alors ceci contredit le fait qu'il doit aussi exister un absorbant ne contenant pas u_2 et dont le vecteur d'incidence vérifie $a'^T x \geq \alpha'$ à l'égalité.

Si $u_2 \notin S$ alors soit $S' = (S \setminus \{u_1\}) \cup \{u_2\}$. Puisque $S' \in D(G')$, on doit avoir $a'(u_2) \geq a'(u_1)$.

Par symétrie, on obtient $a'(u_1) \geq a'(u_2)$ et donc $a'(u_1) = a'(u_2)$.

Maintenant si $a'(u_1) = a'(u_2) = 0$, puisque $\{u_1, u_2\}$ est un absorbant de G' , il en résulte que $\alpha = 0$ et $a'(j) = 0, \forall j \in V$. Nous avons une contradiction. Cela implique que $a'(u_1) = a'(u_2) > 0$.

ii) Supposons qu'il existe un absorbant $S_0 \in D(G')$ contenant u_1, u_2 tel que $a'^T x^{S_0} = \alpha'$. Comme $\{u_1, u_2\}$ est un absorbant et par i) $a'(u_1) = a'(u_2)$, on a $a'(u_1) = a'(u_2) = \alpha'/2$. Pour montrer l'assertion, il suffit de montrer que $a'(j) = \alpha'/2 \forall j \in V$. Il est clair que $a'(j) \geq \alpha'/2 \forall j \in V$. Si pour un certain $j \in V$, $a'(j) < \alpha'/2$, l'ensemble $\{j, u_1\}$ serait un absorbant de G' dont le vecteur d'incidence ne vérifie pas $a'^T x \geq \alpha'$, une contradiction.

Maintenant, supposons que $a'(j) > \alpha'/2$ pour un certain $j \in V$. Comme $a'^T x \geq \alpha'$ est différente d'une contrainte triviale, il doit exister un absorbant S' contenant j tel que $a'^T x^{S'} = \alpha'$. Puisque G' est sans sommet universel, S' doit contenir au moins un autre sommet différent de j . Mais ceci implique que $a'^T x^{S'} > \alpha$, une contradiction. Par conséquent $a'(j) = \alpha'/2$ et donc $a'^T x \geq \alpha'$ est de la forme donnée par (3.2). $\square$

Remarque 3.1 Si $a^T x + a(u_1)x(u_1) + a(u_2)x(u_2) \geq \alpha$ est une contrainte qui définit une facette de $P_D(G')$, u_1 et u_2 étant une paire de pôles de G' , alors $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(G)$ où G est le graphe obtenu en supprimant u_1 et u_2 . Mais elle peut ne pas définir une facette.

En effet, considérons le graphe $G' = (V', E')$ de la figure 3.2.

Il est facile de voir que la contrainte $\sum_{j=1}^8 x(j) \geq 2$ définit une facette de $P_D(G')$. Par contre la contrainte $\sum_{j=1}^6 x(j) \geq 2$, qui est valide pour $P_D(G)$ où G est le cycle sur les sommets $\{1, \dots, 6\}$, peut être obtenue à partir des contraintes de voisinage associées aux sommets 3 et 6 dans G . Nous remarquons cependant que la contrainte $\sum_{j=1}^8 x(j) \geq 2$

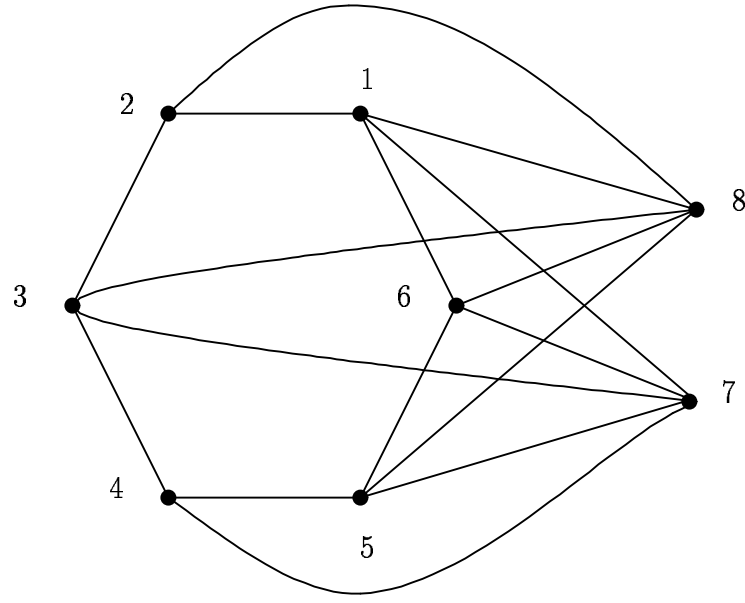


Figure 3.2 :

de $P_D(G')$ a la même forme que la contrainte donnée par (3.2).

3.3 Substitution d'une arête par une chaîne

Dans cette section, nous donnons une procédure de construction de facettes pour $P_D(G')$ lorsque G' est obtenu à partir d'un graphe G , en remplaçant une arête de G par une chaîne de longueur 3.

Théorème 3.5 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $e = uv$ une arête de E . Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte qui définit une facette de $P_D(G)$.*

Supposons que $a(u) = a(v) = \alpha^ - \alpha > 0$ où $\alpha^* = \min \{a^T x^S \mid S \text{ soit un absorbant contenant } u \text{ et } v\}$. Supposons aussi que $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(G \setminus u)$ et $P_D(G \setminus v)$.*

Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en remplaçant l'arête uv par la

chaîne (u, w, z, v) (voir figure 3.3). Soient

$$\begin{aligned} a'(j) &= a(j) & \forall j \in V, \\ a'(w) &= a'(z) = \alpha^* - \alpha, \\ \alpha' &= \alpha^*. \end{aligned}$$

Alors $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette de $P_D(G')$.

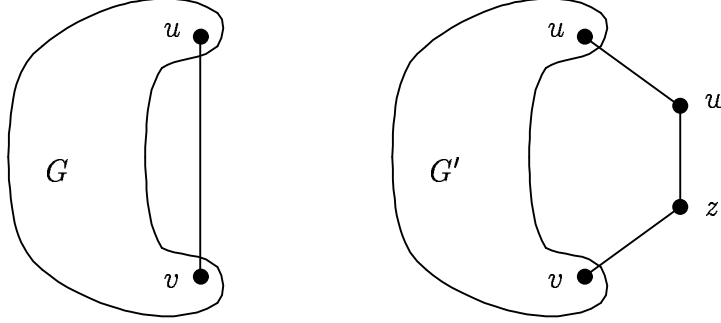


Figure 3.3 :

Preuve. Montrons d'abord que $a'^T x \geq \alpha'$ est valide pour $P_D(G')$. Soit $S' \in D(G')$.

Si $u, v \in S'$ alors $a^T x^S \geq \alpha^*$ par définition de α^* .

Si $u \in S'$ et $v \notin S'$ ($v \in S'$ et $u \notin S'$), alors $\{w, z\} \cap S' \neq \emptyset$. De plus $S' = S' \setminus \{w, z\}$ est un absorbant de G . D'où $a'^T x^S = a^T x^{S'} + (\alpha^* - \alpha) \geq \alpha^*$.

Donc supposons que $u, v \notin S'$. Si $w, z \in S'$, alors $S'' = (S' \setminus \{w, z\}) \cup \{u\}$ est un absorbant de G . D'où

$$\begin{aligned} a'^T x^S &= a^T x^{S''} - a(u) + a'(w) + a'(z), \\ &\geq \alpha - (\alpha^* - \alpha) + 2(\alpha^* - \alpha), \\ &\geq \alpha^*. \end{aligned}$$

Si $w \in S'$ et $z \notin S'$ ($w \notin S'$ et $z \in S'$) alors soit $\bar{S} = S' \setminus \{w\}$. Puisque $\bar{S}$ est un absorbant de $G \setminus v$, alors par notre hypothèse on a $a^T x^{\bar{S}} \geq \alpha$. D'où $a'^T x^S = a^T x^{\bar{S}} + a'(w) \geq \alpha^*$.

Maintenant pour montrer que $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette de $P_D(G')$, il reste à exhiber $|V| + 2$ absorbants de G' dont les vecteurs d'incidence vérifient $a'^T x \geq \alpha'$ à l'égalité et sont linéairement indépendants. Puisque $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G)$, il existe $|V|$ absorbants de G , $S_1, \dots, S_{|V|}$ tels que $a^T x^{S_i} = \alpha$ pour $i = 1, \dots, |V|$ et $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|V|}}$

$$(\underbrace{\alpha, \dots, \alpha}_{|V|}, \alpha, \alpha^*), \quad (3.3)$$

En ajoutant à la ligne de M'' associée au sommet w la ligne (3.3) divisée par $-\alpha$ et la ligne associée à u , on obtient une matrice M''' ayant la forme suivante.

$$M''' = \begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ w & \left[\begin{array}{cccccc} M & & & \tilde{M} & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 - \alpha^*/\alpha \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ z & \end{matrix}$$

Puisque M est non singulière, il en résulte que M''' l'est aussi et donc M' est non singulière. Ce qui termine la démonstration du théorème. $\square$

3.4 Duplication de sommets

Nous allons décrire dans la suite une procédure qui permet de construire des facettes de $P_D(G)$ quand G est obtenu par des opérations de duplication de sommets. Nous décrivons également une procédure inverse.

Théorème 3.6 (Duplication d'un sommet) *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $a^T x \geq \alpha$ une contrainte non triviale définissant une facette de $P_D(G)$. Soit $v \in V$. Soit $G' = (V', E')$ un graphe obtenu de G en ajoutant un sommet v' et les arêtes $v'j$ pour $j \in N(v)$. Soient*

$$\begin{aligned} a'(j) &= a(j), \quad \forall j \in V, \\ a'(v') &= a(v), \\ \alpha' &= \alpha. \end{aligned}$$

Alors $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette de $P_D(G')$.

Preuve. Il est simple de voir que $a'^T x \geq \alpha'$ est valide pour $P_D(G')$. Puisque $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G)$, il existe $|V|$ absorbants $S_1, \dots, S_{|V|}$ tels que $a^T x^{S_i} = \alpha$, $\forall i = 1, \dots, |V|$ et $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|V|}}$ sont linéairement indépendants. Puisque $a^T x \geq \alpha$ est non triviale, il doit exister un absorbant parmi $S_1, \dots, S_{|V|}$, contenant v . On peut supposer que $v \in S_1$. Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} S'_i &= S_i & \forall i = 1, \dots, |V|, \\ S'_{|V|+1} &= (S_1 \setminus \{v\}) \cup \{v'\} \end{aligned}$$

qui sont tous des absorbants dans G' . Ces ensembles vérifient $a'^T x^{S'_i} = \alpha$, pour $i = 1, \dots, |V| + 1$ et $x^{S'_1}, \dots, x^{S'_{|V|+1}}$ sont linéairement indépendants. $\square$

De ce théorème, on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 3.7 (Remplacement d'un sommet par une clique) *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $a^T x \geq \alpha$ une contrainte non triviale définissant une facette de $P_D(G)$. Soit $v \in V$. Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en ajoutant k sommets $v_1, \dots, v_k$, où k est quelconque, et les arêtes $v_i j$, $\forall i = 1, \dots, k$; pour tout $j \in N(v) \cup \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k\}$ (le sous graphe induit par $v_1, \dots, v_k$ est une clique). Soient*

$$\begin{aligned} a'(j) &= a(j), \quad \forall j \in V, \\ a'(v'_i) &= a(v) \quad \forall i = 1, \dots, k, \\ \alpha' &= \alpha. \end{aligned}$$

Alors $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette de $P_D(G')$.

L'inverse de ce corollaire est aussi vrai comme le montre le théorème suivant.

Théorème 3.8 *Soient $G' = (V', E')$ un graphe et $a'^T x \geq \alpha'$ une contrainte qui définit une facette de $P_D(G')$. Soient $v_1, \dots, v_k$, $k \geq 2$ des sommets de G' .*

Supposons que le sous graphe induit par $v_1, \dots, v_k$ est une clique et que $N(v_i) = N(v_j)$, $\forall i, j = 1, \dots, k$; $i \neq j$. Alors

(a) $a'(v_i) = a'(v_j)$, $\forall i, j = 1, \dots, k$; $i \neq j$.

(b) Si $a'(v_i) > 0$, $\forall i = 1, \dots, k$, et si $G = (V, E)$ est le graphe obtenu de G' en supprimant les sommets $v_2, \dots, v_k$ alors la contrainte $a^T x \geq \alpha$ où

$$\begin{aligned} a(j) &= a'(j), \quad \forall j \in V, \\ \alpha &= \alpha'. \end{aligned}$$

définit une facette de $P_D(G)$.

Preuve. (a) Soit $\lambda = \min \{a'(v_i), i = 1, \dots, k\}$. Supposons qu'il existe un sommet v_r , $r \in \{1, \dots, k\}$, tel que $v_r > \lambda$. Alors tout absorbant dont le vecteur d'incidence vérifie $a'^T x \geq \alpha'$ à l'égalité ne peut contenir v_r , une contradiction.

Par conséquent, on a $a'(v_i) = a'(v_j)$, $\forall i, j = 1, \dots, k$; $i \neq j$.

(b) D'abord, comme tout absorbant dans G est aussi absorbant dans G' , il en découle que $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(G)$.

Comme $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette de $P_D(G')$, il existe $|V'|$ absorbants $S'_1, \dots, S'_{|V'|}$ dont les vecteurs d'incidence vérifient la contrainte $a'^T x \geq \alpha'$ à l'égalité et sont linéairement indépendants. Sans perte de généralité, on peut supposer que les S'_i sont ordonnés de telle manière que $S'_i \cap \{v_1, \dots, v_k\} \neq \emptyset$ pour $i = 1, \dots, p$ et $S'_i \cap \{v_1, \dots, v_k\} = \emptyset$ pour $i = p+1, \dots, |V'|$. Puisque $a'^T x \geq \alpha'$ est une contrainte non triviale on a $0 < p < |V'|$. Soient les ensembles

$$\begin{aligned} S_i &= (S'_i \setminus \{v_2, \dots, v_k\}) \cup \{v_1\} & \forall i = 1, \dots, p, \\ S_i &= S'_i & \forall i = p+1, \dots, |V'|. \end{aligned}$$

Les ensembles S_i définissent des absorbants dans G . En effet, ceci est clair pour les S_i , $i = p+1, \dots, |V'|$. Si $S'_i \cap \{v_1, \dots, v_k\} \neq \emptyset$, puisque $N(v_i) = N(v_j)$, il en découle que S_i est un absorbant dans G .

Maintenant, comme $a'(v_i) > 0 \ \forall i = 1, \dots, k$, et les sommets v_i , $i = 1, \dots, k$ ont le même ensemble voisinage, les ensembles S'_i , $i = 1, \dots, p$ contiennent exactement un seul sommet parmi $\{v_1, \dots, v_k\}$. Par conséquent, on a $p = k$.

Soit M' la matrice dont les colonnes sont les vecteurs des ensembles S'_i , $i = 1, \dots, |V'|$. M' peut se présenter sous la forme ci-dessous.

$$M' = \begin{matrix} & \begin{bmatrix} M'_1 & M'_2 \\ \vdots & \vdots \\ M'_3 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{matrix} & \underbrace{\hspace{1cm}}_k \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{|V'| - k} \end{matrix},$$

où M'_1 , M'_2 et M'_3 sont des matrices en 0 – 1. M'_3 est, à des permutations de colonnes près, la matrice diagonale.

Soit M'' la matrice obtenue de M' en ajoutant à la ligne associée à v_1 les lignes

correspondant à $v_2, \dots, v_k$. M'' peut s'écrire comme suit

$$M'' = \begin{bmatrix} & & M'_1 & & M'_2 & & \\ v_1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ v_2 & & & & & & & & \\ \vdots & & \tilde{M}'_3 & & 0 & & & & \\ v_k & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

où $\tilde{M}'_3$ est la sous matrice formée par les lignes correspondant à $v_2, \dots, v_k$.

Soit M la matrice formée par les $|V'|$ premières lignes de M'' . On peut remarquer que les colonnes de M correspondent aux vecteurs d'incidence des ensembles S_i , $i = 1, \dots, |V'|$. De plus, il est clair que M est de rang $|V|$. $\square$

Théorème 3.9 Soit $G = (V, E)$ un graphe et $a^T x \geq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P_D(G)$. Soit $v \in V$. Soit $N^*(v) = \{v_1, \dots, v_k\}$. Supposons que pour tout absorbant $A \in D(G)$, $a^T x^{A \setminus N(v)} \geq \alpha - a_0 q$, pour un certain $q \in \mathbb{N}$ où k et q sont premiers entre eux. Supposons que pour tout absorbant $S \in D(G)$ tel que $v \notin S$ et $a^T x^S = \alpha$, on a $|N^*(v) \cap S| = q$. Supposons que $a(v_i) = a(v_j) = a_0 \ \forall v_i, v_j \in N^*(v)$ et $a(v) = a_0 q$. Supposons que pour tout v_i , il existe un absorbant $A_i \in D(G)$ tel que $v \notin A_i$, $a^T x^{A_i} = \alpha$ et $A_i \cap \{v_1, \dots, v_k\} = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+q-1}\}$ où les indices sont modulo k .

Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu de G en ajoutant sur chaque arête $v v_i$, $i = 1, \dots, k$, un sommet v'_i de degré 2. Soient

$$\begin{aligned} a'(j) &= a(j), & \forall j \in V \setminus \{v\}, \\ a'(v_i') &= a_0, & \forall i = 1, \dots, p, \\ a'(v) &= a_0(k - q), \\ \alpha' &= \alpha + a_0(k - q). \end{aligned}$$

Alors $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette de $P_D(G')$.

Preuve. Montrons d'abord que $a'^T x \geq \alpha'$ est valide pour $P_D(G')$. Soit $S' \in D(G')$. Supposons que $v \in S'$. Soit $\tilde{S} = (S' \setminus N_{G'}(v)) \cup \{v_i \mid v'_i \in S'\}$. Rappelons que $N_{G'}(v)$ désigne l'ensemble de voisinage de v dans G' (*i.e* $N_{G'}(v) = \{v, v'_i, i = 1, \dots, k\}$). Il n'est pas difficile de voir que $\tilde{S}$ constitue un absorbant de G . De plus

$$\begin{aligned} a'^T x^{S'} &= a^T x^{\tilde{S}} + a'(v), \\ &\geq \alpha + a_0(k - q), \\ &> \alpha'. \end{aligned}$$

Si $v \notin S'$, considérons l'ensemble $\bar{S} = (S' \setminus N_{G'}(v)) \cup \{v_i \mid v'_i \in S'\}$. Notons que $N^*(v) \subseteq \bar{S}$. Il est évident que $\bar{S} \in D(G)$. D'après l'hypothèse ci-dessus on a $a^T x^{\bar{S} \setminus N^*(v)} \geq \alpha - a_0 q$. D'où

$$\begin{aligned} a'^T x^{S'} &= a^T x^{N^*(v)} + a'^T x^{\bar{S} \setminus N^*(v)}, \\ &\geq k a_0 + \alpha - a_0 q, \\ &\geq \alpha'. \end{aligned}$$

Supposons maintenant qu'il existe une contrainte $b^T x \geq \beta$ qui définit une facette de $P_D(G')$ telle que

$$\{x \in P_D(G') \mid a'^T x = \alpha'\} \subseteq \{x \in P_D(G') \mid b^T x = \beta\}.$$

Pour montrer que $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette de $P_D(G')$ il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que $a' = \rho b$.

On montre d'abord que $b(v'_i) = b(v_i) \forall i = 1, \dots, k$. Pour ce faire, considérons les ensembles

$$\begin{aligned} S'_i &= A_i \cup \{v_{i+q}, v_{i+q+1}, \dots, v_{i+k-1}\} \quad \forall i = 1, \dots, k, \\ \tilde{S}'_i &= A_i \cup \{v\} \quad \forall i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Il est clair que $S'_i, \tilde{S}'_i \in D(G') \forall i = 1, \dots, k$. Puisque $a'^T x^{S'_i} = a'^T x^{\tilde{S}'_i} = \alpha' \forall i = 1, \dots, k$, il en résulte que $b^T x^{S'_i} = b^T x^{\tilde{S}'_i} = \beta \forall i = 1, \dots, k$. D'où nous avons le système suivant

$$\tilde{b} L^T = \tilde{\beta}$$

où

$$L = \begin{matrix} & q & & & \\ & q+1 & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & & & & \\ \vdots & 1 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & & & 1 \end{pmatrix},$$

$\tilde{b} = (b(v'_1), \dots, b(v'_k))$ et $\tilde{\beta} = (b(v), \dots, b(v))$. Puisque k et q sont premiers entre eux, il s'ensuit que L est non singulière et le système ci-dessus a comme solution $b(v'_i) = \frac{b(v)}{k-q} = \lambda$ pour $i = 1, \dots, k$ et un certain $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Dans ce qui suit nous montrons que $b(v_i) = \lambda \forall i = 1, \dots, k$. En effet, considérons de

nouveau les ensembles S'_i introduits ci-dessus. Soit $\bar{S}'_i = (S'_i \setminus \{v'_{i+q}\}) \cup \{v_{i+q}\}$. Puisque $\bar{S}'_i$ et S'_i sont des absorbants de G' et $a'^T x^{\bar{S}'_i} = a'^T x^{S'_i} = \alpha'$ on a

$$0 = b^T x^{S'_i} - b^T x^{\bar{S}'_i} = b(v'_{i+q}) - b(v_{i+q})$$

D'où

$$\begin{aligned} b(v_i) &= b(v'_i) = \lambda \quad \forall i = 1, \dots, k \\ \text{et} \quad b(v) &= (k - q)\lambda. \end{aligned}$$

Maintenant puisque $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G)$, il existe $|V|$ absorbants $S_1, \dots, S_{|V|}$ de G , tels que $a^T x^{S_i} = \alpha$ pour $i = 1, \dots, |V|$ et les $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|V|}}$ sont linéairement indépendants. Considérons les ensembles suivants

$$\begin{aligned} S'_i &= S_i \cup \{v'_i \mid v_i \notin S_i\} & \text{si } v \notin S_i, \\ S'_i &= (S_i \setminus \{v\}) \cup \{v'_1, \dots, v'_k\} & \text{si } v \in S_i. \end{aligned}$$

Notons que d'après les hypothèses, $S_i \cap N^*(v) = \emptyset$ si $v \in S_i$. Il est simple de voir que $S'_i \in D(G')$ et $a'^T x^{S'_i} = \alpha'$ pour $i = 1, \dots, |V|$. Ainsi $b^T x^{S'_i} = \beta$ pour $i = 1, \dots, |V|$.

D'où on a le système suivant

$$b'M = \beta'$$

où M est la matrice dont les lignes sont les vecteurs d'incidence de $S'_1, \dots, S'_{|V|}$, $b' = (b(j), j \in V)$ et $\beta' = (\beta - (k - q)\lambda, \dots, \beta - (k - q)\lambda)$.

Puisque M est non singulière, le système ci-dessus admet une solution unique donnée par

$$b(j) = \frac{a(j)(\beta - (k - q)\lambda)}{\alpha} \quad \forall j \in V \setminus \{v\}.$$

Si on pose $\rho = \frac{\beta - (k - q)\lambda}{\alpha}$, on a $b = \rho a'$.

Puisque $a'^T x = \alpha'$ est une contrainte non triviale, il s'ensuit que $b^T x \geq \beta$ est aussi non triviale. Et d'après le lemme 1.2 $b \geq 0$ et on a au moins un des b_i qui est strictement positif. Ceci implique que $\rho > 0$, ce qui termine la démonstration du théorème. $\square$

3.5 2-somme et facettes

Dans cette section, nous allons étudier des procédures de composition de facettes quand le graphe $G = (V, E)$ est une 2-somme de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$. Nous allons montrer que des contraintes définissant des facettes pour le polytope des absorbants dans les graphes G_1 et G_2 peuvent engendrer des facettes de $P_D(G)$.

3.5.1 Graphes auxiliaires et contraintes mixées

Soient $G = (V, E)$ un graphe, la 2-somme de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, et uv l'arête commune à G_1 et G_2 . Soit $\bar{G}_k = (\bar{V}_k, \bar{E}_k)$, $k = 1, 2$, le graphe obtenu à partir de G_k en ajoutant deux sommets w_1 et w_2 , et les arêtes uw_1 , w_1w_2 , vw_2 . Et soit $\tilde{G}_k = (\tilde{V}_k, \tilde{E}_k)$, $k = 1, 2$, le graphe obtenu à partir de G_k en ajoutant un sommet w et les arêtes uw et vw (voir figure 3.4). Les graphes $\bar{G}_k$ et $\tilde{G}_k$, $k = 1, 2$ seront dits *graphes auxiliaires*.

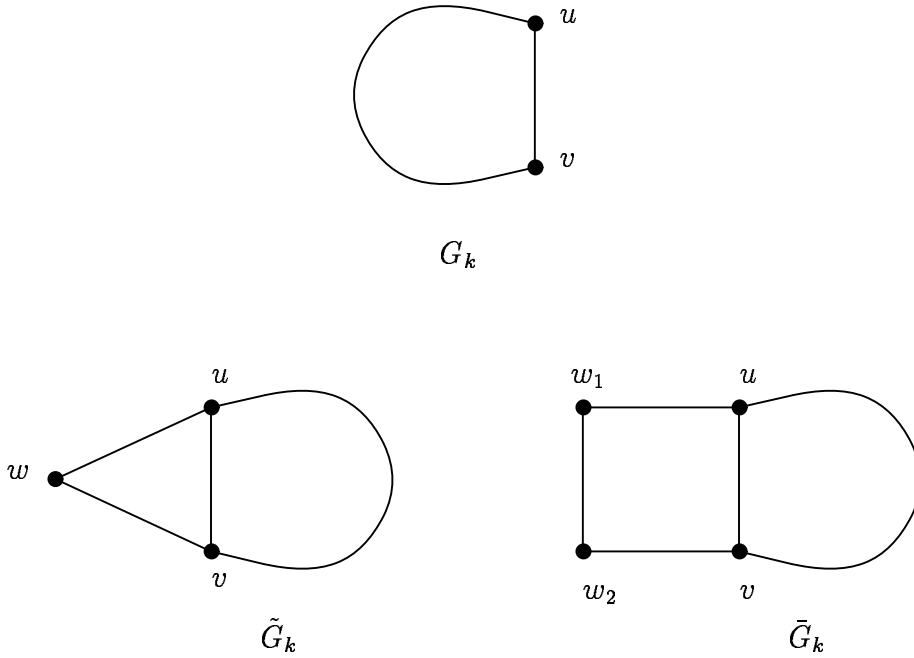


Figure 3.4 :

Le théorème suivant établit la relation entre les contraintes non triviales définissant des facettes de $P_D(G_k)$ et dont le support ne contient pas u et v à la fois et celles ayant la même structure et définissant des facettes de $P_D(\tilde{G}_k)$.

Théorème 3.10 *Une contrainte $a^T x \geq \alpha$ dont le support V_a est tel que $|V_a \cap \{u, v\}| \leq 1$ définit une facette de $P_D(G_k)$ si et seulement si elle définit une facette de $P_D(\tilde{G}_k)$.*

Preuve. Nous allons supposer que $a^T x \geq \alpha$ est de la forme

$$\sum_{j \in V_k \setminus \{u, v\}} a(j)x(j) + x(u) \geq \alpha \quad (3.4)$$

La démonstration pour les autres cas est similaire.

($\Rightarrow$) Montrons d'abord que $a^T x \geq \alpha$ reste valide pour $P_D(\tilde{G}_k)$. Considérons un absorbant $S \in D(\tilde{G}_k)$. Si $w \notin S$, alors $S \in D(G_k)$ et par conséquent $a^T x \geq \alpha$ est vérifiée par x^S . Si $w \in S$ et $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$, alors l'ensemble $S' = S \setminus \{w\}$ est un absorbant de G_k . D'où $a^T x^S = a^T x^{S'} \geq \alpha$. Maintenant supposons que $w \in S$ et $\{u, v\} \cap S = \emptyset$. Soit $S^1 = (S \setminus \{w\}) \cup \{v\}$. Puisque S^1 est un absorbant de G_k et $a(v) = 0$, alors $a^T x^S = a^T x^{S^1} \geq \alpha$. Par conséquent $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(\tilde{G}_k)$.

Comme $a^T x \geq \alpha$ définit une facette pour $P_D(G_k)$, il existe $|V_k|$ absorbants $S_1, \dots, S_{|V_k|}$ de G_k dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité et sont linéairement indépendants. On peut supposer que les ensembles $S_1, \dots, S_{|V_k|}$ sont ordonnés de telle manière que $S_1, \dots, S_t$ intersectent $\{u, v\}$ et $S_{t+1}, \dots, S_{|V_k|}$ ne contiennent ni u ni v . Notons que $t > 0$, puisque $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale. Considérons les ensembles suivants

$$\begin{aligned} S'_i &= S_i, & \forall i = 1, \dots, t, \\ S'_i &= S_i \cup \{w\}, & \forall i = t+1, \dots, |V_k|, \\ S'_{|V_k|+1} &= S_1 \cup \{w\}. \end{aligned}$$

Il est évident que ces ensembles définissent des absorbants dans $\tilde{G}_k$. De plus leurs vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité et sont linéairement indépendants.

($\Leftarrow$) Supposons maintenant que $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(\tilde{G}_k)$. Il est clair que $a^T x \geq \alpha$ est valide pour $P_D(G_k)$. Il suffit donc de montrer qu'il existe $|V_k|$ absorbants de G_k dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité et sont linéairement indépendants.

Puisque $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(\tilde{G}_k)$, alors il existe $|\tilde{V}_k|$ absorbants $S_1, \dots, S_{|\tilde{V}_k|}$ de $\tilde{G}_k$ tels que $a^T x^{S_i} = \alpha$, pour $i = 1, \dots, |\tilde{V}_k|$ et $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|\tilde{V}_k|}}$ sont linéairement indépendants. On peut supposer que les ensembles S_i sont ordonnés de telle manière que $x^{S_1}, \dots, x^{S_r}$ ne contiennent pas w , $x^{S_{r+1}}, \dots, x^{S_s}$ contiennent w et au moins un sommet parmi $\{u, v\}$, et $x^{S_{s+1}}, \dots, x^{S_{|\tilde{V}_k|}}$ contiennent w , mais aucun des sommets u, v . Soit M la matrice dont les colonnes sont les vecteurs d'incidence de S_i . M a

$$M = \begin{matrix} & |\tilde{V}_k| - 3 \left\{ \begin{array}{ccc} M_1 & M_3 & M_5 \\ u & & \\ v & M_2 & M_4 & \begin{array}{c} 0 \dots \dots 0 \\ 0 \dots \dots 0 \end{array} \\ w & \underbrace{0 \dots \dots 0}_r & \underbrace{1 \dots \dots 1}_{s-r} & \underbrace{1 \dots \dots 1}_{|\tilde{V}_k| - s} \end{array} \right\} \end{matrix}$$

Soient les ensembles suivants

$$\begin{aligned} S'_i &= S_i \setminus \{w\}, & \forall i = 1, \dots, s, \\ S'_i &= (S_i \setminus \{w\}) \cup \{v\}, & \forall i = s+1, \dots, |\tilde{V}_k|. \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} & M_1 & M_3 & & M_5 \\ u & & & & \\ v & M_2 & M_4 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ & & & 1 & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Puisque $a^T x \geq \alpha$ est une contrainte non triviale, il doit exister un absorbant $S \in D(\tilde{G}_k)$ tel que $v \notin S$ et $a^T x^S = \alpha$. Soient $S' = S \cup \{w\}$ et $S'' = S \cup \{v, w\}$. Comme $S', S'' \in D(\tilde{G}_k)$, $a^T x^{S'} = a^T x^{S''} = \alpha$ et $x^{S'}$ et $x^{S''}$ sont linéairement indépendants, on peut supposer que $S' = S_{r+1}$ et $S'' = S_{r+2}$.

Maintenant soit M' la matrice obtenue de M en retranchant la colonne $r + 1$ de la colonne $r + 2$ et en ajoutant la colonne ainsi obtenue à chacune des colonnes $s +$

$1, \dots, |\tilde{V}_k|$. Alors M' a la forme suivante:

$$M' = \begin{matrix} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ u & \begin{bmatrix} M_1 & & M_3 & & M_5 \\ & M_2 & & M_4 & & 0 \dots \dots 0 \\ & & & & & 1 \dots \dots 1 \\ 0 \dots \dots 0 & 1 \dots \dots 1 & 1 \dots \dots 1 \end{bmatrix} \\ v & \\ w & \end{matrix}$$

En supprimant la dernière ligne de M' on obtient la matrice A . Puisque M' est non singulière et de rang $|V_k| + 1$, il en résulte que A est de rang $|V_k|$. $\square$

Le lemme suivant établit des relations entre des facettes de $P_D(\tilde{G}_k)$ et $P_D(\bar{G}_k)$

Lemme 3.11 *Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P_D(\tilde{G}_k)$ telle que $a(u) = a(v) = a_0 > 0$ et $a(w) = 0$. Alors $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(\bar{G}_k)$.*

Preuve. Soit $S \in D(\bar{G}_k)$. Comme $S' = (S \setminus \{w_1, w_2\}) \cup \{w\}$ est un absorbant de $\tilde{G}_k$ alors $a^T x^S = a^T x^{S'} \geq \alpha$. Cela montre la validité de $a^T x \geq \alpha$ pour $P_D(\bar{G}_k)$.

Puisque $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(\tilde{G}_k)$, il doit exister $|\tilde{V}_k|$ absorbants $S_1, \dots, S_{|\tilde{V}_k|}$ dans $\tilde{G}_k$ dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité et sont linéairement indépendants. Comme cette contrainte est non triviale, on peut supposer que $S_{|\tilde{V}_k|}$ ne contient pas w . Examinons les $|\tilde{V}_k|$ ($= |\tilde{V}_k| + 1$) ensembles suivants:

$$\begin{cases} S'_i = (S_i \setminus \{w\}) \cup \{w_1, w_2\}, & \text{si } w \in S_i, i = 1, \dots, |\tilde{V}_k| - 1, \\ S'_i = S_i \cup \{w_2\}, & \text{si } w \notin S_i, i = 1, \dots, |\tilde{V}_k|, \\ S'_{|\tilde{V}_k|+1} = S_{|\tilde{V}_k|} \cup \{w_1\}. \end{cases}$$

On peut vérifier facilement que les ensembles S'_i , $i = 1, \dots, |\tilde{V}_k|$ définissent des absorbants dans $\bar{G}_k$ et $x^{S'_1}, \dots, x^{S'_{|\tilde{V}_k|}}$ vérifient $a^T x \geq \alpha$ à l'égalité. Soit M (resp. M') la matrice dont les colonnes sont les vecteurs d'incidence de $S_1, \dots, S_{|\tilde{V}_k|}$ (resp. $S'_1, \dots, S'_{|\tilde{V}_k|}$).

La matrice M' peut être présentée sous la forme

$$M' = \begin{matrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ w_1 & \begin{bmatrix} M & y \\ & 1 \\ 1 \dots \dots 1 & 0 \end{bmatrix} \\ w_2 & \end{matrix}$$

où $\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = x^{S'_{|\tilde{V}_k|}}$ et les deux dernières lignes correspondent respectivement à w_1, w_2 . Soit $\bar{a}^T = (a^T, 0)$. En multipliant chaque ligne l de M' par $\bar{a}(l)$ et en sommant les lignes ainsi obtenues, on obtient le vecteur $(\alpha, \dots, \alpha)$. En divisant ce vecteur par α et le retranchant à la dernière ligne de M' , on obtient la matrice M'' suivante:

$$M'' = \begin{bmatrix} & M & y \\ & & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Comme M est non singulière, ceci implique que M' l'est aussi. Ce qui montre que les vecteurs $x^{S'_1}, \dots, x^{S'_{|\tilde{V}_k|}}$ sont linéairement indépendants et donc $a^T x \geq \alpha$ définit une facette dans $P_D(\tilde{G}_k)$. $\square$

Lemme 3.12 *Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte qui définit une facette de $P_D(G_k)$ tel que $a(u) = a(v) > 0$. Soit $\alpha^* = \min\{a^T x^S \mid S \in D(G_k) \text{ et } u, v \in S\}$. Supposons que $a_0 = \alpha^* - \alpha = a(u) = a(v)$. Supposons que $a^T x^{S'} \geq \alpha$ pour tout S' absorbant de $G \setminus u$ ($G \setminus v$). Alors la contrainte $a'^T x \geq \alpha'$ telle que*

$$\begin{aligned} a'(j) &= a(j) \quad \forall j \in V_k, \\ a'(j) &= a_0 \quad \forall j \in \{w_1, w_2\}, \\ \alpha' &= \alpha^*, \end{aligned}$$

définit une facette de $P_D(\tilde{G}_k)$.

Preuve. Montrons d'abord que $a'^T x \geq \alpha'$ est valide pour $P_D(\tilde{G}_k)$. Soient $\bar{S} \in D(\tilde{G}_k)$ et $S = \bar{S} \setminus \{w_1, w_2\}$.

- Si $\bar{S} \cap \{w_1, w_2\} \neq \emptyset$ et $S \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ alors $S \in D(G_k)$ et par conséquent $a'^T x^{\bar{S}} \geq \alpha'$.
- Si $\bar{S} \cap \{w_1, w_2\} = \{w_1\}$ et $S \cap \{u, v\} = \emptyset$ alors S est un absorbant de $G \setminus v$. Comme $a^T x^S \geq \alpha$, il en résulte que $a'^T x^{\bar{S}} \geq \alpha'$.
- Si $\bar{S} \cap \{w_1, w_2\} = \{w_2\}$ et $S \cap \{u, v\} = \emptyset$, de la même manière on obtient $a'^T x^{\bar{S}} \geq \alpha'$.
- Si $\bar{S} \cap \{w_1, w_2\} = \emptyset$ alors $u, v \in \bar{S}$. Par notre hypothèse on doit avoir $a^T x^{\bar{S}} \geq \alpha + a_0$.
- Si $w_1, w_2 \in \bar{S}$ et $S \cap \{u, v\} = \emptyset$ alors soit $S' = (\bar{S} \setminus \{w_1, w_2\}) \cup \{v\}$. S' est un absorbant de G_k . Puisque $a^T x^{S'} \geq \alpha$ et $a(v) = a_0$ il s'ensuit que $a'^T x^{\bar{S}} \geq \alpha'$.

Maintenant pour montrer que $a'^T x \geq \alpha'$ définit une facette de $P_D(G_k)$, il suffit d'exhiber $|V| + 2$ absorbants de $\bar{G}_k$, dont les vecteurs d'incidence vérifient $a'^T x \geq \alpha'$ à l'égalité et sont linéairement indépendants.

Comme $a^T x \geq \alpha$ définit une facette de $P_D(G_k)$ alors il existe $|V|$ absorbants de G_k , $S_1, \dots, S_{|V|}$ tels que $a^T x^{S_i} = \alpha$, $\forall i = 1, \dots, |V|$ et $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|V|}}$ sont linéairement indépendants. Noter que $|S_i \cap \{u, v\}| \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, |V|$. Donc les ensembles S_i , $i = 1, \dots, |V|$ peuvent être ordonnés de telle manière que $S_i \cap \{u, v\} = \{u\}$ pour $i = 1, \dots, r$; $S_i \cap \{u, v\} = \{v\}$ pour $i = r + 1, \dots, s$ et $S_i \cap \{u, v\} = \emptyset$ pour $i = s + 1, \dots, |V|$. Puisque $a^T x \geq \alpha$ est non triviale, il existe au moins un ensemble parmi $S_1, \dots, S_{|V|}$, contenant u mais pas v . Aussi il existe un S_i tel que $S_i \cap \{u, v\} = \emptyset$. On suppose que ces absorbants sont respectivement S_1 et S_{s+1} . En effet si ceci n'est pas le cas alors pour tout S_i , $i = 1, \dots, |V|$, on aura $|S_i \cap \{u, v\}| = 1$, une contradiction. Soient les ensembles suivants.

$$\bar{S}_i = \begin{cases} S_i \cup \{w_2\}, & \forall i = 1, \dots, r, \\ S_i \cup \{w_1\}, & \forall i = r + 1, \dots, s, \\ S_i \cup \{w_1\}, & \forall i = r + 1, \dots, |V|, \\ S_{|V|+1} = S_1 \cup \{v\}, \\ S_{|V|+2} = S_{s+1} \cup \{w_2\}. \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que les ensembles $\bar{S}_i$, $i = 1, \dots, |V| + 2$ sont des absorbants de $\bar{G}_k$ et que leurs vecteurs d'incidence vérifient $a'^T x \geq \alpha'$ à l'égalité et sont linéairement indépendants. $\square$

Théorème 3.13 *Soit $G = (V, E)$ la 2-somme de G_1 et G_2 . Soient $a^T x \geq \alpha$ et $b^T x \geq \beta - 1$ deux contraintes définissant respectivement des facettes pour $P_D(\tilde{G}_1)$ et $P_D(\tilde{G}_2)$ de la forme*

$$\sum_{j \in V \setminus \{u, v\}} a(j)x(j) + x(u) + x(v) + x(w) \geq \alpha, \quad (3.5)$$

$$\sum_{j \in V \setminus \{u, v\}} b(j)x(j) + x(u) + x(v) + x(w_1) + x(w_2) \geq \beta. \quad (3.6)$$

Supposons que

- i) la contrainte (3.6) est obtenue à partir d'une contrainte définissant une facette de $P_D(G_2)$ par la procédure du lemme 3.12.*
- ii) $b(j)$ est entier $\forall j \in V \setminus \{u, v\}$.*
- iii) Il n'existe pas un absorbant $S \in D(\bar{G}_2)$ tel que $S \cap N_{G_2}(u) = \emptyset = S \cap N_{G_2}(v)$ et*

dont x^S vérifie $b^T x \geq \beta$ à l'égalité.

Alors

$$\sum_{j \in V \setminus \{u, v\}} a(j)x(j) + \sum_{j \in V \setminus \{u, v\}} b(j)x(j) + x(u) + x(v) \geq \alpha + \beta - 2 \quad (3.7)$$

définit une facette de $P_D(G)$.

Preuve. Nous montrons d'abord que (3.7) est valide pour $P_D(G)$. Soit $S \in D(G)$. Soient S_1 et S_2 les restrictions de S dans G_1 et G_2 respectivement.

Cas 1. $u, v \in S$. Alors S_1 et S_2 définissent des abosrbants dans $\tilde{G}_1$ et $\tilde{G}_2$. Et en conséquence on a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V \setminus \{u, v\}} a(j)x^{S_1}(j) &\geq \alpha - 2, \\ \sum_{j \in V \setminus \{u, v\}} b(j)x^{S_2}(j) &\geq \beta - 2. \end{aligned}$$

Puisque $x^S(u) = x^S(v) = 1$, on déduit de ces inégalité que (3.7) est vérifiée par x^S .

Cas 2. $|\{u, v\} \cap S| = 1$. Sans perte de généralité on peut supposer que $u \in S$.

Soient $S'_1 = S_1$ et $S'_2 = S_2 \cup \{w_2\}$. Il est clair que $S'_1 \in \tilde{G}_1$ et $S'_2 \in \tilde{G}_2$. Par conséquent on a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V \setminus \{u, v\}} a(j)x^{S'_1}(j) &\geq \alpha - 1, \\ \sum_{j \in V \setminus \{u, v\}} b(j)x^{S'_2}(j) &\geq \beta - 1. \end{aligned}$$

Comme $x^S(u) = 1$ et $x^S(v) = 0$, il en résulte que (3.7) est vérifiée par x^S .

Cas 3. $u, v \notin S$. Soient $S''_1 = S_1 \cup \{w\}$ et $S'_2 = S_2 \cup \{w_1, w_2\}$. Puisque $S''_1 \in \tilde{G}_1$ on a

$$\sum_{j \in V \setminus \{u, v\}} a(j)x^{S''_1}(j) \geq \alpha - 1.$$

Et puisque $S'_2 \in \tilde{G}_2$ et les coefficients $b(j)$ sont tous entiers, par la condition ii) on a

$$\sum_{j \in V \setminus \{u, v\}} b(j)x^{S'_2}(j) \geq \beta - 1.$$

Comme $x^S(u) = x^S(v) = 0$, on déduit que x^S vérifie (3.7).

Notons par $c^T x \geq \sigma$ la contrainte (3.7). Supposons qu'il existe une contrainte $d^T x \geq \delta$ définissant une facette de $P_D(G)$ telle que

$$\{x \in P_D(G) \mid c^T x = \sigma\} \subseteq \{x \in P_D(G) \mid d^T x = \delta\}.$$

Pour montrer que (3.7) définit une facette de $P_D(G)$ il suffit de montrer que $d = \rho c$ pour un certain $\rho > 0$.

Maintenant puisque $a^T x \geq \alpha$ (resp. $b^T x \geq \beta$) définit une facette de $P_D(\tilde{G}_1)$ (resp. $P_D(\tilde{G}_2)$), il existe $|\tilde{V}_1|$ (resp. $|\tilde{V}_2|$) absorbants $S_1, \dots, S_{|\tilde{V}_1|} \in D(\tilde{G}_1)$ (resp. $W_1, \dots, W_{|\tilde{V}_2|} \in D(\tilde{G}_2)$) dont les vecteurs d'incidence vérifient $a^T x \geq \alpha$ (resp. $b^T x \geq \beta$) à l'égalité et sont linéairement indépendants. On suppose que les ensembles W_i , $i = 1, \dots, |\tilde{V}_2|$ sont construits à partir des absorbants de G_2 par la procédure introduite dans la démonstration du lemme 3.12.

Soit $\tilde{M}$ (resp. $\bar{M}$) la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|\tilde{V}_1|}}$ (resp. $x^{S_1}, \dots, x^{S_{|\tilde{V}_2|}}$).

Assertion 1. Soit $T = \{u, v, w\}$. Les ensembles $S_1, \dots, S_{|\tilde{V}_1|}$ peuvent être supposés de telle manière qu'il existe $j_1, j_2, j_3, j_4 \in \{1, \dots, |\tilde{V}_1|\}$ tels que $S_{j_1} \cap T = \{u\}$, $S_{j_2} \cap T = \{v\}$, $S_{j_3} \cap T = \{u, v\}$ et $S_{j_4} \cap T = \{w\}$.

Preuve. Puisque $a^T x \geq \alpha$ définit une facette, il doit exister un absorbant S_{i_1} tel que $|S_{i_1} \cap \{u, v\}| = 1$. Sinon tout absorbant S_i , $i = 1, \dots, |\tilde{V}_1|$ vérifierait $x(u) - x(v) = 0$. Comme cette équation n'est pas un multiple de $a^T x \geq \alpha$, ceci contredit le fait que $a^T x \geq \alpha$ définit une facette. Sans perte de généralité, on peut supposer que $S_{i_1} \cap \{u, v\} = \{u\}$.

Maintenant supposons que pour tout absorbant S_i , $i = 1, \dots, |\tilde{V}_1|$ tel que $v \notin S_i$ on a $u \notin S_i$. Ceci implique que pour tout S_i , $i = 1, \dots, |\tilde{V}_1|$, x^{S_i} vérifie l'équation suivante

$$x(u) + x(w) = 1. \quad (3.8)$$

En effet, si $u \in S_i$ alors $w \notin S_i$, sinon l'ensemble $S'_i = S_i \setminus \{w\}$ serait aussi un absorbant de G dont le vecteur d'incidence, $x^{S'_i}$ vérifie $a^T x^{S'_i} < \alpha$, une contradiction. Si $u \notin S_i$, alors par la supposition ci dessus, $v \notin S_i$ et par conséquent $w \in S_i$. Dans les deux cas x^{S_i} vérifie (3.8). Mais $a^T x = \alpha$ n'est pas un multiple de (3.8), une contradiction.

Comme $a^T x \geq \alpha$ est une contrainte non triviale, il doit exister un absorbant S_{i_2} tel que $v \in S_{i_2}$. Par la remarque ci dessus, S_{i_2} peut être considéré de telle manière que $u \notin S_{i_2}$. Aussi par le même argument, il doit exister un absorbant S_{i_3} tel que $w \in S_{i_3}$. Et ceci implique que $u, v \notin S_{i_3}$.

Finalement, il doit aussi exister un absorbant S_{i_4} tel que $\{u, v\} \subseteq S_{i_4}$. Sinon pour

tout S_i , l'équation

$$x(u) + x(v) + x(w) = 1,$$

serait vérifiée, une contradiction.

Par conséquent on peut supposer que $S_{j_1} = S_{i_1}$, $S_{j_2} = S_{i_2}$, $S_{j_3} = S_{i_3}$ et $S_{j_4} = S_{i_4}$.

Maintenant supposons que les ensembles $S_1, \dots, S_{|\tilde{V}_1|}$ (resp. $W_1, \dots, W_{|\tilde{V}_2|}$) sont ordonnées de telle manière que $S_i \cap T = \{u\}$ pour $i = 1, \dots, r_1$, $S_i \cap T = \{v\}$ pour $i = r_1 + 1, \dots, r_2$, $S_i \cap T = \{u, v\}$ pour $i = r_2 + 1, \dots, r_3$ et $S_i \cap T = \{w\}$ pour $i = r_3 + 1, \dots, |\tilde{V}_1|$ (resp. $W_i \cap \{u, v\} = \{u\}$ pour $i = 1, \dots, s_1$, $W_i \cap \{u, v\} = \{v\}$ pour $i = s_1 + 1, \dots, s_2$, $u, v \in W_i$ pour $i = s_2 + 1, \dots, s_3$ et $W_i \cap \{u, v\} = \emptyset$ et $|W_i \cap \{w_1, w_2\}| = 1$ pour $i = s_3 + 1, \dots, |\tilde{V}_2|$). Soit M_1 (resp. M_2) la matrice dont les colonnes sont les vecteurs d'incidence de $S_1, \dots, S_{|\tilde{V}_1|}$ (resp. $W_1, \dots, W_{|\tilde{V}_2|}$). Les matrices M_1 et M_2 ont les formes suivantes

$$M_1 = \begin{matrix} & \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \dots \dots 1 & 0 \dots \dots 0 & 1 \dots \dots 1 & 0 \dots \dots 0 \\ 0 \dots \dots 0 & 1 \dots \dots 1 & 1 \dots \dots 1 & 0 \dots \dots 0 \\ 0 \dots \dots 0 & 0 \dots \dots 0 & 0 \dots \dots 0 & 1 \dots \dots 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{r_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{r_2 - r_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{r_3 - r_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{|\tilde{V}_1| - r_3}$

$$M_2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} u \\ v \\ w_1 \\ w_2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 \dots \dots 1 & 0 \dots \dots 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 \dots \dots 0 & 1 \dots \dots 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 \dots \dots 0 & 1 \dots \dots 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 \dots \dots 1 & 0 \dots \dots 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix},$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{s_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{s_2 - s_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{s_3 - s_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{|\tilde{V}_2| - s_3}$

où les matrices B_i et D_j pour $i = 1, \dots, 4$ et $j = 1, \dots, 4$ sont des matrices en 0 - 1. Par l'assertion 1, on peut supposer que $S_{i_1}, \dots, S_{i_4}$ sont respectivement $S_1, S_{r_1+1}, S_{r_2+1}$ et S_{r_3+1} .

Noter que les deux colonnes de D_4 sont identiques et correspondent à un absorbant dans G_2 . Aussi, D_3 est formée d'une seule colonne.

Maintenant nous allons construire à partir des ensembles $S_i, i = 1, \dots, |\tilde{V}_1|$ et $W_j, j = 1, \dots, |\tilde{V}_2|$ des absorbants de G dont les vecteurs d'incidence vérifient (3.7) à l'égalité.

$$A_i = \begin{cases} \bar{S}_i \cup \bar{W}_1 & i = 1, \dots, r_1 \\ \bar{S}_i \cup \bar{W}_{s_1+1} & i = r_1 + 1, \dots, r_2 \\ \bar{S}_i \cup \bar{W}_{s_2+1} & i = r_2 + 1, \dots, r_3 \\ \bar{S}_i \cup \bar{W}_{s_3+1} & i = r_3 + 1, \dots, |\tilde{V}_1| \\ \bar{S}_1 \cup \bar{W}_{i-|\tilde{V}_1|} & i = |\tilde{V}_1| + 1, \dots, |\tilde{V}_1| + s_1 \\ \bar{S}_{r_1+1} \cup \bar{W}_{i-|\tilde{V}_1|} & i = |\tilde{V}_1| + s_1 + 1, \dots, |\tilde{V}_1| + s_2 \\ \bar{S}_{r_2+1} \cup \bar{W}_{i-|\tilde{V}_1|} & i = |\tilde{V}_1| + s_2 + 1, \dots, |\tilde{V}_1| + s_3 \\ \bar{S}_{r_3+1} \cup \bar{W}_{i-|\tilde{V}_1|} & i = |\tilde{V}_1| + s_3 + 1, \dots, |\tilde{V}_1| + |\tilde{V}_2| \end{cases}$$

où $\bar{S}_i = S_i \setminus \{w\}$ pour $i = r_3 + 1, \dots, |\tilde{V}_1|$ et $\bar{W}_j = W_j \setminus \{w_1, w_2\}$ pour $j = 1, \dots, |\tilde{V}_2|$. Les ensembles $A_i, i = 1, \dots, |\tilde{V}_1| + |\tilde{V}_2|$ sont tous des absorbants de G dont les vecteurs d'incidence vérifient (3.7) à l'égalité. (Notez que les ensembles $\bar{W}_i$ pour $i = s_3 + 1, \dots, |\tilde{V}_2|$ sont des absorbants de G_2 .)

Soit M la matrice $(|V|, |V|)$ dont les colonnes sont les vecteurs d'incidence des ensembles $A_i, i = 1, \dots, |\tilde{V}_1| + |\tilde{V}_2| - 1$ avec i différent de $1, s_1 + 1, s_2 + 1$ et $s_3 + 1$.

On dénote par b_i (resp. d_i) la première colonne de B_i (resp. D_i) pour $i = 1, \dots, 4$. Soit B_i^* (resp. D_i^*) la matrice obtenue de B_i (resp. D_i) en supprimant la colonne b_i (resp. d_i). Alors M peut s'écrire comme suit

$$M = |V| \left\{ \begin{array}{cccccc} D_1^* & D_2^* & d_1 \cdots d_1 & d_2 \cdots d_2 & d_3 \cdots d_3 & d_4 \cdots d_4 \\ \hline \underbrace{b_1 \cdots b_1}_{s_1-1} & \underbrace{b_2 \cdots b_2}_{s_2-s_1-1} & \underbrace{B_1}_{r_1} & \underbrace{B_2}_{r_2-r_1} & \underbrace{B_3}_{r_3-r_2} & \underbrace{B_4}_{|\tilde{V}_1|-r_3} \end{array} \right\}$$

Pour montrer le théorème il suffit de montrer que M est non singulière.

Soit $\tilde{M}$ la matrice obtenue de M en retranchant la colonne $s_2 - 1$ (resp. $s_2 + r_1 - 1$; $s_2 + r_2 - 1$; $s_2 + r_3 - 1$) des colonnes i tel que $1 \leq i \leq s_1$ (resp. $s_1 \leq i \leq s_2 - 2$ et $s_2 + r_1 \leq i \leq s_2 + r_2 - 2$; $s_2 + r_2 \leq i \leq s_2 + r_3 - 2$; $s_2 + r_3 \leq i \leq s_2 + |\tilde{V}| - 2$). La

matrice $\bar{M}$ a la forme suivante

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 & \bar{D}_2 & d_1 & 0 & d_2 & 0 & d_3 & 0 & d_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & \bar{B}_1 & b_2 & \bar{B}_2 & b_3 & \bar{B}_3 & b_4 & \bar{B}_4 \end{bmatrix}$$

où $\bar{B}_i$ (resp. $\bar{D}_i$) est la matrice obtenue de B_i (resp. D_i) en supprimant la colonne b_i (resp. d_i) après l'avoir retranchée de toutes les autres colonnes de la matrice. Considérons la sous matrice $\bar{M}_2$ de $\bar{M}$.

$$\bar{M}_2 = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 & \bar{D}_2 & d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}.$$

La matrice $\bar{M}_2$ est non singulière. en effet, soit la matrice M_{2c} obtenue de M_2 de la manière suivante.

$$M_{2c} = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \dots 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 \dots 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 \dots 1 & 1 \dots 1 & 1 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}$$

où $c \in \mathbb{R}$. La matrice M_{2c} est non singulière pour $c > 2$ et $c \leq 0$. En effet, puisque la matrice M_2 est non singulière alors le système

$$yM_2 = \mathbb{1}^T$$

où $\mathbb{1}^T = (1, \dots, 1)$, admet une solution unique donnée par

$$y_j = \frac{b_j}{\alpha} \quad \forall j \in |\bar{V}_2|.$$

Si la dernière ligne de M_{2c} dépend des $|\bar{V}_2|$ premières lignes alors on doit avoir

$$\frac{2}{\alpha} = c.$$

Puisque $\alpha \geq 2$, ceci implique que $c \leq 1$. D'où M_{2c} est non singulière pour $c > 1$ et $c \leq 0$.

Par des opérations élémentaires sur les colonnes de M_{2c} , on peut montrer que $\bar{M}_2$

est non singulière. Ainsi le vecteur d_4 peut être écrit comme combinaison linéaire des colonnes de $\bar{M}_2$. De même on peut également obtenir, par des opérations sur les colonnes de $\bar{M}$ une matrice $\bar{\bar{M}}$ de la forme

$$\bar{\bar{M}} = \begin{bmatrix} & & & & & & & & & 0 \\ \bar{D}_1 & \bar{D}_2 & d_1 & d_2 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 & b_3 & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 & \bar{B}_3 & \bar{B}_4 & 0 \\ & & & & & & & & & b_4 + \sum_{i=1,\dots,3} \delta_i b_i \end{bmatrix}$$

où $\delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, 3$.

On peut montrer d'une manière similaire, comme pour $\bar{M}_2$, que la matrice

$$\bar{\bar{M}}_1 = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 & \bar{B}_2 & \bar{B}_3 & \bar{B}_4 & \sum_{i=1,\dots,3} \delta_i b_i \end{bmatrix}$$

est non singulière. Puisque $\bar{M}_2$ l'est aussi, il en résulte que les matrices M et $\bar{\bar{M}}$ sont également non singulières. $\square$

Conclusion

Dans cette première partie de la thèse nous avons étudié certains aspects polyédraux du problème de l'absorbant. Nous avons, en particulier, discuté d'une technique de composition pour le polytope $P_D(G)$ dans les graphes G décomposables par des sommets d'articulation. Nous avons caractérisé le polytope des absorbants de G à partir de systèmes liés aux briques composant G . Ceci a également donné lieu à une procédure de composition de facettes de $P_D(G)$. Nous avons examiné les conséquences algorithmiques de cette composition et avons montré que le problème PAPM peut être aussi décomposé. Nous avons étudié les applications de cette technique de composition dans la classe des cactus. Cette étude a montré la complexité du polyèdre $P_D(G)$ même dans cette classe réduite de graphes. En effet, comme il a été mentionné, pour avoir une description du polyèdre $P_D(G)$ dans cette classe de graphes au moyen de la technique présentée, nous aurions besoin d'une caractérisation complète de $P_D(G)$ dans la classe Γ . Et même dans cette classe, le polytope $P_D(G)$ semble difficile. Les résultats développés dans la section 2.3 nous ont motivé à établir la conjecture 2.6. Enfin nous avons étudié des procédures générales de construction de facettes. Certaines de ces procédures concernent les graphes ayant des arêtes d'articulations. Ceci peut constituer une première étape pour une technique générale de composition du polytope $P_D(G)$ dans les graphes décomposables par des arêtes d'articulations.

A la suite de cette étude quelques questions restent ouvertes. D'abord concernant les cactus, il serait intéressant de voir si la conjecture 2.6 est vraie. Et si cette conjecture reste vraie pour d'autres graphes généralisant les cactus. Aussi, il serait intéressant d'étudier une extension de la technique de composition aux graphes décomposables par des cliques d'articulations.

Une autre question intéressante concerne les graphes dont le polyèdre $P_D(G)$ est

défini par les contraintes triviales et les contraintes de voisinage. En effet pour ces graphes le problème de l'absorbant peut se résoudre en temps polynomial par les techniques de la programmation linéaire. Des propriétés structurales de ces graphes seraient par conséquent de grande utilité.

Enfin, comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre 2, il serait aussi important d'étudier la généralisation du problème de l'absorbant, donnée en terme de T-absorbant. Et d'étudier d'autres applications du problème de l'absorbant dans les graphes orientés.

Partie II

Un algorithme de coupes pour le problème du flot à coûts fixes

Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté où chaque arc (i, j) est muni d'un coût fixe c_{ij} , d'un coût variable b_{ij} et d'une capacité $\mu_{ij} > 0$. On suppose que les capacités sont entières. Etant donné un flot $f = (f_{ij}, (i, j) \in E)$, le coût de f , $\mathcal{C}(f)$, est donné par
$$\mathcal{C}(f) = \sum_{(i,j) \in E} b_{ij} f_{ij} + \sum_{f_{ij} > 0} c_{ij}.$$
 Le *problème du flot à coûts fixes* (PFCF) dans G consiste à trouver un flot qui soit de coût minimum. Ce problème est connu dans la littérature sous le nom du "fixed charge network flow problem". Si les coûts fixes sont nuls alors le problème PFCF n'est rien d'autre que le problème de flot de coût minimum classique. Dans ce cas, le problème est fortement polynomial comme il a été démontré par Tardòs [74]. Le fait d'introduire des coûts fixes fait changer la complexité du problème. Le problème PFCF est, en effet, NP-dur dans le cas général. Comme il va être montré plus tard, ce problème généralise celui de *l'arborescence Steiner minimum*.

Plusieurs problèmes dans la pratique peuvent être formulés comme des problèmes de flots à coûts fixes, comme par exemple les problèmes de distribution. Une autre application réelle de ce problème est la suivante.

Considérons une forêt divisée en un certain nombre de parcelles, où du bois doit être traité. Des centres de traitement du bois peuvent être installés. Le bois doit être transporté de chaque parcelle à certains de ces centres. Une fois traité, le bois est acheminé vers un dépôt en dehors de la forêt. Si un coût fixe est associé à chaque tronçon qui peut être utilisé pour transporter le bois, et un coût fixe est associé à chaque centre de traitement du bois, le problème est de déterminer les tronçons et les centres à mettre en place, de telle manière que le coût total soit minimum.

Dans cette deuxième partie de la thèse, nous allons étudier une approche polyédrale pour le problème PFCF. Dans le chapitre 4 nous considérons le polyèdre associé à ce

problème. Nous décrivons sa dimension et nous introduisons des nouvelles contraintes valides, appelées contraintes de coupes. Ces contraintes, dont le problème de séparation est polynomial, sont utilisées par la suite dans une méthode de coupes pour résoudre des instances du PFCF. Le chapitre 5 est consacré à cette étude expérimentale.

Ce travail a été réalisé en collaboration avec F. Barahona.

Chapitre 4

Approche polyédrale pour le PFCF

4.1 Formulation du problème PFCF

Soit x_{ij} une variable bivalente associée à chaque arc (i, j) telle que $x_{ij} = 1$ si le flot utilise l'arc (i, j) et $x_{ij} = 0$ sinon. (Pour $e = (i, j)$, on écrit aussi x_e, f_e, μ_e pour représenter x_{ij}, f_{ij}, μ_{ij} .) Le PFCF est équivalent au programme linéaire mixte suivant

$$\left. \begin{array}{ll} \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij}x_{ij} + \sum_{(i,j) \in E} b_{ij}f_{ij} & \\ \sum_{j \in \delta^+(i)} f_{ij} - \sum_{j \in \delta^-(i)} f_{ij} = 0 & \forall i \in V \quad (4.1.a) \\ 0 \leq f_{ij} \leq \mu_{ij}x_{ij} & \forall (i, j) \in E \quad (4.1.b) \\ x_{ij} \leq f_{ij} & \forall (i, j) \in E \quad (4.1.c) \\ x_{ij} \in \{0, 1\} & \forall (i, j) \in E \quad (4.1.d) \end{array} \right\} \quad (4.1)$$

où $\delta^+(i) = \{j \in V \mid (i, j) \in E\}$ et $\delta^-(i) = \{j \in V \mid (ji) \in E\}$, pour tout $i \in V$. Les contraintes (4.1.a) sont appelées *contraintes de conservation de flot* et les contraintes (4.1.b) sont appelées *contraintes de capacités*. Si le flot utilise l'arc (i, j) alors $x_{ij} = 1$ et par conséquent la valeur du flot sur cet arc ne peut pas dépasser la capacité de l'arc. Ces contraintes peuvent être supprimées si μ_{ij} est suffisamment large $\forall (i, j) \in E$. Les contraintes (4.1.c) expriment le fait que $f_{ij} > 0$, si $x_{ij} > 0$.

Le problème considéré ici est un cas particulier d'un problème plus général où le second membre des contraintes (4.1.a) peut être différent de zéro. Ce cas illustre la situation où l'on associe des demandes aux sommets. Si d_i est la demande associée à i , alors lors du passage du flot par i , une quantité égale à d_i doit être conservée dans i .

La relaxation linéaire du problème PFCF est équivalente au programme

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & \sum_{(i,j) \in E} \left(b_{ij} + \frac{c_{ij}}{\mu_{ij} f_{ij}} \right) \\ & \sum_{j \in \delta^+(i)} f_{ij} - \sum_{j \in \delta^-(i)} f_{ij} = 0 \quad \forall i \in V, \\ & 0 \leq f_{ij} \leq \mu_{ij}, \quad \forall (i,j) \in E. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

En effet en remplaçant les contraintes (1.d) par les contraintes $0 \leq x_{ij} \leq 1$, les contraintes (4.1.b) deviennent $0 \leq \frac{f_{ij}}{\mu_{ij}} \leq x_{ij} \leq 1$. Comme $c_{ij} \geq 0$ il existe toujours une solution optimale où $x_{ij} = \frac{f_{ij}}{\mu_{ij}}$. En remplaçant x_{ij} par $\frac{f_{ij}}{\mu_{ij}}$ dans (4.1) on obtient le problème (4.2).

Comme il a été mentionné dans l'introduction, plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire se ramènent au problème PFCF, comme par exemple le problème de l'arborescence Steiner. Dans le paragraphe suivant, nous montrons comment ce problème peut être transformé au problème PFCF.

4.2 Le problème de l'arborescence Steiner et le PFCF

Etant donné un graphe orienté $G = (V, E)$ où chaque arc (i, j) est muni d'un poids $c_{ij} > 0$, un sous ensemble de sommets distingués $N \subseteq V$, et un sommet fixe $r \in N$, le problème de *l'arborescence Steiner de poids minimum* (PAS) par rapport à r est de déterminer une arborescence de racine r , contenant les sommets de N et qui soit de poids minimum. Les sommets de N sont appelés *terminaux* et les sommets de $V \setminus N$ sont dits *sommets Steiner*. Le sommet r est appelé *la racine*. La proposition suivante montre que le problème PAS peut se ramener au problème PFCF.

Proposition 4.1 [62] *Soient $G = (V, E)$ un graphe, $N \subseteq V$ un ensemble de terminaux, $r \in N$ et $(c_{ij}, (i, j) \in E)$ un système de poids associé aux arcs de G . Le problème PAS dans G se ramène au problème PFCF dans $G' = (V', E')$ par rapport aux systèmes de poids $c' = (c'_{ij}, ij \in E)$ et $b' = (b'_{ij}, ij \in E)$ et de capacités $\mu' = (\mu'_{ij}, ij \in E)$ où G' est le graphe obtenu à partir de G en ajoutant un sommet v_0 ,*

l'arc (v_0, r) , et les arcs $(v, v_0) \forall v \in N \setminus \{r\}$ et

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & \text{si } (i, j) \in E, \\ 0 & \text{si } (i, j) \in E' \setminus E, \end{cases}$$

$$b'_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } (i, j) \neq (v_0, r), \\ -M & \text{si } (i, j) = (v_0, r), \end{cases}$$

$$\mu'_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{si } (i, j) \in E, \\ 1 & \text{si } i \in N \setminus \{r\} \text{ et } j = v_0, \\ |N| - 1 & \text{si } (i, j) = (v_0, r), \end{cases}$$

où M est un scalaire suffisamment grand.

Preuve. Il est clair que si $F \subseteq E$ induit une solution du PAS, alors $(x^{F'}, f)$ où $F' = F \cup \{(v_0, r)\} \cup \{(v, v_0), v \in N \setminus \{r\}\}$ et

$$f_{ij} = \begin{cases} t_{ij} & \text{si } (i, j) \in E \\ 1 & \text{si } i \in N \setminus \{r\} \text{ et } j = v_0 \\ |N| - 1 & \text{si } (i, j) = (v_0, r) \end{cases}$$

est une solution de PFCF dans G' dont le coût est donné par

$$\mathcal{C}(f) = \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} - M(|N| - 1) \quad (4.3)$$

Ici, t_{ij} représente le nombre de fois où l'arc (i, j) est utilisé dans un chemin de l'arborescence, reliant la racine r à un des sommets terminaux.

Inversement, si (x, f) est une solution optimale du problème PFCF dans le graphe G' , puisque $c_{ij} > 0, \forall (i, j) \in E$, le flot ne peut pas utiliser des circuits dans le graphe G . En effet, s'il existe un tel circuit C dans G où $f_{ij} > 0 \forall (i, j) \in C$, alors le flot f' tel que $f'_{ij} = f_{ij}$ si $(i, j) \in E' \setminus C$, et $f'_{ij} = f_{ij} - \delta$ si $(i, j) \in C$ où $\delta = \min_{(i,j) \in C} \{f_{ij}\}$, serait réalisable et de coût inférieur, ce qui est impossible. Par conséquent, le sous graphe de G qui porte le flot est une arborescence de racine r , contenant tous les sommets terminaux et le coût du flot est donné par (4.3). $\square$

4.3 Le polyèdre associé

Etant donnés un graphe orienté $G = (V, E)$ et un système de capacités associé aux arcs de G , soit $P(G)$ le polyèdre, enveloppe convexe des solutions de (4.1). Le

polyèdre $P(G)$ n'a pas été considéré dans la littérature. Des familles de contraintes valides pour $P(G)$ ont été identifiées en relation avec la programmation en nombre entiers [62, 66, 75, 77]. Cependant plusieurs cas particuliers ont été largement étudiés [62].

Dans la suite on suppose que G est connexe et tout arc du graphe appartient à au moins un circuit de G . Si un arc n'appartient à aucun circuit du graphe, il ne peut être utilisé par le flot et donc il peut être supprimé. Un graphe connexe est dit *fortement connexe* si pour toute paire de sommets (i, j) , il existe un chemin de i vers j et un chemin de j vers i . Nous avons alors le lemme suivant.

Lemme 4.2 *Le graphe G est fortement connexe.*

Preuve. Soient u et v deux sommets de V . Puisque G est connexe, il existe une chaîne $e_1, \dots, e_l$ entre u et v . Soit L^+ (resp. L^-) l'ensemble des arcs qui peuvent être traversés dans le bon sens (resp. le sens contraire) si la chaîne est parcourue de u à v . Puisque chaque arc appartient à un circuit dans G , notons par L_i un chemin de G qui forme avec e_i un circuit. Maintenant les ensembles $L^+ \cup (\bigcup_{e_i \in L^-} L_i)$ et $L^- \cup (\bigcup_{e_i \in L^+} L_i)$ constituent deux chemins respectivement de u vers v et de v vers u . $\square$

Un graphe est dit 2-sommet connexe si pour toute paire de sommets (i, j) , il existe deux chaînes sommets disjointes entre i et j . Le théorème suivant établit la dimension de $P(G)$.

Théorème 4.3 *Soient $G_1, \dots, G_k$ les composantes 2-sommet connexes de G . Soient L_{ij} , $j = 1, \dots, p_i$ les chemins de G_i dont les sommets internes sont de degré 2. Supposons que pour tout arc $(u, v) \notin \bigcup L_{ij}$, il existe un circuit passant par u et v et ne contenant pas (u, v) . Alors*

$$\dim(P(G)) = 2|E| - |V| + 1 - \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, p_i}} (|L_{ij}| - 1).$$

Preuve. Considérons un chemin L_{ij} . Les arcs de L_{ij} sont ou bien tous utilisés par le flot ou bien aucun ne l'est. Donc si $L_{ij} = \{e_1, \dots, e_{|L_{ij}|}\}$ pour $i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, p_i$, on a

$$x(e_l) - x(e_{l+1}) = 0 \text{ pour } l = 2, \dots, |L_{ij}| - 1, i = 1, \dots, k \text{ et } j = 1, \dots, p_i. \quad (4.4)$$

Chaque système de type (4.4) est de rang $|L_{ij}| - 1$. Puisque le système (4.1.a) est de rang $|V| - 1$ alors

$$\dim(P(G)) \leq 2|E| - |V| + 1 - \sum_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, p_i}} (|L_{ij}| - 1).$$

Maintenant supposons qu'il existe une équation $\lambda x + \mu f = \delta$ où $\lambda^T, \mu^T \in \mathbb{R}^{|E|}$; $\delta \in \mathbb{R}$, qui soit vérifiée par tout point (x, f) de $P(G)$. Pour démontrer le théorème il suffit de montrer qu'il existe $\lambda^T \in \mathbb{R}^{|\cup L_{ij}|}$, $\mu^T \in \mathbb{R}^{|V|}$ tels que

$$\begin{aligned} \delta &= 0, \quad \lambda(e) = 0 \quad \forall e \in E \setminus (\cup L_{ij}) \\ (\lambda(e), e \in (\cup L_{ij})) &= \lambda' A \text{ et } \mu = \mu' B \end{aligned} \quad (4.5)$$

où A et B sont les matrices respectives des systèmes (4.1.a) et (4.4). (Notons que B est la matrice d'incidence du graphe G)

Comme $(x, f) = (0, 0)$ est une solution de (4.1) alors $\delta = 0$.

Pour le reste de la démonstration, nous avons besoin de l'assertion suivante

Assertion 1. *Pour tout circuit $C = (e_1, \dots, e_t)$ on a $\sum_{e_i \in C} \lambda(e_i) = \sum_{e_i \in C} \mu(e_i) = 0$.*

Preuve. En effet, considérons la solution (x, f) telle que

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ f_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in C \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Il est évident que (x, f) est une solution de (4.1). D'où

$$\sum_{e_i \in C} \lambda(e_i) + \sum_{e_i \in C} \mu(e_i) = 0 \quad (4.6)$$

Puisque $(x', f') = (x, \frac{1}{2}f)$ est aussi une solution de (4.1) on a également

$$\sum_{e_i \in C} \lambda(e_i) + \frac{1}{2} \sum_{e_i \in C} \mu(e_i) = 0 \quad (4.7)$$

de (4.6) et (4.7) on déduit que $\sum_{e_i \in C} \lambda(e_i) = \sum_{e_i \in C} \mu(e_i) = 0$. $\square$

Maintenant nous allons montrer que pour tout arc $e = (u, v)$ n'appartenant à aucun chemin L_{ij} on a $\lambda(e) = 0$. Soit P un chemin de v vers u . Par le Lemme 4.2, un

tel chemin existe. Puisque u n'est pas de degré 2, il doit exister un arc e' incident à u tel que $e' \neq e$ et $e' \notin P$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $e' = (u, w)$ pour un sommet $w \in V$. Puisque e' appartient à une composante 2-sommet connexe, il doit exister une chaîne liant w et v , et ne passant pas par u . Soit $L = (e_1, \dots, e_l)$ cette chaîne. Notons par L^+ (resp. L^-) l'ensemble des arcs de L qui peuvent être parcourus dans le bon sens (resp. le sens contraire) si L est traversé de w à v . Soit L_i un chemin qui forme avec e_i un circuit, pour $i = 1, \dots, l$.

- Si aucun des chemins L_i où $e_i \in L^-$ ne passe par (u, v) alors $Q = L^+ \cup (\bigcup_{e_i \in L^-} L_i) \cup \{u, w\}$ est un chemin de u à v ne contenant pas (u, v) . Soit C le circuit formé par P et Q . Soient les solutions (x^1, f^1) et (x^2, f^2) telles que

$$x_{ij}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in C \cup \{(u, v)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_{ij}^1 = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (i, j) \in Q \cup \{(u, v)\}, \\ 1 & \text{si } (i, j) \in P, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

(4.8)

et

$$x_{ij}^2 = x_{ij}^1 \quad \forall (i, j) \in E, \quad f_{ij}^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} - \epsilon & \text{si } (i, j) \in Q \cup \{(u, v)\}, \\ 1 - \epsilon & \text{si } (i, j) \in P, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Où $\epsilon > 0$ est un scalaire suffisamment petit.

Il est facile de vérifier que (x^1, f^1) et (x^2, f^2) sont des solutions de (4.1). Ceci implique que

$$\sum_{e_i \in C \cup \{(u, v)\}} \lambda(e_i) = 0.$$

Puisque d'après l'assertion 1, on a $\sum_{e_i \in C} \lambda(e_i) = 0$, on déduit que $\lambda(u, v) = 0$.

- S'il existe un chemin L_i pour un certain $e_i \in L^-$ qui passe par (u, v) , alors $Q' = (L_i \setminus \{(u, v)\}) \cup \{e_i\}$ est un chemin de v à u . Soient C_1 et C_2 les circuits formés respectivement par P et (u, v) et par Q' et (u, v) .

D'après l'assertion 1 on a

$$\sum_{e \in C_1} \lambda(e) = \sum_{e \in C_2} \lambda(e) = 0. \quad (4.9)$$

Soient les solutions (x^1, f^1) et (x^2, f^2) telles que

$$\begin{aligned}
x_{ij}^1 &= \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in P \cup Q' \cup \{(u, v)\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad f_{ij}^1 = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } (i, j) \in P \cup Q', \\ 1 & \text{si } (i, j) = (u, v), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\
\text{et} & \\
x_{ij}^2 &= x_{ij}^1 \quad \forall (i, j) \in E, \quad f_{ij}^2 = \begin{cases} \frac{1}{2} - \epsilon & \text{si } (i, j) \in P \cup Q', \\ 1 - \epsilon & \text{si } (i, j) = (u, v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Où $\epsilon > 0$ est suffisamment petit.

Puisque (x^1, f^1) et (x^2, f^2) sont des solutions de (4.1) on a

$$\begin{aligned}
\lambda x^1 + \mu f^1 &= 0, \\
\lambda x^2 + \mu f^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Puisque $x^1 = x^2$, ceci implique que $\mu f^1 = 0$ et par conséquent

$$\lambda x^1 = \sum_{e \in P \cup Q'} \lambda(e) + \lambda(u, v) = 0. \tag{4.11}$$

En combinant (4.9) et (4.11) on obtient $\lambda(u, v) = 0$.

Maintenant considérons le graphe G' obtenu à partir de G en remplaçant chaque chemin L_{ij} qui ne passe pas par un sommet d'articulation dans G , par un arc e_{ij} ayant la même orientation que L_{ij} . Dans le nouveau graphe, chaque arc e_{ij} a ses deux extrémités de degré ≥ 3 . Le problème du flot dans G est équivalent à celui dans G' en considérant des capacités appropriées sur les arcs e_{ij} . Si on considère le polyèdre $P(G')$, on peut déduire d'après ce qui précède que $\lambda(e_{ij}) = 0$. Ceci implique que $\sum_{e \in L_{ij}} \lambda(e) = 0$.

Si L_{ij} passe par un sommet d'articulation v_0 , il doit exister, dans la même composante 2-sommet connexe contenant L_{ij} , un circuit $\tilde{C}$ contenant L_{ij} . Si $\tilde{C}$ ne contient aucun autre chemin $L_{ij'}$ (passant par un sommet d'articulation) alors pour tout $e \in \tilde{C} \setminus L_{ij}$ on a $\lambda(e) = 0$. Comme par l'assertion 1, on a $\sum_{e \in \tilde{C}} \lambda(e) = 0$ on obtient $\sum_{e \in L_{ij}} \lambda(e) = 0$.

Si $\tilde{C}$ contient un autre chemin $L_{ij'}$ passant par un sommet d'articulation, alors il doit exister un circuit $\tilde{C}'$ contenant $L_{ij'}$ tel que toute arête $e \in \tilde{C}' \setminus L_{ij'}$ ait ses deux extrémités de degré ≥ 3 . D'où $\lambda(e) = 0 \forall e \in \tilde{C}' \setminus L_{ij'}$. Comme $\sum_{e \in \tilde{C}'} \lambda(e) = 0$, on a $\sum_{e \in L_{ij'}} \lambda(e) = 0$.

Puisque $\sum_{e \in \tilde{C}} \lambda(e) = 0$ et $\lambda(e) = 0 \forall e \in \tilde{C} \setminus (L_{ij} \cup L_{ij'})$, il en résulte que $\sum_{e \in L_{ij}} \lambda(e) = 0$.

D'où

$$\begin{cases} \lambda(e) = 0 & \forall e \in E \setminus (\bigcup L_{ij}), \\ \sum_{e \in L_{ij}} \lambda(e) = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, p_i. \end{cases}$$

Ceci implique que λ vérifie (4.5).

Puisque d'après l'assertion 1, pour tout circuit C de G on $\sum_{e \in C} \mu(e) = 0$, ceci implique qu'il existe μ' tel que $\mu = \mu'B$. Ce qui termine la preuve du théorème. $\square$

4.4 Contraintes de coupes

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté. Si $S \subseteq V$ est un sous ensemble de sommets on dénote par $\delta^+(S)$ (resp. $\delta^-(S)$) l'ensemble des arcs ayant l'extrémité initiale (resp. terminale) dans S .

Si (x, f) est une solution de (4.1) alors x vérifie les contraintes suivantes.

$$x(e) \leq x(\delta^+(S)) \quad \forall S \subset V, \forall e \in \delta^-(S), \quad (4.12)$$

$$x(e) \leq x(\delta^-(S)) \quad \forall S \subset V, \forall e \in \delta^+(S). \quad (4.13)$$

Les contraintes (4.12) et (4.13) sont appelées *contraintes de coupes*. Ces contraintes expriment le fait que si un arc $e \in \delta^-(S)$ (resp. $e \in \delta^+(S)$) est pris dans la solution alors au moins un des arcs de $\delta^+(S)$ (resp. $\delta^-(S)$) doit être aussi pris dans la solution. Une contrainte de coupes de type (4.12) (resp. (4.13)) sera notée $\delta^+(S, e)$ (resp. $\delta^-(S, e)$).

Dans la suite, on suppose que le graphe G est 2-sommet connexe. Puisque les chemins dont les sommets internes sont de degré 2 peuvent être remplacés par des arcs, on suppose également que le graphe ne contient pas de tels chemins.

Théorème 4.4 *Soient $S \subset V$ et $e_0 = (u_0, v_0) \in \delta^-(S)$. Supposons que $G(S)$ et $G(V \setminus S)$ sont fortement connexes, où $G(S)$ (resp. $G(V \setminus S)$) est le graphe induit par S (resp. $V \setminus S$). Alors la contrainte de coupe $\delta^+(S, e_0)$ définit une facette de $P_D(G)$ si et seulement si il n'existe pas $S' \subset V$ tel que $e_0 \in \delta^-(S')$ et $\delta^+(S') \subset \delta^+(S)$.*

Preuve. S'il existe $S' \subset V$ tel que $e_0 \in \delta^-(S')$ et $\delta^+(S') \subset \delta^+(S)$ alors, la contrainte $\delta^+(S, e_0)$ est dominée par $\delta^+(S', e_0)$ et donc elle ne peut pas définir une facette.

Maintenant, supposons que cette condition est vérifiée.

Notons la contrainte $x(\delta^+(S)) - x(e_0) \geq 0$ par $a^T x + bf \geq \alpha$. Supposons qu'il existe une contrainte $c^T x + df \geq \beta$ qui définit une facette de $P(G)$ telle que $\{(x, f) \in P(G) \mid a^T x + bf = \alpha\} \subseteq \{(x, f) \in P(G) \mid c^T x + df = \beta\}$. Soit A la matrice d'incidence du graphe. Pour montrer le théorème, il suffit de montrer qu'il existe $\rho > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}^{|V|}$, tels que

$$\begin{aligned} c &= \rho a, \\ d &= \rho b + \lambda A, \\ \beta &= \rho \alpha. \end{aligned}$$

Puisque la solution $(0, 0)$ vérifie $a^T x + bf \geq \alpha$ à l'égalité on a $\beta = 0$.

Assertion 1. *Pour tout circuit C , tel que $|C \cap \delta^+(S)| = |C \cap \{e_0\}|$ on a*

$$\begin{aligned} \sum_{e \in C} c(e) &= 0. \\ \sum_{e \in C} d(e) &= 0. \end{aligned}$$

Preuve . Similaire à celle de l'assertion 1 du théorème 4.3.

Assertion 2. $c(u, v) = 0 \ \forall (u, v) \notin \delta^+(S) \cap \{e_0\}$.

Preuve. Soit $(u, v) \in E$ tel que $(u, v) \notin \delta^+(S) \cap \{e_0\}$. Supposons que $u, v \in S$. Soit $e_1 = (u_1, v_1) \in \delta^+(S)$. Puisque $G(S)$ est fortement connexe, il doit exister dans $G(S)$ un chemin de v_0 à u et un chemin de v à u_1 . D'une manière similaire, il doit exister dans $G(V \setminus S)$ un chemin de v_1 à u_0 . Soit C_1 le circuit formé par ces chemins et les arcs $\{e_0, (u, v), e_1\}$. Par l'assertion 1, $\sum_{e \in C_1} c(e) = 0$.

Aussi, comme $G(S)$ est fortement connexe, il existe un chemin P de v à u . Soit C_2 le circuit formé par le chemin P et l'arc (u, v) . On a $\sum_{e \in C_2} c(e) = 0$.

Soit $Q' = C_1 \setminus \{(u, v)\}$. Considérons les solutions données par (4.10). Puisque (x^1, f^1) et (x^2, f^2) sont des solutions de (4.1) qui vérifient $a^T x + bf \geq \alpha$ à l'égalité, on a

$$\begin{aligned} c^T x^1 + df^1 &= 0, \\ c^T x^2 + df^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ceci implique que $df^1 = 0$ et par conséquent $c^T x^1 = 0$.

Comme $\sum_{e \in C_1} c(e) = \sum_{e \in C_2} c(e) = 0$, il en résulte que $c(u, v) = 0$.

Si (u, v) est tel que $u, v \in V \setminus S$, on montre d'une manière similaire que $c(u, v) = 0$.

Maintenant, supposons sans perte de généralité que $u \in V \setminus S$ et $v \in S$. Considérons de nouveau l'arc $e_1 = (u_1, v_1) \in \delta^+(S)$. Comme $G(S)$ et $G(V \setminus S)$ sont fortement connexes, il existe deux chemins dans $G(S)$ (resp. $G(V \setminus S)$) de v_0 à v et de v à u_1 (resp. de u à u_0 et de v_1 à u). Soit C le circuit formé par ces chemins et les arcs e_0 et e_1 . Par l'assertion 1, on a $\sum_{e \in C} c(e) = 0$.

Maintenant soit P (resp. Q) le chemin dans C , liant v à u (resp. u à v). Considérons les solutions (x^1, f^1) et (x^2, f^2) données par (4.8). Puisque ces solutions vérifient $a^T x + bf \geq \alpha$ à l'égalité, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} c^T x^1 + df^1 &= 0, \\ c^T x^2 + df^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ceci implique que $c^T x^1 = \sum_{e \in C} c(e) + c(u, v) = 0$. D'où $c(u, v) = 0$.

Assertion 3. *Pour tout circuit C , on a $\sum_{e \in C} d(e) = 0$.*

Preuve. Par l'assertion 1, ceci est clair si on a $|C \cap \delta^+(S)| = |C \cap \{e_0\}|$.

On distingue deux cas.

Cas 1. $|C \cap \delta^+(S)| = 1$.

Dans ce cas, C utilise un seul arc $e' = (u, v)$ de $\delta^-(S)$. Si $e' = e_0$ alors par l'assertion 1, $\sum_{e \in C} d(e) = 0$. Donc, supposons que $e' \neq e_0$. Soit $e_1 = (u_1, v_1)$ l'arc de $\delta^+(S)$ utilisé par C . Puisque $G(S)$ (resp. $V \setminus S$) est fortement connexe, il existe un chemin P_1 (resp. P_2) de v à u_1 (resp. v_1 à u). Aussi, il existe un chemin P_3 (resp. P_4) de v_0 à v (resp. u à u_0) (voir Figure 4.1). Soit C' le circuit formé par P_1, P_2, P_3, P_4 et les arcs e_0 et e_1 . Par l'assertion 1, on a

$$\sum_{e \in C'} d(e) = 0. \quad (4.14)$$

Soient $P = P_1 \cup P_2 \cup \{e_1\}$ et $Q = P_3 \cup P_4 \cup \{e_0\}$. Considérons les solutions (x^1, f^1) et (x^2, f^2) données par (4.8). Puisque ces solutions vérifient $a^T x + bf \geq \alpha$ à l'égalité, il en résulte que

$$\begin{aligned} c^T x^1 + df^1 &= 0, \\ c^T x^2 + df^2 &= 0. \end{aligned}$$

D'où

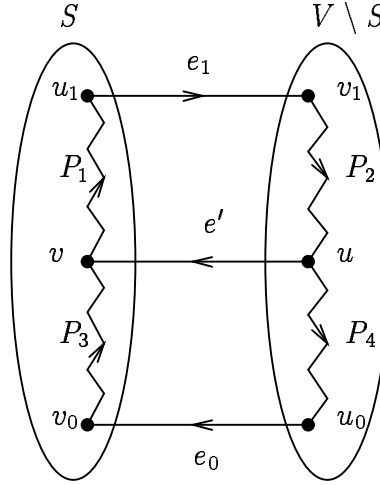


Figure 4.1 :

$$df^1 = 0 \quad (4.15)$$

En combinant (4.14) et (4.15), on obtient $\sum_{e \in C} d(e) = 0$.

Cas 2. $|C \cap \delta^+(S)| \geq 2$.

Soient $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_r, v_r)$ les arcs de $C \cap \delta^+(S)$, donnés dans l'ordre où ils sont rencontrés en parcourant le cycle C . Soit u_{r+1} le sommet de S tel que $(u_{r+1}, u_1) \in C$. Soient P_{i-1} un chemin de $G(S)$ de u_i à u_{i-1} pour $i = 2, \dots, r+1$ et P_{r+1} un chemin de $G(S)$ de u_1 à u_{r+1} . Puisque $G(S)$ est fortement connexe, de tels chemins existent. Notons que chaque chemin P_i forme avec le sous chemin de C de u_i à u_{i+1} un circuit C_i pour $i = 1, \dots, r$. Soit C_{r+1} le circuit formé par P_{r+1} et l'arc (u_{r+1}, u_1) . Puisque $|C_i \cap \delta^+(S)| \leq 1 \forall i = 1, \dots, r+1$, d'après le cas 1, on a

$$\sum_{e \in C_i} d(e) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, r+1 \quad (4.16)$$

Soit C_{r+2} le circuit formé par les chemins $P_1, \dots, P_{r+1}$. Par l'assertion 1, on a

$$\sum_{e \in C_{r+2}} d(e) = 0 \quad (4.17)$$

En combinant (4.16) et (4.17), on obtient $\sum_{e \in C} d(e) = 0$.

Assertion 4. $c(e) = -c(e_0) \quad \forall e \in \delta^+(S)$.

Preuve. Soit C un circuit de G tel que $C \cap \delta(S) = \{e, e_0\}$. Un tel circuit existe du fait que $G(S)$ et $G(V \setminus S)$ sont fortement connexes. Par l'assertion 1, on a $\sum_{e \in C} c(e) = 0$. Et par l'assertion 2, on a $c(u, v) = 0$ pour tout $(u, v) \in C \setminus \{e, e_0\}$. D'où $c(e) = -c(e_0)$.

Par les Assertions 2 et 4, il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $c = \rho a$. Et par l'assertion 3, il existe λ tel que $d = \lambda B$. Ainsi on a $\rho > 0$, ce qui termine la preuve de notre théorème. $\square$

Corollaire 4.5 *Si le graphe est symétrique, alors les contraintes (4.12) et (4.13) définissent des facettes de $P(G)$.*

Le problème de séparation pour un système linéaire $Ax \leq b$, consiste à déterminer, pour un point x donné, si x vérifie le système, et dans le cas contraire de trouver une contrainte violée par x .

Si le problème de séparation associé à un système $Ax \leq b$ est polynomial alors tout programme linéaire défini sur ce système peut être résolu aussi en temps polynomial [47, 65]. Cette relation très étroite entre optimisation et séparation sur un polyèdre était à l'origine d'un développement considérable de l'optimisation combinatoire durant la dernière décennie.

Le problème de séparation associé aux contraintes de coupes se ramène à la résolution d'une séquence de problèmes de flot maximum.

Puisque le problème de flot maximum est polynomial [33, 35], il en résulte que le problème de séparation des contraintes de coupes est aussi polynomial.

Soit $P_0(G)$ le polyèdre défini par les contraintes (4.1.a), (4.1.b), (4.1.c) et les contraintes de coupes. Soit le programme

$$\left. \begin{array}{l} \min \sum_{(i,j) \in E} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in E} b_{ij} f_{ij} \\ (x, f) \in P_0(G) \end{array} \right\} \quad (4.18)$$

Ce programme, qui est une relaxation de (4.1), peut donc être résolu en temps polynomial. Cependant, le polyèdre $P_0(G)$ peut comporter des sommets fractionnaires.

Dans la suite, nous allons donner un exemple illustrant cette situation. D'abord, nous présentons une classe générale de contraintes valides pour le PFCF, appelée *contraintes de flot généralisés*, introduites par Padberg, Van Roy et Wolsey [66].

Soit S un sous ensemble de sommets. Soit $q = |\delta(S)|$. Considérons le polytope

$$T = \{x \in \{0, 1\}^q, f \in \mathbb{R}_+^q \mid \sum_{ij \in \delta^+(S)} f_{ij} - \sum_{ij \in \delta^-(S)} f_{ij} \leq 0, f_{ij} \leq \mu_{ij} x_{ij}, \forall (i, j) \in \delta(S)\}.$$

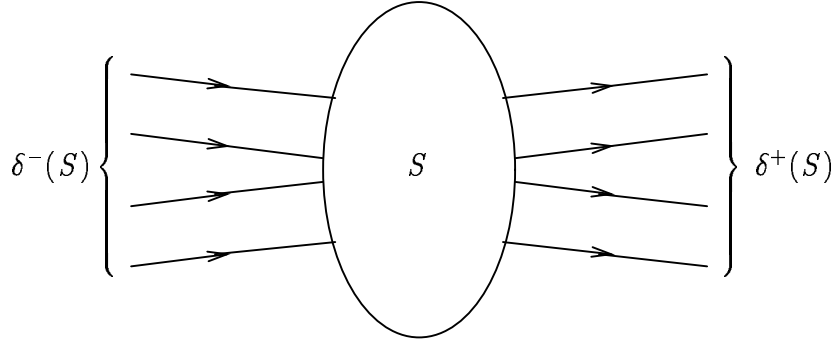


Figure 4.2 :

Proposition 4.6 *Etant donnés $F \subseteq \delta^+(S)$ et $L \subseteq \delta^-(S)$ alors la contrainte*

$$\sum_{ij \in F} (f_{ij} + (\mu_{ij} - \lambda)^+(1 - x_{ij})) \leq \sum_{ij \in L} \lambda x_{ij} + \sum_{ij \in \delta^-(S) \setminus L} f_{ij} \quad (4.19)$$

est valide pour $P(G)$, où $\lambda = \sum_{ij \in F} \mu_{ij}$ et $(\mu_{ij} - \lambda)^+ = \max(\mu_{ij} - \lambda, 0)$.

Preuve. Voir [62]

Dans [59], Martin et Schrage ont identifié des contraintes similaires en utilisant des arguments différents.

Les contraintes de type (4.19) peuvent être généralisées en les contraintes suivantes, appelées *contraintes de flot généralisé*.

$$\sum_{ij \in F} (f_{ij} + (\mu_{ij} - \lambda)^+(1 - x_{ij})) \leq \sum_{ij \in L_1} \mu_{ij} + \sum_{ij \in L_2} \lambda x_{ij} + \sum_{ij \in \delta^-(S) \setminus (L_1 \cup L_2)} f_{ij} \quad (4.20)$$

où $S \subset V$, $F \subseteq \delta^+(S)$, $L_1 \subseteq \delta^-(S)$, $L_2 \subseteq \delta^-(S) \setminus L_1$ et $\lambda = \sum_{ij \in F} \mu_{ij} - \sum_{ij \in L_1} \mu_{ij} > 0$.

Maintenant considérons le graphe $G = (V, E)$ de la Figure 4.3 où le triplet porté par chaque arc e définit respectivement x_e , f_e et μ_e .

Il n'est pas difficile de vérifier que (x, f) est une solution pour le problème (4.18)

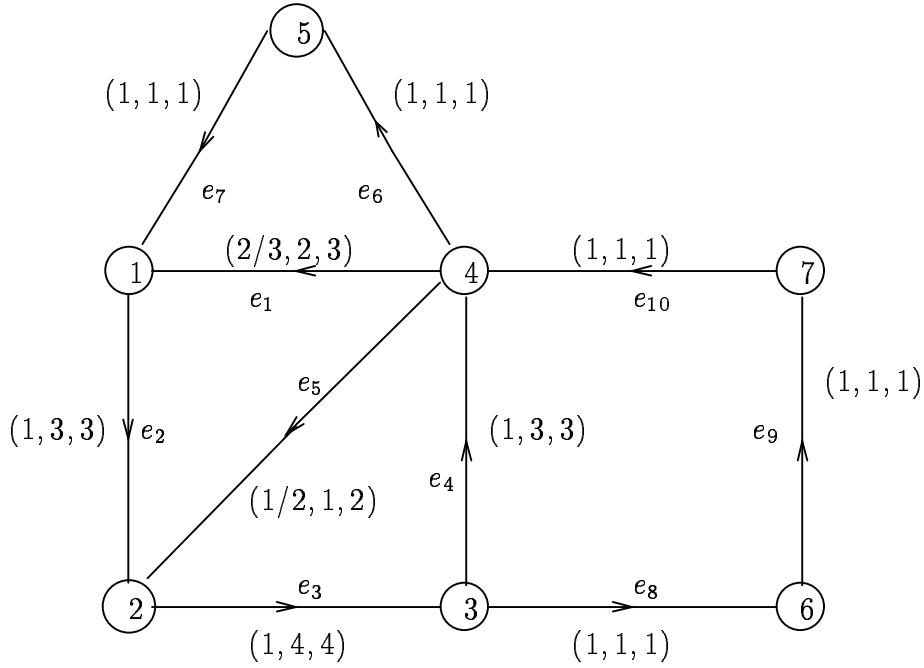


Figure 4.3 :

associé au graphe G . Cette solution est en plus un point extrême de $P_0(G)$. En effet, elle est la solution unique du système suivant :

$$\begin{cases} x_e = 1 & \forall e \in E \setminus \{e_1, e_5\}, \\ f_e = x_e \mu_e & \forall e \in E, \\ f_{e_1} + f_{e_5} + f_{e_6} = f_{e_4} + f_{e_{10}}, \\ f_{e_1} + f_{e_7} = f_{e_2}. \end{cases}$$

Considérons maintenant les contraintes

$$\begin{aligned} f_{e_2} - x_{e_2} &\leq 2x_{e_1} \\ f_{e_3} - 3x_{e_3} &\leq x_{e_5} \end{aligned}$$

qui sont de type (4.20). La première est obtenue en posant $S = \{1\}$, $F = \{e_2\}$, $L_1 = \{e_7\}$ et $L_2 = \{e_1\}$ et la deuxième, en considérant $S = \{2\}$, $F = \{e_3\}$, $L_1 = \{e_2\}$ et $L_2 = \{e_5\}$. Ces contraintes sont violées par la solution donnée sur le graphe.

Chapitre 5

Un algorithme de coupes et branchement pour le problème PFCF

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons un algorithme de coupes et branchement pour le problème PFCF. Cet algorithme utilise les contraintes de coupes discutées dans le chapitre précédent. A la fin de ce chapitre, nous présentons nos résultats expérimentaux.

Les algorithmes de coupes et branchement se sont avérés très efficaces pour résoudre des problèmes NP-durs. Ceci est le cas par exemple du célèbre problème de voyageur de commerce [51, 54] et le problème de la coupe maximum [5, 7].

En général, un algorithme de coupes et branchement permet de résoudre un programme linéaire mixte de la forme suivante

$$\left. \begin{aligned} \min (\max) cx &= \sum_{j \in B} c_j x_j + \sum_{j \in E} c_j x_j + \sum_{j \in C} c_j x_j \\ \sum_{j \in B} a_{ij} x_j + \sum_{j \in E} a_{ij} x_j + \sum_{j \in C} a_{ij} x_j &\sim b_i \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j &\in \{0, 1\}, \quad j \in B, \\ x_j &\in [l_{x_j}, u_{x_j}] \cap \mathbb{Z}, \quad j \in E, \\ x_j &\in \mathbb{R}, \quad j \in C, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

où B (resp. E , C) est l'ensemble des indices des variables bivalentes (resp. entières, continues), $\sim$ désigne le sens de la contrainte (*i.e* $\leq$, $\geq$ ou $=$) et l_{x_j} et u_{x_j} sont les

bornes de la variable entière x_j . De nombreux problèmes d'optimisation combinatoire peuvent avoir des formulations de type (5.1).

Un algorithme de coupes et branchement pour le programme (5.1) commence par résoudre un programme linéaire contenant un nombre réduit de contraintes du programme obtenu en relaxant les contraintes d'intégrité. Soit $\bar{x}$ la solution ainsi obtenue. Alors trois cas peuvent se présenter.

Si $\bar{x}$ est une solution du programme (5.1) relaxé, vérifiant les conditions d'intégrité, alors elle est optimale pour le problème.

Si $\bar{x}$ n'est pas une solution du programme relaxé, alors il existe au moins une contrainte valide pour le polyèdre des solutions de (5.1), qui n'est pas vérifiée par $\bar{x}$. L'algorithme détermine alors une de ces contraintes et l'ajoute au programme. Pour générer de telles contraintes, l'algorithme utilise des procédures de séparation.

Si aucun des deux cas précédents ne se présente, alors il doit exister d'autres contraintes valides pour le polyèdre des solutions, violées par $\bar{x}$. Ceci est souvent le cas quand les contraintes du programme relaxé ne constituent pas une description complète du polyèdre des solutions. Dans ce cas, l'algorithme essaie de générer de nouvelles contraintes valides. Si ceci n'est pas possible alors il fait un branchement sur une composante x_j , $j \in B \cup E$ qui est fractionnaire. Il construit deux nouveaux programmes linéaires, obtenus à partir du programme courant en ajoutant respectivement les égalités $x_j = \lfloor \bar{x}_j \rfloor$ et $x_j = \lceil \bar{x}_j \rceil$. L'algorithme procède comme ci-dessus pour les nouveaux programmes. Ce processus continue jusqu'à l'obtention d'une solution optimale.

5.2 L'algorithme

Notre algorithme commence par résoudre le programme linéaire obtenu de (4.1) en relaxant les contraintes (4.1.d), et en ajoutant les contraintes (4.12) et (4.13) associées aux sommets du graphe. Ce programme consiste en $4|E| + |V|$ contraintes et $2|E|$ variables. Ceci ne tient pas compte des contraintes des bornes.

Si la solution optimale $(\bar{x}, \bar{f})$ de ce programme est une solution de (4.1) alors elle est optimale pour le problème. En général, la solution ainsi obtenue est fractionnaire. Dans ce cas, l'algorithme procède à la recherche de contraintes de coupes violées. Si

de telles contraintes sont trouvées, alors il les ajoute au programme et détermine une nouvelle solution. Si aucune contrainte de coupes n'est trouvée, alors il procède à un branchement. Ceci est fait à l'aide du logiciel MINTO dont on présentera une brève description dans la suite. Ce processus est repris jusqu'à optimalité.

5.2.1 Séparation des contraintes de coupes

Soient un graphe orienté $G = (V, E)$ et un vecteur $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^{|E|}$. Le problème de déterminer une contrainte de coupe non vérifiée par $\bar{x}$ se ramène à la résolution de $|E|$ problèmes de flot maximum dans G où $\bar{x}$ constitue le vecteur des capacités sur les arcs. En effet, en utilisant le théorème de flot maximum - coupe minimum (voir Ford et Fulkerson [42]), si $e = (s, t)$ est un arc de E , alors résoudre le problème de séparation pour les contraintes $\delta^+(S, e)$ et $\delta^-(S, e)$ revient à déterminer un flot maximum de t vers s . Si pour un arc e_0 la valeur de la coupe calculée est inférieure à $\bar{x}(e_0)$ alors les contraintes $\delta^+(S, e_0)$ et $\delta^-(V \setminus S, e_0)$ sont violées par $\bar{x}$ (remarquons que $x(\delta^+(S)) = x(\delta^-(V \setminus S))$). Sinon, toutes les contraintes (4.12) et (4.13) sont vérifiées.

Pour calculer une coupe minimum séparant deux sommets donnés du graphe nous avons utilisé l'algorithme de Goldberg et Tarjan [46].

5.2.2 Bref aperçu sur MINTO

MINTO (Mixed INteger Optimizer) [61] est un logiciel qui permet de résoudre des problèmes de programmation linéaire mixte de type (5.1). La procédure centrale de MINTO est un algorithme de branchement et évaluation (branch-and-bound).

L'efficacité d'un algorithme de branchement et évaluation dépend beaucoup de la procédure d'évaluation utilisée et de la taille du problème. Si cette procédure engendre des bornes assez larges lorsque la taille du problème est importante, l'algorithme peut nécessiter un temps considérable pour donner une solution optimale. Pour y remédier, MINTO offre la possibilité d'introduire des fonctions spécifiques au problème qui permettent d'accélérer le calcul de cette solution. L'algorithme de séparation des contraintes de coupes que nous avons utilisé pour notre problème, en est, en effet, un exemple.

Pour une meilleure performance de calcul, MINTO développe dans une phase "pre-processing" une formulation du problème plus adéquate pour l'exécution, il contrôle

la taille du programme linéaire et il génère des contraintes valides fortes telles que les contraintes de flot généralisé. Le CPLEX, initialement développé par Bixby [17], est utilisé par MINTO pour la résolution d'un programme linéaire.

5.3 Résultats expérimentaux

Dans cette dernière section, nous allons présenter nos résultats expérimentaux obtenus en résolvant des instances du problème PFCF à l'aide de l'algorithme de coupes et branchement présenté ci-dessus. Notre objectif principal est d'évaluer l'efficacité des contraintes de coupes dans une telle approche.

Le calcul est réalisé sur une station Sun SPARC 5 (32MO de RAM et 1.05 de disque).

Les expériences ont porté sur des données générées aléatoirement. Pour chaque instance, les coûts (fixes et variables) sont uniformément générés dans $[-100, 100]$. Les capacités finies sont générées dans $[1, 100]$. Si la capacité sur un arc e est infinie, on considère une valeur M très grande comme capacité sur e de telle sorte que M ne soit jamais atteinte. Néanmoins la contrainte $f(e) \leq Mx(e)$ impose à $f(e)$ d'être nulle si $x(e)$ l'est.

Pour tester l'influence de la structure du graphe sur l'efficacité de l'algorithme, nous avons expérimenté l'algorithme sur différents types de graphes (des graphes complets, symétriques et non symétriques, des graphes série-parallèles et des graphes quelconques). Étant donné que le problème de l'arborescence Steiner de poids minimum se ramène au problème PFCF, nous avons également utilisé l'algorithme pour résoudre des instances de ce problème, tirées de la librairie OR-Library [12]

Lors de ces expérimentations, nous avons remarqué que les contraintes de coupes associées aux sommets peuvent jouer un rôle particulier dans la résolution du problème. Pour mesurer leur efficacité, chaque instance était résolue deux fois. Pour la première (resp. la deuxième) résolution, on introduit (resp. on n'introduit pas) ces contraintes dans le programme initial. Notons par PLD1 (resp. PLD2) ce programme. Les résultats montrent nettement l'utilité de ces contraintes, l'erreur relative ne dépassant pas 0.7%. Pour les instances expérimentées, aucune des contraintes de coupes $\delta^+(S, e)$ et $\delta^-(S, e)$ où $|S| \geq 2$, n'a été détectée par la procédure de séparation. Ceci

peut s'expliquer par le fait que pour un ensemble S donné, $\delta^+(S)$ et $\delta^-(S)$ peuvent comporter plusieurs arcs dont la somme des valeurs est ≥ 1 . En plus, ces contraintes peuvent se trouver dans plusieurs cas, dominées par les contraintes associées aux sommets.

Les résultats obtenus sont donnés dans les tables ci-dessous. La première colonne de chaque table contient la liste des problèmes traités. A chaque problème sont associés deux lignes. La première (resp. la deuxième) contient les résultats quand le programme initial est PLD1 (resp. PLD2). Les autres colonnes définissent dans l'ordre :

NPL	Le nombre de programmes linéaires résolus (nombre d'itérations),
PB	la profondeur maximum de l'arbre exploré dans la phase branchement,
TT	le temps total d'exécution,
TC	le temps utilisé par la procédure de séparation des contraintes de coupes,
OPT	la valeur de la solution optimale,
INIT	la valeur de la solution optimale du programme linéaire de départ,
ER	le pourcentage de l'erreur relative à la fin de la procédure de coupes ($= 100 \times (\text{OPT} - \text{INIT})/\text{OPT}$),
CFG	le nombre de contraintes de flot généralisées obtenues
CC	le nombre de contraintes de coupes générées.

Les résultats présentés dans la table 5.1 concernent les graphes complets. Chaque problème est noté par CS(n) (resp. C(n)) si le graphe est symétrique (resp. non symétrique). Ici n représente le nombre de sommets du graphe. On remarque que les contraintes de coupes ne jouent pas un rôle important pour ce type de graphes. En effet, ici chaque sommet est lié à tous les autres sommets et donc, il y a peu de chance qu'une contrainte de coupes soit violée. Mais on remarque que l'erreur dans cette série d'expériences est relativement faible (de l'ordre de 0.1%).

Les tables 5.2 et 5.3 présentent des résultats portant respectivement sur des graphes série-parallèles et des graphes quelconques. On remarque que pour toutes les instances, les contraintes de coupes sont utiles. En effet, l'erreur relative quand ces contraintes ne sont pas introduites dans le programme initial est nettement supérieure à celle obtenue en considérant ces contraintes dès le départ. Ceci permet de noter que les contraintes de coupes associées aux sommets peuvent être très efficaces dans les graphes peu denses.

La table 5.4 présente des résultats concernant trois problèmes de l'arborescence Steiner minimum. Pour ces problèmes, l'erreur relative est importante. Elle est de l'ordre de 30%. Cependant, les résultats présentés dans la table 5.5, concernant des instances de ce problème générées aléatoirement, montrent que les contraintes de coupes améliorent relativement la solution. En effet, pour le premier problème comportant 50 sommets et 200 arcs, la solution obtenue à la fin de la procédure de coupes, en considérant le programme PLD1 comme programme initial, est optimale. Pour les autres problèmes, l'erreur est de l'ordre de 0.1%.

Dans toutes les expérimentations, MINTO a généré des contraintes de flot généralisées pour résoudre le problème à l'optimum. Le temps de calcul de la procédure de coupes dépend beaucoup des données du problème et en particulier de la taille du graphe.

G	NPL	PB	TT	TC	OPT	INIT	ER(%)	CFG	CC
C(10)	8	2	2.05	0.21	-36860	-36920.18	0.16	7	-
	8	2	1.43	0.21	-36860	-3690.18	0.16	7	0
C(25)	149	14	63.42	29.79	-298734	-299003.19	0.09	65	-
	149	14	49.17	30.83	-298734	-299003.19	0.09	65	0
C(40)	260	21	613.70	288.25	-826640	-826940.78	0.03	51	-
	262	21	356.92	248.40	-826640	-826940.78	0.03	51	0
CS(15)	24	6	23.55	14.17	-219635	-219756.46	0.05	17	-
	24	6	19.47	15.29	-219635	-219756.46	0.05	17	0
CS(25)	226	15	498.12	136.52	-776131	-776331.25	0.02	30	-
	226	15	290.72	142.54	-776131	-776131.25	0.02	30	0
CS(35)	2035	25	4351.05	695.70	-1536499	-1536918.50	0.02	44	-
	2035	25	1824.00	667.45	-1536499	-1536918.50	0.02	44	0

Tableau 5.1 :

G	NPL	PB	TT	TC	OPT	INIT	ER(%)	CFG	CC
$ V = 13$	2	0	0.65	0.02	-3254	-3254.62	0.02	4	-
$ E = 25$	2	0	0.62	0.02	-3254	-3287.34	1.02	8	2
$ V = 48$	4	0	1.80	0.33	-21640	-21667.11	0.12	6	-
$ E = 100$	6	0	1.52	0.48	-21640	-21742.48	0.47	10	6
$ V = 196$	54	12	48.77	33.24	-138274	-138581.36	0.22	25	-
$ E = 500$	55	12	51.17	41.78	-138274	-138905.87	0.45	32	19
$ V = 416$	50	10	193.70	150.22	-214059	-214641.41	0.27	38	-
$ E = 1000$	61	10	407.25	379.45	-214059	-215520.40	0.68	54	64
$ V = 562$	193	16	465.28	329.23	-316366	-317173.29	0.25	61	-
$ E = 1500$	202	16	506.58	419.31	-316366	-318334.76	0.62	76	73

Tableau 5.2 :

G	NPL	PB	TT	TC	OPT	INIT	ER(%)	CFG	CC
$ V = 25$	29	10	6.48	2.49	-54994	-55309.29	0.57	30	-
$ E = 100$	29	10	5.08	2.89	-54994	-55354.21	0.65	31	7
$ V = 50$	35	9	28.42	16.05	-157320	-157762.89	0.28	43	-
$ E = 250$	34	9	24.28	18.34	-157320	-157764.33	0.28	43	2
$ V = 50$	3169	26	1225.35	69.58	-462948	-463579.29	0.13	115	-
$ E = 500$	3168	26	655.68	73.64	-462948	-463579.29	0.13	115	0
$ V = 100$	2148	36	1743.42	177.10	-619734	-620425.50	0.17	182	-
$ E = 750$	2149	36	1004.78	198.27	-616734	-620791.51	0.17	182	3
$ V = 250$	35644	54	25838.73	199.69	-350794	-352503.70	0.48	222	-
$ E = 750$	38203	55	16874.62	389.65	-350794	-353171.82	0.67	248	82

Tableau 5.3 :

G	NPL	PB	TT	TC	OPT	INIT	ER(%)	CFG	CC
Steinb1	1538	20	137.20	2.23	82	55.11	32.79	20	-
	5595	22	305.67	20.48	82	32.44	60.43	24	40
Steinb2	2272	22	243.30	3.08	83	57.46	30.76	44	-
	5252	24	350.55	18.39	83	25.16	69.69	64	42
Steinb4	6794	30	1627.38	3.64	59	45.02	23.69	66	-
	13110	28	1560.03	38.89	59	12.88	78.16	79	61

Tableau 5.4 :

G	NPL	PB	TT	TC	OPT	INIT	ER(%)	CFG	CC
$ V = 50$	4	0	1.80	0.00	-603	-603.00	0.00	0	-
$ E = 200$	4	1	3.53	0.75	-603	-853.34	41.51	22	19
$ V = 100$	26	4	93.38	60.09	-7120	-7134.56	0.20	12	-
$ E = 500$	40	6	154.57	123.52	-7120	-8943.77	25.61	37	104
$ V = 250$	11	2	458.40	277.02	-17475	-17475.69	0.05	8	-
$ E = 1500$	18	4	686.33	511.97	-17475	-21294.82	21.85	39	242
$ V = 400$	5	1	148.68	47.31	-4414	-4418.00	0.09	0	-
$ E = 1500$	62	4	602.55	357.40	-4414	-6976.42	58.12	55	323
$ V = 500$	41	7	1005.92	577.44	-12994	-12999.56	0.04	15	-
$ E = 2000$	30	7	1868.48	1499.20	-12994	-17833.16	37.24	60	345

Tableau 5.5 :

Conclusion

Dans cette deuxième partie de la thèse nous nous sommes intéressés à l'approche polyédrale pour le problème de flot où des coûts fixes et des coûts variables sont associés aux arcs du graphe.

Nous avons étudié une formulation relaxée de ce problème. Dans un premier temps nous avons considéré le polyèdre associé à notre problème et en avons caractérisé la dimension.

Nous avons introduit de nouvelles contraintes valides pour ce polytope, les contraintes de coupes, et décrit des conditions suffisantes pour que ces contraintes définissent des facettes.

Ces contraintes, qui peuvent être séparées en temps polynomial, sont utilisées par la suite dans un algorithme de coupes. Nous avons terminé l'étude pour cette partie par une phase expérimentale dont l'objectif est d'évaluer l'utilité des contraintes de coupes. Nous avons utilisé cet algorithme pour résoudre le problème de flot sur des instances générées aléatoirement. Etant donné la relation très étroite entre ce problème et le problème de l'arborescence Steiner minimum, nous avons utilisé également notre algorithme pour résoudre certaines instances de ce problème tirées de la librairie OR-Library.

Les résultats expérimentaux ont montré l'utilité de ces contraintes pour la résolution du problème surtout dans les graphes peu denses.

Pour ces problèmes, généralement la solution obtenue à la fin de la phase de coupes n'est pas entière, et l'erreur est importante. Alors il serait intéressant d'étudier une heuristique qui permet de construire une arborescence à partir de la solution fractionnaire dont l'erreur entraînée serait petite.

Aussi, il est utile d'identifier d'autres classes de contraintes valides pour le problème

qui peuvent être séparées en temps polynomial.

Références

- [1] R.B. Allan and R. Laskar, “On domination and independent domination numbers of a graph”, *Discrete Math.* 23 (1978) 73-76.
- [2] M. Balinski and G. Ratier, “On stable marriages and graphs, and strategy and polytopes”, Technical report N°. 427 (1995), Laboratoire d’Econométrie, Ecole Polytechnique, Paris.
- [3] F. Barahona, “The max cut problem in graphs no contractible to K_5 ”, *Oper. Res. Lett.* V2, N3 (1983) 107-111.
- [4] F. Barahona, “On cuts and matchings in planar graphs”, *Mathematical Programming A.* V60, N1 (1993) 53-68.
- [5] F. Barahona, “Network design using cut inequalities”, *SIAM Journal on Optimization*, 6 (1996) 823-837.
- [6] F. Barahona, J. Fonlupt and A.R. Mahjoub, “Composition of graphs and polyedra IV: Acyclic spanning subgraphs”, *SIAM J. on Discrete Math.*, V7, N3 (1994) 390-402.
- [7] F. Barahona, M. Grötschel, M. Jünger and Gerhard Reinelt, “An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design”, *Operations research* 36, N3 (1988) 493-513.
- [8] F. Barahona and A.R. Mahjoub, “On two-connected subgraph polytopes”, *Discrete Mathematics*.
- [9] F. Barahona and A.R. Mahjoub, “Composition of graphs and polyedra I: Balanced induced subgraphs and acyclic subgraphs”, *SIAM J. on Discrete Math.*, V7, N3 (1994) 344-358.

- [10] F. Barahona and A.R. Mahjoub, "Composition of graphs and polyedra II: Stable sets", *SIAM J. on Discrete Math*, V7, N3 (1994) 359-371.
- [11] F. Barahona and A.R. Mahjoub, "Composition of graphs and polyedra III: Graphs with no W_4 minor", *SIAM J. on Discrete Math*, V7, N3 (1994) 372-389.
- [12] J.E. Beasley, "OR-Library: distributing test problem by electronic mail", *Journal of the Operational Recherche Society*, V41, N11 (1990) 1069-1072.
- [13] C. Berge, "Theory of graphs and its applications", Methuen, London (1962).
- [14] C. Berge, "Graphs and hypergraphs", North-Holland, Amsterdam (1973).
- [15] C. Berge, "Balanced matrices", *Math. Programming*, 2 (1972) 19-31.
- [16] A. Bertossi, "Dominating sets for split and bipartite graphs", *Information Processing Letters*, 19 (1984) 37-40.
- [17] R.E. Bixby, "Implementing the simplex method: The initial basis", Technical report TR90-32, Departement of mathematical sciences, Rice university, Houston, Texas, 1991.
- [18] M.A. Bonuccelli, "Dominating sets and domatic number of circular arc graphs", *Res. Rept. S-80-18*, Università di Pisa, dipartimento di Informatica (1980).
- [19] M. Bouchakour and A.R. Mahjoub, "One-node cutsets and the dominating set polytope", à paraître dans *Discrete Mathematics*.
- [20] M. Bouchakour and A.R. Mahjoub, "Le problème de l'absorbant de poids minimum", In: *Troisièmes Journées du Groupe MODE*, éd. par J.P. Barthélemy et A.R. Mahjoub, Brest (1995).
- [21] M. Burlet and J. Fonlupt, "Polyhedral consequences of the amalgam operation", *Discrete Mathematics*, V130 (1994) 39-55.
- [22] S. Chopra and M.R. Rao, "The Steiner tree problem I: Formulation, composition and extension of facets", *Math. Programming*, 64 (1994) 231-246.
- [23] S. Chopra and M.R. Rao, "The Steiner tree problem II: Properties and classes of facets", *Math. Programming*, 64 (1994) 209-229.

- [24] V. Chvátal, "On certain polytopes associated with graphs", *J. of Comb. Theory B*, V18 (1975) 138-154.
- [25] E.J. Cockayne, "Domination in undirect graphs-A survey", in: Y.Alavi and D.R. Lick, eds., *Theory and Applications in graphs in America's Bicentennial year*, Springer, Berlin (1978).
- [26] E.J. Cockayne, S.T. Hedetniemi, "Towards a theory of domination in graphs", *Networks*, 7 (1977) 247-261.
- [27] S. Chopra, "The graph partitionning polytope on series-parallel and 4-wheel free graphs", *SIAM J. on Discrete Math*, V7, N1 (1994) 16-31.
- [28] D.G. Corneil and L.K. Stewart, "Dominating set in perfect graphs", *Discrete Mathematics*, 86 (1990) 145-164.
- [29] G. Cornuéjols, D. Naddef and W.R. Pulleyblank, "Halin graphs and the traveling salesman problem", *Mathematical Programming*, V26 (1983) 287-294.
- [30] G. Cornuéjols, D. Naddef and W.R. Pulleyblank, "The traveling salesman problem in graphs with 3-edge cutsets", *J. Assoc. Comp. Machinery*, V32, N2 (1985) 383-410.
- [31] W.H. Cunningham, "Polyhedra for composed independance system", *Bonn Workshop on Combinatorial Optimization, Ann. Discrete Math*, V16 (1982) 57-67.
- [32] G.B. Dantzig, "Linear programming and extensions", Princeton university press, (1963)
- [33] E.A. Dinits, "Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation", *soviet math. Dokl.* 11 (1970) 1277-1280.
- [34] J. Edmonds, "Maximum matching and a polyhedron with 0, 1 vertices", *J. Res. Nat. Bur. Stand.* 65 (1965) 125-130.
- [35] J. Edmonds and R.M. Karp, "Theorical improvement in algorithm efficiency for network flow problems", *J. Assoc. Compu, Mach.* 19 (1972) 248-264.
- [36] R. Euler and A.R. Mahjoub, "On a composition of independence systems by circuit identification", *J. of Combinatorial Theory, Serie B*, V53, N°.2 (1991) 235-259.

- [37] M. Farber, "Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs", *Discrete Applied Mathematics*, 7 (1984) 115-130.
- [38] M. Farber and J.M. Keil, "Domination in permutation graphs", *J.Algorithms*, 6 (1985) 309-321.
- [39] M. Farber, "Characterizations of strongly chordal graphs", *Discrete Mathematics*, 43 (1983) 173-189.
- [40] J. Fonlupt, A.R. Mahjoub and J.P. Uhry, "Composition of graphs and the bipartite subgraph polytope", Rapport technique N°. 459, IMA Grenoble - ARTEMIS, (1984)
- [41] J. Fonlupt, A.R. Mahjoub and J.P. Uhry, "Compositions in the bipartite subgraph polytope", *Discrete Mathematics*, V105 (1992) 73-91.
- [42] L.R. Ford and D.R. Fulkerson, "Maximal flow through a network", *Can. J. Math.*, 8 (1956) 399-404.
- [43] D.R. Fulkerson, A.J. Hoffman and R. Oppenheim, "On balanced matrices", *Math. Programming Study*, 1 (1974) 120-132.
- [44] D. Gale and L.S. Shapley, "College admissions and the stability of marriage", *American Mathematical Monthly*, 69 (1962) 9-15.
- [45] M.R. Garey and D.S. Johnson, "Computers and intractability, a guide to the theory of NP-Completeness", Freeman, New York, (1979).
- [46] A.V. Goldberg and R.E. Tarjan, "A new approach to the maximum-flow problem", *Journal of the association for computing machinery*, V35, N4 (october 1988) 921-940.
- [47] M. Grötschel, L. Lovász and Schrijver, "The ellipsoid method and its conséquences in combinatorial optimization", *Combinatorica* 1 (1981) 70-89.
- [48] D. Gusfield and R.W. Irving, "The stable marriage problem : Structure and algorithms", M. I. T. Press, Cambridge (1989).
- [49] A. Hadjar, "Composition de polyèdres associés aux problèmes d'optimisation combinatoire", Thèse de doctorat de l'INP Grenoble, (1996).

- [50] S.T. Hedetniemi, R. Laskar and J. Pfaff, "A linear algorithm for finding a minimum dominating set in a cactus", *Discrete Applied Mathematics*, 13 (1986) 287-292.
- [51] M. Jünger, G. Reinelt and G. Rinaldi, "The Traveling Salesman Problem", Networks, Handbooks in *Operations Research and Management Science*, ed. M.O. Ball, T.L. Magnanti, C.L. Monma and G.L. Nemhauser.
- [52] T. Kikuno, N. Yoshida and Y. Kakuda, "A linear algorithm for the domination number of a series-parallel graph", *Discrete Applied Mathematics*, V5, N3 (1983) 299-312.
- [53] D. Kratsch and L. Stewart, "Domination on comparability graphs", *SIAM. J. on Discrete Math*, V6, N3 (1993) 400-417.
- [54] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy-Kan, and D.B. Shmoys, "The Traveling Salesman Problem", Wiley, New York, (1985).
- [55] C.L. Liu, "Introduction to combinatorial mathematics", McGraw-Hill, New York (1968).
- [56] F. Maffray, "Kernels in perfect line-graphs", *Journal of Combinatorial Theory B*, 55 (1988) 353-356.
- [57] A.R. Mahjoub, "Le Polytope des absorbants dans une classe de graphe à seuil", *Annals of Discrete Mathematics*, 17 (1983) 443-452.
- [58] F. Margot, "Composition de polytopes combinatoires: Une approche par projection", Ph.D Dissertation, N°. 1029 (1994), Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse.
- [59] R.K. Martin and L. Schrage, "Subset coefficient reduction cuts for 0-1 Mixed integer Programming", *Operations Research* 33, (1985) 505-526.
- [60] A. Nachev, "Le problème du voyageur de commerce relaxé: étude algorithmiques et polyédrales", Thèse de PhD, Université de Grenoble (1988).
- [61] G.L. Nemhauser, M.W.P. Savelsbergh and G.C. Sigismondi, "MINTO, a Mixed INteger Optimizer", *Operation research letters*, 15 (1994) 47-58.
- [62] G.L. Nemhauser and L.A. Wolsey, "Integer and combinatorial Optimization", A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons. (1988)

- [63] P. Nobili and A. Sassano, "Polyhedral properties of clutter amalgam", *SIAM J. Discrete mathematics*, V6, N1 (1993) 139-151
- [64] O. Ore, "Theory of graphs", *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.*, 38, providence (1962).
- [65] M.W. Padberg and M.R. Rao, "The russian method for linear inequalities IV: bounded integer programs", GBA Working paper 81-39, New York University, New York (1981).
- [66] M.W. Padberg, T.J. Van Roy and L.A. Wolsey, "Valid linear inequalities for Fixed Charge Problems", *Operations Research* 33, (1985) 842-861.
- [67] A. Rais, "A polytope and its dominant", *Research Memorandum* N°. 91-24, décembre 1991.
- [68] G. Ratier, "Les mariages stables : graphes et programmation linéaire", thèse de doctorat, Université Paris 1, janvier 1995.
- [69] A.E. Roth and M.A.O. Sotomayer, "Two-sided matching : A study in game-theoretic modeling and analysis", Cambridge University Press, Cambridge & New York (1990).
- [70] U. Rothblum, "Characterization of stable matching as extreme points of a polytope", *Mathematical Programming*, 54 (1992) 57-67.
- [71] N. Sbihi and J.P. Uhry, "A class of h-perfect graphs", *Discrete Mathematics*, V51 (1984) 191-205.
- [72] A. Schrijver, "Theory of linear and integer programming", Wiley Interscience, Chichester (1986).
- [73] M. Stoer, "Design of Survivable Networks", Lecture Notes in Mathematics, 1531, Springer-Verlag (1992).
- [74] É. Tardos, "A strongly polynomial minimum cost circulation algorithm", *Combinatorica*, 5 (1985) 247-256.
- [75] T.J. Van Roy and L.A. Wolsey, "Valid inequalities for Mixed 0-1 programs", *Discrete Applied Mathematics* 14, (1986) 199-213.

- [76] J.H. Vande Vate, “Linear programing brings marital bliss”, *Operations Research Letters*, 8 (1989) 147-153.
- [77] L.A. Wolsey, “Strong formulations for Mixed integer programming: A survey”, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (1987).
- [78] A. Zemirline, “Conséquences polyédrales d’une opération préservant la perfection”, *In: Troisièmes Journées du Groupe MODE*, éd. par J.P. Barthélemy et A.R. Mahjoub, Brest (1995).

RÉSUMÉ

Cette thèse est composée de deux parties :

La première partie porte sur le problème des absorbants de poids minimum. Nous nous intéressons au polytope associé à ce problème. Dans un premier temps, nous décrivons certaines facettes de base de ce polytope et nous discutons de certaines propriétés structurales.

Par la suite, nous considérons ce polytope dans les graphes décomposables par des sommets d'articulation. Si G est un graphe qui se décompose en deux graphes G_1 et G_2 , alors on montre que le polytope des absorbants dans G peut être décrit à partir de deux systèmes linéaires liés à G_1 et G_2 . Ceci donne lieu à une technique permettant de caractériser le polytope des absorbants dans les classes de graphes qui sont récursivement décomposables. nous obtenons également une procédure de composition de facettes dans ce type de graphes. Nous montrons que le problème de l'absorbant peut être aussi décomposé. Des applications de cette technique sont discutées pour la classe des cactus. Nous étudions aussi des procédures générales de construction de facettes.

Dans la deuxième partie, nous étudions le problème du flot quand des coûts fixes et des coûts variables sont associés aux arcs du graphe. Nous développons une approche polyédrale pour ce problème. Nous introduisons des nouvelles contraintes valides pour le polyèdre associé, appelées contraintes de coupes. Ces contraintes sont utilisées par la suite dans une méthode de coupes pour résoudre des instances du problème. Les résultats expérimentaux montrent que ces contraintes peuvent être utiles pour la résolution du problème dans les graphes peu denses.

ABSTRACT

This thesis is divided into two parts :

In the first part, we consider the dominating set polytope. We describe basic facets of this polytope and we study some structural properties. These properties are used to discuss this polytope in graphs which are decomposable by one node cutsets. If G decomposes into G_1 and G_2 , we show that the dominating set polytope of G can be described from two linear systems related to G_1 and G_2 . This gives a way to characterize this polytope for classes of graphs that can be recursively decomposed. This also gives a procedure to describe facets for this polytope. We also show that the dominating set problem can be decomposed. Applications of this composition (decomposition) technique are discussed for the class of the cactus. Some procedures of construction of facets from facets are also discussed.

In the second part of the thesis, we study a polyedral approach for the fixed charge network flow problem. We introduce new valid inequalities for the associated polyhedron, called cut inequalities. These inequalities are used in the framework of a cutting plane algorithm for solving instances of that problem. Experiment results show that the cut inequalities can be efficient for sparse graphs.