N° d'Ordre : D.U. 1236
EDSPIC : 221

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL - CLERMONT-FERRAND II

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE CLERMONT-FERRAND

THÈSE

présentée par

Hervé KERIVIN

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité : INFORMATIQUE

RÉSEAUX FIABLES ET POLYÈDRES

Soutenue publiquement le 16 novembre 2000 devant le jury

MM.	Alain QUILLIOT	Président
	Martine LABBÉ	Rapporteur
	Thomas M. LIEBLING	Rapporteur
	Jean-François MAURRAS	Rapporteur
	Philippe MAHEY	Éxaminateur
	Ali Ridha MAHJOUB	Directeur de Thèse

À la mémoire de mes grands-parents maternels,
de Tante Lise et de Tante Nanne.

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Ali Ridha Mahjoub, Professeur à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant d'effectuer une thèse sous sa direction. Ce travail n'aurait pu aboutir sans sa constante disponibilité, son soutien et ses précieux conseils. Je lui témoigne ma plus profonde gratitude pour avoir su me transmettre sa passion pour la recherche.

Mes remerciements vont ensuite à Madame Martine Labbé, Professeur à l'Université Libre de Bruxelles (Belgique), pour l'intérêt qu'elle a bien voulu porté à ce travail, et pour m'avoir fait l'honneur d'accepter la charge de rapporteur.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur Thomas M. Liebling, Professeur à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (Suisse), pour s'être intéressé à mon travail. Ce fut pour moi un grand honneur de le compter parmi mes rapporteurs.

J'ai été très honoré que Monsieur Jean-François Maurras, Professeur à l'Université de la Méditerrannée de Marseille, ait accepté de rapporter ma thèse. Je tiens à lui exprimer ma plus profonde reconnaissance ainsi que mes plus vifs remerciements.

Je voudrais également remercier Monsieur Alain Quilliot, Professeur à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse. Aussi, je remercie Monsieur Philippe Mahey, Professeur à l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, qui a accepté d'éxaminer ce travail et de participer au jury.

Un immense merci au Conseil Régional de Bretagne pour la confiance qu'il m'a témoignée en m'attribuant une bourse de thèse. Sans la Bretagne, région qui m'est si chère, ce travail n'aurait jamais pu voir le jour. Merci également à l'Université de Bretagne Occidentale de Brest pour m'avoir accueilli durant mes trois premières années de thèse.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Mourad Baïou et Farouk Toumani ainsi qu'à leur compagne Nora et Niñes pour leur gentillesse et les innombrables nuits passées chez eux. Ce sont dans les moments difficiles que l'on reconnait ses véritables amis. Un autre merci à Mourad Baïou pour ses nombreux conseils et l'aide précieuse apportée au moment du travail expérimental.

Merci également à Lotfi Lakhal et Jean-Marc Petit pour leur gaîté et leur sympathie. Ils ont contribué à dissiper le cafard d'un exil solitaire en Auvergne. Je remercie aussi Fatiha et Jean Mailfert ainsi que Pierre Pesneau pour le temps accordé à l'élaboration de ma soutenance. J'aurai voulu avoir le temps de mieux connaître Pierre Fouilhoux. En tous cas, je le remercie pour sa bonne humeur, ses discussions passionnantes et pour sa disponibilité au moment de la soutenance.

Un immense merci à mon veil ami Didi Biha avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer. Je le remercie pour les merveilleux souvenirs partagés ensemble dont l'entraide, les pauses-café et les conversations interminables faisaient partie. Merci à l'adorable Sophie pour sa présence lors de mon séjour brestois, ses encouragements, et surtout pour sa gaîté et son amitié.

Je tiens également à remercier Nelly, Stéphane, Laetitia et Jean-Christophe pour leurs blagues, les bons souvenirs "d'avant-guerre" et pour leur éternelle amitié. Aussi, je voudrais grandement remercier Michael pour les multiples soirées qui me faisaient oublier mes démonstrations. Son amitié et son soutien ont été d'un grand recours.

Un grand merci à toute ma petite famille : mes parents Marie-Françoise et Bernard, Dany, Babeth, Cathy, Catherine, Olivier et tous les neveux et nièces (présents et futurs!), pour leur soutien, leurs encouragements et surtout pour l'essentiel : leur amour.

C'est avec une affection toute particulière que je dédie ma thèse à Tante Nanne qui nous a malheureusement quitté trois jours avant la soutenance. Elle s'est toujours intéressée à mon travail et n'était jamais avare d'encouragements. J'espère qu'elle aurait été aussi fière de moi que je l'étais d'elle.

Tout ceci serait bien incomplet si je ne remerciais pas mes grands-parents paternels, mes oncles et tantes ainsi que tout le reste de ma famille pour leurs encouragements et leur intérêt.

"Aujourd'hui, l'oiseau quitte son nid
pour voler de ses propres ailes....."

Résumé

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $r \in \mathbb{Z}_+^V$ un vecteur types de connexité associés aux sommets. Un sous-graphe est dit arête-fiable si entre chaque paire de sommets u, v de V, il existe au moins $\min\{r(u), r(v)\}$ chaînes arête-disjointes. Si les arêtes sont munies de poids, le problème de conception de réseaux fiables consiste à déterminer un sous-graphe arête-fiable de G de poids minimum. Ce problème a des applications dans les domaines des télécommunications et des transports. Dans cette thèse, nous étudions une approche polyédrale pour ce problème.

Tout d'abord, nous montrons que le polytope associé aux solutions de ce problème, $\mathrm{ESNDP}(G, r)$, est complètement caractérisé par les contraintes triviales et les contraintes de coupe quand le graphe G est série-parallèle et les types de sommets tous pairs. Comme conséquence, nous obtenons un algorithme polynomial pour résoudre le problème dans ce cas.

Dans une deuxième partie, nous considérons le problème quand $r \in \{1, 2\}^V$. Nous montrons que le problème de séparation des inégalités dites de partition est polynomial. Nous ramenons ce problème à la minimisation d'une fonction sous-modulaire. Il est également montré que ces contraintes avec les contraintes triviales et les contraintes de coupe suffisent pour décrire le polytope $\mathrm{ESNDP}(G, r)$ dans les graphes série-parallèles. Ce résultat est ensuite étendu au cas où $r \in \{k, k+1\}^V$, avec k impair. Des contraintes généralisant les contraintes dites de SP-partition sont alors utilisées dans cette caractérisation.

Par la suite, nous examinons le polytope $\mathrm{ESNDP}(G, r)$ lorsque $r \in \{0, 1\}^V$ ainsi que le polytope des arbres Steiner qui lui est étroitement lié. Nous introduisons une nouvelle classe d'inégalités valides pour ces polytopes. Cette classe généralise la plupart des classes de contraintes valides, connues dans la littérature, pour ces polytopes. Nous introduisons également des opérations de construction de facettes. Ces dernières sont utilisées pour infirmer une conjecture de Chopra et Rao, et caractériser le polytope $\mathrm{ESNDP}(G, r)$ et le dominant du polytope des arbres Steiner dans les graphes série-

parallèles où les sommets tels que $r(v) = 1$ ont une disposition particulière.

Finalement, nous développons un algorithme de coupes et branchements pour le problème de conception de réseaux fiables quand les types de sommets sont tous égaux à 2 et quand $r \in \{1, 2\}^V$. Cet algorithme est basé sur les résultats polyédraux présentés. L'étude expérimentale montre l'importance de certaines opérations de réduction de graphes, ainsi que l'efficacité des inégalités de partition et de F-partition pour résoudre ces problèmes.

Mots clés : sous-graphe arête-fiable, polytope, facette, graphe série-parallèle, arbre Steiner, problème de séparation, algorithme de coupes et branchements.

Abstract

Given a graph $G = (V, E)$ and a vector of node types $r \in \mathbb{Z}_+^V$, a subgraph is said to be edge-survivable if between every pair of nodes u, v of V, there are at least $\min\{r(u), r(v)\}$ edge-disjoint paths. If each edge has a weight, the survivable network design problem is to determine a minimum-weight edge-survivable subgraph of G. This problem has applications to the design of reliable communication and transportation networks.

First, we show that, when the underlying graph is series-parallel and the node types are all even, the polytope associated with the solutions of this problem, ESNDP (G, r), is completely described by the trivial and the cut constraints. As a consequence, we obtain a polynomial-time algorithm for solving the problem in this case.

In a second part, we study the problem when $r \in \{1, 2\}^V$. We show that the separation problem for the so-called partition inequalities can be reduced to the minimization of a submodular function and thus can be solved in polynomial time. It is also shown that, on series-parallel graphs, the polytope ESNDP(G, r) is given by the trivial, cut and partition constraints. By generalizing the so-called SP-partition inequalities, we extend this description to the case when $r \in \{k, k+1\}^V$ with k odd.

We also consider the polytope ESNDP(G, r) when $r \in \{0, 1\}^V$ and the closely related Steiner tree polytope. We introduce a new class of valid inequalities for this polytope, and show that these inequalities may define facets. These inequalities generalize most classes of valid inequalities known for these polytopes. Using procedures of construction of facets, we give a counterexample to a conjecture of Chopra and Rao, and characterize this polytope, as well as the dominant of the Steiner tree polytope, on series-parallel graphs where the nodes with $r(v) = 1$ have a special disposition. These results are also valid for the dominant of the Steiner tree polytope.

Finally, we develop a branch and cut algorithm for solving the survivable network design problem when the node types are all equal to 2 and when $r \in \{1, 2\}^V$. This al-

gorithm is based on the discussed polyhedral results. The computational study shows the importance of certain graph reduction operations, and the efficiency of the partition and F-partition inequalities for solving these problems.

Key words: edge-survivable subgraph, polytope, facet, series-parallel graph, Steiner tree, separation problem, branch and cut algorithm.

Table des matières

Préface **1**

1 Notions préliminaires **3**
1.1 Éléments de la théorie des polyèdres 3
1.2 Rappels sur la théorie de la complexité 5
1.3 Approche polyédrale, méthode de coupes et branchements 7
1.4 Fonctions sous-modulaires 8
1.5 Notations et définitions 10

2 Le problème de conception de réseaux fiables **13**
2.1 Présentation générale 13
2.2 Formulation en terme de graphes 14
2.3 Programme linéaire en nombres entiers et polyèdre associé 17
2.4 État de l'art 19
2.4.1 Complexité et cas polynomiaux 19
2.4.2 Propriétés structurales, heuristiques et algorithmes d'approximation 23
2.4.3 Approche polyédrale 26
2.4.4 Cas orienté 28
2.5 Dimension et contraintes générales 29
2.5.1 Dimension du polytope ESNDP(G,r) 29
2.5.2 Contraintes valides 30
2.5.3 Les contraintes de partition 31
2.5.4 Les contraintes de r-recouvrement 33

3 Types de sommets pairs et graphes série-parallèles : caractérisations polyédrales **35**
3.1 Introduction 35
3.2 Propriétés structurales de $Q(G, r)$ 37
3.3 ESNDP(G, r) dans les graphes série-parallèles 41

3.4 Polytopes liés au ESNDP(G,r) 54
3.5 Conclusion 56

4 Le problème ESNDP avec des types de sommets en k et $k+1$, $k \geq 1$ 57
4.1 Motivation et introduction 57
4.2 Séparation des contraintes de partition 59
4.2.1 Types de sommets uniformes 60
4.2.2 Types de sommets en 1 et 2 61
4.3 Le polytope ESNDP(G,r) dans les graphes série-parallèles 65
4.3.1 Propriétés structurales de $R(G,r)$ 66
4.3.2 Caractérisation de ESNDP(G,r) 71
4.4 Les contraintes de SP-partition 104
4.4.1 Introduction 104
4.4.2 Les inégalités de SP-partition 105
4.5 Extension au cas $k \geq 2$ 115
4.6 Conclusion 119

5 Le problème de l'arbre Steiner 121
5.1 Introduction 121
5.2 Contraintes valides 124
5.2.1 Inégalités de partition Steiner 124
5.2.2 Inégalités de trou-impair 125
5.2.3 Inégalités de roue-impaire 126
5.2.4 Inégalités biparties 127
5.2.5 Inégalités d'anti-trou 129
5.3 Contraintes de partition Steiner généralisée 130
5.3.1 Motivation 130
5.3.2 Inégalités de partition Steiner généralisée 132
5.3.3 Étude faciale 136
5.4 Construction de facettes pour DSTP(G,S) 142
5.4.1 Construction par ajout d'un sommet 143
5.4.2 Infirmation d'une conjecture de Chopra et Rao 146
5.5 Construction de facettes pour ESNDP(G,r) 149
5.5.1 Construction par ajout d'un sommet 149
5.5.2 Construction par contraction d'une chaîne 150
5.5.3 Explosion d'un sommet 155
5.5.4 Suppression d'une arête parallèle 158
5.6 Le polytope ESNDP(G,r) dans les graphes série-parallèles 162
5.6.1 Introduction 162
5.6.2 Graphes série-parallèles vérifiant la propriété P 165

5.6.3 Graphes de la classe Ψ 172
5.7 Conclusion 186

6 Un algorithme de coupes et branchements 191
6.1 Les contraintes de F-partition 192
6.1.1 Types de sommets uniformes 192
6.1.2 Types de sommets généraux 193
6.1.3 Complexité du problème de séparation 195
6.2 Implémentation de l'algorithme 196
6.2.1 Aperçu général 196
6.2.2 Réduction de graphes 198
6.2.3 Séparation des contraintes de coupe 203
6.2.4 Séparation des contraintes de partition 205
6.2.5 Séparation des contraintes de F-partition 213
6.3 Résultats expérimentaux 217
6.3.1 Contexte informatique 217
6.3.2 Description des instances traitées 217
6.3.3 Le problème du sous-graphe 2-arête connexe 219
6.3.4 Types de sommets en 1 et 2 224
6.4 Conclusion 230

Conclusion 231

Bibliographie 237

Préface

L'optimisation combinatoire est une des branches de l'informatique et des mathématiques appliquées. Elle combine des techniques de la combinatoire, de la programmation linéaire et de la théorie des algorithmes afin de résoudre des problèmes d'optimisation ayant des structures discrètes (généralement un graphe). Elle a connu durant les trois dernières décennies un développement considérable, tant sur le plan théorique que pratique.
Un problème d'optimisation combinatoire consiste généralement à déterminer un élément (le meilleur) dans un ensemble fini. Dans la pratique, de nombreux problèmes peuvent se formuler comme des problèmes d'optimisation combinatoire, comme par exemple les problèmes de localisation, d'affectation, de production,.... Théoriquement, ces problèmes paraissent faciles à résoudre. Nous pourrions envisager une approche énumérative de résolution. Cependant, vu le nombre éventuellement exponentiel de ses solutions, cette méthode ne peut être appliquée. D'où la nécessité de mettre en place des techniques plus efficaces pour résoudre ce type de problèmes. Plusieurs techniques ont ainsi été développées durant ces dernières années et se sont avérées performantes comme la programmation linéaire, la programmation en nombres entiers, les méthodes d'optimisation dans les réseaux et l'approche polyédrale.

Une des méthodes puissante pour résoudre les problèmes d'optimisation combinatoire est la méthode dite *polyédrale*. Initiée par Edmonds [66] dans le cadre du problème du couplage, elle consiste à décrire l'enveloppe convexe des solutions du problème par un système d'inégalités linéaires. Le problème se ramène, en conséquence, à la résolution d'un programme linéaire. Dantzig [56] est le premier à avoir proposé un algorithme (la méthode du simplexe) pour résoudre de tels programmes.
Généralement, il est difficile d'obtenir une caractérisation complète de l'enveloppe convexe des solutions d'un problème d'optimisation combinatoire. De plus, lorsque le problème est NP-difficile [84], il s'avère impossible d'obtenir une telle caractérisation. Néanmoins une description partielle du polyèdre des solutions par un système d'inégalités linéaires peut être suffisante pour résoudre le problème en temps polyno-

mial. En effet, comme il a été montré par Grötschel, Lovász et Schrijver [95] (voir aussi [111, 143]), si le problème de séparation associé à ce système est polynomial, alors le problème d'optimisation sur ce système peut être résolu en temps polynomial. Cette équivalence entre optimisation et séparation a été à l'origine d'un nouvel essor de l'optimisation combinatoire ces dernières années. L'approche polyédrale a été appliquée avec succès à plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire comme le problème du voyageur de commerce et celui de la coupe maximale.

Dans cette thèse, nous considérons cette approche pour le problème de conception de réseaux fiables.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Éléments de la théorie des polyèdres

Dans cette section, nous allons introduire quelques définitions et propriétés de la théorie polyédrale, qui nous seront utiles tout au long de ce mémoire. Pour plus de détails, se référer à Pulleyblank [152] et Schrijver [158].

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le symbole $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{Z}^n_+$) représente l'ensemble des vecteurs (ou points) ayant n composantes réelles (resp. entières). Par soucis de clarté, nous noterons par 0_n le vecteur ayant toutes ses composantes nulles. L'ensemble des nombres réels non négatifs sera noté $\mathbb{R}_+$. Soit λ un scalaire. Alors $\lfloor \lambda \rfloor$ (resp. $\lceil \lambda \rceil$) représente le plus grand entier inférieur ou égal (resp. le plus petit entier supérieur ou égal) à λ.

Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est une *combinaison linéaire* des points $x^1, x^2, \ldots, x^k \in \mathbb{R}^n$ s'il existe k scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i.$$

De plus, si

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

$$\text{(resp. } \lambda_i \in \mathbb{R}_+ \text{ pour } i = 1, \ldots, k \text{ et } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1),$$

on dit que x est une *combinaison affine* (resp. *combinaison convexe*) de ces points.

Des points $x^1, \ldots, x^k \in \mathbb{R}^n$ sont dits *linéairement indépendants* (resp. *affinement indépendants*) si le système

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = 0$$
$$(\text{resp. } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0)$$

admet une solution unique, $\lambda_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.

Remarque 1.1 *Si $x^i \neq 0_n$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, alors $x^1, \ldots, x^k$ sont linéairement indépendants si et seulement s'ils sont affinement indépendants.* □

Soit S un ensemble non vide de points de $\mathbb{R}^n$. L'*enveloppe convexe* des points de S, notée *conv(S)*, est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^n$ qui peuvent s'écrire comme combinaison convexe de points de S.

Si A est une matrice réelle ayant m lignes et n colonnes et $b \in \mathbb{R}^m$, alors le système $Ax \leq b$ est appelé *système d'inégalités linéaires* et le système $Ax = b$, *système d'équations linéaires*. Soient $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ et $a_0 \in \mathbb{R}$. On appelle *demi-espace* de $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de points $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq a_0\}$.

Un *polyèdre* P est un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$ engendré par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$. D'une manière équivalente, P est l'ensemble des solutions d'un système d'inégalités linéaires, c'est-à-dire

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\},$$

où A est une matrice à m lignes et n colonnes, et b un vecteur à m composantes. Nous dirons alors que le système $Ax \leq b$ définit (ou détermine ou caractérise) le polyèdre P.

Un *polytope* est un polyèdre borné. Ainsi, un polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ est un polytope si et seulement s'il existe $l, u \in \mathbb{R}^n$ tels que $l \leq x \leq u$ pour tout point x de P. Par exemple, l'enveloppe convexe d'un ensemble de points est un polytope.

Le *dominant* d'un polyèdre P est le polyèdre

$$\text{Dom}(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, x \in P \text{ tel que } x \leq y\}.$$

Un polyèdre P de $\mathbb{R}^n$ est de *dimension* d si le nombre maximum de points de P affinement indépendants est égal à $d + 1$. Nous écrirons alors $dim(P) = d$. De plus, si $0_n \notin P$, d'après la remarque 1.1, la dimension d'un polyèdre P est donnée par le

nombre maximum de points linéairement indépendants. Un polyèdre P est de *pleine dimension* si $dim(P) = n$.

Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est un *point extrême* (ou *sommet*) d'un polyèdre P s'il ne peut pas être écrit comme combinaison convexe d'autres points de P. Un polyèdre dont tous les points extrêmes sont entiers est dit *entier*.

Une inégalité (ou *contrainte*) $a^T x \leq a_0$ est dite *valide* pour un polyèdre P si elle est vérifiée par tous les points de P, c'est-à-dire si $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq a_0\}$.

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. Un sous-ensemble F de P est une *face* de P si $F = \{x \in P \mid A'x = b'\}$, où $A'x \leq b'$ est un sous-système de $Ax \leq b$. La face F est *propre* si $F \neq \emptyset$ et $F \neq P$. Si $a^T x \leq a_0$ est valide pour P, alors la face $F = \{x \in P \mid a^T x = a_0\}$ est dite définie par $a^T x \leq a_0$. Si F est une face de P, alors on a $dim(F) \leq dim(P)$. Une face propre non vide maximale (au sens de l'inclusion) est appelée *facette*. En d'autres termes, une face F est une facette si $dim(F) = dim(P) - 1$. Les faces de dimension nulle sont les points extrêmes de P. Ainsi, un point $x \in \mathbb{R}^n$ est un point extrême de P si et seulement si x est l'unique solution d'un système $A'x \leq b'$ où $A'x \leq b'$ est un sous-système de $Ax \leq b$.

Une inégalité est dite *essentielle* pour P si elle induit une facette de ce polyèdre. Une inégalité est dite *redondante* dans un système $Ax \leq b$ définissant un polyèdre P, si le sous-système, obtenu à partir de $Ax \leq b$ en supprimant cette inégalité, définit le même polyèdre P.
Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$. Nous dirons que l'inégalité $a^T x \leq a_0$ est *serrée* pour x^* si $a^T x^* = a_0$.

1.2 Rappels sur la théorie de la complexité

La théorie de la complexité est née à la suite des travaux d'Edmonds [65] et de Cook [49]. Elle offre un cadre d'étude mathématique dans lequel les problèmes peuvent être classés en problèmes faciles ou difficiles. Dans cette partie, nous allons en rappeler brièvement quelques définitions de base. De plus amples informations sur la théorie de la complexité peuvent être trouvées dans de nombreux ouvrages et notamment dans Garey et Jonhson [84] et Maurras [135].

Un algorithme est dit en *O(f(n))* s'il existe un scalaire c et un entier n_0 tels que son temps d'exécution est au plus $c.f(n)$ pour tout $n \geq n_0$. Si le temps d'exécution

d'un algorithme est borné par une fonction polynomiale en la taille du problème et des données du problème (resp. en la taille du problème), nous parlerons alors d'*algorithme polynomial* (resp. d'*algorithme fortement polynomial*).

Un *problème de décision* est un énoncé auquel la réponse peut être uniquement "oui" ou "non", par exemple : "Soit G un graphe non orienté, existe-t-il un cycle Hamiltonien dans G?".

Les problèmes de décision sont divisés en deux classes : les problèmes *décidables* et les problèmes *indécidables*. Un problème est dit *indécidable* s'il est impossible d'écrire un algorithme pour le résoudre.

Soient P un problème de décision et I les instances de ce problème pour lesquelles la réponse est "oui". P est dit *NP* ("Nondeterministic Polynomial") s'il existe un algorithme polynomial qui permet de vérifier que la réponse est "oui" pour toute instance de I. Parmi les problèmes NP, nous distinguons d'une part les problèmes dits *polynomiaux*, c'est-à-dire ceux pour lesquels il existe un algorithme polynomial permettant de les résoudre, et d'autre part, les problèmes *NP-complets*.

La notion principale pour définir la NP-complétude est celle de la réduction polynomiale. Un problème de décision P_1 *se réduit polynomialement* au problème de décision P_2 s'il existe une fonction polynomiale qui transforme chaque instance de P_1 en une instance de P_2 de telle manière que la réponse pour P_1 est "oui" si et seulement si la réponse pour P_2 est "oui". Nous noterons alors $P_1 \alpha P_2$. Pour démontrer qu'un problème P est NP-complet, il faudra montrer que P est dans la classe NP et qu'il existe un problème Q connu pour être NP-complet tel que $Q \alpha P$. Cook [49] a été le premier à montrer la NP-complétude d'un problème, celui de la satisfiabilité. Depuis, des centaines de problèmes ont été montrées NP-complets. Une première liste de problèmes NP-complets est donnée dans Garey et Jonhson [84].

Un problème d'optimisation est dit *NP-difficile* si le problème de décision qui lui est associé est NP-complet.

1.3 Approche polyédrale, méthode de coupes et branchements

Soient $\mathcal{P}$ un problème d'optimisation combinatoire et $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions. Le problème $\mathcal{P}$ s'écrit alors

$$\max \{cx \mid x \in \mathcal{S}\},$$

où c est une fonction poids associée aux variables du problème. Considérons l'enveloppe convexe $conv(\mathcal{S})$ des solutions de $\mathcal{P}$. Le problème $\mathcal{P}$ est équivalent au programme linéaire

$$\max \{cx \mid x \in conv(\mathcal{S})\}.$$

Ainsi, si nous réussissons à décrire le polyèdre $conv(\mathcal{S})$ par un système d'inégalités linéaires, alors nous ramenons le problème $\mathcal{P}$ à la résolution d'un programme linéaire. Ceci permet donc de résoudre le problème $\mathcal{P}$ en utilisant les algorithmes de la programmation linéaire [56, 110, 115]. Rappelons que la résolution d'un programme linéaire est un problème polynomial [110, 115].

L'*approche polyédrale*, introduite par Edmonds [66] dans le cadre du problème du couplage, consiste à étudier le polytope $conv(\mathcal{S})$ afin de pouvoir résoudre $\mathcal{P}$ comme un programme linéaire. Une caractérisation complète du polytope $conv(\mathcal{S})$ est généralement difficile à obtenir. Et si le problème est NP-difficile, il y a peu d'espoir de trouver une telle description (sauf si P = NP!!!). Remarquons par ailleurs que la plupart des polyèdres connus (associés à des problèmes faciles) sont très souvent définis par des systèmes ayant un nombre exponentiel d'inégalités. Le problème d'optimisation sur le polytope $conv(\mathcal{S})$ ne peut donc être résolu comme un programme linéaire ayant explicitement toutes ses contraintes. La *méthode de coupes* permet de résoudre un problème $\mathcal{P}$ comme une séquence de programmes linéaires, chacun contenant un nombre raisonnable de contraintes.

Pour pouvoir utiliser une telle approche, nous devons trouver des classes d'inégalités valides (et non redondantes) pour $conv(\mathcal{S})$, pour lesquelles le problème suivant, appelé *problème de séparation*, peut être résolu efficacement.

Problème 1.1 *Soit $\mathcal{C}$ une classe d'inégalités valides pour $conv(\mathcal{S})$. Étant donné un point $x \in \mathbb{R}^n$, le problème de séparation associé à $\mathcal{C}$ et x consiste à décider si x satisfait toutes les inégalités de $\mathcal{C}$ et sinon de trouver une inégalité de $\mathcal{C}$ violée par x.*

Comme il a été mentionné, le problème de séparation est un des points essentiels dans l'approche polyédrale. En effet, Grötschel, Lovász et Schrijver [95] (voir aussi [111, 143])

ont montré que le problème d'optimisation combinatoire sur un ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ peut être résolu en temps polynomial si et seulement si le problème de séparation associé à $\mathcal{C}$ peut être résolu en temps polynomial. Ainsi, la méthode de coupes permet de résoudre un problème d'optimisation combinatoire en temps polynomial, si le problème de séparation associé aux contraintes du polyèdre de ses solutions est polynomial.

Cependant, pour les problèmes NP-difficiles, il y a peu d'espoir d'obtenir une description complète des polyèdres associés par un système d'inégalités linéaires. Mais, dans ce cas, une description partielle peut être suffisante pour résoudre le problème. Si le système obtenu n'est pas complet, la solution donnée par la méthode de coupes peut être fractionnaire (non optimale). Ici, nous devons faire appel à la *méthode de séparations et évaluations* (en anglais *Branch and Bound*) pour terminer la résolution du problème. Elle consiste à choisir une variable fractionnaire, et la fixer soit à 0, soit à 1. Et nous considérons ainsi deux programmes linéaires obtenus à partir du programme linéaire courant en ajoutant respectivement les équations (non valides) $x(e) = 0$ et $x(e) = 1$. Une nouvelle solution optimale est calculée pour chacun de ces programmes linéaires. Ces deux programmes donnent lieu à deux nouveaux noeuds dans l'arbre de résolution. Nous sélectionnons un noeud de cet arbre auquel est associée une solution fractionnaire. Nous générons de nouvelles contraintes valides, violées par cette solution, qui seront incorporées dans le programme linéaire correspondant. Nous choisissons une variable fractionnaire de cette solution, et nous considérons deux nouveaux programmes linéaires. Ce processus continue jusqu'à qu'une solution optimale soit trouvée. Cette combinaison de la méthode de séparations et évaluations et celle de la génération de nouvelles contraintes (coupes) au niveau de chaque noeud de l'arbre est appelée *méthode de coupes et branchements* (en anglais *Branch and Cut*). Cette approche est maintenant largement utilisée pour les problèmes d'optimisation combinatoire.

1.4 Fonctions sous-modulaires

Soient S un ensemble fini et $\mathcal{I}$ une famille de sous-ensembles de S. On dit que $M = (S, \mathcal{I})$ est un *matroïde* si les axiomes suivants sont vérifiés

(M0) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

(M1) Si $J' \subseteq J \in \mathcal{I}$ alors $J' \in \mathcal{I}$,

(M2) Pour tout sous-ensemble $X \subseteq S$, chaque sous-ensemble maximal (au sens de l'inclusion) de X appartenant à $\mathcal{I}$ a la même cardinalité.

Cette cardinalité commune est appelée *rang* de X. Le rang de l'ensemble S est appelé le *rang du matroïde*. Les membres de $\mathcal{I}$ sont appelés les *ensembles indépendants* de M. Un ensemble indépendant maximal de M est appelé *base*.

Une fonction $f : 2^S \longrightarrow \mathbb{Z}_+$ est la fonction rang d'un matroïde si et seulement si

(R0) $f(\emptyset) = 0$ (nulle sur l'ensemble vide),
(R1) $f(X) \leq f(Y)$ si $X \subseteq Y \subseteq S$ (monotonie),
(R2) $f(X) \leq |X|$ si $X \subseteq S$ (sous-cardinalité),
(R3) $f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y)$ pour tout X, $Y \subseteq S$ (sous-modularité).

Les fonctions qui possèdent la propriété (R3) sont appelées *fonctions sous-modulaires*. Elles ont fait l'objet d'une attention particulière durant ces dernières années. En effet, le concept de fonctions sous-modulaires en optimisation discrète semble être, sous plusieurs aspects, analogue à celui des fonctions convexes en optimisation continue. Dans de nombreux problèmes et théorèmes d'optimisation combinatoire, la sous-modularité est impliquée et joue un rôle essentiel. Dans cette section, nous présentons les résultats principaux relatifs à la minimisation d'une fonction sous-modulaire. Pour des tours d'horizon complets sur la notion de sous-modularité, voire Fujishige [82] et Lovász [127].

Si E est un ensemble et $x \in \mathbb{R}^E$ un vecteur associé aux éléments de E, alors, pour tout $F \subseteq E$, $x(F)$ représente $\sum_{e \in F} x(e)$. Si f et g sont deux fonctions sous-modulaires sur un ensemble S, alors $f + g$ est également une fonction sous-modulaire sur S. Les fonctions sous-modulaires ont en outre la propriété suivante.

Lemme 1.2 *Soit $f : 2^S \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction sous-modulaire. Soit $y \in \mathbb{R}^S$ un vecteur associé à S tel que*

$$y(X) \leq f(X) \qquad \textit{pour tout } X \subseteq S. \tag{1.1}$$

Considérons deux sous-ensembles A et B de S. Si A et B sont tels que $f(A) = y(A)$ et $f(B) = y(B)$ alors $f(A \cap B) = y(A \cap B)$ et $f(A \cup B) = y(A \cup B)$.

Preuve. Il n'est pas difficile de voir que $y(A) + y(B) = y(A \cap B) + y(A \cup B)$. Donc, nous avons

$$\begin{aligned} f(A) + f(B) &= y(A) + y(B) \\ &= y(A \cap B) + y(A \cup B) \\ &\leq f(A \cap B) + f(A \cup B) \\ &\leq f(A) + f(B). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons $y(A \cap B) + y(A \cup B) = f(A \cap B) + f(A \cup B)$. Ainsi, par (1.1), nous avons $f(A \cap B) = y(A \cap B)$ et $f(A \cup B) = y(A \cup B)$. □

L'importance des fonctions sous-modulaires en optimisation combinatoire a été découverte par Edmonds [67]. En effet, de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire peuvent être formulés comme un problème de minimisation (ou maximisation) d'une fonction sous-modulaire. Ainsi, étant donnée une fonction sous-modulaire $f : 2^S \longrightarrow \mathbb{R}$, le problème qui consiste à trouver un sous-ensemble $U \subseteq S$ minimisant $f(U)$ a été largement étudié dans la littérature [20, 50, 52, 75, 91, 153]. En utilisant la méthode des ellipsoïdes, Grötschel, Lovász et Schrijver [95] ont montré qu'un ensemble U minimisant $f(U)$ peut être trouvé en temps fortement polynomial, si l'on dispose d'un oracle qui permet de retourner $f(V)$ pour tout $V \subseteq S$. Récemment, Schrijver [159] et Iwata, Fleischer et Fujishige [107] ont donné des algorithmes combinatoires fortement polynomiaux pour minimiser une fonction sous-modulaire, dont la valeur est donnée par un oracle.

1.5 Notations et définitions

Les graphes que nous considérons sont non orientés, finis, connexes et peuvent contenir des arêtes parallèles. Nous notons un graphe par $G = (V, E)$ où V est l'*ensemble de sommets* et E l'*ensemble des arêtes*.

Un *sous-graphe* $H = (U, F)$ de G est un graphe tel que $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$. Un sous-graphe H de G est dit *couvrant* si $U = V$.

Si e est une arête reliant deux sommets u et v, alors u et v seront appelés les *extrémités* de e, et nous écrirons $e = uv$. Si u est une extrémité de e, alors nous dirons que u (resp. e) est incident à e (resp. u). Par ailleurs, si u et v sont les deux extrémités d'une arête, alors nous dirons qu'ils sont *adjacents*.

Soit $W \subseteq V$ un sous-ensemble de sommets de V. L'ensemble d'arêtes ayant exactement une extrémité dans W et l'autre dans $V \setminus W$ est appelé *coupe* et noté par $\delta(W)$. En posant $\overline{W} = V \setminus W$, nous avons $\delta(W) = \delta(\overline{W})$. Si $W = \{v\}$ alors nous écrirons $\delta(v)$ pour $\delta(\{v\})$. Nous noterons par $G(W)$ le sous-graphe de G induit par W.

Étant donnés deux sous-ensembles disjoints de sommets W et W' de V, alors $[W, W']$ représente l'ensemble d'arêtes ayant une extrémité dans W et l'autre dans W'. Si u et

v sont deux sommets de V, alors nous écrirons $[u, v]$ à la place de $[\{u\}, \{v\}]$.

Si $F \subseteq E$ est un sous-ensemble d'arêtes, alors $V(F)$ représente l'ensemble des sommets des arêtes de F. Si $W \subseteq V$ est un sous-ensemble de sommets, alors $E(W)$ dénote l'ensemble des arêtes ayant leurs deux extrémités dans W.

Étant donné un sous-ensemble d'arêtes $F \subset E$, nous désignerons par $G \setminus F$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant les arêtes de F. Si F est réduit à une seule arête e, alors nous noterons simplement $G - e$.

Un graphe G est dit *contractible* à un graphe G' si G' peut être obtenu à partir de G par suppressions et/ou contractions d'arêtes. La contraction d'une arête $e = uv$ consiste à supprimer e, à identifier u et v en préservant leurs adjacences. Si $F \subset E$ est un sous-ensemble d'arêtes, alors G/F représente le sous-graphe obtenu à partir de G en contractant F. Si $W \subset V$ est un sous-ensemble de sommets, alors le graphe obtenu en contractant W est le graphe obtenu en contractant toutes les arêtes de $E(W)$.

Soient u et v deux sommets de V. Une *chaîne* entre u et v est une séquence de sommets et d'arêtes $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{l-1}, e_l, v_l)$ où $v_0 = u$, $v_l = v$, $e_i = v_{i-1}v_i$ pour $i = 1, \ldots, l$ et $v_0, \ldots, v_l$ sont des sommets distincts de V. Deux chaînes entre u et v sont dites *arête-disjointes* (resp. *sommet-disjointes*) si elles n'ont aucune arête (resp. aucun sommet à l'exception de u et v) en commun. Un *cycle* (contenant u et v) est un ensemble de deux chaînes sommet-disjointes entre u et v.

Un graphe G est *connexe* si, pour toute paire de sommets u, v de V, il existe au moins une chaîne entre u et v. Un graphe ne possédant pas de cycle est appelé une *forêt*. Un *arbre* est une fôret connexe.

Une *composante connexe* d'un graphe est un sous-graphe connexe qui est maximal par rapport à cette propriété. Si $G - e$ possède plus de composantes connexes que G pour une arête e de G, alors e est appelée un *pont* de G.

Par la suite, nous serons amenés à considérer, de manière occasionnelle, des graphes orientés. Nous notons un graphe orienté par $D = (V, A)$ où V est l'*ensemble de sommets* et A l'*ensemble des arcs*. Si a est un arc dont l'extrémité initiale est u et l'extrémité terminale est v, alors nous noterons $a = (u, v)$. Si $W \subseteq V$ est un sous-ensemble de sommets, alors l'ensemble des arcs allant de $V \setminus W$ vers W, noté $\delta^-(W)$, est appelé *coupe orientée*.

Chapitre 2

Le problème de conception de réseaux fiables

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle de conception de réseaux fiables sur lequel est basé l'ensemble de notre travail. Tout d'abord, nous le décrivons d'une manière très générale, puis nous le formulons en terme de graphes. Par la suite, afin de pouvoir l'étudier d'un point de vue polyédral, nous introduisons le polytope associé. Après avoir présenté les principaux travaux effectués sur ce problème, nous examinons la dimension de son polytope, et nous discutons de quelques classes de contraintes valides.

2.1 Présentation générale

Aujourd'hui, la nature des services et le volume des demandes dans l'industrie des télécommunications ont radicalement changé grâce à l'introduction de la technologie des fibres optiques. En effet, elle offre une grande capacité de transmission. Ainsi, les réseaux actuels tendent à avoir une topologie de plus en plus clairsemée et une grande quantité du trafic réalisée par chaque câble. Dans ce cas, la défaillance d'un ou plusieurs câbles (ou noeuds) peut avoir des conséquences désastreuses si le réseau ne fournit pas d'autres chemins de routage.
De ce fait, deux questions principales apparaissent dans le processus de conception de réseaux à fibre optique : *économie et fiabilité*. D'une part, nous devons tenir compte du coût de construction du réseau. D'autre part, il doit être possible de restaurer le service dans l'éventualité de la défaillance d'un noeud ou d'un câble. Ainsi, une topologie en arbre satisfait le critère économique, mais, si un simple composant du réseau

est défectueux, le service est alors interrompu. Ceci implique que des contraintes de fiabilité doivent être intégrées lors de la construction des réseaux. Par conséquent, un compromis entre coût de réalisation plus élevé et fiabilité doit intervenir. Concevoir des topologies de réseaux qui fournissent des garanties vis à vis de la défaillance de composants du réseau devient donc un problème primordial. De plus, dans la planification d'un réseau à long terme (sur une période d'environ dix ans), les données concernant les demandes futures ne sont pas suffisamment fiables. Ainsi les aspect topologiques sont tout d'abord pris en compte. De ce fait, l'établissement de la topologie du réseau, la plus fiable possible, s'avère être la condition préalable avant toute mise en service du réseau (optimisation du trafic, routage,...).

Par conséquent, lorque nous évoquons les réseaux de télécommunication, seules leurs topologies nous intéresse. La fiabilité d'un réseau est donc exprimée en terme de connexité. Plus précisément, entre deux noeuds quelconques du réseau, il doit exister au moins un nombre prédéfini de chemins de routage. En pratique, les différents noeuds sont souvent classés suivant leur importance. Pour un réseau téléphonique, nous distinguons donc

- des *noeuds spéciaux*, pour lesquels un fort degré de fiabilité doit être garanti dans le réseau,
- des *noeuds ordinaires*, qui doivent simplement être connectés au réseau, et
- des *noeuds optionnels*, pouvant appartenir ou non au réseau.

Sachant que tous les liaisons possibles entre les différents noeuds sont connues, le problème consiste donc à sélectionner des liaisons, de telle manière que la somme de leurs coûts soit minimum et que les conditions de fiabilité soient satisfaites. Actuellement, les compagnies téléphoniques se contentent de faibles conditions de fiabilité (existence d'au moins deux chemins différents entre deux noeuds spéciaux). C'est cette topologie qui s'est avérée performante dans la pluspart des cas pratiques. Néanmoins, de fortes conditions de fiabilité peuvent être imposées par la demande d'au moins trois (voire plus) chemins différents pour certaines paires de noeuds spéciaux. Ceci garantit une fiabilité du réseau dans le cas où plusieurs composants du réseau sont défectueux.

2.2 Formulation en terme de graphes

Dans cette section, nous reformulons le problème de conception de réseaux fiables en terme de graphes. Pour cela, nous considérons un graphe $G = (V, E)$, fini, non orienté,

où

- l'ensemble V représente les noeuds qui doivent être reliés dans le réseau, et
- l'ensemble E représente les paires possibles de noeuds entre lesquels un lien direct peut être placé.

Le graphe G peut contenir des arêtes parallèles mais ne comporte pas de boucle. À chaque arête $e \in E$, est associé un coût fixe $c(e)$. Le coût d'un sous-graphe $H = (U, F)$, où $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$, est égal à la somme des coûts des arêtes appartenant à F, c'est-à-dire

$$c(F) = \sum_{e \in F} c(e).$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que tous les coûts sont strictement positifs. En effet, si une arête $e \in E$ possède un coût négatif $c(e)$, alors elle fait partie de toute solution optimale. Nous pouvons donc lui attibuer un coût nul, et traiter $c(e)$ comme une constante additive. De plus, si une arête $e \in E$ a un coût nul, alors elle peut être supposée dans toute solution optimale.

Dans [178, 179], Winter considère le *problème Steiner généralisé* (GSP) défini de la manière suivante.

Problème 2.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe, $S \subseteq V$ et $c : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction coût qui associe à chaque arête e de E un coût $c(e)$. Étant donnée une matrice carrée de taille $|S|$, $R = (R_{ij})$, définissant certaines conditions de connexité entre les sommets, trouver un sous-graphe de G de coût minimum, couvrant S de telle manière que pour chaque paire de sommets i, j de S, il existe au moins R_{ij} chaînes arête-disjointes (ou sommet-disjointes) entre i et j.*

Ce problème a été considéré plus tard par Grötschel et Monma [97] (voir aussi Grötschel, Monma et Stoer [98, 99, 100] et Stoer [161]) dans le cadre d'un modèle plus général. Celui-ci, que nous avons adopté pour ce travail, peut être présenté comme suit.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $c : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction coût. Pour modéliser les conditions de fiabilité, le concept de types de connexité des sommets a été introduit par Grötschel et Monma [97]. Ainsi, un entier positif $r(s)$ est associé à chaque sommet $s \in V$ pour caractériser sa condition de fiabilité (ou importance). Cet entier représente le nombre de liaisons qui doivent lier le sommet s au réseau final. Nous appellerons $r(s)$ le *type de connexité du sommet s* ou plus brièvement le *type du sommet s*. Le vecteur $r = (r(v) \mid v \in V)$ est, pour sa part, appelé *vecteur types de connexité* associé

aux sommets ou encore *vecteur types de sommets*. Nous dirons alors qu'un sous-graphe $H = (U, F)$, où $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$, vérifie les *conditions de fiabilité en arêtes* (resp. *en sommets*), si pour toute paire de sommets s, t de V, il existe au moins

$$r(s,t) = \min\{r(s), r(t)\}$$

chaînes arête-disjointes (resp. sommet-disjointes) entre s et t. Un sous-graphe de G vérifiant les conditions de fiabilité en arêtes (resp. en sommets) sera appelé sous-graphe *arête-fiable* (resp. *sommet-fiable*). Plus généralement, un sous-graphe de G vérifiant les conditions de connexité en arêtes ou en sommets sera tout simplement appelé *fiable*. De plus, les conditions de fiabilité en arêtes (resp. en sommets) seront plus communément appelées *conditions d'arête-connexité* (resp. *conditions de sommet-connexité*). Ces conditions garantissent la survie de quelques chemins de communication entre s et t lorsqu'un nombre prédéfini d'arêtes ou de sommets sont défaillants. Si le vecteur types des sommets est uniforme, c'est-à-dire $r(v) = k$ pour tout $v \in V$, pour un certain entier k, nous parlerons alors de sous-graphes *k-arête connexes* ou *k-sommet connexes*, suivant que les conditions de fiabilité sont exprimées en terme d'arêtes ou de sommets.

Tout au long de cette thèse, nous noterons par r_{max} le type de sommets maximum du graphe, c'est-à-dire

$$r_{max} = \max\{r(s) \mid s \in V\}.$$

Si $r_{max} \leq 2$ (resp. $r_{max} \geq 3$)„ nous parlerons alors de *faibles* (resp. *fortes*) *conditions de connexité*, c'est-à-dire que nous aurons $r \in \{0,1,2\}^V$ (resp. $r \in \mathbb{Z}_+^V$). Par ailleurs, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que le graphe G contient au moins deux sommets de type de connexité égal à r_{max}. En effet, par la définition d'un sous-graphe fiable, nous pouvons toujours ramener le problème à ce cas. Le problème de conception de réseaux de coût minimum, vérifiant les conditions d'arête-connexité, que nous noterons ESNDP, peut alors être défini de la manière suivante.

Problème 2.2 *Étant donnés un graphe $G = (V, E)$, un vecteur types de sommets $r = (r(v) \mid v \in V)$ et une fonction coûts $c : E \longrightarrow \mathbb{R}$, déterminer un sous-graphe arête-fiable de G de coût minimum.*

Si, dans la définition du problème 2.2, les conditions d'arête-connexité sont remplacées par des conditions de sommet-connexité, nous avons alors le problème de conception de réseaux sommet-fiables de coût minimum (noté NSNDP). Remarquons que le problème GSP, introduit par Winter [178, 179] correspond soit au problème ESNDP, soit au problème NSNDP, avec $S = V$ et $R_{st} = \min\{r(s), r(t)\}$ pour toute paire de sommets s, t de V. Bien que l'étude du problème NSNDP ne soit pas l'objet de ce travail, nous le

mentionnons néanmoins en vue de la section 2.4 relative à une étude bibliographique du problème de conception de réseaux fiables. Toutefois, à l'exception de la section 2.4, nous considérerons uniquement le problème ESNDP.

2.3 Programme linéaire en nombres entiers et polyèdre associé

Avant de formuler le problème ESNDP comme un programme linéaire en nombres entiers, nous énonçons le théorème suivant de Menger qui établit un rapport entre chaînes et coupes.

Théorème 2.1 [137] *Dans un graphe G, il n'existe pas de coupe de cardinalité inférieure ou égale à $k-1$ déconnectant deux sommets donnés s et t, si et seulement s'il existe au moins k chaînes arête-disjointes entre s et t.*

Dans le but d'abréger certaines notations, nous étendons le vecteur r des types de connexité associés aux sommets à des vecteurs associés à des ensembles de sommets en posant

$$\begin{array}{rcll} r(W) & = & \max\{r(s) \mid s \in W\} & \text{pour tout } W \subseteq V, \\ con(W) & = & \max\{r(s,t) \mid s \in W,\ t \in V \setminus W\} & \\ & = & \min\{r(W), r(V \setminus W)\} & \text{pour tout } W \subseteq V,\ \emptyset \neq W \neq V. \end{array}$$

D'une manière similaire au vecteur types de sommets, nous appellons $r(W)$ le *type de connexité de l'ensemble* W ou plus simplement *type de l'ensemble* W.
Soit $F \subset E$ un sous-ensemble d'arêtes. Soit $r_F \in \mathbb{Z}_+^{E \setminus F}$ le vecteur $r_F \in \mathbb{Z}_+^{E \setminus F}$ défini de la manière suivante

$$r_F(v) = \begin{cases} r(v) & \text{si } v \notin V(F), \\ con(V(F)) & \text{si } v = v', \end{cases}$$

où v' est le sommet résultant de la contraction de F. Le vecteur r_F sera le vecteur types de connexité associés aux sommets du graphe G/F.

Introduisons maintenant, pour chaque arête $e \in E$, une variable $x(e)$ et considérons l'espace vectoriel $\mathbb{R}^E$ des vecteurs indexés par E. Si $F \subseteq E$ est un sous-ensemble d'arêtes, alors le vecteur $x^F \in \mathbb{R}^E$ donné par

$$x^F(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in F, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

est appelé *vecteur d'incidence* de F.

Il n'est pas difficile de voir que le problème de conception de réseaux arête-fiables ESNDP est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant

$$\begin{aligned}
&\text{Min} \sum_{e \in E} c(e)x(e) \\
&x(e) \geq 0 && \text{pour tout } e \in E, && (2.1)\\
&x(e) \leq 1 && \text{pour tout } e \in E, && (2.2)\\
&x(\delta(W)) \geq con(W) && \text{pour tout } W \subseteq V, \emptyset \neq W \neq V, && (2.3)\\
&x(e) \in \{0,1\} && \text{pour tout } e \in E. && (2.4)
\end{aligned}$$

En effet, considérons une solution réalisable x de ce programme linéaire en nombres entiers. Le théorème 2.1 implique que le sous-graphe $H = (U, F^x)$ de G, où $U \subseteq V$ et $F^x = \{e \in E \mid x(e) = 1\}$, vérifie les conditions d'arête-connexité associées au problème ESNDP. Les contraintes (2.1) et (2.2) sont appelées *inégalités triviales*, les contraintes du type (2.3) *inégalités de coupe* et les contraintes (2.4) *inégalités d'intégrité*.

Soit

$$\text{ESNDP}(G,r) = conv\{x \in \mathbb{R}^E \mid x \text{ satisfait } (2.1) - (2.4)\}$$

l'enveloppe convexe des solutions du problème ESNDP. Le polytope $\text{ESNDP}(G,r)$ sera appelé *polytope des sous-graphes arête-fiables*.

Dans cette thèse, nous étudions le polytope $\text{ESNDP}(G,r)$. Nous discutons de certaines variantes de ce polytope. En particulier, nous le caractérisons dans certaines classes de graphes et nous développons des algorithmes de séparation pour ses contraintes. Ces algorithmes seront utilisés dans le cadre d'un algorithme de coupes et branchements pour résoudre des instances du problème ESNDP. Par ailleurs, nous faisons les hypothèses suivantes

1. au moins, deux sommets différents de V ont un type de connexité égal à r_{max},
2. tous les coûts associés aux arêtes sont positifs.

Mais avant d'entamer cette étude, nous allons présenter les principaux résultats relatifs aux problèmes ESNDP et NSNDP connus dans la littérature.

2.4 État de l'art

Le problème de conception de réseaux fiables est un des problèmes centraux de l'optimisation combinatoire. Il a fait l'objet, ces dernières années, de nombreux travaux tant d'un point de vue théorique que pratique. Plusieurs modèles spéciaux de ce problème peuvent être formulés en faisant varier ses paramètres. Par exemple, nous pouvons avoir

- uniquement des conditions d'arête-connexité, ou des conditions de sommet-connexité, ou encore les deux,
- des types de sommets
  - généraux (problème ESNDP ou NSNDP),
  - uniformes (sous-graphes k-arête ou k-sommet connexes),
  - dans $\{0,1\}$ (arbres Steiner),
- des coûts généraux, euclidiens ou uniformes.

Cette section a pour but de présenter certains résultats concernant les versions les plus rencontrées des problèmes ESNDP et NSNDP dans la littérature. Pour un tour d'horizon complet sur ce modèle, voir [41, 161, 180, 181].
Dans un premier temps, après avoir évoqué la complexité du problème, nous énonçons certains cas pour lesquels le problème peut être résolu en temps polynomial. Par la suite, nous abordons les principaux axes d'investigations pour ESNDP et NSNDP. Nous présentons les propriétés structurales, les heuristiques, les algorithmes d'approximation et enfin l'approche polyédrale. Finalement, nous évoquons le problème dans le cas où le graphe est orienté.
Tout au long de ce travail, nous ne considérons que des conditions de fiabilité mesurées en nombre de chemins arête-disjoints (ou sommet-disjoints) entre les sommets. Cependant, d'autres moyens de définir la fiabilité ont été pris en considération par les chercheurs, comme par exemple la probabilité de destruction d'une arête ou d'un sommet [78, 173], le diamètre [81, 122], la taille des composantes connexes [21, 22, 103], la longueur maximale des cycles [72], ...

2.4.1 Complexité et cas polynomiaux

Le problème de conception de réseaux fiables est NP-difficile dans le cas général. En effet, de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire, connus comme étant NP-difficiles [84], peuvent être vus comme des cas particuliers de ce modèle. C'est le cas par exemple, du problème de l'arbre Steiner ($r(v) \in \{0,1\}$, pour tout $v \in V$) et du

problème du sous-graphe k-arête connexe ($r(v) = k$, pour tout $v \in V$ et k est un entier positif fixé).
Par ailleurs, le problème du voyageur de commerce [40, 126, 144] est étroitement lié au problème ESNDP (NSNDP). En effet, comme cela a été démontré par Eswaran et Tarjan [69], le problème de déterminer si un graphe possède un cycle Hamiltonien (c'est-à-dire un cycle sans corde passant par tous les sommets du graphe) peut être ramené au problème ESNDP. Ceci corrobore le caractère NP-difficile du problème de conception de réseaux fiables de coût minimum. De plus, le problème de l'arbre Steiner est NP-difficile dans les graphes planaires [84]. Ceci implique que le problème ESNDP est également NP-difficile dans cette classe de graphes.

Cependant, le problème ESNDP (NSNDP) peut être résolu en temps polynomial sous certaines conditions de types de sommets, des fonctions coûts spéciales et dans des classes particulières de graphes.

Conditions de connexité particulières

En limitant les types de connexité associés aux sommets à un certain nombre de valeurs, le problème de conception de réseaux fiables se ramème à des problèmes polynomiaux très connus.

- Si $r(v) = 1$ pour tout $v \in V$, nous obtenons le problème de l'arbre couvrant de coût minimum. Les algorithmes polynomiaux les plus célèbres permettant de le résoudre sont ceux de Kruskal [124] et de Prim [148].

- Si $r(v) = 1$ pour exactement deux sommets de V et $r(v) = 0$ pour tous les autres, ce n'est rien d'autre que le problème du plus court chemin. L'algorithme de Dijkstra [61] permet de le résoudre en temps polynomial.

- Le problème des plus courts k-chemins peut être modélisé sous la forme d'un problème de conception de réseaux fiables en posant $r(v) = k$, $k \geq 2$, pour exactement deux sommets de V et $r(v) = 0$ pour tous les autres. Ce problème a été résolu par Suurballe [162] et Suurballe et Tarjan [163].

- Si $r(v) \in \{0, 1\}$ pour tout $v \in V$, nous avons le problème de l'arbre Steiner. Ce problème est NP-difficile en général. Lawler [125] a montré qu'il peut être résolu en temps polynomial quand le nombre de sommets de type de connexité égal à 0 (égal à 1) est réduit.

Fonctions coûts particulières

Certains problèmes de conception de réseaux fiables peuvent être résolus en temps polynomial si la fonction coûts satisfait à quelques conditions (coûts uniformes ou coûts en 0 et 1).

• *coûts uniformes*

Le graphe sous-jacent G peut alors être vu comme un graphe complet. Si les coûts sont uniformes, le problème consisterait à construire un graphe vérifiant les conditions de connexité et contenant le plus petit nombre d'arêtes. Dans certains cas, l'utilisation d'arêtes parallèles est autorisée dans la solution. Nous faisons remarquer que les algorithmes donnés pour les conditions d'arête-connexité ne permettent généralement pas de résoudre les problèmes avec des conditions de sommet-connexité. Ainsi, nous sommes amenés à faire la distinction entre ces deux types de conditions de fiabilité.

Chou et Frank [37] ont étudié le problème suivant.

Problème 2.3 *Étant données des conditions d'arête-connexité $r_{ij} \in \mathbb{Z}_+^{V*V}$, trouver un graphe satisfaisant ces conditions et ayant le plus petit nombre d'arêtes (avec ou sans arêtes parallèles).*

Chou et Frank [37] ont donné un algorithme polynomial pour résoudre le problème 2.3 lorsque plusieurs copies d'une arête sont autorisées. Leur algorithme résoud ce problème en ramenant les conditions d'arête-connexité $r_{ij} \in \mathbb{Z}_+^{V*V}$ à des types de sommets $r(i) = \max\{r_{ij} \mid j \in V\}$ pour tout $i \in V$. Ceci leur a permis de prouver le résultat suivant. Étant donnés des types de sommets $r(v) \geq 2$ pour tout sommet de V, le nombre minimum d'arêtes d'un graphe vérifiant les conditions d'arête-connexité données par r est $\left\lceil \frac{1}{2} \sum_{v \in V} r(v) \right\rceil$.
Stoer [161] a ensuite décrit un algorithme polynomial similaire à celui de Chou et Frank dans le cas où l'on peut avoir des types de sommets égaux à 1. Chou et Frank [38] ont également résolu le problème 2.3 quand aucune arête parallèle n'est autorisée, mais des sommets supplémentaires sont permis dans la construction. Pour ce qui est d'une version du problème 2.3 avec des conditions de sommet-connexité, aucune solution générale de résolution n'a pu être trouvée dans la littérature.

• *coûts en 0 et 1*

Dans la littérature, le problème de conception de réseaux fiables avec des coûts en

0 et 1 est connu sous le nom de problème d'augmentation. Il peut être défini de la manière suivante :

Problème 2.4 *Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et des conditions de connexité $r_{ij} \in \mathbb{Z}_+^{V*V}$, l'augmenter par le plus petit nombre d'arêtes de $V*V$ (possibilité d'utiliser des arêtes parallèles) de telle manière que le graphe obtenu soit fiable.*

Ce problème peut être vu comme un problème de conception de réseaux fiables associé à un graphe complet H sur l'ensemble de sommets V. Toutes les arêtes de E ont ainsi un coût égal à 0, et celles de $(V * V) \setminus E$, un coût égal à 1. Le problème 2.4 a été mentionné par Eswaran et Tarjan [69] pour des graphes 2-arête et 2-sommet connexes. Ensuite, Rosenthal et Goldner [156] ont continué ce travail pour l'augmentation des graphes 2-sommet connexes. Leur algorithme polynomial contenait une erreur qui a été corrigée par Hsu et Ramachadran [105]. Ces derniers ont également proposé une implémentation parallèle de leur algorithme. Hsu et Ramachadran [105] ont aussi développé un algorithme en temps linéaire pour l'augmentation des graphes 3-arête connexes. Wanatabe et Nakamura [172], Ueno, Kajitani et Wada [167] et Cai et Sun [27] ont étudié le problème d'augmentation pour des graphes k-arête connexes. Pour ce problème, l'algorithme connu le plus rapide est celui de Naor, Gusfield et Martel [141]. Plus récemment, Frank [76] a complètement résolu le problème 2.4 pour des conditions d'arête-connexité générales. Hsu et Kao [104] se sont intéressés au problème d'augmentation en faisant combiner des conditions d'arête-connexité (pour certains sommets) et des conditons de sommet-connexité (pour les autres sommets). Ils ont ainsi donné un algorithme polynomial permettant de le résoudre lorsque $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$. Toutes les solutions que nous venons de mentionner sont algorithmiques et utilisent des procédures polynomiales. De plus, à l'exception de celles de Eswaran et Tarjan [69], Rosenthal et Goldner [156] et Hsu et Kao [104], l'utilisation d'arêtes parallèles est autorisée.

Classes particulières de graphes

D'autres cas polynomiaux pour le problème de conception de réseaux fiables sont connus si le graphe sous-jacent appartient à certaines classes particulières de graphes. Dans ce cas, nous avons également affaire à une restriction sur les coûts, si les arêtes non existantes sont vues avec un coût infini.

Plus particulièrement, la classe des graphes série-parallèles a reçu beaucoup d'attention. En effet, de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire, NP-difficiles pour des graphes généraux, sont polynomiaux dans cette classe de graphes [1, 2, 23, 44, 45, 130, 157, 165, 170, 171, 179]. Ainsi, le problème de l'arbre Steiner peut être résolu en

temps polynomial par un algorithme récursif. Cela a tout d'abord été mentionné par Takamizawa, Nishizeki et Saito [165] et explicitement démontré par Wald et Colbourn [171]. Pour le problème du sous-graphe Steiner 2-connexe, c'est-à-dire $r(v) \in \{0, 2\}$ pour tout $v \in V$, Winter [179] a donné un algorithme linéaire permettant de le résoudre aussi bien dans le cas de conditions d'arête-connexité que de sommet-connexité. D'autres classes de graphes ont également été étudiées comme celles des graphes de Halin ou celle des graphes outerplanaires. Winter a ainsi développé des algorithmes polynomiaux pour les problèmes ESNDP et NSNDP lorsque les types de sommets sont égaux à 0 et 2 dans ces deux classes de graphes [176, 178]. Pour les graphes de Halin, il a donné des algorithmes qui permettent de résoudre en temps polynomial les problèmes ESNDP et NSNDP avec des types de sommets égaux à 0 et 3 [181]. Dans la classe des graphes sans W_4 (la roue sur 5 sommets), Coullard et al. [47] ont donné un algorithme linéaire pour résoudre le problème NSNDP lorsque $r \in \{0, 2\}^V$.

Pour certains problèmes de conception de réseaux fiables et certaines classes de graphes, des caractérisations complètes des polytopes associés à ces problèmes ont permis de montrer que ces problèmes sont polynomiaux. Ces différentes situations seront présentées dans la section 2.4.3.

2.4.2 Propriétés structurales, heuristiques et algorithmes d'approximation

La connaissance des propriétés structurales des solutions de problèmes d'optimisation combinatoire joue un rôle très important dans l'élaboration d'heuristiques. Souvent, elles permettent d'améliorer les formulations d'un problème d'optimisation combinatoire. Pour cette raison, plusieurs travaux ont été menés dans cette direction pour le problème de conception de réseaux fiables.
Un *α-algorithme d'approximation* pour un problème d'optimisation combinatoire à minimiser (resp. maximiser) est un algorithme polynomial qui donne une solution dont la valeur est inférieure ou égale (resp. supérieure ou égale) à αC_{SO}, où C_{SO} est la valeur de la solution optimale de ce problème. Cette approche a été largement explorée durant les dernières années [8, 30, 83, 88, 92, 116, 129, 154, 174].

Propriétés structurales

Quand la fonction coûts satisfait l'inégalité triangulaire (c'est-à-dire $c(e_1) \leq c(e_2) + c(e_3)$, pour tout triplet d'arêtes (e_1, e_2, e_3) définissant un triangle), Frederickson et Jájá [80] ont montré qu'un graphe 2-arête connexe peut être transformé en un graphe

2-sommet connexe sans augmenter son coût (et éventuellement le réduire). Ce résultat implique une équivalence entre conditions d'arête-connexité et conditions de sommet-connexité lorsque la fonction coûst satisfait l'inégalité triangulaire et les types de connexité associés aux sommets sont égaux à 2.
Monma, Munson et Pulleyblank. [138] ont obtenu une caractérisation structurale des solutions optimales 2-connexes quand les coûts satisfont l'inégalité triangulaire. Ils ont ainsi montré qu'il existe une solution optimale dont les sommets ont tous un degré égal à 2 ou 3 et telle que toutes les composantes connexes résultantes de la suppression d'une arête ou d'une paire d'arêtes contiennent un pont. Par la suite, ce travail a été généralisé par Bienstock, Brickell et Monma [18] au cas k-connexe. Ils ont établi des propriétés structurales pour les solutions optimales des problèmes du sous-graphe k-arête ou k-sommet connexe. Ils ont également prouvé qu'un graphe k-sommet connexe de coût minimum n'a pas forcément le même coût qu'un graphe k-arête connexe de coût minimum.

Heuristiques

Les premières heuristiques pour concevoir des réseaux fiables de coût minimum sont apparues dans un travail de Steiglitz, Weiner et Kleitman [160]. Ils considèrent le problème sous des conditions de connexité générales. Leur approche consiste à trouver une solution de départ par un algorithme glouton aléatoire. Ils testent à chaque étape la réalisabilité de la solution. Une fois qu'une solution réalisable est trouvée, une procédure d'optimisation essaie de l'améliorer en remplaçant successivement une paire d'arêtes par une autre paire d'arêtes jusqu'à ce qu'aucune amélioration ne puisse être réalisée.

Monma et Shallcross [139] ont considéré le problème avec des types de sommets dans $\{1, 2\}$. Ils ont développé plusieurs heuristiques pour construire des solutions initiales réalisables et des heuristiques d'amélioration locale. Les "heuristiques de construction" sont inspirées de la structure spéciale des sous-graphes 2-arête ou 2-sommet connexes. Les "heuristiques d'amélioration" s'inspirent, quant à elles, de la grande variété d'heuristiques existantes pour le problème du voyageur de commerce (1-opt, 2-opt, 3-opt, pretzel, quetzel, degree). De plus, ces heuristiques sont conçues pour des graphes sous-jacents creux. Elles font partie d'un logiciel commercialisé par Bellcore [13, 28] pour la conception de réseaux fiables.
Ko et Monma [120] ont modifié les heuristiques de Monma et Shallcross pour le problème de conception de sous-graphes k-arête ou k-sommet connexes. Clarke et Anandalingram [42] ont ajouté une heuristique constructive à celles proposées par Monma et Shallcross pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe.

Algorithmes d'approximation

Goemans et Bertsimas [88] ont considéré le problème ESNDP lorsqu'une arête peut être utilisée plusieurs fois. Ils ont décrit et présenté une analyse dans le pire des cas de deux heuristiques très simples. La première est une généralisation d'une heuristique d'arbre pour le problème de l'arbre Steiner. La seconde est une méthode d'approximation combinant l'heuristique de Christofides [39] pour le problème du voyageur de commerce et l'heuristique d'arbre Steiner.

Si les arêtes parallèles ne sont plus autorisées dans la solution et les coûts sont tous égaux à 1, Khuller et Viskhin [119] ont étudié le problème ESNDP. Ils ont donné un algorithme pour résoudre ce problème avec une garantie dans le pire des cas de 2 (2-algorithme d'approximation), lorsque tous les types de sommets sont égaux à k. Sous ces mêmes hypothèses, ils ont également proposé un $\frac{3}{2}$-algorithme d'approximation pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe et un $\frac{5}{3}$-algorithme d'approximation pour le problème du sous-graphe 2-sommet connexe.

Pour une large classe de problèmes incluant le problème Steiner généralisé avec des conditions d'arête-connexité et des arêtes pouvant être utilisées plusieurs fois, Goemans et Williamson [92] ont décrit un algorithme primal-dual. La garantie dans le pire des cas de cet algorithme est la même que celle de l'heuristique d'arbre introduite par Goemans et Bertsimas. Le premier algorithme d'approximation polynomial pour ce problème a été donné par Williamson et al. [174]. Cet algorithme a une garantie dans le pire des cas de $2\mathrm{r}_{\max}$. Une implémentation différente de cet algorithme a été décrite par Gabow, Goemans et Williamson [83]. Elle améliore le temps d'exécution dans le pire des cas. En changeant l'ordre dans lequel l'algorithme considère les conditions de connexité, Goemans et al. [89] ont amélioré la garantie dans le pire des cas qui devient $2\mathcal{H}(\mathrm{r}_{\max})$, où $\mathcal{H}(\mathrm{r}_{\max}) = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r_{max}}$.

Lorsque les types de sommets appartiennent à $\{0, 1, 2\}$, Balakrishnan, Magnanti et Mirchandani [8] ont donné un $\frac{3}{2}$-algorithme d'approximation pour le problème Steiner généralisé. Ils ont également décrit une nouvelle formulation étendue du problème GSP pour des conditions d'arête-connexité. En utilisant ceci, ils ont amélioré les heuristiques données par Goemans et Bertsimas [88] et Goemans et Williamson [92], quand au moins un sommet a un type de connexité égal à 1. En se basant sur une formulation dans le cas orienté, Magnanti et Raghavan [129] ont présenté un algorithme dual-ascendant pour ce même problème. Leur procédure donne aussi bien une borne inférieure qu'une solution réalisable au problème. Des expérimentations sur des problèmes de 300 sommets et 3000 arêtes ont abouti à des solutions à 4% de l'optimalité.

Frederickson et Jájá [79] ont considéré les problèmes du sous-graphe 2-arête connexe et 2-sommet connexe. Pour le premier, ils ont donné un 2-algorithme d'approximation. Pour des conditions de sommet-connexité, ils ont présenté un 3-algorithme d'approximation. Dans [30], Cheriyan, Sebö et Szigeti ont donné un $\frac{17}{12}$-algorithme d'approximation pour le problème du sous-graphe k-arête connexe. Ils ont montré que si la $\frac{4}{3}$-conjecture pour le problème du voyageur de commerce métrique est vraie [138], alors il existe un $\frac{4}{3}$-algorithme d'approximation pour le problème ESNDP lorsque $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$.

Khuller et Raghavachari [116] ont donné trois algorithmes d'approximation. Tout d'abord, quand les coûts sont uniformes et le graphe sous-jacent est quelconque, ils ont présenté un (1.85)-algorithme d'approximation pour le problème du sous-graphe k-arête connexe. Ils ont également donné un $(2 + \frac{1}{|V|})$-algorithme d'approximation pour le problème du sous-graphe 2-sommet connexe. Et si les coûts vérifient l'inégalité triangulaire, ils ont proposé un 2-algorithme d'approximation pour le problème du sous-graphe k-sommet connexe.

Par ailleurs, Ravi et Williamson [154] ont présenté un $2\mathcal{H}(k)$-algorithme d'approximation pour le problème du sous-graphe k-sommet connexe. Ils ont également donné un 3-algorithme d'approximation pour le problème GSP avec des conditions de sommet-connexité et $r_{ij} \in \{0, 1, 2\}$, pour tous i, $j \in V$.

2.4.3 Approche polyédrale

Grötschel et Monma [97] et Grötschel, Monma et Stoer [98, 99, 100] ont étudié le problème de conception de réseaux fiables d'un point de vue polyédral. Ils se sont aussi bien intéressés à des conditions d'arête-connexité qu'à des conditions de sommet-connexité pour $r \in \{0, 1, 2\}^V$, pour tous i, $j \in V$. Ils ont introduit de nombreuses inégalités valides. Ceci leur a permis de développer un algorithme de coupes pour résoudre à l'optimalité certains problèmes réels ayant environ 100 sommets et 200 arêtes. Ils ont poursuivi ce travail en considérant les problèmes ESNDP et NSNDP avec des types de sommets pouvant être supérieurs à 3 [101]. De nombreuses inégalités valides pour de faibles conditions de connexité ont ainsi été généralisées. Par ailleurs, ils ont présenté des conditions sous lesquelles ces inégalités définissent des facettes. Ils ont ensuite incorporé ces contraintes dans un algorithme de coupes, leur permettant de résoudre facilement le problème du sous-graphe k-arête connexe de coût minimum. Ils obtiennent également des bornes inférieures à moins de 4% pour des problèmes réels

avec de fortes conditions de connexité.

Auparavant, Mahjoub [131] a considéré une approche polyédrale pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe. Il a montré que le polytope ESNDP(G,r) est complètement donné par les contraintes triviales et les contraintes de coupe lorsque G est série-parallèle et $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$. Il a également introduit une classe d'inégalités définissant des facettes du polytope des sous-graphes 2-arête connexes. Cette classe a été généralisée par Grötschel, Monma et Stoer [99] pour r quelconque. Baïou et Mahjoub [6] ont généralisé cette caractérisation du polytope ESNDP(G, r) à des types de sommets en 0 et 2. Récemment, Didi Biha et Mahjoub [60] l'ont étendu pour $r \in \{0, k\}^V$ où k est pair. Étant donné que le problème de séparation des contraintes de coupe est polynomial, ces caractérisations donnent des algorithmes polynomiaux pour résoudre ces cas particuliers du problème ESNDP. Dans [58], Didi Biha et Mahjoub ont donné une description complète de ESNDP(G,r) quand G est un graphe série-parallèle et $r(v) = k$ pour tout $v \in V$. Si G est un graphe de Halin et $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$, Barahona et Mahjoub [12] ont complètement caractérisé les polytopes associés aux problèmes ESNDP et NSNDP. Dans [26], Boyd et Hao ont introduit une classe d'inégalités valides pour ce polytope. Ils ont également énoncé des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces inégalités définissent des facettes de ce polytope.

Le polytope ESNDP(G,r) a été étudié par Chopra [33] quand les types de sommets sont tous égaux à k et plusieurs copies d'une arêtes sont autorisées. Il a ainsi caractérisé le polyèdre $P(G,r)$ associé à ce problème pour les graphes outerplanaires et k impair. Auparavant, ce polyèdre a été étudié par Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [44]. Il ont montré que si le graphe est série-parallèle et k est pair, alors $P(G,r)$ est complètement décrit par les contraintes de non-négativité et les contraintes de coupe. Par la suite, Baïou [4] a montré que $P(G,r)$ est complètement décrit par ces mêmes inégalités dans cette classe de graphes et pour $r \in \{0, 2\}^V$. Didi Biha et Mahjoub ont donné des caractérisations de $P(G,r)$ pour $r(v) = k$ pour tout $v \in V$ [58], et pour $r \in \{0, k\}^V$, où k est un entier pair [60].

Dans [45, 46, 47, 48], Coullard, Rais, Rardin et Wagner ont étudié le polytope associé au problème NSNDP quand $r \in \{0, 2\}^V$. Ils ont décrit ce polytope dans la classe des graphes série-parallèles [46]. Ils ont donné une description complète du dominant de ce polytope dans la classe des graphes non contractibles à W_4 [48]. De plus, ils ont développé un algorithme linéaire pour résoudre ce problème pour les graphes de Halin et les graphes non contractibles à W_4.

Fortz, Labbé et Maffioli [72, 73, 74] ont étudié le problème NSNDP en imposant la

contrainte suivante : chaque arête doit appartenir à un cycle de longueur inférieure ou égale à un entier K. Ils ont étudié des inégalités valides et définissant des facettes pour ce problème. De plus, ils ont développé une méthode "exacte" du type "Branch and Cut" pour le résoudre. Cependant, cette méthode ne leur permet de résoudre que des instances de petite taille. Aussi, ils ont développé plusieurs heuristiques.

2.4.4 Cas orienté

Dans cette section, nous nous intéressons au problème de conception de réseaux fiables dans le cas des graphes orientés. Dans ce cas, les conditions de fiabilité sont exprimées en terme de chemins arc-disjoints (sommet-disjoints). Nous présentons des cas polynomiaux, certains algorithmes d'approximation ainsi que des résultats polyédraux.

De nombreux résultats valides pour le problème d'augmentation (problème 2.4) ont été généralisés par Frank [76] aux graphes orientés. Il a décrit un algorithme qui résoud le problème d'augmentation pour le graphe orienté k-arc connexe, lorsque le graphe sous-jacent est complet et la duplication des arcs dans la solution est autorisée. Frank et Tardos [77] ont étudié le problème du k-branchement sommet-disjoint de coût minimum. Ce problème consiste à trouver k chemins sommet-disjointes entre un sommet "racine" spécifié et les autres sommets du graphe. En utilisant une réduction astucieuse des flots sous-modulaires, ils ont décrit un algorithme permettant de le résoudre.

Le premier algorithme d'approximation pour le cas orienté est dû à Frederickson et Jájá [79]. Ils ont donné un 2-algorithme d'approximation pour le problème du sous-graphe 1-arc-connexe de coût minimum. Pour leur part, Khuller, Raghavachari et Young [117, 118] ont étudié le problème du sous-graphe fortement connexe dans le cas de coûts uniformes. Dans un premier papier [117], ils ont proposé un algorithme d'approximation avec une garantie dans le pire des cas de $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.645$. Par la suite [118], ils ont amélioré cette garantie dans le pire des cas en la ramenant à $\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{36} \approx 1.617$.

Dans [31], Chopra a décrit plusieurs inégalités définissant des facettes pour le problème du sous-graphe fortement connexe. Il a également proposé une méthode qui permet de transformer le problème ESNDP en une version orientée dans le cas où la duplication des arêtes est autorisée dans la solution. Il a ainsi présenté une étude expérimentale qui montre que la solution de la relaxation linéaire du problème orienté est toujours (pour les instance traitées) à moins de 1% de la solution optimale. Pour des graphes série-parallèles orientés fortement connexes, Chopra [32] a montré que les inégalités de coupe orientée décrivent complètement le polyèdre associé aux solutions du problème

du sous-graphe fortement connexe. Il a également caractérisé le polyèdre des coupes orientées pour les graphes série-parallèles. Dahl [53] a étudié des inégalités valides et des facettes pour un cas particulier du problème de conception de réseaux fiables orientés. Il s'est intéressé à ce problème lorsque tous les chemins orientés émanent d'un sommet "racine" spécifié. Dans un second papier [54], il a discuté de deux modèles pour ce problème de conception de réseaux fiables orientés : un modèle naturel de coupes orientées et une formulation en terme de flots orientés. Pour le premier modèle, il a présenté plusieurs classes d'inégalités valides et a décrit un algorithme de coupes. Il a aussi donné une méthode générale pour obtenir des facettes pour le polytope associé au problème de conception de réseaux fiables orientés à partir de cas spéciaux décrits dans [53].

2.5 Dimension et contraintes générales

Grötschel et Monma [97] ont examiné la dimension du polytope associé aux solutions du problème ESNDP. Ils ont également donné des conditions pour que les contraintes triviales et de coupe définissent des facettes de ESNDP(G,r). Ces résultats généralisent des résultats donnés par Mahjoub [131] pour le cas où $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$. Dans [98, 99, 101], Grötschel, Monma et Stoer ont introduit de nouvelles inégalités pouvant définir des facettes de ESNDP(G,r). Dans cette section, nous proposons de résumer l'essentiel de ces résultats.

2.5.1 Dimension du polytope ESNDP(G,r)

Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un vecteur types de connexité $r = (r(v) \mid v \in V)$, nous dirons qu'une arête $e \in E$ est *essentielle* si le graphe $G - e$ n'est pas arête-fiable. En terme de polyèdre, cela se traduit par le fait que ESNDP($G - e$,r) est vide. Notons par $ES(G, r)$ l'ensemble des arêtes essentielles du graphe G par rapport au vecteur r.

Si $e \in E$ est une arête essentielle, alors nous avons $x(e) = 1$ pour tout vecteur d'incidence d'un sous-graphe arête-fiable. Ainsi

$$\text{ESNDP}(G, r) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^E \mid x(e) = 1, \quad \text{pour tout } e \in ES(G, r)\}.$$

En se basant sur cette remarque, Grötschel et Monma [97] ont montré que la dimension du polytope ESNDP(G,r) est $|E| - |ES(G, r)|$.

Avant d'étudier des contraintes valides pour le polytope ESNDP(G,r), nous énonçons le lemme suivant qui nous sera très utile pour la suite.

Lemme 2.2 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $r \in \{0, 1, \ldots, r_{max}\}^V$ un vecteur types de connexité tels que ESNDP(G,r) soit de pleine dimension. Supposons que la contrainte*

$$\sum_{e \in E} a(e)x(e) \geq \alpha$$

définisse une facette $\mathcal{F}$ de ESNDP(G,r), différente d'une facette triviale. Alors, $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$.

Preuve. Soit $e_0 \in E$. Puisque $\mathcal{F}$ est une facette non triviale et ESNDP(G,r) est de pleine dimension, il existe $F \subseteq E \setminus \{e_0\}$ tel que $x^F \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire

$$\sum_{e \in E \setminus \{e_0\}} a(e)x^F(e) = \alpha.$$

Sinon, $\mathcal{F}$ serait contenu dans la face définie par la contrainte $x(e_0) \leq 1$, une contradiction. Posons $F_0 = F \cup \{e_0\}$. Il est clair que le sous-graphe induit par F_0 est arête-fiable. Donc $x^{F_0} \in \text{ESNDP}(G, r)$. Par conséquent,

$$\sum_{e \in E} a(e)x^{F_0}(e) \geq \alpha. \tag{2.5}$$

De plus, nous avons

$$\sum_{e \in E} a(e)x^{F_0}(e) = \sum_{e \in E \setminus \{e_0\}} a(e)x^F(e) + a(e_0) = \alpha + a(e_0). \tag{2.6}$$

De (2.5) et (2.6), nous déduisons ainsi que $a(e_0) \geq 0$. □

Le lemme 2.2 nous permet de faire la remarque suivante.

Remarque 2.3 Pour un polyèdre de pleine dimension, si deux inégalités $ax \geq \alpha$ et $bx \geq \beta$ définissent la même facette, alors $a = \lambda b$ et $\alpha = \lambda\beta$ pour $\lambda > 0$. □

2.5.2 Contraintes valides

Comme nous l'avons vu dans la section 2.3, toute solution réalisable du problème de conception de réseaux arête-fiables vérifie les contraintes triviales (2.1) et (2.2) et les contraintes de coupe (2.3). Dans [97], Grötschel et Monma ont donné des conditions

nécessaires et suffisantes pour que les inégalités triviales définissent des facettes de ESNDP(G,r).

Dans le cas de faibles conditions d'arête-connexité, c'est-à-dire $r(v) \leq 2$ pour tout $v \in V$, Grötschel et Monma [97] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalités de coupe définissent des facettes de ESNDP(G, r).

À notre connaissance, de telles conditions ne sont pas connues pour des types de sommets quelconques. Cependant, dans le cas de types de connexité uniformes, c'est-à-dire $r(v) = k$ pour tout $v \in V$, Grötschel et Monma [97] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces contraintes définissent des facettes de ESNDP(G, r). Ces conditions généralisent celles données par Mahjoub [131] pour $k = 2$.

Le problème de séparation des contraintes de coupe peut être résolu en temps polynomial en utilisant un algorithme polynomial pour le problème de flot maximum [62, 68]. Par conséquent, le problème ESNDP peut se résoudre en temps polynomial quand le polytope ESNDP(G, r) est complètement caractérisé par les contraintes (2.1)-(2.3).

2.5.3 Les contraintes de partition

Dans cette section, nous présentons la classe des contraintes dites de partition. Ces inégalités généralisent les inégalités de coupe (2.3). Elles ont été introduites par Grötschel et Monma [97] pour le problème de conception de réseaux fiables lorsque $r(v) = 1$ pour tout $v \in V$. Pour cela, ils se sont basés sur un travail de Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [44]. Par la suite, Grötschel, Monma et Stoer [98, 99] ont étendu cette classe à des types de connexité généraux, c'est-à-dire $r \in \{0, \ldots, r_{max}\}^V$ pour tout $v \in V$. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $r \in \mathbb{Z}_+^V$ un vecteur types de connexité. Soit $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 2$, une *partition* de V, c'est-à-dire

- $V_i \neq \emptyset$, pour $i = 1, \ldots, p$,
- $V_i \cap V_j = \emptyset$, pour $1 \leq i < j \leq p$,
- $\bigcup_{i=1}^{p} V_i = V$,

Soit $\delta(V_1, \ldots, V_p)$ l'ensemble des arêtes ayant leurs extrémités dans des sous-ensembles différents de la partition $(V_1, \ldots, V_p)$. Supposons que $r(V_i) \geq 1$, pour tout $i = 1, \ldots, p$. Posons

$$I_1 = \{i \mid con(V_i) = 1;\ i = 1, \ldots, p\},$$
$$I_2 = \{i \mid con(V_i) \geq 2;\ i = 1, \ldots, p\}.$$

Dans [98, 99], Grötschel, Monma et Stoer ont montré que les inégalités

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) = \begin{cases} p-1 & \text{si } I_2 = \emptyset, \\ \left\lceil \frac{1}{2} \sum_{i \in I_2} con(V_i) \right\rceil + |I_1| & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.7}$$

sont valides pour ESNDP. Ces inégalités sont appelées *inégalités de partition*. Elles sont une généralisation des contrainte de coupe (2.3).

Remarque 2.4 Si $p = 2$, l'inégalité (2.7) n'est rien d'autre qu'une inégalité de coupe (2.3). Par ailleurs, si $\sum_{i \in I_2} con(V_i)$ est pair et I_1 est vide, alors l'inégalité de partition (2.7) est dominée par les contraintes de coupe. En effet, elle peut être obtenue en sommant les inégalités $x(\delta(V_i)) \geq con(V_i)$ pour $i = 1,\ldots,p$. □

L'inégalité (2.7) généralise également l'inégalité

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq p-1 \tag{2.8}$$

pour toute partition $(V_1,\ldots,V_p)$ de V. L'inégalité (2.8) a été introduite par Grötschel et Monma [97] pour le problème du sous-graphe connexe (c'est-à-dire lorsque $r(v) = 1$ pour tout $v \in V$). Les inégalités (2.8) sont également appelées inégalités de partition. Ils ont par ailleurs montré que ces dernières contraintes avec les inégalités triviales sont suffisantes pour décrire complètement le polytope des sous-graphes connexes.

Pour toute famille de contraintes valides pour un problème, il est intéressant d'établir des conditions sous lesquelles ces inégalités définissent des facettes du polytope associé. Pour des types de connexité généraux, c'est-à-dire $r \in \mathbb{Z}_+^V$, nous ne connaissons pas de conditions pour que les contraintes (2.7) définissent des facettes de ESNDP(G,r). Cependant, sous certaines conditions, Grötschel, Monma et Stoer [98, 99] ont prouvé que les inégalités (2.7) peuvent définir des facettes de ESNDP(G,r).

Dans le cas général, c'est-à-dire $r \in \mathbb{Z}_+^V$, le problème de séparation des inégalités de partition est NP-difficile. En effet, considérons le problème suivant.

Problème 2.5 *Étant donnés un graphe $G = (V,E)$ et trois sommets v_1, v_2, $v_3 \in V$, déterminer un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que v_1, v_2 et v_3 appartiennent à des composantes différentes de $G \setminus F$, et F soit de cardinalité minimum.*

Dahlaus et al. [55] ont montré que le problème 2.5 est NP-difficile. Dans [100], Grötschel, Monma et Stoer ont prouvé que le problème 2.5 peut être réduit au problème de séparation des inégalités (2.7). Ainsi ce dernier est NP-difficile.

Par contre, lorsque les types de sommets sont tous égaux à 1, le problème de séparation des inégalités (2.8) est polynomial. Cunningham [51] a montré que ce problème se ramène à une séquence de $|E|$ problèmes de coupe minimum. Par la suite, Barahona [11] l'a ramené à $|V|$ problèmes de coupe minimum. Or le problème de coupe minimum est polynomial [62, 68]. Par conséquent, le problème de séparation des inégalités (2.8) est polynomial.

2.5.4 Les contraintes de r-recouvrement

Une relaxation très intéressante de ESNDP est le problème du r-recouvrement. Ce problème peut être défini comme suit. Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et des entiers positifs $r(v)$ pour tout $v \in V$, un *r-recouvrement* est un sous-ensembles d'arêtes F de E tel que $|F \cap \delta(v)| \geq r(v)$ pour tout $v \in V$. Si les arêtes sont munies d'un système de poids, alors le *problème du r-recouvrement* consiste à déterminer un r-recouvrement de poids minimum.

Dans [66], Edmonds a démontré que le problème du r-recouvrement est polynomial. Il a aussi montré que le polytope associé aux solutions de ce problème est complètement caractérisé par les inégalités

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq x(e) \leq 1 && \text{pour tout } e \in E, && \\
& x(\delta(v)) \geq r(v) && \text{pour tout } v \in V, && (2.9) \\
& x(E(U)) + x(\delta(U) \setminus T) \geq \frac{1}{2}\Big(\sum_{v \in U} r(v) - |T| + 1\Big) && \text{pour tout } U \subseteq V \text{ et} && (2.10) \\
& \qquad\qquad T \subseteq \delta(U) \text{ tels que } \sum_{v \in U} r(v) - |T| \text{ est impair.} &&
\end{aligned}
$$

Les inégalités (2.10), appelées *inégalités de r-recouvrement*, sont valides pour ESNDP. En effet, toute solution du problème ESNDP, associé à un graphe G et un vecteur types de connexité $r \in \mathbb{Z}_+^V$, est également un r-recouvrement.
Les inégalités (2.9) sont un cas particulier des contraintes de coupe (2.3). Elles sont induites par des coupes dont un des sous-ensembles de sommets est réduit à un seul sommet. Par la suite, nous serons amenés parfois à les différencier des contraintes de coupe générales. Nous les appelerons alors *inégalités de degré*.

Cette relaxation a un réel intérêt puisque le problème du r-recouvrement peut être résolu en temps polynomial [66]. Ainsi, par la résolution de ce problème [143], nous pouvons obtenir une borne inférieure pour ESNDP.

Grötschel, Monma et Stoer [101] ont généralisé les inégalités de r-recouvrement de la manière suivante. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $r \in \mathbb{Z}_+^V$ un vecteur types de connexité. Soient H un sous-ensemble de sommets de V, $H \neq V$, appelé *branche*, et $T \subseteq \delta(H)$ un sous-ensemble d'arêtes. Pour chaque arête $e \in T$, notons par T_e l'ensemble de ses 2 extrémités, c'est-à-dire si $e = uv$ alors $T_e = \{u, v\}$. Les ensembles T_e sont appelés les *dents*. Spécifions que si e et f sont deux arêtes parallèles de T, la distinction est faite entre T_e et T_f. Étant donnée une partition $(H_1, \ldots, H_p)$, $p \geq 3$, de H telle que

- $r(H_i) \geq 1$, pour tout $i = 1, \ldots, p$,
- pas plus de $con(H_i) - 1$ dents intersectent H_i, pour tout $i = 1, \ldots, p$,
- au moins $3H_i$ sont intersectés par des dents,
- $\sum_{i \in I_2} con(H_i) - |T|$ est impair, où $I_2 = \{i \mid con(H_i) \geq 2;\ i = 1, \ldots, p\}$.

Posons $I_1 = \{i \mid con(H_i) = 1;\ i = 1, \ldots, p\}$. L'inégalité

$$x(\delta(H_1, \ldots, H_p)) + x(\delta(H) \setminus T) \geq \frac{1}{2}(\sum_{i \in I_2} con(H_i) - |T| + 1) + |I_1| \qquad (2.11)$$

est valide pour le problème ESNDP [101]. Elle est appelée *inégalité de r-recouvrement généralisé*.

Par ailleurs, Grötschel, Monma et Stoer [101] ont donné des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que les inégalités de r-recouvrement (2.10) définissent des facettes de ESNDP(G, r). Ils ont également donné des conditions nécessaires pour les contraintes de r-recouvrement généralisé (2.11) définissent des facettes de ESNDP(G, r).

Dans [101], Grötschel, Monma et Stoer ont ramené le problème de séparation des inégalités de r-recouvrement généralisé (2.11) au problème 2.5. Ils ont ainsi montré que séparer les inégalités (2.11) est NP-difficile. Néanmoins, pour ce qui des inégalités de r-recouvrement (2.10), Padberg et Rao [143] ont donné un algorithme polynomial pour les séparer.

Chapitre 3

Types de sommets pairs et graphes série-parallèles : caractérisations polyédrales

Dans ce chapitre, nous donnons une caractérisation complète du polytope ESNDP(G, r), dans la classe des graphe série-parallèles et pour des types de sommets quelconques mais tous pairs. Nous montrons que dans ce cas, le polytope ESNDP(G, r) est donné par les contraintes triviales et les contraintes de coupe. De plus, sous ces mêmes hypothèses, nous obtenons une description linéaire complète du polyèdre associé aux solutions du problème ESNDP lorsqu'une arête peut être utilisée plusieurs fois dans la solution. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans [113]. Dans toute la suite de ce mémoire, nous allons supposer que le polytope ESNDP(G, r) est de pleine dimension, c'est-à-dire que l'ensemble des arêtes essentielles $ES(G, r)$ est vide.

3.1 Introduction

De nombreux problèmes d'optimisation combinatoire NP-difficiles, et en particulier celui de conception de réseaux fiables (sous certaines conditions sur le vecteur types de sommets), peuvent être résolus en temps polynomial dans la classe des graphes série-parallèles [2, 23, 130, 157, 165]. D'un point de vue plus pratique, les graphes série-parallèles peuvent être également très intéressants. En effet, la topologie des graphes série-parallèles (qui sont des graphes creux) est parfois demandée pour les réseaux de

télécommunication.

Lors de la dernière décennie, le polytope ESNDP(G,r) a fait l'objet de nombreux projets de recherche aussi bien pour des graphes quelconques [34, 35, 97, 98, 99, 100, 101, 161] que pour des graphes série-parallèles [6, 34, 35, 58, 60, 87, 131]. Et comme nous avons pu le remarquer dans la section 2.4, la parité des types de connexité associés aux sommets semble être un facteur influent dans l'obtention d'une caractérisation de ce polytope. Nous rappelons que les contraintes de partition sont alors dominées par les contraintes de coupe. Par conséquent, de nombreux chercheurs ont restreint leurs études à des types de sommets tous pairs. Ainsi, Mahjoub [131] a montré que le polytope ESNDP(G,r) est complètement décrit par les contraintes triviales et les contraintes de coupe quand G est un graphe série-parallèle et $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$. Par la suite, Baïou et Mahjoub [6] ont généralisé ce résultat à des types de sommets en 0 et 2 dans cette même classe de graphes. Et récemment, Didi Biha et Mahjoub l'ont étendu au cas $r(v) = k$ pour tout $v \in V$ [58], puis au cas $r \in \{0,k\}^V$ [60], où k est un entier pair non nul.

Le problème de conception de réseaux arête-fiables a également été très souvent considéré lorsque plusieurs copies d'une arête sont autorisées dans la solution [4, 33, 44, 58, 60]. En effet, cette relaxation de ESNDP n'est pas sans intérêt puisqu'elle permet de produire une borne inférieure pour ESNDP. Ce problème peut être présenté de la manière suivante.

Problème 3.1 *Étant donnés un graphe $G = (V,E)$, un vecteur types de sommets $r \in \mathbb{Z}_+^V$ et un vecteur poids $w \in \mathbb{R}^E$ associés aux arêtes de G, le problème consiste à déterminer un vecteur entier $x \in Z_+^E$ tel que le graphe $H = (V, E(x))$ est arête-fiable et $\sum_{e \in E} w(e)x(e)$ est minimum, où $E(x)$ est l'ensemble d'arêtes obtenu en remplaçant chaque arête $e \in E$ par $x(e)$ copies.*

Soit $P(G,r)$ le polyèdre associé aux solutions du problème 3.1. Dans [44], Cornuéjols, Fonlupt et Naddef ont considéré le problème 3.1 pour des types de sommets tous égaux à k où k est un entier pair. Ils ont caractérisé le polyèdre $P(G,r)$ par les contraintes de non-négativité et les contraintes de coupe dans la classe des graphes série-parallèles. Dans [4], Baïou a montré que $P(G,r)$ est complètement décrit par ces mêmes contraintes lorsque le graphe est série-parallèle et $r \in \{0,2\}^V$. Ce que Didi Biha et Mahjoub [60] ont étendu pour $r \in \{0,k\}^V$ où k est un entier pair non nul.

Une des grandes motivations dans la recherche de telles caractérisations est que le problème de séparation des contraintes de coupe est polynomial. Ainsi, le problème ESNDP peut être résolu en temps polynomial par un algorithme de coupes quand ESNDP(G,r)

est complètement décrit par les inégalités triviales et de coupe. Par conséquent, il nous a semblé intéressant de généraliser les résultats précédents à des types de sommets quelconques mais tous pairs.

Dans [63], Duffin a défini les graphes série-parallèles de la manière suivante.

Définition 3.1 Un graphe est dit *série-parallèle* s'il peut être obtenu à partir du graphe constitué de deux sommets liés par une seule arête, en appliquant d'une manière récursive les deux opérations suivantes :

θ_1 : dupliquer une arête (*i.e.* ajouter une arête joigant les mêmes sommets),
θ_2 : subdiviser une arête (*i.e.* insérer un nouveau sommet de degré deux).

Nous pouvons remarquer que les graphes série-parallèles sont connexes. De plus, ils possèdent la propriété suivante.

Lemme 3.2 *Si $G = (V, E)$ est un graphe série-parallèle avec $|V| \geq 3$, alors G contient un sommet qui est adjacent à exactement deux sommets.*

Preuve. Puisqu'un graphe série-perallèle peut être obtenu en appliquant récursivement les deux opérations mentionnées précédemment, le dernier sommet ajouté par l'opération θ_2 est adjacent à exactement deux sommets. □

Tout au long de ce chapitre, nous considérons un graphe connexe $G = (V, E)$ et un vecteur types de sommets $r \in \mathbb{Z}_+^V$. Nous rappelons qu'il existe au moins deux sommets de V qui ont un type de connexité maximum, c'est-à-dire égal à r_{max}. De plus, nous supposons que ESNDP(G, r) est de pleine dimension. Notons par $Q(G, r)$ le polytope donné par les contraintes (2.1)-(2.3). Avant de donner le résultat principal de ce chapitre, nous allons tout d'abord discuter de quelques propriétés structurales de $Q(G, r)$.

3.2 Propriétés structurales de $Q(G, r)$

Soit x une solution de $Q(G, r)$. Durant toute la démonstration du résultat principal de ce chapitre, nous serons amenés à considérer la restriction de x dans un graphe obtenu

à partir de G en contractant un sous-ensemble d'arêtes. Ainsi, nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.3 *Soit $F \subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes qui induit un sous-graphe connexe de G. Soit $x' \in \mathbb{R}^{E \setminus F}$ la restriction de x sur $E \setminus F$. Alors x' est une solution de $Q(G/F, r_F)$.*

Preuve. Il est évident que x' satisfait les inégalités triviales (2.1) et (2.2) de $Q(G/F, r_F)$. Par ailleurs, toute coupe de G/F est également une coupe de G. Ainsi, les inégalités de coupe (2.3) sont aussi satisfaites par x'. Par conséquent, $x' \in Q(G/F, r_F)$. □

Lemme 3.4 *Soient $\delta(W_1)$ et $\delta(W_2)$ deux coupes serrées pour x telles que $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ et $r(W_1 \cap W_2) \leq min\{r(W_1 \setminus W_2), r(W_2 \setminus W_1)\}$. Alors*

a) $con(W_1 \setminus W_2) = con(W_1)$,
$con(W_2 \setminus W_1) = con(W_2)$.

b) *$\delta(W_1 \setminus W_2)$ et $\delta(W_2 \setminus W_1)$ sont serrées pour x, et*
$x[W_1 \cap W_2, \overline{W_1 \cup W_2}] = 0$.

Preuve. a) Nous démontrons le résultat pour W_1, la preuve étant similaire pour W_2. Puisque $r(W_1 \cap W_2) \leq \min\{r(W_1 \setminus W_2), r(W_2 \setminus W_1)\}$, nous avons

$$\begin{aligned} r(W_1) &= \max\{r(W_1 \cap W_2), r(W_1 \setminus W_2)\} \\ &= r(W_1 \setminus W_2), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} r(\overline{W_1 \setminus W_2}) &= \max\{r(W_1 \cap W_2), r(\overline{W}_1)\} \\ &= r(\overline{W}_1). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} con(W_1 \setminus W_2) &= \min\{r(W_1 \setminus W_2), r(\overline{W_1 \setminus W_2})\} \\ &= \min\{r(W_1), r(\overline{W}_1)\} \\ &= con(W_1). \end{aligned}$$

Par symétrie, nous avons également $con(W_2 \setminus W_1) = con(W_2)$.

b) De a), nous avons

$$\begin{aligned} con(W_1 \setminus W_2) + con(W_2 \setminus W_1) &= con(W_1) + con(W_2) \\ &= x(\delta(W_1)) + x(\delta(W_2)) \\ &= x(\delta(W_1 \setminus W_2)) + x(\delta(W_2 \setminus W_1)) + 2\ x[W_1 \cap W_2, \overline{W_1 \cup W_2}]. \end{aligned}$$

Et d'après les inégalités (2.1) et (2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} &x(\delta(W_1 \setminus W_2)) = con(W_1 \setminus W_2), \\ &x(\delta(W_2 \setminus W_1)) = con(W_2 \setminus W_1), \\ &x[W_1 \cap W_2, \overline{W_1 \cup W_2}] = 0. \end{aligned}$$

□

La propriété suivante caractérise la connexité des sous-ensembles de sommets induisant des coupes serrées pour x. Elle nous sera très utile pour la suite.

Lemme 3.5 *Soit x une solution de $Q(G,r)$ telle que $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$. Si $\delta(W)$ est une coupe serrée pour x, alors $G(W)$ et $G(\overline{W})$ sont tous les deux connexes.*

Preuve. Supposons par exemple que $G(W)$ n'est pas connexe. Soit (W^1, W^2) une partition de W telle que $[W^1, W^2] = \emptyset$. Puisque G est un graphe connexe, nous avons $[W^1, \overline{W}] \neq \emptyset$ et $[W^2, \overline{W}] \neq \emptyset$.
D'après les hypothèses, nous avons

$$x[W^1, \overline{W}] > 0 \qquad \text{et} \qquad x[W^2, \overline{W}] > 0 \tag{3.1}$$

De plus, puisque $\delta(W)$ est serrée pour x, nous devons avoir $con(W) > 0$. Ainsi, au moins un des sous-ensembles W^1 et W^2 a un type de connexité strictement positif. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $r(W^1) > 0$ et $r(W^2) \leq r(W^1)$. Nous en déduisons alors

$$con(W) \leq con(W^1). \tag{3.2}$$

En effet, nous avons $con(W) = \min\{r(W), r(\overline{W})\}$.
Or $r(W) = \max\{r(W^1), r(W^2)\} = r(W^1)$. Si $r(W^1) \geq r(\overline{W})$, alors $con(W) = r(\overline{W})$. Et nous obtenons

$$\begin{aligned} con(W^1) &= \min\{r(W^1), r(\overline{W}^1)\} \\ &= \min\{r(W^1), \max\{r(W^2), r(\overline{W})\}\} \\ &= \max\{r(W^2), r(\overline{W})\} \\ &\geq r(\overline{W}) \\ &= con(W). \end{aligned}$$

Si $r(W^1) < r(\overline{W})$, alors $con(W) = r(W^1)$. Et nous obtenons

$$\begin{aligned} con(W^1) &= \min\{r(W^1), r(\overline{W}^1)\} \\ &= \min\{r(W^1), \max\{r(W^2), r(\overline{W})\}\} \\ &= r(W^1) \\ &= con(W). \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (3.2) est prouvée. Puisque $\delta(W^1)$ est une coupe de G, nous avons $x(\delta(W^1)) \geq con(W^1)$. De plus, $\delta(W^1) = [W^1, \overline{W}]$. Nous déduisons donc

$$x[W^1, \overline{W}] \geq con(W^1). \tag{3.3}$$

Par conséquent, des inégalités (3.1) et (3.3), nous obtenons

$$\begin{aligned} con(W) &= x(\delta(W)) \\ &= x[W^1, \overline{W}] + x[W^2, \overline{W}] \\ &\geq con(W^1) + x[W^2, \overline{W}] \\ &> con(W^1). \end{aligned}$$

Ce qui contredit l'inégalité (3.2). □

Les deux lemmes suivants donnent des propriétés concernant les arêtes parallèles.

Lemme 3.6 *Soient u et v deux sommets de G. Si x est un point extrême de $Q(G, r)$, alors $[u, v]$ contient au plus une arête ayant une valeur fractionnaire.*

Preuve. Le lemme est immédiat si $|[u, v]| = 1$. Supposons que $|[u, v]| \geq 2$ et qu'il existe deux arêtes e_1 et e_2 de $[u, v]$ telles que $0 < x(e_1) < 1$ et $0 < x(e_2) < 1$. Soit $x' \in \mathbb{R}^E$ le vecteur tel que

$$x'(e) = \begin{cases} x(e) + \epsilon & \text{si } e = e_1, \\ x(e) - \epsilon & \text{si } e = e_2, \\ x(e) & \text{si } e \in E \setminus \{e_1, e_2\}, \end{cases}$$

où ϵ est un scalaire non nul. Puisque toute coupe de G contient $[u, v]$ ou alors ne l'intersecte pas, toutes les coupes qui sont serrées pour x le sont également pour x'. Or, pour toute arête $e \in E$, $x'(e)$ est entier si $x(e)$ l'est aussi. Ainsi, toutes les inégalités de $Q(G, r)$ qui sont satisfaites à l'égalité par x le sont également par x'. Mais ceci contredit le fait que x est un point extrême de $Q(G, r)$. □

Lemme 3.7 *Soient u et v deux sommets de G. Soient x un point extrême fractionnaire de $Q(G, r)$ et x' la restriction de x sur $E \setminus [u, v]$. Alors x' est fractionnaire.*

Preuve. Puisque x est un point extrême fractionnaire de $Q(G,r)$, x est l'unique solution d'un système dont les membres droits des équations sont entiers et tous les coefficients sont 0 ou 1. Par conséquent, x' doit contenir au moins deux composantes fractionnaires. Or, d'après le lemme 3.6, $[u,v]$ contient au plus une seule arête ayant une valeur fractionnaire. Donc, x' est fractionnaire. □

3.3 ESNDP(G,r) dans les graphes série-parallèles

Le résultat principal de ce chapitre donne une description complète de ESNDP(G,r) par les inégalités triviales (2.1), (2.2] et de coupe (2.3) lorsque G est série-parallèle et $r(v)$ est pair pour tout $v \in V$. Il est énoncé dans le théorème suivant.

Théorème 3.8 *Si $G=(V,E)$ est un graphe série-parallèle et $r(v)$ est pair pour tout $v \in V$, alors ESNDP(G,r) = $Q(G,r)$.*

Preuve. La démonstration est par récurrence sur le nombre d'arêtes. Il n'est pas difficile de voir que le théorème est vrai pour tout graphe ayant au plus deux arêtes. Supposons qu'il est vrai pour tout graphe série-parallèle ayant au plus m arêtes, et supposons que G contient exactement $m+1$ arêtes. Supposons, au contraire, que ESNDP(G,r) $\neq Q(G,r)$. Puisque les inégalités (2.1)-(2.3) sont valides pour ESNDP(G,r), nous avons ESNDP$(G,r) \subseteq Q(G,r)$. De plus, toute solution entière de $Q(G,r)$ est également une solution de ESNDP(G,r). Par conséquent il doit exister un point extrême fractionnaire $x \in \mathbb{R}^E$ de $Q(G,r)$.

Assertion 3.8.1 $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$.

Preuve. Supposons qu'il existe une arête $e_0 \in E$ telle que $x(e_0)=0$. Soit x' la restriction de x dans le graphe $G-e_0$. Il est clair que x' appartient à $Q(G-e_0,r)$. De plus, il n'est pas difficile de voir que x' est un point extrême de $Q(G-e_0,r)$. D'après le lemme 3.7, x' est fractionnaire, ce qui contredit notre hypothèse de récurrence. □

Soit E_1 l'ensemble des arêtes e de E telles que $x(e)=1$. Puisque x est un point extrême de $Q(G,r)$, il existe une famille de coupes $\{\delta(W_i);\ i=1,\ldots,s\}$ telle que x soit l'unique solution du système

$$(3.4)\quad \begin{cases} x(e)=1 & \text{pour tout } e \in E_1, \\ \\ x(\delta(W_i)) = con(W_i) & \text{pour } i=1,\ldots,s, \end{cases}$$

où $|E| = |E_1| + s$. Nous rappelons que, par le lemme 3.5, les sous-graphes $G(W_i)$ et $G(\overline{W_i})$ sont connexes, pour $i = 1, \ldots, s$.

Une famille de sous-ensembles $\{S_i \subseteq V;\ i = 1, \ldots, s\}$ est dite *emboitée* si $S_i \subset S_j$ ou $S_j \subset S_i$ ou $S_i \cap S_j = \emptyset$, pour tout $i \neq j$,. Une famille de coupes $\{\delta(S_i);\ i = 1, \ldots, s\}$ est *laminaire* si la famille $\{S_i \subseteq V;\ i = 1, \ldots, s\}$ est emboitée. Pour des types de connexité tous égaux à 2, Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [44] ont montré que le système qui défini un point extrême du polyèdre associé aux solutions du problème 3.1 peut être choisi de telle manière que les coupes appartenant à ce système forment une famille laminaire. Nous allons étendre, dans la prochaine assertion, cette notion de laminarité des coupes à des types de sommets tous pairs, en nous restreignant néanmoins à certaines coupes.

Assertion 3.8.2 Soit $\delta(W)$ une coupe serrée pour x. Alors le système (3.4) peut être choisi de telle manière que si $\delta(W_i)$ vérifie $r(W \setminus W_i) \leq \min\{r(W \cap W_i), r(\overline{W \cup W_i})\}$ ou $r(W \cap W_i) \leq \min\{r(W \setminus W_i), r(W_i \setminus W)\}$, alors $W_i \subseteq W$ ou $W_i \subseteq \overline{W}$.

Preuve. Supposons qu'il existe une coupe $\delta(W_i)$ du système (3.4) telle que $r(W \cap W_i) \leq \min\{r(W \setminus W_i), r(W_i \setminus W)\}$ (la démonstration est similaire si $r(W \setminus W_i) \leq \min\{r(W \cap W_i), r(\overline{W \cup W_i})\}$).
Par le lemme 3.4, les coupes $\delta(W \setminus W_i)$ et $\delta(W_i \setminus W)$ sont serrées pour x, et

$$\begin{aligned} &con(W) = con(W \setminus W_i),\\ &con(W_i) = con(W_i \setminus W),\\ &x[W \cap W_i, \overline{W \cup W_i}] = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, de cette dernière égalité, combinée avec l'assertion 3.8.1, nous obtenons $[W \cap W_i, \overline{W \cup W_i}] = \emptyset$. De plus, nous avons

$$x(\delta(W_i)) = x(\delta(W \setminus W_i)) + x(\delta(W_i \setminus W)) - x(\delta(W)).$$

Par conséquent, l'équation $x(\delta(W_i)) = con(W_i)$ est redondante par rapport aux égalités

$$\begin{aligned} &x(\delta(W)) = con(W),\\ &x(\delta(W_i \setminus W)) = con(W_i \setminus W),\\ &x(\delta(W \setminus W_i)) = con(W \setminus W_i). \end{aligned}$$

Elle peut ainsi être remplacée par ces équations dans le système (3.4). De plus, nous avons $W \setminus W_i \subseteq W$ et $W_i \setminus W \subseteq \overline{W}$. □

Assertion 3.8.3 Chaque variable $x(f)$, où $f \in E$, a un coefficient non nul dans au moins deux équations du système (3.4).

Preuve. Soit f une arête de E. Il est clair que $x(f)$ doit avoir un coefficient non nul dans au moins une équation du système (3.4). Dans le cas contraire, nous pouvons augmenter $x(f)$ et obtenir une solution satisfaisant également le système (3.4), ce qui est impossible.
Maintenant, supposons que l'arête $f = uv$ a un coefficient non nul dans exactement une équation du système (3.4). Soit (3.4)$'$ le système obtenu à partir de (3.4) en supprimant l'équation contenant $x(f)$ ainsi que les équations $x(e) = 1$ pour $e \in [u, v]$. Nous remarquons qu'aucune des variables $x(e)$, pour $e \in [u, v]$, n'apparait dans le système (3.4)$'$. Posons $F = [u, v]$ et soit x' la restriction de x sur $E \setminus F$. D'après le lemme 3.3, $x' \in Q(G/F, r_F)$. Par ailleurs, x' est une solution du système (3.4)$'$. Puisque ce dernier est un système non-singulier et chaque équation de ce système correspond à une contrainte de $Q(G/F, r_F)$, ceci implique que x' est un point extrême de $Q(G/F, r_F)$.
De plus, par le lemme 3.7, x' est fractionnaire. Étant donné que G/F est un graphe série-parallèle ayant moins d'arêtes que G, ceci contredit l'hypothèse de récurrence. □

D'après le lemme 3.2 et du fait que le graphe G est série-parallèle, il doit exister un sommet v de V qui est adjacent à exactement deux sommets v_1 et v_2 de V. Notons par F_1 (resp. F_2) l'ensemble des arêtes entre v et v_1 (resp. entre v et v_2). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$x(F_1) \geq x(F_2). \tag{3.5}$$

Dans l'assertion suivante, nous allons montrer que la coupe $\delta(v)$, si elle appartient au système (3.4), n'est pas la seule coupe contenant F_1 de ce système.

Assertion 3.8.4 Il existe une coupe $\delta(W)$ serrée pour x telle que $v \in W$, $F_1 \subseteq \delta(W)$, $|W| \geq 2$ et $|\overline{W}| \geq 2$.

Preuve. Supposons le contraire. D'après l'assertion 3.8.3, chaque variable $x(e)$, où $e \in F_1$, apparait dans au moins deux équations du système (3.4). Puisque G contient au moins deux sommets de type de connexité maximum, les équations suivantes doivent apparaitre dans le système (3.4),

$$\begin{aligned} &x(\delta(v)) = r(v), \\ &x(e) = 1 \qquad\qquad \text{pour tout } e \in F_1. \end{aligned}$$

Nous avons, $x(\delta(v)) = x(F_1) + x(F_2)$. Or, par le lemme 3.6, au plus une arête de F_2 peut avoir une valeur fractionnaire. De plus, $x(\delta(v))$ et $x(F_1)$ sont entiers. Donc, nous avons $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_2$, et l'équation $x(\delta(v)) = r(v)$ est redondante dans le système (3.4). Ainsi nous obtenons une contradiction. □

D'après l'assertion 3.8.4, il existe une coupe $\delta(W)$, serrée pour x, contenant F_1. Puisque, d'après le lemme 3.5, $G(W)$ et $G(\overline{W})$ sont connexes, la coupe $\delta(W)$ est telle que $F_2 \subseteq E(W)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\delta(W)$ est une coupe du système (3.4). Nous pouvons également supposer que, pour toute coupe $\delta(Z)$ du sytème (3.4) telle que $F_1 \subseteq \delta(Z)$ et $F_2 \subseteq E(Z)$, nous avons $r(Z \setminus \{v\}) \geq r(W \setminus \{v\})$. Posons $W' = W \setminus \{v\}$ (voir figure 3.1).

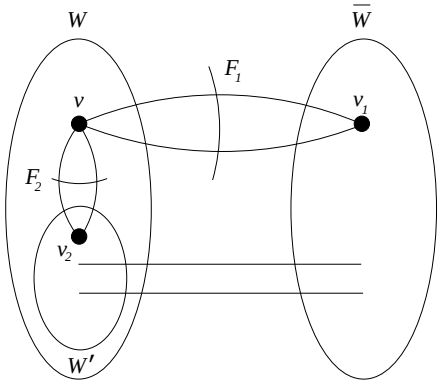

FIG 3.1

Dans la suite de cette démonstration, nous allons étudier la coupe $\delta(W)$. Plus particulièrement, nous allons nous intéresser aux types de connexité de v et W', puis à la relation que cette coupe permet d'établir entre $x(F_1)$ et $x(F_2)$.

Assertion 3.8.5 $x(F_1) - x(F_2) \leq con(W) - con(W')$.

Preuve. Puisque $\delta(W)$ est une coupe serrée pour x, nous avons

$$x(\delta(W)) = x(F_1) + x[W', \overline{W}] = con(W).$$

Par le fait que $x \in Q(G, r)$, nous avons aussi

$$x(\delta(W')) = x(F_2) + x[W', \overline{W}] \geq con(W').$$

Par conséquent, nous obtenons $x(F_1) - x(F_2) \leq con(W) - con(W')$. □

Assertion 3.8.6 $r(v) > r(W')$.

Preuve. Supposons, au contraire, que $r(v) \leq r(W')$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} con(W) &= \min\{r(W), r(\overline{W})\} \\ &= \min\{\max\{r(v), r(W')\}, r(\overline{W})\} \\ &= \min\{r(W'), r(\overline{W})\}. \end{aligned}$$

Par définition de $con(W')$, nous avons

$$\begin{aligned} con(W') &= \min\{r(W'), r(\overline{W'})\} \\ &= \min\{r(W'), \max\{r(v), r(\overline{W})\}\}. \end{aligned}$$

Si $r(v) \geq r(\overline{W})$, alors, puisque par hypothèse $r(W') \geq r(v)$, il en découle que $r(W') \geq r(\overline{W})$. Ainsi, nous avons $con(W) = r(\overline{W})$. Par ailleurs, nous avons également $con(W') = \min\{r(W'), r(v)\} = r(v)$. Par conséquent, $con(W) \leq con(W')$.
Si $r(v) < r(\overline{W})$, alors $con(W') = \min\{r(W'), r(\overline{W})\} = con(W)$. Finalement, nous déduisons

$$con(W) \leq con(W'). \tag{3.6}$$

Et par l'assertion 3.8.5, il en résulte que $x(F_1) \leq x(F_2)$. Donc, par l'inégalité (3.5), $x(F_1) = x(F_2)$. Cette dernière égalité combinée avec l'assertion 3.8.5 et l'inégalité (3.6) nous donne $con(W) = con(W')$.
Nous allons maintenant montrer que l'équation $x(\delta(v)) = r(v)$ ne fait pas partie du système (3.4). Pour cela, supposons le contraire. Par hypothèse, G contient au moins deux sommets ayant un type de connexité maximum. Donc, $con(\{v\}) = r(v)$. Puisque $\delta(W)$ est une coupe serrée pour x, nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(W)) &= x(F_1) + x[W', \overline{W}] \\ &= con(W) \\ &= con(W'). \end{aligned}$$

Or $x(F_1) = x(F_2)$, donc

$$\begin{aligned} x(\delta(W')) &= x(F_2) + x[W', \overline{W}] \\ &= x(F_1) + x[W', \overline{W}] \\ &= con(W'). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2\, x[W', \overline{W}] &= 2\, con(W') - (x(F_1) + x(F_2)) \\ &= 2\, con(W') - x(\delta(v)) \\ &= 2\, con(W') - r(v). \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$x[W', \overline{W}] = con(W') - \frac{r(v)}{2}.$$

Puisque $con(W')$ est entier et $r(v)$ est pair, $x[W', \overline{W}]$ est entier. Or $x(F_1) + x[W', \overline{W}] = con(W')$ et $x(F_1) = x(F_2)$. Par conséquent, $x(F_1)$ et $x(F_2)$ sont entiers. Or, d'après le lemme 3.6, F_1 et F_2 ne peuvent pas avoir plus d'une valeur fractionnaire. Ainsi, nous obtenons $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1 \cup F_2$. Mais cela implique que l'équation $x(\delta(v)) = r(v)$ est redondante dans le système (3.4), une contradiction.
Par conséquent, $x(\delta(v)) = r(v)$ n'est pas une équation du système (3.4). Soit $\delta(W_i)$ une coupe du système (3.4) contenant F_1 et telle que $F_2 \subseteq E(W_i)$. Remarquons que $\delta(W_i)$ peut être égal à $\delta(W)$. D'après l'hypothèse de minimalité de type de connexité sur $W \setminus \{v\}$, nous avons $r(W_i \setminus \{v\}) \geq r(W \setminus \{v\}) = r(W')$. Comme $r(v) \leq r(W')$, nous obtenons $r(W_i \setminus \{v\}) \geq r(v)$, et ainsi $con(W_i) = con(W_i \setminus \{v\})$. Puisque $x(F_1) = x(F_2)$, la coupe $\delta(W_i \setminus \{v\})$ est serrée pour x. Donc, dans le système (3.4), nous pouvons remplacer toutes les équations $x(\delta(W_i)) = con(W_i)$ telles que $F_1 \subseteq \delta(W_i)$ et $F_2 \subseteq E(W_i)$ par $x(\delta(W_i \setminus \{v\})) = con(W_i \setminus \{v\})$. Soient $(3.4)^*$ le système ainsi obtenu et x' la restriction de x sur $E \setminus F_1$. D'après le lemme 3.7, x' est fractionnaire. De plus, par le lemme 3.3, $x' \in Q(G/F_1, r_{F_1})$. Soit $(3.4)^{*\prime}$ le système obtenu à partir du système $(3.4)^*$ en supprimant les équations $x(e) = 1$ pour $e \in F_1$. Nous remarquons qu'aucune variable $x(e)$, où $e \in F_1$, n'apparait dans le système $(3.4)^{*\prime}$, et que x' est une solution de ce système. Or, G/F_1 est un graphe série-parallèle et $|E \setminus F_1| < |E|$. Donc, d'après l'hypothèse de récurrence, $Q(G/F_1, r_{F_1})$ est entier. Puisque x' est une solution fractionnaire de $Q(G/F_1, r_{F_1})$, il doit exister une solution entière y' de $Q(G/F_1, r_{F_1})$ qui est également une solution du système $(3.4)^{*\prime}$. Par ailleurs, puisque $x(F_1) = x(F_2)$, F_1 et F_2 sont de même cardinalité. Posons $F_1 = \{e_1, \ldots, e_t\}$ et $F_2 = \{f_1, \ldots, f_t\}$. Soit $y \in \mathbb{R}^E$ la solution donnée par

$$y(e) = \begin{cases} y'(e) & \text{si } e \in E \setminus F_1, \\ y'(f_i) & \text{si } e = e_i; \quad i = 1, \ldots, t. \end{cases}$$

Nous allons montrer que y est une solution du système (3.4). Tout d'abord, remarquons que $y(e) = 1$ pour toute arête $e \in E$ telle que $x(e) = 1$, c'est-à-dire $e \in E_1$. Considérons maintenant une coupe $\delta(W_i)$ du système (3.4).

- Si $F_1 \cap \delta(W_i) = \emptyset$, alors $\delta(W_i)$ est aussi une coupe du système $(3.4)^{*\prime}$. Donc $\delta(W_i)$ est serrée pour y'. Et ainsi $y(\delta(W_i)) = y'(\delta(W_i)) = con(W_i)$.
- Si $F_1 \subseteq \delta(W_i)$, alors $\delta(W_i)$ est différent de $\delta(v)$. Ainsi, nous pouvons supposer que $v \in W_i$ et que, par le lemme 3.5, $F_2 \subseteq E(W_i)$. Or, nous avons montré ci-dessus que, dans ce cas, $con(W_i) = con(W_i \setminus \{v\})$ et $\delta(W_i \setminus \{v\})$ est une coupe du

système $(3.4)^{*\prime}$. Donc, $\delta(W_i \setminus \{v\})$ est serrée pour y'. Du fait que $y(F_1) = y(F_2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} y(\delta(W_i)) &= y(F_1) + y[W_i \setminus \{v\}, \overline{W}_i] \\ &= y(F_2) + y[W_i \setminus \{v\}, \overline{W}_i] \\ &= y(\delta(W_i \setminus \{v\})) \\ &= y'(\delta(W_i \setminus \{v\})) \\ &= con(W_i \setminus \{v\}) \\ &= con(W_i). \end{aligned}$$

Et ainsi, $\delta(W_i)$ est serrée pour y.

Par conséquent, y est une solution du système (3.4). Puisque $y \neq x$, ceci contredit le fait que x soit la solution unique du système (3.4). □

Assertion 3.8.7 $r(W') > 0$.

Preuve. Supposons que $r(W') = 0$. D'après l'assertion 3.8.3, il existe une coupe, disons $\delta(W_2)$, du système (3.4) qui contient F_2. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in W_2$. Puisque $r(W') = 0$, nous avons $r(W \setminus W_2) = 0$. Ainsi, par l'assertion 3.8.2, il s'en suit que $W_2 \subseteq W$. Par conséquent, $W_2 = \{v\}$. De plus, puisque $\delta(W_2)$ est une coupe du système (3.4), il doit exister une arête $f \in F_2$ telle que $0 < x(f) < 1$. En effet, supposons, au contraire, que $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_2$. D'après le lemme 3.6, F_1 peut contenir au plus une arête fractionnaire. Puisque $r(v)$ est entier, nous avons donc $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1$. Et l'équation $x(\delta(W_2)) = con(W_2)$ est redondante dans le système (3.4), une contradiction. Ainsi, F_2 contient une arête f qui possède une valeur fractionnaire. Cette arête apparait dans exactement une équation du système (3.4), en l'occurrence $x(\delta(v)) = r(v)$. Mais ceci contredit l'assertion 3.8.3□

Assertion 3.8.8 L'équation $x(\delta(v)) = r(v)$ n'appartient pas au système (3.4).

Preuve. Supposons le contraire, c'est-à-dire que $\delta(v)$ est une coupe du sytème (3.4). Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe une arête f_1 de F_1 dont la valeur $x(f_1)$ est fractionnaire. En effet, si $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1$, alors nous devons avoir également $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_2$. Sinon, il existerait au moins deux arêtes de F_2 dont les valeurs seraient fractionnaires, contredisant ainsi le lemme 3.6. Mais ceci implique que l'équation $x(\delta(v)) = r(v)$ est redondante dans le système (3.4), une contradiction. D'une manière similaire, nous pouvons montrer qu'il doit exister une arête f_2 de F_2 dont la valeur $x(f_2)$ est fractionnaire. D'après le lemme 3.6, nous avons $x(e) = 1$ pour

tout $e \in F_1 \setminus \{f_1\}$ et $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_2 \setminus \{f_2\}$.
D'autre part, par l'assertion 3.8.6, nous avons $con(W) = r(v)$. Puisque $\delta(W)$ et $\delta(v)$ sont deux coupes serrées pour x, nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(W)) &= x(F_1) + x[W', \overline{W}] = con(W) = r(v), \\ x(\delta(v)) &= x(F_1) + x(F_2) = r(v). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $x[W', \overline{W}] = x(F_2)$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} x(\delta(W')) &= x(F_2) + x[W', \overline{W}] \\ &= 2\, x(F_2) \\ &\geq con(W'). \end{aligned}$$

De l'assertion 3.8.6, nous avons également $con(W') = r(W')$. Étant donné que $x(f_2)$ est fractionnaire, $2\, x(F_2)$ n'est pas pair. Par contre $r(W')$ est pair. Nous en déduisons donc

$$x(F_2) > \frac{r(W')}{2}. \tag{3.7}$$

Puisque $x(\delta(v)) = x(F_1) + x(F_2) = r(v)$, ceci implique, par l'inégalité (3.7), que

$$x(F_1) < r(v) - \frac{r(W')}{2}. \tag{3.8}$$

Maintenant, d'après l'assertion 3.8.3, il doit exister une autre coupe $\delta(W_2)$ du système (3.4), différente de $\delta(v)$, et qui contient f_2. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in \overline{W}_2$. D'après le lemme 3.5, $F_1 \subseteq E(\overline{W}_2)$. Posons $W_2' = \overline{W}_2 \setminus \{v\}$ (voir figure 3.2).

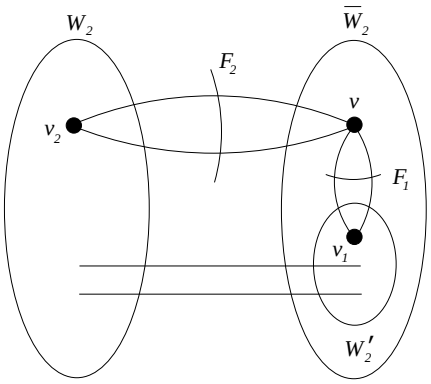

FIG 3.2

Nous allons maintenant montrer que

$$x(\delta(W_2')) \geq r(v). \tag{3.9}$$

Pour cela, supposons au contraire que $x(\delta(W_2')) < r(v)$. Puisque $x(\delta(W_2')) \geq con(W_2')$, nous avons alors $con(W_2') < r(v)$. Par conséquent, $r(W_2') < r(v)$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} con(W_2') &= \min\{r(W_2'), r(\overline{W}_2')\} \\ &= \min\{r(W_2'), \max\{r(v), r(W_2)\}\}. \end{aligned}$$

Or $\max\{r(v), r(W_2)\} \geq r(v)$ et $con(W_2') < r(v)$. Donc $con(W_2') = r(W_2')$. Et ainsi $r(W_2') < r(v)$. Nous en déduisons alors que $r(\overline{W}_2) = r(v)$. Puisque G contient au moins deux sommets de type de connexité maximum, il en résulte que $r(W_2) \geq r(v)$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} con(W_2) &= \min\{r(W_2), r(\overline{W}_2)\} \\ &= \min\{r(W_2), r(v)\} \\ &= r(v). \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} x(\delta(W_2)) &= x(F_2) + x[W_2, W_2'] \\ &= con(W_2) \\ &= r(v). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} x(\delta(W_2')) &= x(F_1) + x[W_2, W_2'] \\ &< r(v), \end{aligned}$$

nous en déduisons $x(F_2) > x(F_1)$, une contradiction avec (3.5). Par conséquent, l'inégalité (3.9) est vérifiée. Puisque $\delta(W_2)$ est une coupe serrée pour x, par (3.7), nous avons

$$x[W_2, W_2'] < con(W_2) - \frac{r(W')}{2}. \tag{3.10}$$

Finalement, de (3.8) et (3.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} x(\delta(W_2')) &= x(F_1) + x[W_2, W_2'] \\ &< r(v) - \tfrac{r(W')}{2} + con(W_2) - \tfrac{r(W')}{2} \\ &= r(v) + con(W_2) - r(W'). \end{aligned}$$

Et de (3.9), il en résulte que $con(W_2) > r(W')$.
Maintenant, nous allons montrer que

$$r(W \cap W_2) \leq \min\{r(W \setminus W_2), r(W_2 \setminus W)\}. \tag{3.11}$$

Puisque $v \in W \setminus W_2$, d'après l'assertion 3.8.6, nous avons

$$r(W \cap W_2) \leq r(W') < r(v) = r(W \setminus W_2).$$

Or $con(W_2) > r(W')$ et $con(W_2) = \min\{r(W_2), r(\overline{W}_2)\}$. Donc $r(W') < r(W_2)$. Ainsi, $r(W_2) = r(W_2 \setminus W)$, ce qui implique que $r(W \cap W_2) \leq r(W_2 \setminus W)$.
Par conséquent, l'inégalité (3.11) est vérifiée. Puisque $v \in \overline{W}_2 \cap W$, par l'assertion 3.8.2, nous pouvons supposer que $\overline{W}_2 \subseteq W$. Mais, dans ce cas, nous avons $F_1 \subseteq E(W)$, une contradiction. □

Assertion 3.8.9 $x(F_1) - x(F_2) < r(v) - r(W')$.

Preuve. Nous avons, d'après l'assertion 3.8.6, $r(v) > r(W')$. Donc, $con(W) = r(v)$. Ainsi, par l'assertion 3.8.5, $x(F_1) - x(F_2) \leq r(v) - con(W')$. Puisque $con(W') = r(W')$, il en résulte que $x(F_1) - x(F_2) \leq r(v) - r(W')$.
Maintenant, supposons, au contraire, que l'assertion n'est pas vraie, c'est-à-dire que

$$x(F_1) - x(F_2) = r(v) - r(W').$$

Soit $\delta(W_i)$ une coupe du système (3.4) contenant F_1 telle que $v \in W_i$. Par l'assertion 3.8.8, nous avons $\delta(W_i) \neq \delta(v)$. D'après l'hypothèse de minimalité de type de connexité de $W \setminus \{v\}$, nous avons $r(W_i \setminus \{v\}) \geq r(W \setminus \{v\}) = r(W')$. Nous allons maintenant montrer que $con(W_i) \leq r(v)$. En effet, supposons au contraire que $con(W_i) > r(v)$. Il n'est pas difficile de voir que $r(W_i \setminus \{v\}) > r(v)$ et $r(\overline{W}_i) > r(v)$. Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} con(W_i) &= \min\{r(W_i), r(\overline{W}_i)\} \\ &= \min\{\max\{r(v), r(W_i \setminus \{v\})\}, r(\overline{W}_i)\} \\ &= \min\{r(W_i \setminus \{v\}), r(\overline{W}_i)\}. \end{aligned}$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} con(W_i \setminus \{v\}) &= \min\{r(W_i \setminus \{v\}), r(\overline{W_i \setminus \{v\}})\} \\ &= \min\{r(W_i \setminus \{v\}), \max\{r(v), r(\overline{W}_i)\}\} \\ &= \min\{r(W_i \setminus \{v\}), r(\overline{W}_i)\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $con(W_i \setminus \{v\}) = con(W_i)$, et

$$\begin{aligned} x(\delta(W_i \setminus \{v\})) &= x(\delta(W_i)) - x(F_1) + x(F_2) \\ &= con(W_i) - r(v) + r(W') \\ &= con(W_i \setminus \{v\}) - r(v) + r(W'). \end{aligned}$$

Par l'assertion 3.8.6, nous obtenons $x(\delta(W_i \setminus \{v\})) < con(W_i \setminus \{v\})$, ce qui est impossible.
Ainsi, $con(W_i) \leq r(v)$. De plus, nous avons $r(W_i \setminus \{v\}) = r(W')$. Sinon, puisque par hypothèse $r(W_i \setminus \{v\}) \geq r(W')$, nous aurions $r(W_i \setminus \{v\}) > r(W')$. Or $con(W_i \setminus \{v\}) =$

$\min\{r(W_i\backslash\{v\}), \max\{r(v), r(\overline{W}_i)\}\}$, et par l'assertion 3.8.6, $\max\{r(v), r(\overline{W}_i)\} > r(W')$. Donc $con(W_i \setminus \{v\}) > r(W')$. Ce qui implique que

$$\begin{aligned} x(F_2) + x[W_i \setminus \{v\}, \overline{W}_i] &= x(\delta(W_i \setminus \{v\})) \\ &\geq con(W_i \setminus \{v\}) \\ &> r(W'). \end{aligned}$$

Étant donné que

$$\begin{aligned} x(F_1) + x[W_i \setminus \{v\}, \overline{W}_i] &= x(\delta(W_i)) \\ &= con(W) \\ &\leq r(v), \end{aligned}$$

il en résulte que $x(F_1) - x(F_2) < r(v) - r(W')$. Mais ceci contredit notre hypothèse. Nous obtenons donc $r(W_i \setminus \{v\}) = r(W')$. Par conséquent, $con(W_i) = r(v)$ et $con(W_i \setminus \{v\}) = r(W')$. D'où

$$\begin{aligned} x(\delta(W_i \setminus \{v\})) &= x(\delta(W_i)) - x(F_1) + x(F_2) \\ &= con(W_i) - x(F_1) + x(F_2) \\ &= r(v) - r(v) + r(W') \\ &= r(W') \\ &= con(W_i \setminus \{v\}). \end{aligned}$$

Ainsi, la coupe $\delta(W_i \setminus \{v\})$ est serrée pour x. De ce fait, si nous remplaçons chaque équation $x(\delta(W_i)) = con(W_i)$ telle que $F_1 \subseteq \delta(W_i)$ et $v \in W_i$ par $x(\delta(W_i \setminus \{v\})) = con(W_i \setminus \{v\})$ dans le système (3.4), nous obtenons un système (3.4)$'$ qui admet x comme solution unique. Soit x' la restriction de x sur $E \setminus F_1$. Soit (3.4)$''$ le système obtenu à partir de (3.4)$'$ en supprimant toutes les équations $x(e) = 1$ pour $e \in F_1$. Il est facile de voir que x' est une solution de (3.4)$''$. De plus, par les lemmes 3.3 et 3.7, x' est une solution fractionnaire de $Q(G/F_1, r_{F_1})$. Or G/F_1 est un graphe série-parallèle contenant moins d'arêtes que G. Donc, par notre hypothèse de récurrence, $Q(G/F_1, r_{F_1})$ est entier. Comme toutes les équations du système (3.4)$''$ correspondent à des contraintes de $Q(G/F_1, r_{F_1})$, il doit exister une solution y' de $Q(G/F_1, r_{F_1})$ satisfaisant le système (3.4)$''$. Nous sommes amenés à considérer deux cas.

Cas 1 $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_1$. Puisque $x(F_1) - x(F_2)$ est entier et, par le lemme 3.6, F_2 peut avoir au plus une arête fractionnaire, nous avons également $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_2$. Soit $y \in \mathbb{R}^E$ la solution donnée par

$$y(e) = \begin{cases} y'(e) & \text{si } e = E \setminus F_1, \\ 1 & \text{si } e \in F_1. \end{cases}$$

Il est évident que y vérifie les contraintes triviales et les contraintes de coupe qui ne contiennent pas F_1. Étant donné que $x(e) = 1$ pour tout $e \in F_2$, nous avons $y'(F_2) = y(F_2) = x(F_2)$. Considérons maintenant une coupe $\delta(W_j)$ du système (3.4) contenant F_1. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in W_j$. Comme nous l'avons montré précédemment, la coupe $\delta(W_j \setminus \{v\})$ est serrée pour x. Par conséquent, l'équation $x(\delta(W_j \setminus \{v\})) = con(W_j \setminus \{v\})$ appartient au système (3.4)''. Donc, la coupe $\delta(W_j \setminus \{v\})$ est serrée pour y'. De plus, nous avons $con(W_j \setminus \{v\}) = r(W')$ et $con(W_j) = r(v)$. Ainsi

$$\begin{aligned} y(\delta(W_j)) &= y(\delta(W_j \setminus \{v\})) + y(F_1) - y(F_2) \\ &= y'(\delta(W_j \setminus \{v\})) + y(F_1) - y'(F_2) \\ &= con(W_j \setminus \{v\}) + x(F_1) - x(F_2) \\ &= con(W_j \setminus \{v\}) + r(v) - r(W') \\ &= r(W') + r(v) - r(W') \\ &= r(v) \\ &= con(W_j). \end{aligned}$$

Et la coupe $\delta(W_j)$ est serrée pour y.

Cas 2 Il existe une arête $f_1 \in F_1$ telle que $0 < x(f_1) < 1$. Or $x(F_1) - x(F_2)$ est entier. Ainsi, par le lemme 3.6, il doit exister une arête $f_2 \in F_2$ telle que $0 < x(f_2) < 1$ et $x(f_2) = x(f_1)$. Aussi, nous avons $x(F_1) - x(F_2) = |F_1| - |F_2|$. Soit $y \in \mathbb{R}^E$ la solution donnée par

$$y(e) = \begin{cases} y'(e) & \text{si } e = E \setminus F_1, \\ 1 & \text{si } e \in F_1 \setminus \{f_1\}, \\ y'(f_2) & \text{si } e = f_1. \end{cases}$$

Il est clair que y vérifie les contraintes triviales du système (3.4) ainsi que les contraintes de coupe $x(\delta(W_j)) = con(W_j)$ telles que $F_1 \cap \delta(W_j) = \emptyset$. Soit $\delta(W_j)$ une coupe du système (3.4) telle que $F_1 \subseteq \delta(W_j)$ et $v \in W_j$. Alors, suite à la discussion ci-dessus, $\delta(W_j \setminus \{v\})$ est une coupe du système (3.4)''. Ainsi $y'(\delta(W_j \setminus \{v\})) = con(W_j \setminus \{v\})$. Par ailleurs, $con(W_j \setminus \{v\}) = r(W')$ et $con(W_j) = r(v)$. Ainsi

$$\begin{aligned} y(\delta(W_j)) &= y(\delta(W_j \setminus \{v\})) + y(F_1) - y(F_2) \\ &= y'(\delta(W_j \setminus \{v\})) + y(F_1) - y'(F_2) \\ &= con(W_j \setminus \{v\}) + y(F_1) - y'(F_2) \\ &= r(W') + (|F_1| - 1 + y'(f_2)) - (|F_2| - 1 + y'(f_2)) \\ &= r(W') - |F_2| + |F_1| \\ &= r(W') + x(F_1) - x(F_2) \\ &= r(W') + r(v) - r(W') \\ &= r(v) \\ &= con(W_j). \end{aligned}$$

Par conséquent, la coupe $\delta(W_j)$ est serrée pour y.
En conclusion, dans les deux cas, y est une solution du système (3.4). Puisque $y \neq x$, nous obtenons une contradiction. □

Par les assertions 3.8.3 et 3.8.8, ainsi que par le lemme 3.5, il existe une coupe $\delta(W_{i_0})$ du système (3.4) telle que $F_2 \subseteq \delta(W_{i_0})$ et $F_1 \subseteq E(W_{i_0})$. Nous allons montrer que $con(W_{i_0}) \leq con(W') = r(W')$. Pour cela, supposons le contraire, c'est-à-dire $con(W_{i_0}) > con(W')$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} con(W_{i_0}) &= \min\{r(W_{i_0}), r(\overline{W}_{i_0})\} \\ &= \min\{r(W_{i_0}), \max\{r(W \setminus W_{i_0}), r(\overline{W \cup W}_{i_0})\}\} \\ &> r(W'). \end{aligned}$$

Puisque $v \in W_{i_0}$, nous avons alors $r(W_{i_0}) > r(W')$ et ainsi, nous devons avoir $\max\{r(W \setminus W_{i_0}), r(\overline{W \cup W}_{i_0})\} > r(W')$. Or $W \setminus W_{i_0} \subseteq W'$. Donc $r(W \setminus W_{i_0}) \leq r(W')$, et

$$r(W \setminus W_{i_0}) < r(\overline{W \cup W}_{i_0}).$$

Par ailleurs, $v \in W \cap W_{i_0}$ et, d'après l'assertion 3.8.6, $r(v) > r(W')$. Par conséquent

$$r(W \setminus W_{i_0}) < r(W \cap W_{i_0}).$$

Il en résulte ainsi que

$$r(W \setminus W_{i_0}) < \min\{r(W \cap W_{i_0}), r(\overline{W \cup W}_{i_0})\}.$$

Étant donné que $v \in W \cap W_{i_0}$, nous pouvons supposer, par l'assertion 3.8.2, que $W_{i_0} \subseteq W$. Mais ceci implique que $F_1 \subseteq \delta(W_{i_0})$, une contradiction. Donc $con(W_{i_0}) \leq con(W')$. Posons $W'_{i_0} = W_{i_0} \setminus \{v\}$. Puisque $v \in W_{i_0}$ et, par l'assertion 3.8.6, $r(v) > r(W')$, nous avons $r(W_{i_0}) > r(W')$. Par conséquent, $con(W_{i_0}) = r(\overline{W}_{i_0}) \leq r(W') < r(v)$. Étant donné que G contient au moins deux sommets de type de connexité maximum, nous avons $r(W'_{i_0}) \geq r(v)$. Par conséquent $con(W'_{i_0}) = r(v)$. D'où

$$\begin{aligned} x(\delta(W'_{i_0})) &= x(\delta(W_{i_0})) - x(F_2) + x(F_1) \\ &= con(W_{i_0}) - x(F_2) + x(F_1) \\ &\leq con(W') - x(F_2) + x(F_1) \\ &= r(W') - x(F_2) + x(F_1). \end{aligned}$$

En combinant cette dernière inégalité avec l'assertion 3.8.9, cela nous donne

$$\begin{aligned} x(\delta(W'_{i_0})) &< r(W') + r(v) - r(W') \\ &= r(v) \\ &= con(W'_{i_0}). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une contradiction qui termine la preuve de notre théorème. □

Comme nous l'avons mentionné dans la section 3.1.2, le problème de séparation des contraintes de coupe peut être résolu en temps pomynomial en utilisant un algorithme de flot maximum. Ainsi, comme conséquence immédiate du théorème 3.8, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 3.9 *Le problème ESNDP peut être résolu en temps polynomial dans la classe des graphes série-parallèles si les types de sommets sont tous pairs.* □

3.4 Polytopes liés au ESNDP(G, r)

Soient $G = (V, E)$ un graphe avec des coûts $c(e)$ pour tout $e \in E$ et $r \in \mathbb{Z}_+^V$ un vecteur types de sommets. Dans cette section, nous allons tout d'abord considérer le problème 3.1, qui consiste à déterminer un vecteur entier $x \in \mathbb{N}^E$ tel que

i) le graphe $H = (V, E(x))$ soit arête-fiable, et

ii) $\sum_{e \in E} c(e)x(e)$ soit minimum.

Ici, $E(x)$ correspond à l'ensemble d'arêtes obtenu en remplaçant chaque arête $e \in E$ par $x(e)$ copies. Cette relaxation de ESNDP est importante parce qu'elle permet de fournir une solution de coût inférieur par rapport au cas où chaque arête peut être utilisée une seule fois.

Soit $P(G, r)$ l'enveloppe convexe des solutions de ce problème, c'est-à-dire

$$P(G, r) = conv\{x \in \mathbb{Z}_+^E \mid G(E(x)) \text{ est arête-fiable}\}.$$

Il est clair que les contraintes (2.1) et (2.3) sont valides pour $P(G, r)$. En effet, $P(G, r)$ n'est rien d'autre que le dominant de ESNDP(G, r). Dans ce qui suit, en utilisant le théorème 3.8, nous allons montrer que ces inégalités suffisent pour décrire le polyèdre $P(G, r)$ quand $G = (V, E)$ est un graphe série-parallèle et $r(v)$ est pair pour tout $v \in V$.

Théorème 3.10 *Soit $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle. Si les types de connexité sont tous pairs, alors $P(G, r)$ est complètement décrit par les contraintes de non-négativité (2.1) et les contraintes de coupe (2.2).*

Preuve. La démonstration utilise la même idée que celle développée par Didi Biha et Mahjoub [57, 60]. Soit $P^*(G,r)$ le polyèdre défini par les inégalités (2.1) et (2.3), c'est-à-dire $P^*(G,r) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x \text{ vérifie (2.1) et (2.3)}\}$. Pour montrer le théorème, il nous suffit de prouver que les points extrêmes de $P^*(G,r)$ sont tous entiers. Supposons au contraire qu'il existe un point extrême fractionnaire $x \in \mathbb{R}^E$ de $P^*(G,r)$. Considérons alors le graphe $G' = (V, E')$ obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête e de E par $\lceil x(e) \rceil$ arêtes $e_1, \ldots, e_{\lceil x(e) \rceil}$. Il est clair que G' est série-parallèle. Par conséquent, d'après le théorème 3.8, $P(G',r)$ est entier. Soit $x' \in \mathbb{R}^{E'}$ la solution donnée par

$$\left\{ \begin{array}{ll} x'(e_i) = 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, \lceil x(e) \rceil - 1, \\ \\ x'(e_i) = x(e) - \lceil x(e) - 1 \rceil & \text{pour } i = \lceil x(e) \rceil. \end{array} \right\} \quad \text{si } x(e) \neq 0$$

Il n'est pas difficile de voir que x' satisfait les inégalités (2.1), (2.2) et (2.3). De plus x' est un point extrême de $P(G',r)$. En effet, supposons le contraire. Puisque $P(G',r)$ est entier, il doit exister t solutions entières, $t \geq 2$, $y'_1, \ldots, y'_t$ de $P(G',r)$ et t scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}_+$ tels que x' s'écrit comme combinaison convexe des points $y'_1, \ldots, y'_t$, c'est-à-dire

$$x' = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j y'_j \qquad \text{et} \qquad \sum_{j=1}^{t} \lambda_j = 1$$

Soient $y_1, \ldots, y_t \in \mathbb{R}^E$ les solutions définies de la manière suivante

$$y_i(e) = \sum_{j=1}^{\lceil x(e) \rceil} y'_i(e_j)$$

pour $e \in E$ et $i = 1, \ldots, t$. Il n'est pas difficile de voir que $y_1, \ldots, y_t \in P^*(G,r)$. De plus, nous avons

$$x = \sum_{j=1}^{t} \lambda_j y_j,$$

ce qui contredit le fait que x est un point extrême de $P^*(G,r)$.
Par conséquent, x' est un point extrême de $P(G',r)$. Puisque x' est fractionnaire et G' est série-parallèle, ceci contredit le théorème 3.8. □

Soit $S \subseteq V$ un sous-ensemble arbitraire de sommets. Considérons le polyèdre $P^*_S(G,r)$ obtenu à partir de $P^*(G,r)$ en ajoutant les contraintes $\{x(\delta(v)) = r(v);\ v \in S\}$. Dans [88], Goemans et Bertsimas ont montré que les programmes linéaires

$$\min\{cx \mid x \in P^*(G,r)\} \quad \text{et} \quad \min\{cx \mid x \in P^*_S(G,r)\}$$

ont la même solution optimale si les coûts $(c(e) \mid e \in E)$ satisfont l'inégalité triangulaire (c'est-à-dire $c(e) + c(f) \geq c(g)$ pour tout triplet d'arêtes (e, f, g) définissant un triangle). Ils ont fait référence à cette propriété en terme de *propriété parcimonieuse*.

Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle et $r \in \mathbb{Z}_+^V$ un vecteur types de sommets tel que $r(v)$ est pair pour tout $v \in V$. D'après le théorème 3.10, le polyèdre $P^*(G, r)$ est entier. Puisque $P_S^*(G, r)$ est une face de $P^*(G, r)$, il s'en suit que $P_S^*(G, r)$ est également entier. Par conséquent, le problème 3.1 est équivalent au programme linéaire

$$\min\{cx \mid x \in P_V^*(G, r)\}. \tag{3.12}$$

Or, pour tout sommet $v \in V$ tel que $r(v) = 0$, nous avons $x(\delta(v)) = r(v) = 0$. Ainsi, pour résoudre le programme linéaire (3.12), nous pouvons supprimer ces sommets de type de connexité nul.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème de conception de réseaux fiables pour des types de sommets tous pairs. Nous avons ainsi montré que les inégalités triviales et les inégalités de coupe sont suffisantes pour décrire complètement le polytope associé aux solutions du problème ESNDP dans la classe des graphes série-parallèles. Étant donné que le problème de séparation des contraintes de coupe est polynomial, nous avons donné un algorithme de coupes pour résoudre en temps polynomial le problème de conception de réseaux fiables. Comme conséquence, nous avons montré que les contraintes de non-négativité et les contraintes de coupe caractérisent le polyèdre quand plusieurs copies d'une arête sont autorisées.

Dans la classe des graphes série-parallèles, les inégalités triviales et celles de coupe ne sont pas suffisantes pour décrire le polytope $\mathrm{ESNDP}(G, r)$ lorsque certains sommets ont un type de connexité impair. Dans le chapitre suivant, nous nous proposons d'étudier le problème ESNDP dans ce cas de figure, c'est-à-dire pour des vecteurs types de sommets combinant des valeurs paires et impaires. Par ailleurs, si nous ne nous restreignons pas à la classe des graphes série-parallèles, de nouvelles inégalités interviennent dans la description du polytope $\mathrm{ESNDP}(G, r)$. C'est le cas par exemple des contraintes de F-partition introduites par Mahjoub [131]. Ainsi, de manière à développer un algorithme de coupes et branchements le plus efficace possible, nous nous sommes intéressés, dans le chapitre 6, à l'utilité de ces dernières inégalités dans une telle approche pour résoudre le problème de conception de réseaux fiables.

Chapitre 4

Le problème ESNDP avec des types de sommets en k et $k+1$, $k \geq 1$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de conception de réseaux fiables lorsque le vecteur types de connexité associés aux sommets prend ses valeurs dans $\{k, k+1\}$, où k est un entier non nul. Dans un premier temps, nous étudions la complexité du problème de séparation des inégalités de partition. Nous montrons que ce problème est polynomial si $r \in \{1,2\}^V$, en le ramenant à la minimisation d'une fonction sous-modulaire. Puis nous donnons une caractérisation complète du polytope ESNDP(G,r) par les contraintes triviales, de coupe et de partition, quand $k=1$ et le graphe G est série-parallèle. Par la suite, nous généralisons les contraintes dites de SP-partition, valides pour ESNDP dans la classe des graphes série-parallèles, pour des vecteurs types de sommets généraux. Ceci nous permet d'obtenir une caractérisation complète du polytope ESNDP(G,r) lorsque $r \in \{k, k+1\}^V$ et k impair, dans cette classe de graphes. Ce travail va faire l'objet d'une publication [114].

4.1 Motivation et introduction

Le problème de conception de réseaux fiables semble se compliquer lorsque le vecteur types de sommets peut prendre des valeurs impairs. En effet, pour de telles configurations, les contraintes de partition (2.7) ne sont plus dominées par les contraintes de coupe (2.3). De plus, la présence de sommets optionnels, c'est-à-dire ayant un type de connexité nul, augmente à priori cette difficulté. Ainsi, pour les quelques caractérisations du polytope ESNDP(G,r) que nous connaissons [6, 33, 58, 60, 87, 97, 131], le

problème ESNDP considéré combine ni des types de sommets pairs et impairs, ni des types de sommets nuls et impairs.

Cependant, à l'origine, le problème ESNDP est issu d'un problème de sécurisation dans les réseaux téléphoniques. Dans de tels réseaux, il existe

- des sommets spéciaux pour lesquels $r(v) = 2$,
- des sommets ordinaires pour lesquels $r(v) = 1$, et
- des sommets optionnels pour lesquels $r(v) = 0$.

Par conséquent, la réalité pratique (et industrielle) veut que nos modèles utilisent une connexité faible et mettent en jeu des types de sommets pairs et impairs. Ceci est une des raisons qui nous a amené à étudier le problème de conception de résaux fiables avec d'une part $r \in \{1,2\}^V$ et d'autre part $r \in \{0,1\}^V$. Cette dernière propriété du vecteur r est l'objet du chapitre 5.
Par ailleurs, des types de sommets supérieurs à deux vont vraisemblablement jouer un rôle prépondérant dans les réseaux futurs. C'est pourquoi, il nous a semblé intéressant d'étendre cette étude à des vecteurs $r \in \{k, k+1\}^V$, avec $k \geq 2$.

Comme nous l'avons mentionné dans la section 3.1, les graphes série-parallèles permettent d'obtenir une caractérisation complète du polytope ESNDP(G,r) sous certaines conditions sur le vecteur r. Ainsi, pour des types de sommets uniformes (pairs ou impairs), de telles caractérisations sont connues. Dans [131], Mahjoub a complètement caractérisé le polytope ESNDP(G,r) par les contraintes triviales et de coupe lorsque $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$ et G est série-parallèle. Par la suite, ce résultat a été étendu au cas $r(v) = k$ pour tout $v \in V$, où k est un entier pair, par Didi Biha et Mahjoub [58].

Lorsque tous les sommets ont un type de connexité égal à 1, Grötschel et Monma [97] ont donné une description complète du polytope ESNDP(G,r) par les contraintes triviales, de coupe et de partition. Nous faisons remarquer que cette caractérisation est valable pour un graphe G quelconque (pas nécessairement série-parallèle). Si maintenant, le vecteur types de sommets est tel que $r(v) = k$ pour tout $v \in V$, où k est un entier impair, Chopra [**?**] a introduit une nouvelle famille d'inégalités valides pour le problème 3.1 qaund G est outerplanaire (un graphe est dit *outerplanaire* s'il est constitué d'un cycle avec des cordes qui ne s'intersectent pas). Par la suite, Didi Biha et Mahjoub [58] ont étendu ces inégalités aux graphes série-parallèles. Ils ont montré que ces contraintes, appelées *contraintes de SP-partition*, sont également valides pour le problème ESNDP lorsque G est série-parallèle. De ce fait, ils ont obtenu une caractérisation complète du polytope ESNDP(G,r) par les contraintes triviales, de coupe et

de SP-partition dans la classe des graphes série-parallèles et pour des types de sommets tous égaux à un entier impair. À notre connaissance, ces caractérisations sont les seules mettant en jeu des types de connexité impairs pour le problème de conception de réseaux fiables.

Étant donné le rôle majeur que jouent les contraintes de partition lorsqu'interviennent des types de sommets impairs, la première question sur laquelle nous nous sommes penchés est celle de leur problème de séparation.

4.2 Séparation des contraintes de partition

Dans la section 2.5.3, nous avons évoqué les inégalités de partition pour le problème de conception de réseaux fiables. Introduites par Grötschel, Monma et Stoer [98, 99], ces inégalités se présentent de la manière suivante. Étant données une instance (G, r) du problème ESNDP et une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 2$, de V, posons

$$I_1 = \{i \mid con(V_i) = 1;\ i = 1, \ldots, p\},$$
$$I_2 = \{i \mid con(V_i) \geq 2;\ i = 1, \ldots, p\}.$$

Alors l'inégalité

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \begin{cases} p - 1 & \text{si } I_2 = \emptyset, \\ \left\lceil \frac{1}{2} \sum_{i \in I_2} con(V_i) \right\rceil + |I_1| & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.1}$$

est valide pour ESNDP. Par ailleurs, cette inégalité peut définir une facette pour le polytope ESNDP(G, r)[98, 99]. Dans cette section, nous nous proposons d'étudier le problème de séparation de ces contraintes.

Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque $r \in \mathbb{Z}_+^V$, le problème de séparation des inégalités (4.1) est NP-difficile. En effet, Grötschel, Monma et Stoer [100]ont considéré le problème 2.5 qui consiste à déterminer un sous-ensemble d'arêtes de cardinalité minimum déconnectant trois sommets donnés. Ils ont ramené la recherche d'une inégalité (4.1) la "plus violée" au problème 2.5. Or Dalhaus et al. [55] ont montré que le problème 2.5 est NP-difficile. De plus, Grötschel, Monma et Stoer [100] ont prouvé qu'avec un algorithme exact de séparation pour une classe d'inégalités avec certaines propriétés, il est possible de résoudre en temps polynomial le problème consistant à rechercher une inégalité la "plus violee" pour cette classe. Par conséquent, séparer les inégalités (4.1)

est un problème NP-difficile.

Cependant, sous certaines conditions sur le vecteur types de sommets, le problème de séparation des inégalités de partition peut être résolu en temps polynomial. C'est ce que nous allons montrer dans la suite de cette section.

4.2.1 Types de sommets uniformes

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $x \in \mathbb{R}_+^E$ un vecteur poids associés aux arêtes de E. Étant donnés une partition $(S_1, \ldots, S_p)$, $p \geq 2$, de l'ensemble V et deux scalaires a, $b \in \mathbb{R}$, considérons l'inégalité

$$x(\delta(S_1, \ldots, S_p)) \geq ap + b. \tag{4.2}$$

Pour certaines instances du problème ESNDP, les contraintes de partition correspondantes s'écrivent sous la forme (4.2). Un des cas le plus connu est celui où $a = 1$ et $b = -1$. En effet, sous ces hypothèses, les inégalités de partition définissent le dominant du polytope des arbres couvrants [97]. Nous rappelons que le problème de l'arbre couvrant de poids minimum n'est rien d'autre que le problème ESNDP avec des types de sommets tous égaux à 1.
Le problème de séparation des inégalités (4.2) a déjà été étudié dans la littérature [5]. Plus particulièrement, Baïou, Barahona et Mahjoub ont prouvé le résultat suivant.

Théorème 4.1 [5] *Le problème de séparation des inégalités (4.2) est polynomial.* □

En plus de montrer la complexité du problème, ils ont donné un algorithme polynomial pour séparer ces contraintes. Leur démarche est présentée brièvement ci-après.

Si $a \leq 0$, alors le problème de séparation des inégalités (4.2) peut être résolu par la recherche d'une coupe minimum. Ainsi, l'étude du problème peut se restreindre au cas $a > 0$. Ainsi, sans perte de généralité, il peut être supposé que $a = 1$. Baïou, Barahona et Mahjoub ont alors été amenés à considérer deux cas : $b \leq -1$ et $b > -1$.

Le premier cas a tout d'abord été étudié par Cunningham [51] qui a ramené le problème de séparation des inégalités (4.2) à $|E|$ problèmes de coupes minimum. Plus récemment, Barahona [11] l'a ramené à $|V|$ problèmes de coupes minimum. L'algorithme de Barahona est présenté dans la section 6.2.4.

Pour le cas $b > -1$, Baïou, Barahona et Mahjoub ont considéré le problème

$$\text{minimiser } x(\delta(S_1, \ldots, S_p)) - p$$

parmi toutes les partitions $(S_1, \ldots, S_p)$ de V telles que $p \geq 2$. En utilisant un algorithme de Queyranne [153] pour minimiser une fonction sous-modulaire symétrique, ils ont ramené le problème de séparation des inégalités (4.2) à $|V|^3$ problèmes de coupes minimum.

Dans la suite de ce travail, nous serons amenés à considérer des graphes dont tous les sommets ont un type de connexité égal à 1. Ainsi, nous énonçons le corollaire suivant.

Corollaire 4.2 [11, 51] *Lorsque $r(v) = 1$ pour tout $v \in V$, le problème de séparation des inégalités*

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1$$

est polynomial. □

4.2.2 Types de sommets en 1 et 2

Le problème de conception de réseaux fiables avec de faibles conditions de fiabilité, c'est-à-dire $r_{max} = 2$, a suscité l'attention de nombreux chercheurs. En effet, ce problème est très répandu dans la pratique. Ainsi, puisque les inégalités de partition (4.1) peuvent définir des facettes du polytope $\text{ESNDP}(G, r)$ quand $r \in \{0, 1, 2\}^V$, il est très intéressant d'étudier le problème de séparation de ces inégalités pour de tels vecteurs types de sommets.

Soient $G = (V, E)$ un graphe, $r \in \{0, 1, 2\}^V$ un vecteur types de sommets et $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 2$, une partition de V telle que $r(V_i) \geq 1$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. La contrainte de partition (4.1) s'écrit alors sous la forme

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \begin{cases} p - 1 & \text{si } I_2 = \emptyset, \\ \\ p & \text{sinon,} \end{cases} \tag{4.3}$$

où $I_2 = \{i \mid con(V_i) = 2;\ i = 1, \ldots, p\}$.

S'il existe au moins un sommet de V ayant un type de connexité nul, alors le problème de séparation des inégalités (4.3) est NP-difficile. En effet, si $r \in \{0,1\}^V$, le problème ESNDP n'est rien d'autre que le problème de l'arbre Steiner (voir chapitre 5). Et pour ce dernier problème, Grötschel, Monma et Stoer [100] ont montré que le problème de séparation des inégalités

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1 \tag{4.4}$$

induites par une partition $(V_1, \ldots, V_p)$ de V avec $r(V_i) = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, p$, est NP-difficile. Néanmoins, si le graphe G est planaire et les sommets de type 1 appartiennent à la face extérieure du graphe, Grötschel, Martin et Weismantel [96] ont prouvé que le problème de séparation des inégalités (4.4) peut être résolu en temps polynomial.

Du fait du caractère NP-difficile du problème de séparation de (4.4), nous avons restreint notre étude à des types de sommets en 1 et 2. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 4.3 *Le problème de séparation des inégalités (4.3) est polynomial si les types de sommets sont en 1 et 2.*

Preuve. Supposons que $r(v) \in \{1,2\}$ pour tout sommet $v \in V$. Nous savons, par hypothèses, qu'il existe au moins deux sommets de V ayant un type de connexité égal à 2. De plus, $r(V_i) = \max\{r(v) \mid v \in V_i\}$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Par conséquent, il existe au moins un sous-ensemble de la partition ayant un type de connexité égal à 2. Ainsi, toute partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 2$, de V est dans une des deux configurations suivantes

i) exactement un sous-ensemble de la partition est de type 2,
ii) au moins deux sous-ensembles de la partition sont de type 2.

Étudions indépendamment ces deux configurations.

Configuration i) S'il exite un unique élément de la partition ayant un type de connexité égal à 2, il n'est pas difficile de voir que $con(V_i) = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Ainsi, la contrainte de partition s'écrit

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1. \tag{4.5}$$

Considérons alors le graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ obtenu à partir de G en contractant l'ensemble des sommets de type de connexité 2. Le sommet résultant de cette contraction

étant le seul sommet de V_1 ayant un type de connexité égal à 2, nous pouvons ramener son type à 1. Ainsi, nous pouvons supposer que $r(v) = 1$ pour tout $v \in V_1$. Puisque, dans le graphe G, tous les sommets de type 2 sont dans le même sous-ensemble d'une partition de configuration i), chercher une inégalité (4.5) violée dans G se ramène à chercher une inégalité (4.5) dans G_1. Or, comme nous l'avons mentionné dans le corollaire 4.2, le problème de séparation des inégalités (4.5) peut être résolu en temps polynomial. Par conséquent, nous pouvons séparer en temps polynomial les inégalités (4.5) dans le graphe G.

Configuration ii) Pour une telle configuration, nous avons $con(V_i) = r(V_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Ainsi, $I_2 \neq \emptyset$. De ce fait, la contrainte de partition correspondante est

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p. \tag{4.6}$$

Considérons alors le problème

$$\text{minimiser } x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - p \tag{4.7}$$

avec $p \geq 2$. Ce problème est appelé *problème de la multicoupe*. Dans [5], Baïou, Barahona et Mahjoub ont montré que le problème (4.7) est équivalent à minimiser la fonction

$$g(S) = x(\delta(S)) - 2 + \min \{x(\delta_S(T_1, \ldots, T_k)) - (k-1)\},$$

où $S \subset V$ et $(T_1, \ldots, T_k)$ est une partition de S pouvant éventuellement être une partition simple, c'est-à-dire $k = 1$. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - p &= x(\delta(V_1)) + x(\delta(V_2, \ldots, V_p)) - p - 2 + 2 \\ &= x(\delta(\overline{V}_1)) - 2 + x(\delta_{\overline{V}_1}(V_2, \ldots, V_p)) - ((p-1) - 1). \end{aligned}$$

En posant, $S = \overline{V}_1$, $k = p - 1$ et $T_i = V_{i+1}$ pour tout $i = 1, \ldots, k$, nous obtenons bien la fonction g. De plus, Baïou, Barahona et Mahjoub [5] ont montré que la fonction g est sous-modulaire. Par conséquent, le minimum du problème de la multicoupe peut être obtenu en minimisant la fonction sous-modulaire g.

Plus précisément, notre problème consiste à trouver le minimum de (4.7) avec la condition qu'au moins deux sous-ensembles de la partition sont de type 2. Posons $U_2 = \{u_1, \ldots, u_s\}$ l'ensemble des sommets de type de connexité 2. Nous cherchons alors le minimum de (4.7) de telle manière qu'il existe u_{i_0}, $u_{j_0} \in U_2$, $i_0 \neq j_0$, n'appartenant pas au même sous-ensemble de la partition ainsi trouvée. Puisque (4.7) est équivalent à minimiser la fonction g, nous pouvons supposer, sans perte de généralité,

que $u_{i_0} \in S$ et $u_{j_0} \in \overline{S}$. Ainsi, pour tout couple $u_i, u_j \in U_2$, $i \neq j$, posons $U_{ij} = \{u_i, u_j\}$. Considérons alors le problème

$$(4.8) \begin{cases} \text{minimiser } g(S) \\ \\ |S \cap U_{ij}| = 1, \qquad S \subseteq V. \end{cases}$$

La condition $|S \cap U_{ij}| = 1$ du problème (4.8) peut être modélisée en associant des poids aux sommets du graphe. Ainsi, soient w_i, $w_j \in \mathbb{R}^V$ les vecteurs poids définis de la manière suivante

$$w_i(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in V \setminus U_{ij}, \\ -M & \text{si } v = v_i, \\ M & \text{si } v = v_j, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad w_j(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in V \setminus U_{ij}, \\ M & \text{si } v = v_i, \\ -M & \text{si } v = v_j, \end{cases}$$

où M est un scalaire suffisamment grand. Considérons alors les fonctions

$$h_i(S) = g(S) + w_i(S) \qquad \text{et} \qquad h_j(S) = g(S) + w_j(S),$$

où $S \subset W$. Les fonctions h_i et h_j correspondent respectivement au problème (4.8) avec les conditions $S \cap U_{ij} = \{u_i\}$ et $S \cap U_{ij} = \{u_j\}$. Le problème (4.8) est donc équivalent à minimiser

$$\{\min h_i(S), \min h_j(S)\},$$

où $S \subset V$. Puisque les fonctions g, w_i et w_j sont sous-modulaires, il est clair que les fonction h_i et h_j le sont aussi. Par conséquent, le minimum des fonctions h_i et h_j peut être trouvé en temps polynomial en utilisant l'algorithme de Schrijver [159] ou celui de Iwata, Fleischer et Fujishige [107]. Ainsi, le problème (4.8) est polynomial.

Par ailleurs, en résolvant les C_s^2 problèmes (4.8) correspondants à tous les couples de sommets distincts de U_2, et en considérant leur minimum, nous obtenons le minimum de (4.7) avec la condition que la partition ainsi trouvée est dans la configuration ii). Ainsi, le problème de séparation des contraintes (4.3), induites par des partitions de configuration ii), se ramène à une séquence de $\frac{s(s-1)}{2}$ problèmes (4.8), ces derniers étant polynomiaux. □

Remarque 4.4 *Si $r \in \{k, k+1\}^V$ avec $k \geq 2$, alors nous ne connaissons pas d'algorithme polynomial pour séparer les contraintes de partition (4.1). En effet, ces dernières s'écrivent sous la forme*

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \left\lceil \frac{1}{2}(kp + p_{k+1}) \right\rceil,$$

où p_{k+1} représente le nombre de sous-ensembles de la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ ayant un type de connexité égal à k+1. La complexité du problème de séparation de ces contraintes reste une question ouverte.

Pour des types de sommets tous égaux à 1 et 2, le problème de séparation des inégaliés de partition (4.3) est donc polynomial. Par la méthode des ellipsoïdes, il résulte que le problème ESNDP peut être résolu en temps polynomial si le polytope ESNDP(G, r) est complètement décrit par les contraintes triviales et les contraintes de partition (4.3). Dans la prochaine section, nous montrons que les graphes série-parallèles permettent une telle description de ESNDP(G, r).

4.3 Le polytope ESNDP(G,r) dans les graphes série-parallèles

Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe et $r \in \mathbb{Z}_+^V$ un vecteur types de sommets. Supposons qu'il existe au moins deux sommets de V ayant un type de connexité maximum. Supposons également que ESNDP(G, r) est de pleine dimension. Étant donnée une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, de V, nous dirons que $(V_1, \ldots, V_p)$ est une *partition de type 1* (resp. *partition de type 2*) si elle est dans la configuration i) (resp. configuration ii)) énoncée dans la preuve du théorème 4.3. Bien que la notion de partition soit une généralisation de celle de coupe, nous serons souvent amenés à faire la distinction entre ces deux notions pour des facilités de compréhension. Soit $R(G, r)$ le polytope donné par les contraintes

$$x(\delta(W)) \geq con(W) \qquad \text{pour tout } W \subset V,\ W \neq \emptyset, \tag{4.9}$$

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1 \qquad \text{pour toute partition } (V_1, \ldots, V_p) \text{ de type 1,} \tag{4.10}$$

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p \qquad \text{pour toute partition } (V_1, \ldots, V_p) \text{ de type 2,} \tag{4.11}$$

$$x(e) \geq 0 \qquad \text{pour tout } e \in E, \tag{4.12}$$

$$x(e) \leq 1 \qquad \text{pour tout } e \in E. \tag{4.13}$$

Dans la section suivante, nous allons donner quelques lemmes techniques qui nous seront utiles dans la preuve du résultat principal de ce chapitre.

4.3.1 Propriétés structurales de $R(G, r)$

Soit x une solution de $R(G, r)$. Les trois premiers lemmes nous donnent des informations sur la structure des partitions et des coupes serrées pour une x.

Lemme 4.5 *Soient $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, une partition de V serrée pour x et $\pi' = (V'_1, \ldots, V'_{p-1})$ la partition définie de la manière suivante*

$$\begin{array}{ll} V'_t = V_t & \text{pour } t = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j-1, \\ V'_i = V_i \cup V_j, & \\ V'_t = V_{t+1} & \text{pour } t = j, \ldots, p-1, \end{array}$$

pour i, $j \in \{1, \ldots, p\}$, $i < j$.

i) Si π est une partition de type 1, alors

$$x[V_i, V_j] \leq 1. \tag{4.14}$$

ii) Si π est une partition de type 2, et

ii.a) π' est une partition de type 1, alors

$$x[V_i, V_j] \leq 2, \tag{4.15}$$

ii.b) π' est une partition de type 2, alors

$$x[V_i, V_j] \leq 1. \tag{4.16}$$

De plus, si x vérifie ces inégalités à l'égalité, alors la partition π' est aussi serrée pour x.

Preuve. Nous allons démontrer le i) (le preuve du ii) est similaire). Puisque π est une partition de type 1, il est clair que π' est également de type 1. D'où

$$x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p-1})) \geq (p-1) - 1 = p - 2.$$

Or, $x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p-1})) = x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x[V_i, V_j]$ et $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p - 1$. Par conséquent,

$$\begin{array}{rcl} x[V_i, V_j] & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p-1})) \\ & \leq & p - 1 - (p-2) \\ & = & 1. \end{array}$$

De plus, si $x[V_i, V_j] = 1$, alors nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p-1})) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x[v_i, V_j] \\ &= p - 1 - 1 \\ &= p - 2. \end{aligned}$$

Donc $(V'_1, \ldots, V'_{p-1})$ est également une partition de type 1 serrée pour x. □

Lemme 4.6 *Soient $\delta(W)$ une coupe serrée pour x et (W^1, W^2) une partition de W.*

i) Si $(W^1, W^2, \overline{W})$ est une partition de type 1, alors

$$x[W^1, W^2] \geq 1. \tag{4.17}$$

ii) Si $(W^1, W^2, \overline{W})$ est une partition de type 2, alors

$$x[W^1, W^2] \geq 3 - con(W). \tag{4.18}$$

Preuve. Nous allons démontrer le i) (la preuve du ii) est similaire). Nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(W^1, W^2, \overline{W})) &= x(\delta(W)) + x[W^1, W^2] \\ &= con(W) + x[W^1, W^2]. \end{aligned}$$

Or $(W^1, W^2, \overline{W})$ est une partition de type 1. Donc au plus un des sous-ensembles parmi W^1, W^2 et $\overline{W}$ est de type 2. Par conséquent, nous avons soit $r(W) = 1$, soit $r(\overline{W}) = 1$. Ainsi $con(W) = \min\{r(W), r(\overline{W})\} = 1$. Nous obtenons donc $x[W^1, W^2] = x(\delta(W^1, W^2, \overline{W})) - 1$. De plus, $x(\delta(W^1, W^2, \overline{W})) \geq 3 - 1 = 2$. Il en résulte alors $x[W^1, W^2] \geq 1$. □

Lemme 4.7 *Soient $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, une partition de V serrée pour x, et (V_i^1, V_i^2) une partition de V_i, pour $i \in \{1, \ldots, p\}$. Soit $\pi' = (V'_1, \ldots, V'_{p+1})$ la partition définie de la manière suivante*

$$\begin{aligned} &V'_j = V_j && \text{pour } j = 1, \ldots, j-1, \\ &V'_i = V_i^1, \\ &V'_{i+1} = V_i^2, \\ &V'_j = V_{j-1} && \text{pour } j = i+2, \ldots, p+1. \end{aligned}$$

i) Si π est de type 1, et

i.a) π' est de type 1, alors

$$x[V_i^1, V_i^2] \geq 1. \tag{4.19}$$

i.b) π' est de type 2, alors

$$x[V_i^1, V_i^2] \geq 2. \tag{4.20}$$

ii) Si π est de type 2, alors

$$x[V_i^1, V_i^2] \geq 1. \tag{4.21}$$

Preuve. Nous allons démontrer le i.a) (la preuve est similaire pour i.b) et ii)). Puisque π' est une partition de type 1, nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(V_1', \ldots, V_{p+1}')) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) + x[V_i^1, V_i^2] \\ &= p - 1 + x[V_i^1, V_i^2] \\ &\geq p. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons $x[V_i^1, V_i^2] \geq 1$. □

Une conséquence directe des lemmes 4.6 et 4.7 est la suivante.

Remarque 4.8 Pour toute partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, de V (resp. coupe $\delta(W)$, $W \subseteq V$) serrée pour une solution de $R(G, r)$, les sous-graphes $G(V_i)$ pour tout $i = 1, \ldots, p$ (resp. $G(W)$ et $G(\overline{W})$) sont connexes. □

D'une manière similaire au lemme 3.3, nous pouvons montrer le lemme suivant.

Lemme 4.9 *Soit $F \subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes qui induit un sous-graphe connexe de G. Soit $x' \in \mathbb{R}^{E \setminus F}$ la restriction de x sur $E \setminus F$. Alors x' est une solution de $R(G/F, r_F)$.* □

Dans [44], Cornuéjols, Fonlupt et Naddef ont introduit la notion de familles intersectantes pour des types de sommets tous égaux à 2. En nous restreignant à certaines coupes serrées pour x, nous adaptons cette notion à des types de sommets en 1 et 2.

Lemme 4.10 *Soient $\delta(W_1)$ et $\delta(W_2)$ deux coupes serrées pour x telles que $con(W_1) = con(W_2) = 2$, $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, $\overline{W_1 \cup W_2} \neq \emptyset$ et $r(W_1 \cap W_2) = r(\overline{W_1 \cup W_2}) = 2$. Alors $\delta(W_1 \cap W_2)$ et $\delta(\overline{W_1 \cup W_2})$ sont serrées pour x et $x(e) = 0$ pour tout $e \in [W_1 \setminus W_2, W_2 \setminus W_1]$.*

Preuve. Puisque $r(W_1 \cap W_2) = 2$ et $r(\overline{W_1 \cup W_2}) = 2$, nous avons

$$con(W_1 \cap W_2) = \min\{r(W_1 \cap W_2), r(\overline{W_1 \cap W_2})\} = 2$$

et

$$con(\overline{W_1 \cup W_2}) = \min\{r(\overline{W_1 \cup W_2}), r(W_1 \cup W_2)\} = 2.$$

Ainsi

$$con(W_1 \cap W_2) + con(\overline{W_1 \cup W_2}) = con(W_1) + con(W_2).$$

Étant donné que $\delta(W_1)$ et $\delta(W_2)$ sont deux coupes serrées pour x, nous avons

$$\begin{array}{rcl} x(\delta(W_1)) + x(\delta(W_2)) & = & x(\delta(W_1 \cap W_2)) + x(\delta(\overline{W_1 \cup W_2})) + 2\ x[W_1 \setminus W_2, W_2 \setminus W_1] \\ & = & con(W_1) + con(W_2) \\ & = & con(W_1 \cap W_2) + con(\overline{W_1 \cup W_2}). \end{array}$$

D'après les inégalités (4.9) et (4.12), nous déduisons

$$\begin{array}{l} x(\delta(W_1 \cap W_2)) = con(W_1 \cap W_2), \\ x(\delta(\overline{W_1 \cup W_2})) = con(\overline{W_1 \cup W_2}), \\ x[W_1 \setminus W_2, W_2 \setminus W_1] = 0. \end{array}$$ □

Dans le lemme précédent, nous avons vu comment certaines coupes peuvent "s'emboiter" les unes avec les autres. Dans le prochain lemme, nous nous intéressons à la disposition de certaines partitions par rapport à une coupe donnée.

Lemme 4.11 *Soit $\delta(W)$ une coupe serrée pour x telle que $con(W) = 2$. Une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, de type 2 serrée pour x possède au maximum 2 éléments qui intersectent à la fois W et $\overline{W}$.*

Preuve. Supposons par exemple que V_1, V_2 et V_3 intersectent à la fois W et $\overline{W}$. Posons $F_i = E(V_i) \cap \delta(W)$ pour $i = 1, 2, 3$ (voir figure 4.1).

D'après le lemme 4.7.ii), en considérant la partition $(V_i \cap W, V_i \cap \overline{W})$ de V_i, nous avons $x(F_i) \geq 1$ pour $i = 1, 2, 3$. Or F_1, F_2 et F_3 sont trois sous-ensembles d'arêtes deux à deux disjoints de $\delta(W)$. Donc

$$\begin{array}{rcl} x(\delta(W)) & \geq & x(F_1) + x(F_2) + x(F_3) \\ & \geq & 3, \end{array}$$

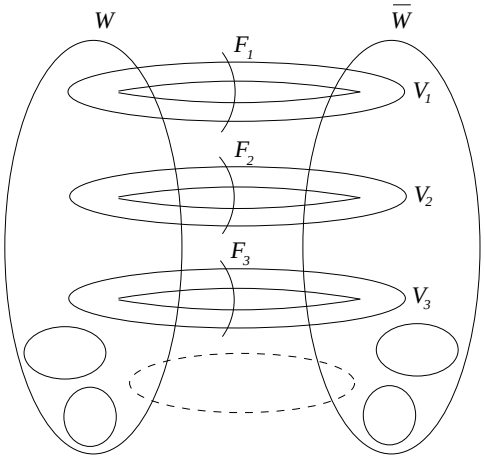

FIG 4.1

contradiction avec le fait que $x(\delta(W)) = 2$. □

Le lemme suivant est une extension de la notion de coupes emboitées (voir section 3.3) à celles de partitions emboitées avec une coupe donnée.

Lemme 4.12 *Soit $\delta(W)$ une coupe serrée pour x telle que con$(W) = 2$. Soit $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, une partition de type 2 serrée pour x telle qu'il existe exactement 2 éléments V_i et V_j, i, $j \in \{1, \ldots, p\}$, $i < j$, intersectant à la fois W et $\overline{W}$. Alors la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ définie de la manière suivante*

$$\begin{array}{ll}
V'_t = V_t & \text{pour } t = 1, \ldots, i-1, \\
V'_i = V_i \cap W, & \\
V'_{i+1} = V_i \cap \overline{W}, & \\
V'_t = V_{t-1} & \text{pour } t = i+2, \ldots, j, \\
V'_{j+1} = V_j \cap W, & \\
V'_{j+2} = V_j \cap \overline{W}, & \\
V'_t = V_{t-2} & \text{pour } t = j+3, \ldots, p+2,
\end{array}$$

avec $p' = p + 2$, est également serrée pour x.

Preuve. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $i = 1$ et $j = 2$. Posons $F_l = E(V_l) \cap \delta(W)$ pour $l = 1, 2$. D'après le lemme 4.7.ii), en considérant la partition $(V_l \cap W, V_l \cap \overline{W})$ de V_l, nous avons $x(F_l) \geq 1$, pour $l = 1, 2$. Or $F_1 \subseteq \delta(W)$, $F_2 \subseteq \delta(W)$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Puisque la coupe $\delta(W)$ est serrée pour x, nous avons donc

$$\begin{array}{rcl}
x(\delta(W)) & \geq & x(F_1) + x(F_2) \\
& = & 2.
\end{array}$$

Ainsi, nous obtenons

$$x(F_1) = x(F_2) = 1. \tag{4.22}$$

Étant donné que $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 de V, il n'est pas difficile de voir que $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ l'est aussi. De plus

$$\begin{aligned} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) + x(F_1) + x(F_2) \\ &= p + 2 \\ &= p'. \end{aligned}$$

Par conséquent, la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est serrée pour x. □

Les deux prochains lemmes sont donnés sans preuve, leurs preuves sont similaires à celles des lemmes 3.6 et 3.7 respectivement.

Lemme 4.13 *Soient u et v deux sommets de G. Si x est un point extrême de $R(G,r)$, alors $[u,v]$ contient au plus une arête ayant une valeur fractionnaire.* □

Lemme 4.14 *Soient u et v deux sommets de G. Soient x un point extrême fractionnaire de $R(G,r)$ et x' la restriction de x sur $E \setminus [u,v]$. Alors x' est fractionnaire.* □

4.3.2 Caractérisation de ESNDP(G,r)

Dans cette section nous montrons que, quand G est un graphe série-parallèle et $r \in \{1,2\}^V$, le polytope ESNDP(G,r) est donné par les contraintes triviales (4.12), (4.13), de coupe (4.9) et de partition (4.10), (4.11).

Théorème 4.15 *Si $G = (V,E)$ est un graphe série-parallèle et $r(v) \in \{1,2\}$ pour tout $v \in V$, alors ESNDP(G,r) = $R(G,r)$.*

Preuve. La démonstration est par récurrence sur le nombre d'arêtes. Il n'est pas difficile de voir que le théorème est vrai pour tout graphe possédant au plus deux arêtes. Supposons qu'il est vrai pour tout graphe série-parallèle ayant au plus m arêtes, et supposons que G possède exactement $m+1$ arêtes. Supposons au contraire que ESNDP$(G,r) \neq R(G,r)$. Puisque les inégalités (4.9)-(4.13) sont valides pour ESNDP(G,r), nous avons ESNDP$(G,r) \subseteq R(G,r)$. De plus, toute solution entière

de $R(G,r)$ est également une solution de ESNDP(G,r). Par conséquent il doit exister un point extrême fractionnaire $x \in \mathbb{R}^E$ de $R(G,r)$. Posons $S_2 = \{v \in V \mid r(v) = 2\}$. Supposons que $|S_2|$ est maximum, c'est-à-dire que pour tout graphe série-parallèle $G' = (V', E')$ tel que $|E'| = m + 1$ et tout vecteur types de sommets $r' \in \{1,2\}^{V'}$ tel que $|S'_2| > |S_2|$, où $S'_2 = \{v \in V' \mid r'(v) = 2\}$, alors nous avons ESNDP$(G', r') = R(G', r')$. Le vecteur x a alors la propriété suivante.

Assertion 4.15.1 $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$.

Preuve. Similaire à celle de l'assertion 3.8.1. □

Soit E_1 l'ensemble des arêtes e de E telles que $x(e) = 1$. Étant donné que x est un point extrême de $R(G,r)$, il doit exister une famille de coupes $\{\delta(W_i);\ i = 1, \ldots, c_1\}$, une famille de partitions de type 1 $\{(U_1^j, \ldots, U_{q_j}^j);\ j = 1, \ldots, c_2\}$ de V avec $q_j \geq 3$, $j = 1, \ldots, c_2$, et une famille de partitions de type 2 $\{(V_1^k, \ldots, V_{p_k}^k);\ k = 1, \ldots, c_3\}$ de V avec $p_k \geq 3$, $k = 1, \ldots, c_k$ telles que x soit l'unique solution du système

$$(4.23) \quad \begin{cases} x(e) = 1 & \text{pour tout } e \in E_1, \\ x(\delta(W_i)) = con(W_i) & \text{pour tout } i = 1, \ldots, c_1, \\ x(\delta(U_1^j, \ldots, U_{q_j}^j)) = q_j - 1 & \text{pour tout } j = 1, \ldots, c_2, \\ x(\delta(V_1^k, \ldots, V_{p_k}^k)) = p_k & \text{pour tout } k = 1, \ldots, c_3, \end{cases}$$

où $|E| = |E_1| + c_1 + c_2 + c_3$.

Comme nous l'avons mentionné dans la section 3.3, Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [44] ont introduit la notion de famille laminaire pour des types de sommets tous égaux à 2. Pour notre problème, nous n'avons pas une notion aussi générale que la laminarité des coupes et des partitions. Néanmoins, en utilisant un concept assez similaire bien que plus restrictif, nous avons l'assertion suivante.

Assertion 4.15.2 Soit $\delta(W)$ une coupe serrée pour x telle que $con(W) = 2$. Alors le système (4.23) peut être choisi de telle manière que

i) il n'existe pas de coupe $\delta(W_i)$, $i \in \{1, \ldots, c_1\}$, telle que $con(W_i) = 2$, $W \cap W_i \neq \emptyset$, $\overline{W \cup W}_i \neq \emptyset$ et $r(W \cap W_i) = r(\overline{W \cup W}_i) = 2$,

ii) toute partition $(V_1, \ldots, V_p)$ de type 2, serrée pour x, possède au plus un élément intersectant à la fois W et $\overline{W}$.

Preuve. i) Supposons qu'il existe une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23) telle que $con(W_i) = 2$, $W \cap W_i \neq \emptyset$, $\overline{W \cup W}_i \neq \emptyset$ et $r(W \cap W_i) = r(\overline{W \cup W}_i) = 2$. Par le lemme

4.10, les coupes $\delta(W \cap W_i)$ et $\delta(\overline{W \cup W_i})$ sont serrées pour x et $x(e) = 0$ pour tout $e \in [W \setminus W_i, W_i \setminus W]$. Ainsi

$$x(\delta(W_i)) = x(\delta(W \cap W_i)) + x(\delta(\overline{W \cup W_i})) - x(\delta(W)).$$

Par conséquent, l'équation $x(\delta(W_i)) = 2$ est redondante par rapport aux équations $x(\delta(W)) = 2$, $x(\delta(W \cap W_i)) = 2$ et $x(\delta(\overline{W \cup W_i})) = 2$. Elle peut ainsi être remplacée par ces équations dans le système (4.23).

ii) Supposons qu'il existe une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, de type 2, dans le système (4.23), telle que, sans perte de généralité, $V_1 \cap W \neq \emptyset$, $V_1 \cap \overline{W} \neq \emptyset$, $V_2 \cap W \neq \emptyset$ et $V_2 \cap \overline{W} \neq \emptyset$. D'après le lemme 4.11, il n'existe pas de partition de type 2 serrée pour x ayant au moins trois éléments intersectent à la fois W et $\overline{W}$. Ainsi, $V_i \subseteq W$ ou $V_i \subseteq \overline{W}$ pour tout $i = 3, \ldots, p$. Considérons alors la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} V'_1 &= V_1 \cap W, \\ V'_2 &= V_1 \cap \overline{W}, \\ V'_3 &= V_2 \cap W, \\ V'_4 &= V_2 \cap \overline{W}, \\ V'_i &= V_{i-2} \qquad\qquad \text{pour } i = 5, \ldots, p+2, \end{aligned}$$

et $p' = p + 2$. Nous pouvons remarquer que cette nouvelle partition ne possède aucun élément intersectant à la fois W et $\overline{W}$. D'après le lemme 4.12, la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est une partition de type 2 serrée pour x, et

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) - x(\delta(W)).$$

Par conséquent, l'équation $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p$ peut être obtenue à partir des équations $x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) = p'$ et $x(\delta(W)) = 2$. Elle peut ainsi être remplacée par ces équations dans le système (4.23). □

Assertion 4.15.3 Chaque variable $x(f)$, où $f \in E$, a un coefficient non nul dans au moins deux équations du système (4.23).

Preuve. Similaire à celle de l'assertion 3.8.3. □

Du fait que le graphe G est série-parallèle, d'après le lemme 3.2, il doit exister un sommet v de V qui est adjacent à exactement deux sommets v_1 et v_2 de V. Notons par F_1 (resp. F_2) l'ensemble des arêtes entre v et v_1 (resp. v et v_2). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$x(F_1) \geq x(F_2). \tag{4.24}$$

Dans la suite de la démonstration, nous allons étudier le type de connexité des sommets v, v_1 et v_2, ainsi que les valeurs de $x(F_1)$ et $x(F_2)$. Nous allons également regarder la structure du système (4.23) qui en découle. Intéressons nous tout d'abord au sous-ensemble d'arêtes F_1.

Assertion 4.15.4 $x(F_1) \geq 1$.

Preuve. Supposons le contraire. Puisque, par hypothèse $x(F_1) \geq x(F_2)$, nous avons aussi $x(F_2) < 1$. De plus, par le lemme 4.13, F_1 et F_2 contiennent au plus une arête ayant une valeur fractionnaire. Ainsi, nous avons $F_1 = \{f_1\}$ avec $0 < x(f_1) < 1$ et $F_2 = \{f_2\}$ avec $0 < x(f_2) < 1$.
Dans ce qui suit, nous allons montrer que toute équation qui contient $x(f_1)$ contient également $x(f_2)$ dans le système (4.23). A cette fin, supposons qu'une équation du système (4.23) contienne $x(f_1)$ et pas $x(f_2)$. Si cette équation est définie par une coupe, alors, d'après le lemme 4.6, nous avons $x(F_2) = x(f_2) \geq 1$, une contradiction. Si c'est une équation définie par une partition, nous avons, par le lemme 4.7, $x(F_2) = x(f_2) \geq 1$, une contradiction. D'une manière totalement similaire, nous pouvons montrer que toute équation du système (4.23) qui contient $x(f_2)$ contient également $x(f_1)$. Soit $\overline{x} \in \mathbb{R}^E$ la solution donnée par

$$\overline{x}(e) = \begin{cases} x(e) + \epsilon & \text{si } e = f_1, \\ x(e) - \epsilon & \text{si } e = f_2, \\ x(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f_1, f_2\}, \end{cases}$$

ou ϵ est un scalaire non nul. Il n'est pas difficile de voir que $\overline{x}$ est une solution du système (4.23) différente de x, ce qui contredit le fait que x soit un point extrême de $R(G, r)$. □

La prochaine assertion a pour conséquence de limiter le nombre et le type d'équations du système (4.23) contenant F_1.

Assertion 4.15.5 Le système (4.23) peut être choisi de telle manière que

i) si $con(W_i) = 1$, alors $\delta(W_i) \cap F_1 = \emptyset$, pour $i = 1, \ldots, c_1$,
ii) si $(U_1, \ldots, U_q)$ est une partition de type 1, alors $\delta(U_1, \ldots, U_q) \cap F_1 = \emptyset$,
iii) si $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 telle que $F_1 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$, alors il existe i, $j \in \{1, \ldots, p\}$, $i \neq j$ tels que $F_1 \subseteq [V_i, V_j]$ et $r(V \setminus (V_i \cup V_j)) = 1$.

Preuve. i) Supposons qu'il existe une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23) telle que $con(W_i) = 1$ et $F_1 \subseteq \delta(W_i)$. Nous avons, d'après l'assertion 4.15.4, $x(\delta(W_i)) \geq 1$. Puisque $x(\delta(W_i)) = 1$, nous obtenons, par l'assertion 4.15.1, $x(F_1) = 1$. Or, d'après le lemme 4.13, F_1 ne peut pas avoir plus d'une arête fractionnaire. Par conséquent, l'ensemble F_1 est réduit à une seule arête, disons e_1, telle que $x(e_1) = 1$. Donc l'équation $x(\delta(W_i)) = 1$ est redondante dans le système (4.23).

ii) Supposons maintenant qu'il existe une partition $(U_1, \ldots, U_q)$, $q \geq 3$, de type 1 du système (4.23) telle que $F_1 \subseteq \delta(U_1, \ldots, U_q)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $F_1 \subseteq [U_1, U_2]$. D'après le lemme 4.5.i), nous avons $x[U_1, U_2] \leq 1$. Puisque $F_1 \subseteq [U_1, U_2]$ et $x(F_1) \geq 1$, par l'assertion 4.15.1, il en découle que $x[U_1, U_2] = x(F_1) = 1$. Par conséquent, la partition $(U'_1, \ldots, U'_{q'})$ définie comme suit

$$\begin{aligned} &U'_1 = U_1 \cup U_2, \\ &U'_t = U_{t+1} \qquad\qquad \text{pour } t = 2, \ldots, q-1, \end{aligned}$$

avec $q' = q - 1$, est également serrée pour x. Aussi, $|F_1| = 1$. Posons $F_1 = \{e_1\}$. Nous pouvons aisément remarquer que l'équation définie par la partition $(U'_1, \ldots, U'_{q'})$ peut être obtenue à partir des équations $x(\delta(U_1, \ldots, U_q)) = q - 1$ et $x(e_1) = 1$. Ainsi, elle ne peut pas figurer parmi les équations du système (4.23). Soit (4.23)$'$ le système obtenu à partir du système (4.23) en remplaçant l'équation $x(\delta(U_1, \ldots, U_q)) = q - 1$ par l'équation $x(\delta(U'_1, \ldots, U'_{q'})) = q' - 1$. Il n'est pas difficile de voir que le système (4.23)$'$ est non-singulier et qu'il admet x comme solution unique. De plus, $\delta(U'_1, \ldots, U'_{q'}) \cap F_1 = \emptyset$.

iii) Supposons qu'il existe une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, de type 2 du système (4.23) telle que, sans perte de généralité, $F_1 \subseteq [V_1, V_2]$ et $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 2$. Considérons alors la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} &V'_1 = V_1 \cup V_2, \\ &V'_t = V_{t+1} \qquad\qquad \text{pour } t = 2, \ldots, p-1, \end{aligned}$$

où $p' = p - 1$. Étant donné que $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 2$ et $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2, il s'en suit que $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est une partition de type 2. Ainsi, d'après le lemme 4.5.ii.b), $x[V_1, V_2] \leq 1$. Or $F_1 \subseteq [V_1, V_2]$ et $x(F_1) \geq 1$. Par conséquent, par l'assertion 4.15.1, $x[V_1, V_2] = x(F_1) = 1$. Donc $|F_1| = 1$. Posons $F_1 = \{e_1\}$ avec $x(e_1) = 1$. Par ailleurs, d'après le lemme 4.5, la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est serrée pour x. De plus, l'équation $x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) = p'$ peut être obtenue à partir de celle définie par $(V_1, \ldots, V_p)$ et de $x(e_1) = 1$. Ainsi, elle ne peut pas figurer dans le système (4.23). Soit (4.23)$'$ le système obtenu à partir du système (4.23) en remplaçant l'équation $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p$ par l'équation $x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) = p'$. Il peut être aisément montré que le système (4.23)$'$ est non-singulier et qu'il admet x comme solution unique. Et

nous avons $\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'}) \cap F_1 = \emptyset$. □

Dans toute la suite de la démonstration, nous supposons que le système (4.23) vérifie l'assertion 4.15.5. Nous pouvons maintenant déterminer le type de connexité du sommet v, puis celui de v_1.

Assertion 4.15.6 $r(v) = 2$.

Preuve. Supposons que $r(v) = 1$.
a) Tout d'abord, nous allons montrer qu'aucune équation du système (4.23) ne contient à la fois F_1 et F_2. Pour cela, supposons le contraire. D'après l'assertion 4.15.5, F_1 n'apparait ni dans une coupe $\delta(W_i)$ telle que $con(W_i) = 1$, ni dans une partition de type 1 du système (4.23). Or, par la remarque 4.8, la seule coupe de ce système qui contient à la fois F_1 et F_2 est $\delta(v)$. De plus, $r(v) = 1$. Par conséquent, F_1 et F_2 apparaissent dans une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, de type 2 du système (4.23). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in V_1$ et $v_1 \in V_2$. Puisque, par la remarque 4.8, les sous-graphes $G(V_i)$, $i = 1, \ldots, p$, sont connexes, nous avons $V_1 = \{v\}$. Étant donné que $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 et $r(v) = 1$, il existe $i, j \in \{2, \ldots, p\}$, $i \neq j$, tels que $r(V_i) = r(V_j) = 2$. De ce fait, $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 du système (4.23) telle que $F_1 \subseteq [V_1, V_2]$ et $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 2$. Mais ceci contredit l'assertion 4.15.5.iii). Donc, toute équation du système (4.23) qui contient F_1 ne contient pas F_2.

b) Dans la suite, nous allons montrer que toute équation du système (4.23) qui contient F_1 peut être remplacée par une équation contenant F_2 et que

$$x(F_1) = x(F_2).$$

Supposons ainsi qu'il existe une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23) qui contient F_1. Par l'assertion 4.15.5.i), nous savons que $con(W_i) = 2$. Par a), nous avons $F_2 \cap \delta(W_i) = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in W_i$, $v_1 \in \overline{W_i}$ et $v_2 \in W_i$. Puisque, par hypothèse, $r(v) = 1$, nous avons $r(W_i \setminus \{v\}) = 2$ et $r(\overline{W_i}) = 2$. Par conséquent, $con(W_i \setminus \{v\}) = 2$ et

$$\begin{aligned} x(\delta(W_i \setminus \{v\})) &= x(\delta(W_i)) - x(F_1) + x(F_2) \\ &= 2 - x(F_1) + x(F_2) \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Il en résulte alors que $x(F_2) \geq x(F_1)$. Par l'inégalité (4.24), nous avons donc $x(F_1) = x(F_2)$. Par conséquent, la coupe $\delta(W_i \setminus \{v\})$ est serrée pour x. Elle peut ainsi remplacer la coupe $\delta(W_i)$ dans le système (4.23).

Supposons maintenant qu'il existe une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23) qui contient F_1. D'après l'assertion 4.15.5.ii), la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ est de type 2. De plus, par a), nous avons $F_2 \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in V_1$, $v_1 \in V_2$ et $v_2 \in V_1$. Considérons alors la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} V'_1 &= V_1 \setminus \{v\}, \\ V'_2 &= V_2 \cup \{v\}, \\ V'_i &= V_i \qquad\qquad \text{pour } i = 3, \ldots, p. \end{aligned}$$

Puisque $r(v) = 1$ et $(V_1, \ldots, V_p)$ est de type 2, la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ est aussi de type 2. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_p)) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(F_1) + x(F_2) \\ &= p - x(F_1) + x(F_2) \\ &\geq p. \end{aligned}$$

Par conséquent, $x(F_2) \geq x(F_1)$. Par l'inégalité (4.24), nous obtenons $x(F_1) = x(F_2)$. La partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ est donc serrée pour x et peut remplacer la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ dans le système (4.23).

c) Dans le système (4.23), nous pouvons donc remplacer toutes les équations qui contiennent F_1 par des équations contenant F_2. Soient (4.23)* le système ainsi obtenu et x' la restriction de x sur $E \setminus F_1$. D'après les lemmes 4.9 et 4.14, x' est une solution fractionnaire de $R(G/F_1, r_{F_1})$. Considérons le système (4.23)$^{*\prime}$ obtenu à partir de (4.23)* en supprimant les équations $x(e) = 1$ pour $e \in F_1$. Notons qu'aucune variable $x(e)$, où $e \in F_1$, n'apparait dans le système (4.23)$^{*\prime}$. De plus, x' est une solution de ce dernier système. Étant donné que G/F_1 est un graphe série-parallèle ayant moins d'arêtes que G, d'après l'hypothèse de récurrence, $R(G/F_1, r_{F_1})$ est entier. Puisque x' est une solution fractionnaire de $R(G/F_1, r_{F_1})$, il doit exister une solution entière y' de $R(G/F_1, r_{F_1})$ qui est également une solution du système (4.23)$^{*\prime}$. Par ailleurs, nous avons $x(F_1) = x(F_2)$. Par conséquent, F_1 et F_2 sont de même cardinalité. Posons $F_1 = \{e_1^1, \ldots, e_s^1\}$ et $F_2 = \{e_1^2, \ldots, e_s^2\}$. Soit $y \in \mathbb{R}^E$ la solution donnée par

$$y(e) = \begin{cases} y'(e) & \text{si } e \in E \setminus F_1, \\ y'(e_i^2) & \text{si } e = e_i^1; \quad i = 1, \ldots, s. \end{cases}$$

Il est clair que y est entier et ainsi $y \neq x$. Nous allons maintenant montrer que y est une solution du système (4.23). Tout d'abord, remarquons que $y(e) = 1$ pour toute arête $e \in E$ telle que $e \in E_1$. Considérons une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23).

- Si $F_1 \cap \delta(W_i) = \emptyset$, alors $\delta(W_i)$ est aussi une coupe du système (4.23)$^{*\prime}$. Donc $\delta(W_i)$ est serrée pour y'. Ainsi $y'(\delta(W_i)) = y(\delta(W_i)) = con(W_i)$.

- Si $F_1 \subseteq \delta(W_i)$, alors, d'après le lemme 4.15.5.i), $con(W_i) = 2$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in W_i$. De a), nous avons $F_2 \cap \delta(W_i) = \emptyset$. Ainsi la coupe $\delta(W_i \setminus \{v\})$ est aussi serrée pour y'. Puisque $y(F_1) = y(F_2)$, nous avons

$$\begin{aligned} y(\delta(W_i)) &= y(\delta(W_i \setminus \{v\})) - y(F_1) + y(F_2) \\ &= y'(\delta(W_i \setminus \{v\})) \\ &= 2. \end{aligned}$$

  Et la coupe $\delta(W_i)$ est serrée pour y.

Considérons maintenant une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23).

- Si $F_1 \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) = \emptyset$ alors $(V_1, \ldots, V_p)$ est aussi une partition du système $(4.23)^{*'}$. Par conséquent $(V_1, \ldots, V_p)$ est serrée pour y'. De plus, nous avons $y(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = y'(\delta(V_1, \ldots, V_p))$. Ainsi, $(V_1, \ldots, V_p)$ est également serrée pour y.
- Si $F_1 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$ alors, par l'assertion 4.15.5.ii), $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité que $F_1 \subseteq [V_1, V_2]$ et, par a), $F_2 \subseteq E(V_1)$. Or, nous avons montré, dans b), que la partition $(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\}, V_3, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 du système $(4.23)^{*\prime}$. Donc $(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\}, V_3, \ldots, V_p)$ est serrée pour y'. Puisque $y(F_1) = y(F_2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} y(\delta(V_1, \ldots, V_p) &= y(\delta(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\}, V_3, \ldots, V_p)) - y(F_1) + y(F_2) \\ &= y'(\delta(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\}, V_3, \ldots, V_p)) \\ &= p. \end{aligned}$$

  Et la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ est serrée pour y.

Ainsi, y est une solution du système (4.23). Étant donné que $y \neq x$, ceci contredit le fait que x est un point extrême de $R(G, r)$. □

Assertion 4.15.7 $r(v_1) = 2$.

Preuve. Supposons au contraire que $r(v_1) = 1$. Soit $r_1 \in \{1, 2\}^V$ le vecteur types de sommets défini de la manière suivante

$$r_1(u) = \begin{cases} r(u) & \text{si } u \in V \setminus \{v_1\}, \\ \\ 2 & \text{si } u = v_1. \end{cases}$$

Pour tout sous-ensemble de sommets $W \subseteq V$, posons

$$con_1(W) = \min\{r_1(W), r_1(\overline{W})\}.$$

Nous allons montrer que x appartient à $R(G, r_1)$. Il est clair que x satisfait les inégalités triviales. Soit $\delta(W)$ une coupe. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v_1 \in W$. Nous avons alors $r_1(\overline{W}) = r(\overline{W})$. Montrons que $x(\delta(W)) \geq con_1(W)$. Supposons $con_1(W) = 1$. Puisque $v_1 \in W$ et $r_1(v_1) = 2$, nous avons $r_1(W) = 2$. Par conséquent, $r_1(\overline{W}) = r(\overline{W}) = 1$. Ainsi, $con(W) = 1$. Et nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} x(\delta(W)) & \geq & con(W) \\ & = & 1 \\ & = & con_1(W). \end{array}$$

Supposons maintenant que $con_1(W) = 2$. Alors $r_1(W) = r_1(\overline{W}) = 2$. De plus, $r(\overline{W}) = r_1(\overline{W}) = 2$.

- Si $r(W) = 2$, alors $con(W) = 2$ et ainsi $x(\delta(W)) \geq con(W) = con_1(W)$.
- Si $r(W) = 1$, alors, d'après l'assertion 4.15.6, $v \in \overline{W}$. Étant donné que $v_1 \in W$, nous avons $F_1 \subseteq \delta(W)$. Posons $W_1 = W \cup \{v\}$. Puisqu'il existe au moins deux sommets ayant un type de connexité égal à 2 par rapport à r, nous avons $\overline{W}_1 \neq \emptyset$. Ainsi, $r(W_1) = r(\overline{W}_1) = 2$. Par conséquent $con(W_1) = 2$ et

  $$\begin{array}{rcl} x(\delta(W_1)) & = & x(\delta(W)) - x(F_1) + x(F_2) \\ & \geq & con(W_1) \\ & = & 2. \end{array}$$

  Ainsi,

  $$x(\delta(W)) \geq 2 + x(F_1) - x(F_2).$$

  Or, par hypothèse, nous avons $x(F_1) \geq x(F_2)$. Ceci implique alors que $x(\delta(W)) \geq 2 = con_1(W)$.

Par conséquent, pour toute coupe $\delta(W)$, nous avons $x(\delta(W)) \geq con_1(W)$.

Considérons maintenant une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, de V. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v_1 \in V_1$. Nous avons alors $r_1(V_i) = r(V_i)$ pour $i = 2, \ldots, p$.

- Si $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 1 par rapport à r et $r(V_1) = 2$, alors nous avons $r(V \setminus V_1) = 1$. Puisque $r_1(V_i) = r(V_i) = 1$ pour $i = 2, \ldots, p$, la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 1 par rapport à r_1, et x satisfait la contrainte définie par la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ par rapport à r_1.

- Si $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 1 par rapport à r et $r(V_1) = 1$, alors il existe un unique $i_0 \in \{2, \ldots, p\}$ telle que $r(V_{i_0}) = 2$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $i_0 = 2$. D'après l'assertion 4.15.6, $r(v) = 2$. Ainsi $v \in V_2$. D'où $F_1 \subseteq [V_1, V_2]$ et $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 par rapport à r_1. De plus, il existe au moins deux sommets ayant un type de connexité égal à 2 par rapport à r. Par conséquent, nous avons $|V_2| \geq 2$. Aussi, puisque d'après la remarque 4.8, les éléments de la partition doivent être connexes, nous avons aussi $F_2 \subseteq E(V_2)$. Considérons alors la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ définie comme suit

$$\begin{array}{ll} V'_1 = V_1 \cup \{v\}, & \\ V'_2 = V_2 \setminus \{v\}, & \\ V'_i = V_i & \text{pour } i = 3, \ldots, p. \end{array}$$

  Il n'est pas difficile de voir que $(V'_1, \ldots, V'_p)$ est une partition de type 2 par rapport à r. En effet, tous les sommets de type de connexité égal à 2 (par rapport à r) appartiennent à V_2 et ils sont en nombre supérieur ou égal à 2. Ainsi, nous avons

$$\begin{array}{rcl} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_p)) & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(F_1) + x(F_2) \\ & \geq & p. \end{array}$$

  Combinée à l'inégalité (4.24), cette inégalité implique que $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p$. Ce qui montre que x satisfait la contrainte définie par la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ par rapport à r_1.
- Si $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 par rapport à r, alors il existe au moins deux éléments de la partition ayant un type de connexité égal à 2 par rapport à r_1. Par conséquent, $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 par rapport à r_1. Et x satisfait la contrainte définie par la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ par rapport à r_1.

Par conséquent, x satisfait toutes les contraintes de partition associées au vecteur types de sommets r_1. Ainsi, $x \in R(G, r_1)$. De plus, toutes les équations du système (4.23) sont définies par des contraintes qui sont également dans $R(G, r_1)$. En effet, les seules contraintes de $R(G, r)$ qui sont modifiées par le changement du vecteur types de sommets à r_1 sont définies, d'après ce que nous venons de voir, par des coupes $\delta(W)$ telles que $con(W) = 1$ et $F_1 \subseteq \delta(W)$ et par des partitions $(V_1, \ldots, V_p)$ de type 1 par rapport à r telle que $F_1 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$. Or, d'après notre hypothèse, le système (4.23) est choisi de telle sorte que ces contraintes n'y apparaissent pas. Donc x est un point extrême fractionnaire de $R(G, r_1)$. Posons $S_2^1 = \{u \in V \mid r_1(u) = 2\}$. Nous avons $S_2^1 = S_2 \cup \{v_1\}$. Ainsi $|S_2^1| > |S_2|$. Puisque $R(G, r_1)$ contient un point extrême fractionnaire, ceci contredit l'hypothèse de maximalité de $|S_2|$, et notre assertion est prouvée.□

Nous allons maintenant montrer que $|F_1| = 2$ et que F_1 possède exactement une arête fractionnaire.

Assertion 4.15.8 $1 < x(F_1) < 2$.

Preuve. Montrons tout d'abord que $x(F_1) < 2$. Supposons au contraire que $x(F_1) \geq 2$. Si $x(F_1) > 2$, alors il est clair que F_1 n'appartient à aucune coupe du système (4.23). De plus, d'après le lemme 4.5, F_1 ne peut appartenir à aucune partition de ce système. En effet, dans le cas contraire, nous devons avoir $x(F_1) \leq 2$. Par conséquent, les arêtes de F_1 peuvent apparaitre uniquement dans les équations de type $x(e) = 1$ du système (4.23), ce qui contredit l'assertion 4.15.3.
Supposons maintenant que $x(F_1) = 2$. Puisque F_1 possède au plus une arête ayant une valeur fractionnaire, nous avons $|F_1| = 2$ et $x(e) = 1$ pour $e \in F_1$. Posons $F_1 = \{e_1, e_2\}$, avec $x(e_1) = x(e_2) = 1$. Si F_1 appartient à une coupe $\delta(W)$ du système (4.23), alors $con(W) = 2$. Ainsi, $x(\delta(W)) = x(F_1) = x(e_1) + x(e_2)$. Par conséquent, l'équation $x(\delta(W)) = 2$ est redondante par rapport aux équations $x(e_1) = 1$ et $x(e_2) = 1$.

Supposons maintenant qu'il existe une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23) telle que $F_1 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $F_1 \subseteq [V_1, V_2]$. De l'assertion 4.15.5, nous savons que $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 telle que $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 1$. Par conséquent, la partition $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$ est une partition de type 1 de V. Ainsi, par le lemme 4.5.i), nous avons $x[V_1, V_2] \leq 2$. Puisque $F_1 \subseteq [V_1, V_2]$, $x(F_1) = 2$ et $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$, nous déduisons $F_1 = [V_1, V_2]$. Ainsi $x[V_1, V_2] = 2$. Par le lemme 4.5, la partition $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$ est serrée pour x. De plus, l'équation définie par cette partition ne fait pas partie du système (4.23), car elle peut être obtenue à partir de $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p$, $x(e_1) = 1$ et $x(e_2) = 1$. Soit (4.23)$'$ le système obtenu à partir du système (4.23) en remplaçant $(V_1, \ldots, V_p)$ par $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$. Ce nouveau système est non-singulier et admet x comme unique solution. De ce fait, le système (4.23) peut être choisi de telle manière que chaque arête de F_1 n'apparait que dans une seule équation du système définissant x, en l'occurrence $x(e) = 1$. Mais ceci contredit l'assertion 4.15.3. D'où, $x(F_1) < 2$.

Montrons maintenant que $|F_1| = 2$. Étant donné que F_1 possède au plus une arête ayant une valeur fractionnaire, il est clair que $|F_1| \leq 2$. Supposons alors que $|F_1| = 1$. Par l'assertion 4.15.4, il s'en suit que $F_1 = \{e_1\}$ avec $x(e_1) = 1$. De plus, par l'assertion 4.15.6, $r(v) = 2$. En conséquence, $con(v) = 2$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x(\delta(v)) &= x(F_1) + x(F_2) \\ &= x(e_1) + x(F_2) \\ &\geq 2 \end{aligned}$$

Il en résulte alors que $x(F_2) \geq 1$. Puisque $x(F_1) \geq x(F_2)$, nous en déduisons que $x(F_2) = 1$. Et, par le lemme 4.13, ceci implique que $F_2 = \{e_2\}$ avec $x(e_2) = 1$. Nous allons montrer que le système (4.23) peut être choisi de telle sorte que e_2 apparaisse uniquement dans l'équation $x(e_2) = 1$. Si e_2 apparait dans une coupe $\delta(W)$ de ce système, alors nous avons $con(W) = 2$. En effet, si ce n'est pas le cas, nous aurions $x(\delta(W)) = x(e_2)$. L'équation $x(\delta(W)) = 1$ serait alors redondante avec l'équation $x(e_2) = 1$. De plus, puisque $x(\delta(v)) = x(e_1) + x(e_2) = 2$, nous avons $W \neq \{v\}$. Sinon, l'équation $x(\delta(W)) = 2$ serait redondante avec les équations $x(e_1) = 1$ et $x(e_2) = 1$. Sans perte de généralité, supposons que $v \in W$ et $v_2 \in \overline{W}$. Étant donné que $G(W)$ doit être connexe, nous avons $v_1 \in W$. Or, nous savons que $r(v) = r(v_1) = 2$. Donc, $r(W \setminus \{v\}) = r(\overline{W \setminus \{v\}}) = 2$. Ainsi, $con(W \setminus \{v\}) = 2$. Posons $W' = W \setminus \{v\}$. Nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(W')) &= x(\delta(W)) - x(F_2) + x(F_1) \\ &= x(\delta(W)) - x(e_2) + x(e_1) \\ &= x(\delta(W)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Par conséquent, la coupe $\delta(W')$ est serrée pour x. L'équation $x(\delta(W')) = 2$ ne fait donc pas partie du système (4.23) car elle peut être obtenue à partir de celle définie par $\delta(W)$ et $x(e_i) = 1$, pour $i = 1, 2$. Ainsi, en remplaçant $\delta(W)$ par $\delta(W')$ dans le système (4.23), nous obtenons un nouveau système non-singulier qui admet x comme unique solution.

Supposons maintenant que e_2 apparait dans une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in V_1$ et $v_2 \in V_2$. Si $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 1, alors, d'après l'assertion 4.15.5.iii), $\delta(V_1, \ldots, V_p) \cap F_1 = \emptyset$. Ainsi $v_1 \in V_1$. Considérons alors la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} &V'_1 = V_1 \setminus \{v\}, \\ &V'_2 = V_2 \cup \{v\}, \\ &V'_i = V_i \qquad\qquad \text{pour } i = 3, \ldots, p. \end{aligned}$$

Puisque $v_1 \in V'_1$ et $v \in V'_2$, par les assertions 4.15.6 et 4.15.7, nous savons que $r(v) = r(v_1) = 2$, la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ est une partition de type 2. Par conséquent $x(\delta(V'_1, \ldots, V'_p)) \geq p$. Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_p)) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(F_2) + x(F_1) \\ &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(e_2) + x(e_1) \\ &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \\ &= p - 1 \\ &< p, \end{aligned}$$

une contradiction. Ainsi, e_2 n'apparait pas dans une partition de type 1 dans le système (4.23).
Supposons maintenant que $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2. Nous sommes amenés à considérer deux cas.

Cas 1 $|V_1| = 1$, c'est-à-dire $V_1 = \{v\}$. Soit $(U_1, \ldots, U_q)$ la partition définie comme suit

$$\begin{array}{ll} U_1 = V_1 \cup V_2, & \\ U_i = V_{i+1} & \text{pour } i = 2, \ldots, p-1, \end{array}$$

avec $q = p - 1$.

- Si $v_1 \in V_2$. Puisque $F_1 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$, d'après l'assertion 4.15.5.iii), $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 1$. Par conséquent, $(U_1, \ldots, U_q)$ est une partition de type 1. Et nous avons

$$\begin{array}{rcl} x(\delta(U_1, \ldots, U_q)) & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - (x(F_1) + x(F_2)) \\ & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - (x(e_1) + x(e_2)) \\ & = & p - 2 \\ & = & q - 1. \end{array}$$

- Si $v_1 \notin V_2$, alors $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 2$ car $r(v_1) = 2$. De ce fait, $(U_1, \ldots, U_q)$ est une partition de type 2, et nous avons

$$\begin{array}{rcl} x(\delta(U_1, \ldots, U_q)) & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(F_2) \\ & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(e_2) \\ & = & p - 1 \\ & = & q. \end{array}$$

Par conséquent, la partition $(U_1, \ldots, U_q)$ est serrée pour x. De plus, l'équation définie par cette partition est redondante par rapport à celle définie par la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ et $x(e_i) = 1$ pour $i = 1, 2$. Ainsi, le système obtenu à partir du système (4.23) en remplaçant $(V_1, \ldots, V_p)$ par $(U_1, \ldots, U_q)$ est non-singulier et admet x comme unique solution.

Cas 2 $|V_1| \geq 2$. Puisque les sous-graphes induits par les éléments de la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ doivent être connexes, nous avons $v_1 \in V_1$. Considérons alors la partition $(U'_1, \ldots, U'_p)$ définie de la manière suivante

$$\begin{array}{ll} U'_1 = V_1 \setminus \{v\}, & \\ U'_2 = V_2 \cup \{v\}, & \\ U'_i = V_i & \text{pour } i = 3, \ldots, p. \end{array}$$

Or, par les assertions 4.15.6 et 4.15.7, $r(v) = r(v_1) = 2$. Puisque $v_1 \in U'_1$ et $v \in U'_2$, il est clair que la partition $(U'_1, \ldots, U'_p)$ est de type 2. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x(\delta(U'_1, \ldots, U'_p)) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(F_2) + x(F_1) \\ &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(e_2) + x(e_1) \\ &= p - 1 + 1 \\ &= p. \end{aligned}$$

Par conséquent, la partition $(U'_1, \ldots, U'_p)$ est serrée pour x. De plus, l'équation définie par cette partition ne fait pas partie du système (4.23). En effet, elle peut être obtenue à partir des équations $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p$, $x(e_i) = 1$ pour $i = 1, 2$. Considérons alors le système obtenu à partir du système (4.23) en remplaçant $(V_1, \ldots, V_p)$ par $(U'_1, \ldots, U'_p)$. Ce nouveau système est non-singulier et admet x comme unique solution.

En conclusion, nous venous de montrer que le système (4.23) peut être choisi de telle manière que $x(e_2)$ y apparaisse avec un coefficient non nul dans une seule équation, en l'occurrence $x(e_2) = 1$. Mais ceci contredit l'assertion 4.15.3. Nous en déduisons donc que $|F_1| = 2$. Or F_1 possède au plus une arête ayant une valeur fractionnaire. Étant donné que $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$, il en résulte que $x(F_1) > 1$. □

De même que nous l'avons fait pour le sous-ensemble d'arêtes F_1, nous pouvons apporter des précisions sur le type de contraintes du système (4.23) qui contiennent F_2.

Assertion 4.15.9 Le système (4.23) ne peut pas contenir

i) une coupe $\delta(W_i)$ contenant F_2 telle que $con(W_i) = 1$,
ii) une partition $(V_1, \ldots, V_p)$ de type 1 telle que $F_2 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$.

Preuve. i) Soit $\delta(W_i)$ une coupe du système (4.23) contenant F_2 et telle que $con(W_i) = 1$. Puisque $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$, il est clair que $x(F_2) \leq 1$. Si $x(F_2) = 1$ alors, d'après le lemme 4.13, nous avons $F_2 = \{e_2\}$ avec $x(e_2) = 1$. Par conséquent, l'équation $x(\delta(W_i)) = con(W_i)$ est redondante avec $x(e_2) = 1$. Supposons donc que $x(F_2) < 1$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in W_i$ et $v_2 \in \overline{W}_i$. Puisque, d'après l'assertion 4.15.8, $x(F_1) > 1$, nous avons $F_1 \cap \delta(W_i) = \emptyset$. Ainsi $v_1 \in W_i$. Considérons alors la partition (V_1, V_2, V_3) suivante

$$\begin{aligned} V_1 &= \{v\}, \\ V_2 &= W_i \setminus \{v\}, \\ V_3 &= \overline{W}_i. \end{aligned}$$

Étant donné que $r(v) = 2 = r(v_1) = 2$, nous avons $r(V_1) = r(V_2) = 2$. La partition (V_1, V_2, V_3) est donc de type 2. Par le lemme 4.6.ii), nous avons $x(F_1) = x[V_1, V_2] \geq 3 - con(W_i)$. Or $con(W_i) = 1$. Par conséquent, nous obtenons $x(F_1) \geq 2$, ce qui contredit l'assertion 4.15.8.

ii) Supposons que, dans le système (4.23), F_2 apparait dans une partition $(U_1, \ldots, U_q)$, $q \geq 3$, de type 1. Puisque $r(v) = r(v_1) = 2$, v et v_1 doivent appartenir au même sous-ensemble U_i, $i \in \{1, \ldots, q\}$, de la partition $(U_1, \ldots, U_q)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $i = 1$. Considérons alors la partition $(U'_1, \ldots, U'_{q'})$ définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} &U'_1 = \{v\}, \\ &U'_2 = U_1 \setminus \{v\}, \\ &U'_j = U_{j-1} \qquad\qquad \text{pour } j = 3, \ldots, q+1, \end{aligned}$$

avec $q' = q + 1$. Il est clair que $(U'_1, \ldots, U'_{q'})$ est une partition de type 2. D'après le lemme 4.7.i.b), ceci implique que $x(F_1) = x[U'_1, U'_2] \geq 2$, une contradiction avec l'assertion 4.15.8. □

Assertion 4.15.10 Si $x(F_2) < 1$, alors

i) toute équation (différente de $x(e) = 1$) du système (4.23) qui contient F_1 contient aussi F_2,
ii) le graphe G contient au moins trois sommets de type de connexité égal à 2.

Preuve. i) Tout d'abord, supposons qu'il existe une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23) telle que $F_1 \subseteq \delta(W_i)$ et $F_2 \cap \delta(W_i) = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $F_2 \subseteq E(W_i)$. D'après l'assertion 4.15.5.i), nous avons $con(W_i) = 2$. Considérons la partition $(\{v\}, W_i \setminus \{v\})$ de W_i. Par le lemme 4.6.ii), nous obtenons $x(F_2) \geq 1$, ce qui contredit notre hypothèse sur $x(F_2)$.
Supposons maintenant qu'il existe une partition $(V_1, \ldots, V_p)$ du système (4.23) telle que $F_1 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$ et $F_2 \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $F_2 \subseteq E(V_1)$. D'après l'assertion 4.15.5.ii), $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2. Considérons la partition $(\{v\}, V_1 \setminus \{v\})$ de V_1. Par le lemme 4.7.ii), nous avons $x(F_2) \geq 1$, ce qui contredit de nouveau notre hypothèse sur $x(F_2)$.

ii) Puisque $x(F_2) < 1$, nous avons, par le lemme 4.13, $F_2 = \{f_2\}$ avec $0 < x(f_2) < 1$. De plus, par l'assertion 4.15.8, il doit exister une arête $f_1 \in F_1$ telle que $0 < x(f_1) < 1$. D'après i), toute équation non triviale du système (4.23) qui contient $x(f_1)$ contient

également $x(f_2)$. Par conséquent, il existe une équation de ce système contenant $x(f_2)$ et pas $x(f_1)$. En effet, si ce n'est pas le cas, la solution $\overline{x} \in \mathbb{R}^E$ donnée par

$$\overline{x}(e) = \begin{cases} x(e) + \epsilon & \text{si } e = f_1, \\ x(e) - \epsilon & \text{si } e = f_2, \\ x(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f_1, f_2\}, \end{cases}$$

où ϵ est un scalaire non nul, serait aussi une solution du système (4.23). Comme $\overline{x} \neq x$, nous avons une contradiction avec le fait que x est un point extrême de $R(G, r)$. Ainsi, il existe au moins une équation non triviale du système (4.23) qui contient $x(f_2)$ et pas $x(f_1)$. Supposons qu'il existe une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23) telle que $F_2 \subseteq \delta(W_i)$ et $F_1 \cap \delta(W_i) = \emptyset$. Sans perte de généralité, supposons que $v \in W_i$. D'après l'assertion 4.15.9.i), nous avons $con(W_i) = 2$. De ce fait, il doit exister $u \in \overline{W}_i$ tel que $r(u) = 2$. Puisque $F_1 \cap \delta(W_i) = \emptyset$, nous avons $v_1 \in W_i$. Par conséquent, $u \neq v_1$. Or u est différent de v et v_1. De plus, $r(u) = r(v) = r(v_1) = 2$. Nous avons donc bien au moins trois sommets de type de connexité égal à 2 dans G.
Considérons maintenant une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23) telle que $F_2 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$ et $F_1 \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in V_1$. D'après l'assertion 4.15.9.ii), $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2. Puisque $F_1 \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) = \emptyset$, nous avons aussi $v_1 \in V_1$. Par conséquent, il existe $u \in V \setminus V_1$ tel que $r(u) = 2$. Il est évident que $u \notin \{v, v_1\}$. Puisque $r(u) = r(v) = r(v_1) = 2$, ceci nous donne bien au moins trois sommets de type de connexité égal à 2 dans G. □

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés uniquement à "l'emboitement" des coupes et des partitions par rapport à une coupe donnée. Cependant, nous serons confrontés, par la suite, au problème de la disposition d'une partition par rapprt à une autre. L'assertion suivante décrit la structure des partitions où $\{v\}$ en est un élément.

Assertion 4.15.11 Soit $(V_1, \ldots, V_p)$ une partition de type 2 du système (4.23) telle que $F_1 \subseteq [V_i, V_j]$, $V_i = \{v\}$ et $r(V \setminus (V_i \cup V_j)) = 1$. Soit $(V_j^1, \ldots, V_j^t)$, $t \geq 2$, une partition de type 2 de V_j. Si $x(F_2) < 1$, alors nous avons

$$x(\delta(V_j^1, \ldots, V_j^t)) \geq t + x(F_1) - 2. \tag{4.25}$$

Preuve. Supposons, sans perte de généralité, que $i = 1$ et $j = 2$. Puisque $x(F_2) < 1$, par l'assertion 4.15.10.ii), il existe au moins trois sommets de type de connexité égal à 2 dans G. De plus, à l'exception de v (qui appartient à V_1), tous les sommets de type de connexité 2 appartiennent à V_2. Par conséquent, une telle partition $(V_2^1, \ldots, V_2^t)$ de

type 2 de V_2 existe. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v_1 \in V_2^1$. Considérons alors la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ de V définie de la manière suivante

$$\begin{array}{ll} V'_1 = V_2^1 \cup \{v\}, & \\ V'_k = V_2^k & \text{pour } k = 2, \ldots, t, \\ V'_k = V_{k-t+2} & \text{pour } k = t+1, \ldots, p+t-2, \end{array}$$

avec $p' = p+t-2$. Nous avons $v \in V'_1$ et $r(v) = 2$. Donc $r(V'_1) = 2$. Puisque $(V_2^1, \ldots, V_2^t)$ est une partition de type 2 de V_2, il existe $V_2^{i_0}$, $i_0 \in \{2, \ldots, t\}$ tel que $r(V_2^{i_0}) = 2$. Ainsi $r(V'_{i_0}) = r(V_2^{i_0}) = 2$. La partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ possède donc au moins deux éléments ayant un type de connexité égal à 2. Par conséquent, $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est une partition de type 2 de V. Nous avons donc

$$\begin{array}{rcl} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) + x(\delta(V_2^1, \ldots, V_2^t)) - x(F_1) \\ & = & p + x(\delta(V_2^1, \ldots, V_2^t)) - x(F_1) \\ & \geq & p' \\ & = & p + t - 2. \end{array}$$

Ainsi, nous déduisons l'inégalité (4.25). □

Assertion 4.15.12 $x(F_2) \geq 1$.

Preuve. Supposons que $x(F_2) < 1$.
a) Dans un premier temps, nous allons montrer que le système (4.23) ne contient pas de coupe contenant F_2 et pas F_1. Supposons au contraire qu'il existe une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23) telle que $F_2 \subseteq \delta(W_i)$ et $F_1 \cap \delta(W_i) = \emptyset$. D'après l'assertion 4.15.9.i), nous avons $con(W_i) = 2$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in \overline{W}_i$ et $v_2 \in W_i$. Étant donné que $F_1 \cap \delta(W_i) = \emptyset$, nous avons $v_1 \in \overline{W}_i$. Or $1 < x(F_1) < 2$. Par conséquent, il existe exactement une arête f_1 de F_1 telle que $0 < x(f_1) < 1$. Par l'assertion 4.15.3, la variable $x(f_1)$ apparait dans au moins deux équations du système (4.23). Supposons que f_1 apparait dans une coupe $\delta(W)$ du système (4.23). Nous faisons remarquer que $\delta(W) \neq \delta(W_i)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in W$. Puisque $F_1 \subseteq \delta(W)$, nous avons, d'après l'assertion 4.15.10.i), $F_2 \subseteq \delta(W)$. Étant donné que le graphe induit par W est connexe, nous déduisons $W = \{v\}$.
De plus, $x(f_1)$ apparait dans une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23). Sans perte de généralité, supposons que $F_1 \subseteq [V_1, V_2]$, $v \in V_1$ et $v_1 \in V_2$. Par l'assertion 4.15.5, $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 telle que $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 1$. Nous avons, d'après l'assertion 4.15.10.i), $F_2 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$. Puisque $G(V_1)$ est connexe, il en résulte alors que $V_1 = \{v\}$. Sans perte de généralité, nous pouvons aussi supposer que $v_2 \in V_p$. Or nous avons $con(W_i) = 2$. Ainsi $r(W_i) = r(\overline{W}_i) = 2$ et il existe au moins

un sommet de type de connexité égal à 2 (différent de v et v_1 qui sont tous deux dans $\overline{W}_i$) appartenant à W_i. Étant donné que $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 1$, tous les sommets de type de connexité 2, à l'exception de v, appartiennent à V_2. Par conséquent $V_2 \cap W_i \neq \emptyset$ et $r(V_2 \cap W_i) = 2$. De plus, $v_1 \in V_2 \cap \overline{W}_i$. Ainsi $V_2 \cap \overline{W}_i \neq \emptyset$. Par l'assertion 4.15.2.ii), nous avons $V_p \subseteq W_i$. Posons $F' = [V_2 \setminus W_i, V_2 \setminus \overline{W}_i]$ (voir figure 4.2).

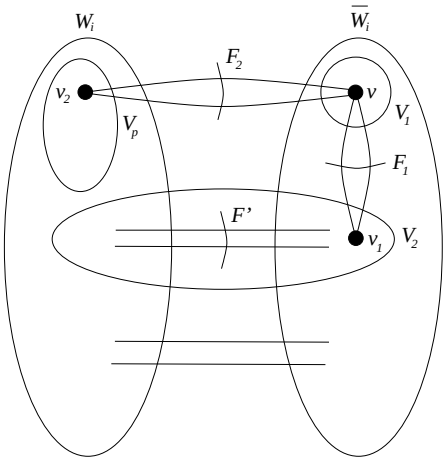

FIG 4.2

Considérons alors la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ définie comme suit

$$\begin{aligned} V'_1 &= (V_2 \setminus W_i) \cup \{v\}, \\ V'_2 &= V_2 \setminus \overline{W}_i, \\ V'_i &= V_i \qquad\qquad \text{pour } i = 3, \ldots, p. \end{aligned}$$

Il est clair que $r(V'_2) = 2$. De plus, $v \in V'_1$. Donc, par l'assertion 4.15.6, $r(V'_1) = 2$. Par conséquent, $(V'_1, \ldots, V'_p)$ est une partition de type 2. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_p)) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(\delta(W)) + x(\delta(W_i)) \\ &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(F_1) + x(F') \\ &= p - x(F_1) + x(F') \\ &\geq p. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne $x(F') \geq x(F_1)$. Par ailleurs, nous avons

$$x(\delta(v)) = x(F_1) + x(F_2) \geq 2. \tag{4.26}$$

Ainsi, $x(F') + x(F_2) \geq 2$. De plus,

$$\begin{aligned} x(\delta(W_i)) &= x(F') + x(F_2) + x(\delta(W_i) \setminus (F' \cup F_2)) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Par l'assertion 4.15.1, nous en déduisons que $x(\delta(W_i) \setminus (F' \cup F_2)) = 0$ et

$$x(F') + x(F_2) = 2. \tag{4.27}$$

Or $x(F') \geq x(F_1)$. Des inégalités (4.26) et (4.27), nous obtenons donc $x(F_1) = x(F')$. Et la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ est donc serrée pour x.
Supposons que la coupe $\delta(W)$ appartienne au système (4.23). Nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_p)) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(F_1) + x(F') \\ &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(\delta(W)) + x(\delta(W')). \end{aligned}$$

L'équation définie par la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ peut donc être obtenue à partir des équations $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p$, $x(\delta(W)) = 2$ et $x(\delta(W_i)) = 2$. Ainsi, elle ne peut pas figurer dans le système (4.23). Soit (4.23)$'$ le système obtenu à partir du système (4.23) en remplaçant la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ par $(V'_1, \ldots, V'_p)$. Il n'est pas difficile de voir que le système (4.23)$'$ est non-sigulier. De plus, il admet x comme solution unique. Aussi, $F_1 \not\subset \delta(V'_1, \ldots, V'_p)$. Par conséquent, le système définissant x peut être choisi de telle sorte que la seule équation contenant $x(f_1)$ soit $x(\delta(v)) = 2$, ce qui contredit l'assertion 4.15.3. D'où, F_1 n'apparait pas dans une coupe du système (4.23).

De ce fait, dans le système (4.23), nous pouvons remplacer toutes les partitions de type 2 contenant F_1 et F_2 par des équations contenant uniquement F_2. Soient (4.23)* le système ainsi obtenu et x' la restriction de x sur $E \setminus F_1$. D'après les lemmes 4.9 et 4.14, x' est une solution fractionnaire de $R(G/F_1, r_{F_1})$. Soit (4.23)$^{*\prime}$ le système obtenu à partir du système (4.23)* en supprimant les équations $x(e) = 1$ pour $e \in F_1$. Il n'est pas difficile de voir que x' est une solution du système (4.23)$^{*\prime}$. Le graphe G/F_1 est un graphe série-parallèle ayant moins d'arêtes que G. Donc, par l'hypothèse de récurrence, $R(G/F_1, r_{F_1})$ est entier. Puisque x' est fractionnaire, il existe un point extrême y' entier de $R(G/F_1, r_{F_1})$ qui est également une solution du système (4.23)$^{*\prime}$. Puisque $x'(F') = x(F') \geq x(F_1) > 1$, y' peut être choisi de telle manière qu'au moins une arête de F' ait une valeur positive. Donc $y'(\delta(W_i)) = y'(F') + y'(F_2) = 2$. Soit $t = y'(F')$. Alors $1 \leq t \leq 2$. De plus, puisque par l'assertion 4.15.8, $1 < x(F_1) < 2$, il s'en suit que $|F_1| = 2$. Posons $F_1 = \{e_1, e_2\}$. Maintenant, considérons la solution $y \in \mathbb{R}^E$ donnée par

$$y(e) = \begin{cases} y'(e) & \text{si } e \in E \setminus F_1, \\ 1 & \text{si } e = e_i;\ i = 1, \ldots, t, \\ 0 & \text{si } e = e_i;\ i = t+1, \ldots, 2. \end{cases}$$

Il est clair que $y \neq x$. Montrons que y est une solution du système (4.23). Tout d'abord, notons que puisque $|F_1 \cap E_1| = 1$ et $y'(F') > 0$, y peut être considéré de telle manière

que si $x(e) = 1$ pour $e \in F_1$, alors $y(e) = 1$. Donc, $y(e) = 1$ pour toute arête $e \in E_1$. Considérons une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23).

- Si $F_1 \cap \delta(W_i) = \emptyset$, alors $\delta(W_i)$ est également une coupe du système $(4.23)^{*\prime}$. Donc, $\delta(W_i)$ est serrée pour y'. Ainsi $y(\delta(W_i)) = y'(\delta(W_i)) = con(W_i)$.
- Si $F_1 \subseteq \delta(W_i)$ alors, d'après l'assertion 4.15.10, $F_2 \subseteq \delta(W_i)$. Or $G(W_i)$ et $G(\overline{W}_i)$ doivent être connexes. Ainsi $\delta(W_i) = \delta(v)$. Mais, nous avons montré précédemment que la coupe $\delta(v)$ ne fait pas partie du système (4.23).

Par conséquent, y serre toutes les coupes du système (4.23). Considérons maintenant une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23).

- Si $F_1 \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) = \emptyset$, alors $(V_1, \ldots, V_p)$ est également une partition du système $(4.23)^{*\prime}$. Donc $(V_1, \ldots, V_p)$ est serrée pour y'.
- Si $F_1 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$ alors, par l'assertion 4.15.10.i), nous pouvons supposer, sans perte de généralité que $V_1 = \{v\}$, $v_1 \in V_2$ et $v_2 \in V_p$. De plus par l'assertion 4.15.5.iii), $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 telle que $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 1$. Or, nous avons montré que, dans ce cas, la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ définie comme précédemment est une partition de type 2 du système $(4.23)^{*\prime}$. Ainsi $(V'_1, \ldots, V'_p)$ est serrée pour y'. Étant donné que $y(F_1) = y(F')$, nous obtenons

$$\begin{aligned} y(\delta(V_1, \ldots, V_p)) &= y(\delta(V'_1, \ldots, V'_p)) + y(F_1) - y(F') \\ &= y(\delta(V'_1, \ldots, V'_p)) \\ &= y'(\delta(V'_1, \ldots, V'_p)) \\ &= p. \end{aligned}$$

Donc, y serre toutes les partitions du système (4.23). Ainsi y est une solution du système (4.23). Puisque $y \neq x$, ceci contredit le fait que x est un point extrême de $R(G, r)$. Par conséquent, toute coupe du système (4.23) qui contient F_2 contient également F_1.

b) Par la suite, nous allons montrer que le système (4.23) peut être choisi de telle manière qu'il ne contienne aucune partition de type 2 contenant F_2 et pas F_1. Pour cela, supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, de type 2 du système (4.23) telle que $F_1 \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) = \emptyset$ et $F_2 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in V_1$ et $v_1 \in V_1$. D'après l'assertion 4.15.8 et le lemme 4.13, F_1 possède exactement une arête ayant une valeur fractionnaire. Puisque $x(F_2) < 1$, par l'assertion 4.15.10.i), toute équation (différente de $x(e) = 1$) qui contient F_1 contient également F_2. Il s'en suit, par la remarque 4.8, que F_1 apparait dans au plus une coupe (en l'occurrence $\delta(v)$) du système (4.23). Or $x(F_1)$ est fractionnaire. Par l'assertion 4.15.3, il doit exister une partition $(U_1, \ldots, U_q)$, $q \geq 3$, telle

que $F_1 \subseteq \delta(U_1, \ldots, U_q)$. Par l'assertion 4.15.10.i), nous avons $F_2 \subseteq \delta(U_1, \ldots, U_q)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $U_1 = \{v\}$ et $v_1 \in U_2$. D'après l'assertion 4.15.5.iii), $(U_1, \ldots, U_q)$ est une partition de type 2 telle que $r(V \setminus (U_1 \cup U_2)) = 1$. Par ailleurs, le système (4.23) peut être choisi de telle sorte que $v_2 \notin U_2$. En effet, si $v_2 \in U_2$, alors nous avons

$$\begin{aligned} x[U_1, U_2] &= x(F_1) + x(F_2) \\ &= x(\delta(v)) \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Or, la partition $(U_1 \cup U_2, U_3, \ldots, U_q)$ est de type 1. Donc, par le lemme 4.5, nous avons $x[U_1, U_2] \leq 2$. Par conséquent, nous obtenons $x[U_1, U_2] = x(\delta(v)) = 2$, et la partition $(U_1 \cup U_2, U_3, \ldots, U_q)$ est serrée pour x. De plus, nous avons

$$x(\delta(U_1, \ldots, U_q)) = x(\delta(U_1 \cup U_2, U_3, \ldots, U_q)) + x(\delta(v)).$$

De ce fait, les trois équations induites par les partitions $(U_1, \ldots, U_q)$, $(U_1 \cup U_2, U_3, \ldots, U_q)$ et la coupe $\delta(v)$ ne peuvent pas toutes appartenir au système (4.23). Ainsi, nous pouvons remplacer, dans ce système, l'équation $x(\delta(U_1, \ldots, U_q)) = q$ par les équations $x(\delta(U_1 \cup U_2, U_3, \ldots, U_q)) = q - 2$ et $x(\delta(v)) = 2$. Le système ainsi obtenu est non-singulier et admet x comme solution unique. Aussi, la partition $(U_1 \cup U_2, U_3, \ldots, U_q)$ ne contient ni F_1 ni F_2.

Soit s le nombre de sous-ensembles de la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ qui intersectent U_2. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$V_i \cap U_2 \neq \emptyset \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, s.$$

Nous avons $v_1 \in U_2$ et $v_1 \in V_1$. Par conséquent $V_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. De plus, la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ étant de type 2, il existe V_{i_0}, $i_0 \in \{2, \ldots, p\}$, tel que $r(V_{i_0}) = 2$. Or, tous les sommets ayant un type de connexité égal à 2, à l'exception de v, appartiennent à U_2. Donc $V_{i_0} \cap U_2 \neq \emptyset$. Par conséquent, nous en déduisons que $s \geq 2$.
Posons

$$U_2^i = V_i \cap U_2 \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, s.$$

La partition $(U_2^1, \ldots, U_2^s)$ est une partition de type 2 de U_2. En effet, nous avons $v_1 \in U_2^1$. Par l'assertion 4.15.7, $r(v_1) = 2$. Donc $r(U_2^1) = 2$. De plus, tous les sommets de type de connexité égal à 2 du sous-ensemble V_{i_0} appartiennent à U_2. Par conséquent, $r(U_2^{i_0}) = 2$. Ainsi, la partition $(U_2^1, \ldots, U_2^s)$ possède bien au moins deux éléments de type de connexité égal à 2. Par l'assertion 4.15.11, nous en déduisons donc

$$x(\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s)) \geq s + x(F_1) - 2. \tag{4.28}$$

Pour la suite de la démonstration de cette assertion, nous sommes amenés à distinguer trois cas.

Cas 1 $s < p$ et $F_2 \cap [V_1, V_j] = \emptyset$ pour $j = 2, \ldots, s$. Soit $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ la partition telle que

$$\begin{aligned} V'_1 &= \left(\bigcup_{i=1}^{s} V_i \right) \setminus \{v\}, \\ V'_2 &= \{v\}, \\ V'_i &= V_{i+s-2} \qquad\qquad \text{pour } i = 3, \ldots, p-s+2 \end{aligned}$$

avec $p' = p-s+2$. Il n'est pas difficile de voir que $r(V'_1) = r(V'_2) = 2$. Ainsi $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est une partition de type 2 de V. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) + x(F_1) \\ &= p - x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) + x(F_1) \\ &\geq p' \\ &= p - s + 2. \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) \leq s + x(F_1) - 2. \tag{4.29}$$

Or $\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s) \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_s)$. Donc, d'après l'assertion 4.15.1,

$$x(\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s)) \leq x(\delta(V_1, \ldots, V_s)). \tag{4.30}$$

Des inégalités (4.28), (4.29) et (4.30), il en résulte alors

$$x(\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s)) = x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) = s + x(F_1) - 2.$$

Par conséquent, la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est serrée pour x. De plus, cette partition ne fait pas partie du système (4.23) car l'équation qu'elle définit peut être obtenue à partir de $x(\delta(U_1, \ldots, U_q)) = q$ et $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p$. En effet, nous avons

$$x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) = x(\delta(V_{s+1}, \ldots, V_p)) + x\left[\bigcup_{i=1}^{s} V_i, \bigcup_{i=s+1}^{p} V_i \right] + x(F_1) \tag{4.31}$$

et

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) + x(\delta(V_{s+1}, \ldots, V_p)) + x\left[\bigcup_{i=1}^{s} V_i, \bigcup_{i=s+1}^{p} V_i \right]. \tag{4.32}$$

Puisque $(V_1, \ldots, V_p)$ et $(U_1, \ldots, U_q)$ sont serrées pour x, de l'inégalité (4.32), nous obtenons

$$x(\delta(V_{s+1}, \ldots, V_p)) + x\left[\bigcup_{i=1}^{s} V_i, \bigcup_{i=s+1}^{p} V_i\right] + x(F_1) = p - s + 2.$$

Et il découle de l'inégalité (4.31) que $x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) = p'$. Par conséquent, en remplaçant $(V_1, \ldots, V_p)$ par $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ dans le système (4.23), nous obtenons un système non-singulier qui admet x comme solution unique. De plus, $\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ contient F_1 et F_2.

Cas 2 $s < p$ et $F_2 \subseteq [V_1, V_j]$ pour un certain $j \in \{2, \ldots, s\}$. Considérons de nouveau la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ définie au cas 1. Nous avons alors

$$\begin{aligned} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) + x(F_1) + x(F_2) \\ &= p - x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) + x(F_1) + x(F_2) \\ &\geq p' \\ &= p - s + 2. \end{aligned}$$

Et nous déduisons

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) - x(F_2) \leq s + x(F_1) - 2. \tag{4.33}$$

Or $\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s) \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_s)$. Puisque $v_2 \notin U_2$, nous avons $F_2 \cap \delta(U_2^1, \ldots, U_2^s) = \emptyset$. Étant donné que $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$, nous obtenons

$$x(\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s)) \leq x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) - x(F_2). \tag{4.34}$$

Nous déduisons alors, des inégalités (4.28), (4.33) et (4.34),

$$x(\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s)) = x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) - x(F_2) = s + x(F_1) - 2.$$

La partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est donc serrée pour x. Cette partition ne fait pas partie du système (4.23) car elle peut être obtenue à partir de celles définies par $(V_1, \ldots, V_p)$ et $(U_1, \ldots, U_q)$. Par conséquent, le système obtenu à partir du système (4.23) en remplaçant $(V_1, \ldots, V_p)$ par $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est un système non-singulier admettant x comme unique solution. Et $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ contient F_1 et F_2.

Cas 3 $s = p$. Nous avons $\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s) \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_s)$, $F_2 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_s)$, $v_2 \notin U_2$. Ainsi $F_2 \cap \delta(U_2^1, \ldots, U_2^s) = \emptyset$. Donc, par l'assertion 4.15.1, nous obtenons l'inégalité (4.34). Et nous déduisons, des inégalités (4.28) et (4.34)

$$s + x(F_1) - 2 \leq x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) - x(F_2).$$

Or $x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) = s$. Donc $x(F_1)+x(F_2) \leq 2$. Puisque $x(\delta(v)) = x(F_1)+x(F_2) \geq 2$, la coupe $\delta(v)$ est serrée pour x. Cette dernière ne fait pas partie du système (4.23) car elle peut être obtenue à partir des équations définies par $(V_1, \ldots, V_p)$ et $(U_1, \ldots, U_q)$. Par conséquent, en remplaçant $(V_1, \ldots, V_p)$ par $\delta(v)$ dans le système (4.23), le système ainsi obtenu est non-singulier et admet x comme unique solution. Par ailleurs, $\delta(v)$ contient F_1 et F_2.

Le système (4.23) peut donc être choisi de telle manière que toute équation qui contient F_2 contient également F_1. De plus, par l'assertion 4.15.10.i), toute équation du système (4.23) contenant F_1 contient aussi F_2. Puisque $1 < x(F_1) < 2$, F_1 contient une arête f_1 telle que $0 < x(f_1) < 1$. Par hypothèse, $x(F_2) < 1$. Donc $F_2 = \{f_2\}$ avec $0 < x(f_2) < 1$. Considérons alors la solution $\overline{x} \in \mathbb{R}^E$ donnée par

$$\overline{x}(e) = \begin{cases} x(e) + \epsilon & \text{si } e = f_1, \\ x(e) - \epsilon & \text{si } e = f_2, \\ x(e) & \text{si } e \in E \setminus \{f_1, f_2\}, \end{cases}$$

où ϵ est un scalaire non nul. La solution $\overline{x}$ est également une solution du système (4.23), ce qui contredit le fait que x soit un point extrême. Ainsi $x(F_2) \geq 1$. □

Maintenant que nous venons de prouver que $x(F_2) \geq 1$, nous allons étudier les conséquences que cela entraîne sur la composition du système (4.23).

Assertion 4.15.13 Toute équation du système (4.23) qui contient F_1 ne contient pas F_2.

Preuve. Supposons, au contraire, qu'il existe une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23) qui contient à la fois F_1 et F_2. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in W_i$. Puisque $G(W_i)$ et $G(\overline{W_i})$ sont connexes, nous avons $\delta(W_i) = \delta(v)$. Or par les assertions 4.15.8 et 4.15.12 , $x(F_1) > 1$ et $x(F_2) \geq 1$. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(W_i)) &= x(F_1) + x(F_2) \\ &> 2, \end{aligned}$$

une contradiction.

Supposons maintenant qu'il existe une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23) contenant à la fois F_1 et F_2. D'après l'assertion 4.15.5.ii), $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $V_1 = \{v\}$ et $v_1 \in V_2$. Si $v_2 \in V_2$ alors

$$\begin{aligned} x[V_1, V_2] &= x(F_1) + x(F_2) \\ &> 2, \end{aligned}$$

ce qui contredit le lemme 4.5.ii). Par conséquent, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $v_2 \in V_p$. Considérons alors la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ définie comme suit

$$\begin{aligned} V'_1 &= V_1 \cup V_p, \\ V'_i &= V_i \qquad\qquad \text{pour } i = 2, \ldots, p-1, \end{aligned}$$

avec $p' = p-1$. Nous avons $v \in V'_1$ et $v_1 \in V'_2$. Donc, par les assertions 4.15.6 et 4.15.7, $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est une partition de type 2 de V. D'après le lemme 4.5.ii.b), nous avons $x[V_1, V_p] \leq 1$. Ainsi, puisque $F_2 \subseteq [V_1, V_p]$, $x(F_2) \geq 1$ et $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$, nous obtenons $x(F_2) = 1$. Par conséquent, la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est serrée pour x. De plus, cette partition ne fait pas partie du système (4.23) car l'équation qu'elle définit peut être obtenue à partir de $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p$ et $x(e) = 1$ pour $e \in F_2$. La partition $(V_1, \ldots, V_p)$ peut être remplacée par la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ dans le système (4.23). Le système ainsi obtenu est non-singulier et admet x comme solution unique. De plus, nous notons que $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ contient F_1 et pas F_2. □

Maintenant, nous supposons que le système (4.23) vérifie, en plus de l'assertion 4.15.5, l'assertion 4.15.13.

Assertion 4.15.14 $x(F_2) < x(F_1)$.

Preuve. Nous avons par hypothèse $x(F_1) \geq x(F_2)$. Supposons alors que $x(F_1) = x(F_2)$. Nous allons tout d'abord montrer que $r(v_2) = 1$. À cette fin, supposons le contraire, c'est-à-dire $r(v_2) = 2$. D'après l'assertion 4.15.5, les arêtes de F_1 peuvent apparaître dans des équations triviales ($x(e) = 1$), des coupes $\delta(W)$ telles que $con(W) = 2$ et des partitions $(V_1, \ldots, V_p)$ de type 2 telles que $F_1 \subseteq [V_i, V_j]$ et $r(V \setminus (V_i \cup V_j)) = 1$, du système (4.23).
Si F_1 apparait dans une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23) telle que $con(W_i) = 2$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $v \in W_i$ et $v_1 \in \overline{W}_i$. Puisque par l'assertion 4.15.8, $x(F_1) > 1$, nous avons $x(\delta(v)) = x(F_1) + x(F_2) > 2$. Donc $\delta(W_i) \neq \delta(v)$. De ce fait, $v_2 \in W_i$. Puisque $r(v_2) = 2$, il est facile de voir que $r(W_i \setminus \{v\}) = r(\overline{W}_i \cup \{v\}) = 2$. Ainsi $con(W_i \setminus \{v\}) = 2$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} x(\delta(W_i \setminus \{v\})) &= x(\delta(W_i)) - x(F_1) + x(F_2) \\ &= x(\delta(W_i)) \\ &= 2 \\ &= con(W_i \setminus \{v\}). \end{aligned}$$

Par conséquent, la coupe $\delta(W_i \setminus \{v\})$ est serrée pour x.

Soit $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, une partition de type 2 du système (4.23) telle que $F_1 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$. Supposons, sans perte de généralité, que $v \in V_1$ et $v_1 \in V_2$. Si $v_2 \in V_2$, alors

$$\begin{aligned} x[V_1, V_2] &= x(F_1) + x(F_2) \\ &> 2, \end{aligned}$$

Nous obtenons alors une contradiction avec le lemme 4.5. Supposons maintenant que $v_2 \in V_j$ avec $j \in \{3, \ldots, p\}$. Étant donné que $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 1$, nous avons $r(V_j) = 1$. Soit $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ la partition définie comme suit

$$\begin{aligned} &V'_1 = V_1 \cup V_j, \\ &V'_i = V_i \qquad\qquad \text{pour } i = 2, \ldots, j-1, \\ &V'_i = V_{i+1} \qquad\qquad \text{pour } i = j, \ldots, p-1, \end{aligned}$$

où $p' = p - 1$. Il n'est pas difficile de voir que $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est une partition de type 2 de V. Ainsi, par le lemme 4.5.ii.b) et l'assertion 4.15.1, nous déduisons $x(F_2) = x[V_1, V_j] = 1$. La partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est donc serrée pour x. De plus, cette partition ne fait pas partie du système (4.23). En effet, l'équation qu'elle définit est redondante avec les équations $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p$ et $x(e_2) = 1$ où $F_2 = \{e_2\}$. De ce fait, le système obtenu à partir du système (4.23) en remplaçant la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ par la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est non-singulier et admet x comme solution unique. Nous pouvons donc supposer que $v_2 \in V_1$. Considérons alors la partition $(V''_1, \ldots, V''_p)$ définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} &V''_1 = V_1 \setminus \{v\}, \\ &V''_2 = V_2 \cup \{v\}, \\ &V''_i = V_i \qquad\qquad \text{pour } i = 3, \ldots, p. \end{aligned}$$

Puisque $r(v_2) = 2$ et $v_2 \in V''_1$, il est clair que $(V''_1, \ldots, V''_p)$ est une partition de type 2 de V. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x(\delta(V''_1, \ldots, V''_p)) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(F_1) + x(F_2) \\ &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \\ &= p. \end{aligned}$$

Et la partition $(V''_1, \ldots, V''_p)$ est serrée pour x.

Par conséquent, dans le système (4.23), nous pouvons remplacer toutes les équations contenant F_1, à l'exception des équations triviales, par des équations contenant F_2. Soit $(4.23)^*$ le système ainsi obtenu. Soit x' la restriction de x sur $E \setminus F_1$. D'après les lemmes 4.9 et 4.14, x' est une solution fractionnaire de $R(G/F_1, r_{F_1})$. Considérons le système $(4.23)^{*\prime}$ obtenu à partir de $(4.23)^*$ en supprimant les équations $x(e) = 1$ pour

$e \in F_1$. Nous remarquons qu'aucune variable $x(e)$, où $e \in F_1$, n'apparait dans le système $(4.23)^{*\prime}$. De plus, x' est une solution de ce dernier système. Étant donné que G/F_1 est un graphe série-parallèle ayant moins d'arêtes que G, d'après l'hypothèse de récurrence, $R(G/F_1, r_{F_1})$ est entier. Puisque x' est une solution fractionnaire de $R(G/F_1, r_{F_1})$, il doit exister un point extrême entier y' de $R(G/F_1, r_{F_1})$ qui est également une solution du système $(4.23)^{*\prime}$. De plus, nous avons $x(F_1) = x(F_2)$. Par conséquent F_1 et F_2 sont de même cardinalité. Posons $F_1 = \{e_1^1, \ldots, e_t^1\}$ et $F_2 = \{e_1^2, \ldots, e_t^2\}$. Soit $y \in \mathbb{R}^E$ la solution donnée par

$$y(e) = \begin{cases} y'(e) & \text{si } e \in E \setminus F_1, \\ y'(e_i^2) & \text{si } e = e_i^1; \quad i = 1, \ldots, t. \end{cases}$$

Il est clair que $y \neq x$. Nous allons maintenant montrer que y est une solution du système (4.23). Tout d'abord, remarquons que $y(e) = 1$ pour toute arête $e \in E$ telle que $e \in E_1$. Considérons une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23).

- Si $F_1 \cap \delta(W_i) = \emptyset$, alors $\delta(W_i)$ est également une coupe du système $(4.23)^{*\prime}$. Donc, $\delta(W_i)$ est serrée pour y'. Ainsi, $y'(\delta(W_i)) = y(\delta(W_i)) = con(W_i)$.
- Si $F_1 \subseteq \delta(W_i)$, alors, d'après le lemme 4.15.5.i), $con(W_i) = 2$. Puisque $x(F_1) > 1$ et $x(F_2) \geq 1$, nous avons $F_2 \cap \delta(W_i) = \emptyset$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in W_i$. De la discussion précédente, il en résulte que la coupe $\delta(W_i \setminus \{v\})$ est serrée pour y'. Puisque $y(F_1) = y(F_2)$ et $y(\delta(W_i \setminus \{v\})) = y'(\delta(W_i \setminus \{v\}))$, nous avons

$$\begin{aligned} y(\delta(W_i)) &= y(\delta(W_i \setminus \{v\})) - y(F_1) + y(F_2) \\ &= y'(\delta(W_i \setminus \{v\})) \\ &= 2. \end{aligned}$$

  Et, la coupe $\delta(W_i)$ est serrée pour y.

Considérons une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23).

- Si $F_1 \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) = \emptyset$ alors $(V_1, \ldots, V_p)$ est aussi une partition du système $(4.23)^{*\prime}$. Par conséquent $(V_1, \ldots, V_p)$ est serrée pour y'. De plus, nous avons $y(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = y'(\delta(V_1, \ldots, V_p))$. Ainsi, $(V_1, \ldots, V_p)$ est également serrée pour y.
- Si $F_1 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$ alors, par l'assertion 4.15.5.ii), $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $F_1 \subseteq [V_1, V_2]$. Par la discussion précédente, nous savons que $F_2 \subseteq E(V_1)$. Or, nous avons montré que, dans ce cas, la partition $(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\}, V_3, \ldots, V_p)$ est une partition de

type 2 du système $(4.23)^{*\prime}$. Donc $(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\}, V_3, \ldots, V_p)$ est serrée pour y'. Puisque $y(F_1) = y(F_2)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} y(\delta(V_1, \ldots, V_p)) &= y(\delta(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\}, V_3, \ldots, V_p)) - y(F_1) + y(F_2) \\ &= y'(\delta(V_1 \setminus \{v\}, V_2 \cup \{v\}, V_3, \ldots, V_p)) \\ &= p. \end{aligned}$$

Et la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ est serrée pour y.

Ainsi, y est une solution du système (4.23). Étant donné que $y \neq x$, ceci contredit le fait que x est un point extrême de $R(G, r)$. D'où $r(v_2) = 1$.

Montrons maintenant que x est un point extrême de $R(G, r_2)$, où $r_2 \in \mathbb{Z}_+^V$ est le vecteur types de sommets suivant

$$r_2(u) = \begin{cases} r(u) & \text{si } u \in V \setminus \{v_2\}, \\ \\ 2 & \text{si } u = v_2. \end{cases}$$

En utilisant une démonstration similaire à celle de l'assertion 4.15.7, nous pouvons montrer que $x \in R(G, r_2)$. Or, toutes les équations du système (4.23) sont définies par des contraintes appartenant également à $R(G, r_2)$. Par conséquent, x est un point extrême fractionnaire de $R(G, r_2)$. Posons $S_2^2 = \{u \in V \mid r_2(u) = 2\}$. Nous avons $S_2^2 = S_2 \cup \{v_2\}$, et ainsi $|S_2^2| > |S_2|$. Puisque $R(G, r_2)$ contient un point extrême fractionnaire, ceci contredit l'hypothèse de maximalité de $|S_2|$. De ce fait, nous obtenons $x(F_1) > x(F_2)$. □

Assertion 4.15.15 Le système (4.23) peut être choisi de telle manière que, pour toute partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, de type 2 telle que $F_2 \subseteq [V_i, V_j]$, nous avons $r(V \setminus (V_i \cup V_j)) = 1$.

Preuve. Similaire à celle de l'assertion 4.15.5.iii). □

Nous rajoutons à présent au système (4.23) la condition qu'il vérifie également l'assertion 4.15.15.

Assertion 4.15.16 Dans le système (4.23), F_1 n'apparait pas dans une coupe.

Preuve. Supposons qu'il existe une coupe $\delta(W_1)$ du système (4.23) telle que $F_1 \subseteq \delta(W_1)$. D'après l'assertion 4.15.5.i), $con(W_1) = 2$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in W_1$ et $v_1 \in \overline{W}_1$. De plus d'après l'assertion 4.15.13, $F_2 \cap \delta(W_1) =$

$\emptyset$. Nous avons donc $v_2 \in W_1$ Posons $W_1' = W_1 \setminus \{v\}$. Montrons que $r(W_1') = 1$. En effet, supposons que $r(W_1') = 2$. Puisque $r(v) = 2$, il en résulte alors que $con(W_1') = 2$. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} x(\delta(W_1')) &= x(\delta(W_1)) - x(F_1) + x(F_2) \\ &= 2 - x(F_1) + x(F_2) \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc que $x(F_1) \leq x(F_2)$, ce qui contredit l'assertion 4.15.14. Ainsi $r(W_1') = 1$.

Par l'assertion 4.15.3, les arêtes de F_2 doivent apparaitre dans au moins deux équations du système (4.23). Supposons ainsi que F_2 apparait dans une coupe $\delta(W_2)$ du système (4.23). D'après l'assertion 4.15.9.i), $con(W_2) = 2$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in W_2$ et $v_2 \in \overline{W}_2$. Nous avons $v_1 \in W_2$. Sinon, F_1 et F_2 appartiendraient à une même équation du système (4.23), ce qui contredirait l'assertion 4.15.13. Étant donné que $con(W_2) = 2$, $r(v) = r(v_1) = 2$ et $\{v, v_1\} \subseteq W_2$, il existe $u \in \overline{W}_2$ tel que $r(u) = 2$. Puisque $r(W_i') = 1$, nous avons donc $u \in \overline{W_1 \cup W_2}$. Et ainsi $\overline{W_1 \cup W_2} \neq \emptyset$. De plus, $r(\overline{W_1 \cup W_2}) = 2$. Par conséquent, $\delta(W_2)$ est une coupe du système (4.23) telle que $v \in W_1 \cap W_2$, $\overline{W_1 \cup W_2} \neq \emptyset$ et $r(\overline{W_1 \cup W_2}) = r(W_1 \cap W_2) = 2$. Ceci contredit l'assertion 4.15.2.i).
Supposons maintenant que F_2 apparait dans une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23). D'après les assertions 4.15.9.ii) et 4.15.15, $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 telle que $F_2 \subseteq [V_i, V_j]$ et $r(V \setminus (V_i \cup V_j)) = 1$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $i = 1$, $j = 2$, $v \in V_1$ et $v_2 \in V_2$. Nous avons aussi $v_1 \in V_1$. En effet, si $v_1 \notin V_1$, alors $F_1 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_p)$. Mais ceci contredit l'assertion 4.15.13. Étant donné que $v \in W_1$, $v \in V_1$, $v_1 \in \overline{W}_1$ et $v_1 \in V_1$, nous avons $V_1 \cap W_1 \neq \emptyset$ et $V_1 \cap \overline{W}_1 \neq \emptyset$. Puisque $r(V_2) = 2$, $r(v) = r(v_1) = 2$ et $r(W_1') = 1$, nous avons $V_2 \cap \overline{W}_1 \neq \emptyset$. De plus, $v_2 \in W_1$ et $v_2 \in V_2$, donc $V_2 \cap W_1 \neq \emptyset$. Ainsi la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ contredit l'assertion 4.15.2.ii).
En conclusion, les arêtes de F_2 apparaissent dans au plus une équation du système (4.23), une contradiction avec l'assertion 4.15.3. □

Assertion 4.15.17 Soit $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, une partition de type 2 du système (4.23) telle que $F_1 \subseteq [V_i, V_j]$ et $v \in V_i$. Alors, $r(V_i \setminus \{v\}) = 1$.

Preuve. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $i = 1$ et $j = 2$. D'après l'assertion 4.15.13, $F_2 \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) = \emptyset$. Ainsi $v_2 \in V_1$. Par conséquent, $|V_1| \geq 2$. Supposons, au contraire, que $r(V_i \setminus \{v\}) = 2$. Considérons alors la partition $(V_1', \ldots, V_p')$

définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} V_1' &= V_1 \setminus \{v\}, \\ V_2' &= V_2 \cup \{v\}, \\ V_i' &= V_i \qquad\qquad \text{pour } i = 3, \ldots, p. \end{aligned}$$

Puisque $v \in V_2'$, $r(v) = 2$ et $r(V_1') = r(V_1 \setminus \{v\}) = 2$, $(V_1', \ldots, V_p')$ est une partition de type 2. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} x(\delta(V_1', \ldots, V_p')) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(F_1) + x(F_2) \\ &\geq p. \end{aligned}$$

Nous en déduisons donc $x(F_1) \leq x(F_2)$, ce qui contredit l'assertion 4.15.14. □

Assertion 4.15.18 Dans le système (4.23) F_2 n'apparait pas dans une coupe.

Preuve. Supposons qu'il existe une coupe $\delta(W_i)$ du système (4.23) telle que $F_2 \subseteq \delta(W_i)$. D'après l'assertion 4.15.9.i), $con(W_i) = 2$. Nous savons que F_1 possède une arête fractionnaire. Or cette arête doit appartenir à au moins deux équations du système (4.23). Par les assertions 4.15.5 et 4.15.16, il existe une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, de type 2 telle que $F_1 \subseteq [V_i, V_j]$ et $r(V \setminus (V_i \cup V_j)) = 1$, dans le système (4.23). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $i = 1$, $j = 2$, $v \in V_1$ et $v_1 \in V_2$. De plus, par l'assertion 4.15.17, nous avons $r(V_1 \setminus \{v\}) = 1$.
Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v \in \overline{W}_i$, $v_2 \in W_i$ et d'après l'assertion 4.15.13, $v_1 \in \overline{W}_i$. Étant donné que $r(W_i) = 2$ et tous les sommets (à l'exception de v) ayant un type de connexité égal à 2 appartiennent à V_2, nous avons $W_i \cap V_2 \neq \emptyset$. De plus, d'après les définitions de $\delta(W_i)$ et $(V_1, \ldots, V_p)$, il est clair que $W_i \cap V_1 \neq \emptyset$, $\overline{W}_i \cap V_1 \neq \emptyset$ et $\overline{W}_i \cap V_2 \neq \emptyset$. Ainsi deux éléments de la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ intersectent à la fois W_i et $\overline{W}_i$, contradiction avec l'assertion 4.15.2.ii). Par conséquent, les arêtes de F_1 apparaissent dans au plus une équation du système (4.23). Ce qui contredit l'assertion 4.15.3. □

Par l'assertion 4.15.8 et le lemme 4.13, nous avons $F_1 = \{e_1, f_1\}$ avec $x(e_1) = 1$ et $0 < x(f_1) < 1$. Nous énonçons alors l'assertion suivante, similaire à l'assertion 4.15.11, mais relative cette fois, à une partition contenant F_1 et pas F_2.

Assertion 4.15.19 Soit $(V_1, \ldots, V_p)$ une partition de type 2 du système (4.23) telle que $F_1 \subseteq [V_i, V_j]$ et $\{v, v_2\} \subseteq V_i$. Soit $(V_j^1, \ldots, V_j^t)$, $t \geq 2$, une partition de type 2 du sous-ensemble V_j. Alors

$$x(\delta(V_j^1, \ldots, V_j^t)) \geq t + x(f_1) - x(F_2).$$

Preuve. D'après l'assertion 4.15.5.iii), nous savons que la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ est telle que $r(V \setminus (V_i \cup V_j)) = 1$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $i = 1$, $j = 2$, $v \in V_1$, $v_1 \in V_2$ et $v_2 \in V_1$. Aussi, par l'assertion 4.15.17, nous avons $r(V_1 \setminus \{v\}) = 1$.
Nous avons au moins trois sommets de V ayant un type de connexité égal à 2. En effet, si au contraire, seuls v et v_1 ont un type de connexité égal à 2, alors il n'existerait pas de partition de type 2 contenant F_2 et pas F_1. Or, d'après les assertions 4.15.9, 4.15.13, 4.15.15 et 4.15.18 les arêtes de F_2 apparaissent dans au plus une équation du système (4.23), en l'occurrence les équations triviales. Mais ceci contredit l'assertion 4.15.3.
Soit $(V_2^1, \ldots, V_2^t)$ une partition de type 2 de V_2. Puisque $r(V_1 \setminus \{v\}) = 1$, $|S_2| \geq 3$ et tous les sommets (à l'exception de v) de type de connexité égal à 2 appartiennent à V_2, une telle partition de V_2 existe. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v_1 \in V_2^1$. Considérons alors la partition $(V_1'', \ldots, V_{p''}'')$ définie de la manière suivante

$$\begin{array}{ll} V_1'' = V_1 \setminus \{v\}, & \\ V_2'' = V_2^1 \cup \{v\}, & \\ V_{i+1}'' = V_2^i & \text{pour } i = 2, \ldots, t, \\ V_i'' = V_{i-t+1} & \text{pour } i = t+2, \ldots, p+t-1, \end{array}$$

avec $p'' = p + t - 1$. Il n'est pas difficile de voir que $(V_1'', \ldots, V_{p''}'')$ est une partition de type 2 de V. Ainsi, nous avons

$$\begin{array}{rcl} x(\delta(V_1'', \ldots, V_{p''}'')) & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) + x(\delta(V_2^1, \ldots, V_2^t)) - x(F_1) + x(F_2) \\ & = & p + x(\delta(V_2^1, \ldots, V_2^t)) - x(F_1) + x(F_2) \\ & \geq & p'' \\ & = & p + t - 1. \end{array}$$

Nous obtenons donc

$$x(\delta(V_2^1, \ldots, V_2^t)) \geq t - 1 + x(F_1) - x(F_2).$$

Or nous avons $x(F_1) = x(e_1) + x(f_1) = 1 + x(f_1)$. Nous obtenons ainsi

$$x(\delta(V_2^1, \ldots, V_2^t)) \geq t + x(f_1) - x(F_2).$$ □

Assertion 4.15.20 Dans le système (4.23), F_2 n'apparait pas dans une partition.

Preuve. Supposons au contraire, que F_2 apparait dans une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système (4.23). D'après les assertions 4.15.9.ii) et 4.15.15, $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition de type 2 telle que $F_2 \subseteq [V_i, V_j]$ et $r(V \setminus (V_i \cup V_j)) = 1$. Par l'assertion 4.15.13, $F_1 \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) = \emptyset$. Ainsi v et v_1 appartiennent au même élément V_i de la

partition $(V_1, \ldots, V_p)$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $i = 1$. Par les assertions 4.15.2, 4.15.3, 4.15.5.ii) et 4.15.16, il existe une partition $(U_1, \ldots, U_q)$, $q \geq 3$, de type 2 du système (4.23) contenant F_1. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $F_1 \subseteq [U_1, U_2]$ avec $v \in U_1$ et $v_1 \in U_2$. Par l'assertion 4.15.5.ii), il s'en suit que $r(V \setminus (U_1 \cup U_2)) = 1$. Par l'assertion 4.15.2, nous avons aussi $v_2 \in U_1$. Soit $s \leq p$ le nombre de sous-ensembles de la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ qui intersectent U_2. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$V_l \cap U_2 \neq \emptyset \qquad \text{pour tout } l = 1, \ldots, s.$$

Puisque $(V_1, \ldots, V_p)$ est de type 2 et v, $v_1 \in V_1$, il existe au moins trois sommets de type de connexité égal à 2 dans G. Et ainsi, $s \geq 2$. De plus, puisque $r(V \setminus (V_i \cup V_j)) = 1$, nous avons $F_2 \subseteq [V_i, V_j]$ avec $i \leq s$ et $j \leq s$. Posons

$$U_2^l = V_l \cap U_2 \qquad \text{pour tout } l = 1, \ldots, s.$$

La partition $(U_2^1, \ldots, U_2^s)$ de U_2 est de type 2. En effet, $v_1 \in U_2^1$ et $r(v_1) = 2$. Comme il existe $u \in U_2 \setminus \{v_1\}$ tel que $r(u) = 2$, alors il existe $l_0 \in \{2, \ldots, s\}$ tel que $u \in U_2^{l_0}$. Ainsi, par l'assertion 4.15.19, nous obtenons

$$x(\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s)) \geq s + x(f_1) - x(F_2). \tag{4.35}$$

Nous distinguons alors deux cas.

Cas 1 $s = p$. Puisque $\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s) \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_s)$ et $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$, nous avons

$$x(\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s)) \leq x(\delta(V_1, \ldots, V_s)).$$

Or $F_2 \cap \delta(U_2^1, \ldots, U_2^s) = \emptyset$, car $v_2 \notin U_2$. De plus, $F_2 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_s)$ et $x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) = s$.. Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} x(\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s)) & \leq & x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) - x(F_2) \\ & \leq & s - x(F_2). \end{array}$$

De l'inégalité (4.35), il en résulte que

$$s + x(f_1) - x(F_2) \leq x(\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s)) \leq s - x(F_2).$$

Finalement, nous en déduisons que $x(f_1) \leq 0$, une contradiction avec l'assertion 4.15.1.

Cas 2 $s < p$. Considérons alors la partition $(V_1', \ldots, V_{p'}')$ définie de la manière suivante

$$\begin{array}{l} V_1' = \bigcup_{l=1}^{s} V_l, \\ V_l' = V_{l+s-1} \qquad \text{pour } l = 2, \ldots, p-s+1, \end{array}$$

avec $p' = p - s + 1$. Étant donné que $r(V_l) = 1$ pour tout $l \in \{s+1, \ldots, p\}$, il n'est pas difficile de voir que $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ est une partition de type 1 de V. Nous avons donc

$$\begin{aligned} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) &= x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) \\ &\geq p' - 1 \\ &= p - s + 1 - 1 \\ &= p - s. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) \leq s.$$

Or $\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s) \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_s)$, $F_2 \cap \delta(U_2^1, \ldots, U_2^s) = \emptyset$, $F_2 \subseteq \delta(V_1, \ldots, V_s)$ et $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$. Donc

$$\begin{aligned} x(\delta(U_2^1, \ldots, U_2^s)) &\leq x(\delta(V_1, \ldots, V_s)) - x(F_2) \\ &\leq s - x(F_2). \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité, combinée avec l'inégalité (4.35), implique $x(f_1) \leq 0$. Ce qui contredit l'assertion 4.15.1.
De ce fait, F_2 n'apparait pas dans une partition du système (4.23). □

Des assertions 4.15.18 et 4.15.20, nous pouvons conclure que les arêtes de F_2 apparaissent dans au plus une équation du système (4.23), en l'occurrence $x(e) = 1$. Mais ceci contredit l'assertion 4.15.3, et notre théorème est prouvé. □

Considérons maintenant le problème ESNDP quand plusieurs copies d'une arête peuvent être utilisées dans la solution, c'est-à-dire le problème 3.1. Soit $P(G, r)$ le polyèdre associé aux solutions de ce problème. Comme conséquence du théorème 4.15, nous avons le résultat suivant.

Théorème 4.16 *Soit $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle. Si $r \in \{1, 2\}^V$, alors $P(G, r)$ est complètement décrit par les contraintes de non-négativité (4.12), les contraintes de coupe (4.9) et les contraintes de partition (4.3).*

Preuve. Similaire à celle du théorème 3.10. □

Dans la section 4.2.2, nous avons montré que le problème de séparation de contraintes de partition (4.3) est polynomial. De plus, le problème de séparation des contraintes de coupe (4.9) peut être résolu en temps polynomial. Ainsi, des théorèmes 4.15 et 4.16, nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 4.17 *Si les types de sommets sont en 1 et 2, les problèmes ESNDP et 3.1 peuvent être résolus en temps polynomial dans la classe des graphes série-parallèles.* □

D'une manière assez naturelle et par rapport aux idées développées dans la démonstration du théorème 4.15, nous avons étudié une généralisation de ce résultat pour des types de sommets égaux à k et $k+1$, avec $k > 1$. Pour cela, il nous a fallu introduire de nouvelles inégalités, bien spécifiques aux graphes série-parallèles. C'est cette nouvelle famille de contraintes que nous présentons dans la prochaine section.

4.4 Les contraintes de SP-partition

4.4.1 Introduction

Dans [33], Chopra à étudié le problème 3.1 dans la classe des graphes outerplanaires et pour des types de sommets tous égaux à k, où k est un entier impair. Nous rappelons qu'un graphe est dit *outerplanaire* s'il est constitué d'un cycle avec des cordes qui ne s'intersectent pas. Les graphes outerplanaires forment une sous-classe de la classe des graphes série-parallèles. Chopra a ainsi introduit de nouvelles contraintes, valides pour le problème 3.1. Elles se présentent de la manière suivante. Soient $G = (V, E)$ un graphe outerplanaire, des types de sommets tous égaux à k avec k impair et $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 2$, une partition de V telle que $G(V_i)$ soit connexe pour tout $i = 1, \ldots, p$. Alors, l'inégalité

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil p - 1 \tag{4.36}$$

est valide pour le problème 3.1. Les inégalités (4.36) sont appelées *inégalités de partition outerplanaire*. Nous remarquons que la contrainte (4.36) n'est rien d'autre qu'une contrainte de coupe quand $p = 2$. Chopra a également montré que lorsque G est outerplanaire et $r(v) = k$ pour tout $v \in V$ avec k impair, alors $P(G, r)$ est complètement décrit par les contraintes de non-négativité, les cntraintes de coupe et les containtes de partition outerplanaire. De plus, il a conjecturé que ce résultat reste vrai quand le graphe G est série-parallèle.

Didi Biha et Mahjoub [58] ont étendu la validité des inégalités (4.36) pour les problèmes ESNDP et 3.1 à la classe des graphes série-parallèles. Ils les ont alors appelées *inégalités de SP-partition*. Dans cette classe de graphes, ils ont aussi complètement caractérisé le polytope ESNDP(G, r) par les contraintes triviales, de coupe et de SP-partition, quand tous les types de sommets sont égaux à une même valeur impaire.

Comme conséquence de ce résultat, ils ont démontré la conjecture de Chopra mentionnée précédemment (cette conjecture a été démontré indépendamment par Chopra et Stoer [36]). Par ailleurs, Didi Biha et Mahjoub [58] ont donné des conditions nécessaires et Didi Biha [57] des conditions suffisantes pour que les inégalités de SP-partition définissent des facettes du polytope ESNDP(G, r).

Dans ce qui suit, nous allons étendre les inégalités de SP-partition à des types de sommets quelconques, c'est-à-dire $r \in \mathbb{Z}_+^V$.

4.4.2 Les inégalités de SP-partition

Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle et $r \in \mathbb{Z}_+^V$ un vecteur types de sommets. Considérons une partition $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ de V, $p \geq 2$, telle que $r(V_i) \geq 1$, pour tout $i = 1, \ldots, p$. Dans le but de simplifier au maximum les expressions, nous sommes amenés à introduire les notations suivantes

- $r_\pi = \max\{con(V_i) \mid i = 1, \ldots, p\}$,
- p_i est égal au nombre de sous-ensembles V_j de la partition π tels que $con(V_j) = i$, pour tout $i = 1, \ldots, r_\pi$, c'est-à-dire $p_i = |\{j \mid con(V_j) = i;\ j = 1, \ldots, p\}|$.

Remarquons que

$$\sum_{i=1}^{r_\pi} p_i = p \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} con(V_i) = \sum_{i=1}^{r_\pi} i p_i.$$

Considérons alors l'inégalité

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^{r_\pi} \lceil \frac{i}{2} \rceil p_i - 1 & \text{si } r_\pi \text{ est impair,} \\ \sum_{i=1}^{r_\pi} \lceil \frac{i}{2} \rceil p_i & \text{si } r_\pi \text{ est pair.} \end{cases} \tag{4.37}$$

Théorème 4.18 *Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle et $r \in \mathbb{Z}_+^V$ un vecteur types de sommets tels que G soit arête-fiable. Alors les inégalités (4.37) sont valides pour ESNDP.*

Preuve. Il suffit de montrer que, pour tout graphe $G = (V, E)$ série-parallèle et arête-fiable (par rapport à $r \in \mathbb{Z}_+^V$), nous avons

$$|E| \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^{r_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| - 1 & \text{si } r_{max} \text{ est impair,} \\ \\ \sum_{i=1}^{r_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| & \text{si } r_{max} \text{ est pair,} \end{cases} \tag{4.38}$$

où $I_i = \{v \in V \mid r(v) = i\}$ pour tout $i = 1, \ldots, r_{max}$. Nous savons qu'il existe au moins deux sommets de type de connexité égal à r_{max}. Ainsi, nous avons $r(v) = con(v)$ pour tout $v \in V$. La preuve est par récurrence sur le nombre de sommets.

Si $|V| = 2$, alors la contrainte (4.38) est une contrainte de coupe (**??**). En effet, nous avons $I_{r_{max}} = V$ et $I_i = \emptyset$ pour tout $i = 1, \ldots, r_{max} - 1$. Ainsi, $|I_{r_{max}}| = 2$. Si r_{max} est impair, alors le membre droit de l'inégalité (4.38) est

$$\left\lceil \frac{r_{max}}{2} \right\rceil |I_{r_{max}}| - 1 = (\frac{r_{max} + 1}{2}) * 2 - 1 = r_{max}.$$

Si r_{max} est pair, nous obtenons alors

$$\left\lceil \frac{r_{max}}{2} \right\rceil |I_{r_{max}}| = \frac{r_{max}}{2} * 2 = r_{max}.$$

La contrainte (4.38) s'écrit alors $|E| \geq r_{max}$.

Supposons que l'inégalité (4.38) est valide pour tout graphe série-parallèle arête-fiable ayant au plus n sommets. Supposons que G possède $n + 1$ sommets. Puisque G est un graphe série-parallèle, il existe un sommet $v \in V$ qui est adjacent à exactement deux sommets v_1 et v_2 de V. Posons $F_1 = [v, v_1]$ et $F_2 = [v, v_2]$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $|F_1| \geq |F_2|$. Puisque G est arête-fiable, nous devons avoir $|\delta(v)| \geq r(v)$ pour tout $v \in V$. De plus, $\delta(v) = F_1 \cup F_2$. Ainsi, nous avons

$$|F_1| \geq \left\lceil \frac{r(v)}{2} \right\rceil. \tag{4.39}$$

Soient $G^* = (V^*, E^*)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant l'ensemble d'arêtes F_1 et $r^* \in \mathbb{Z}_+^{V^*}$ le vecteur types de sommets défini de la manière suivante

$$r^*(u) = \begin{cases} r(u) & \text{si } u \in V^* \setminus \{v^*\}, \\ \\ con_G(\{v, v_1\}) & \text{si } u = v^*, \end{cases}$$

où v^* est le sommet résultant de la contraction de F_1. Il est facile de voir que G^* est série-parallèle et qu'il vérifie les conditions d'arête-connexité. De plus, puisque $|V^*| \leq |V|$, d'après notre hypothèse de récurrence, nous avons

$$|E^*| \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I^*_i| - 1 & \text{si } r^*_{max} \text{ est impair,} \\ \\ \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I^*_i| & \text{si } r^*_{max} \text{ est pair,} \end{cases}$$

où $r^*_{max} = \max\{con_{G^*}(u) \mid u \in V^*\}$ et $I^*_i = \{u \in V^* \mid con_{G^*}(u) = i\}$ pour tout $i = 1, \ldots, r^*_{max}$.
Or $|E| = |E^*| + |F_1|$. Ainsi

$$|E| \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I^*_i| - 1 + |F_1| & \text{si } r^*_{max} \text{ est impair,} \\ \\ \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I^*_i| + |F_1| & \text{si } r^*_{max} \text{ est pair,} \end{cases} \tag{4.40}$$

Nous distinguons deux cas.

Cas 1 $r^*_{max} = r_{max}$. Si $r(v) > r(v_1)$, alors $|I^*_{r(v)}| = |I_{r(v)}|$ et $|I^*_{r(v_1)}| = |I_{r(v_1)}| - 1$. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \tfrac{i}{2} \rceil |I^*_i| &= \sum_{i=1}^{r_{max}} \lceil \tfrac{i}{2} \rceil |I_i| - \left\lceil \tfrac{r(v_1)}{2} \right\rceil \\ &\geq \sum_{i=1}^{r_{max}} \lceil \tfrac{i}{2} \rceil |I_i| - \left\lceil \tfrac{r(v)}{2} \right\rceil . \end{aligned}$$

Supposons que $r(v) \leq r(v_1)$. Nous avons donc $|I^*_{r(v)}| = |I_{r(v)}| - 1$ et

$$\sum_{i=1}^{r^*_{max}} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil |I^*_i| = \sum_{i=1}^{r_{max}} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil |I_i| - \left\lceil \frac{r(v)}{2} \right\rceil .$$

Nous en déduisons alors

$$\sum_{i=1}^{r^*_{max}} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil |I^*_i| \geq \sum_{i=1}^{r_{max}} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil |I_i| - \left\lceil \frac{r(v)}{2} \right\rceil . \tag{4.41}$$

Ainsi, d'après (4.39) et (4.41), l'inégalité (4.40) s'écrit de la manière suivante

$$|E| \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^{r_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| - \lceil \frac{r(v)}{2} \rceil - 1 + \lceil \frac{r(v)}{2} \rceil & \text{si } r_{max} \text{ est impair,} \\ \\ \sum_{i=1}^{r_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| - \lceil \frac{r(v)}{2} \rceil + \lceil \frac{r(v)}{2} \rceil & \text{si } r_{max} \text{ est pair.} \end{cases}$$

Et nous obtenons l'inégalité (4.38).

Cas 2 $r^*_{max} < r_{max}$. Dans ce cas, les deux seuls sommets qui ont un type de connexité égal à r_{max} sont v et v_1, c'est-à-dire $|I_{r_{max}}| = 2$. Nous avons donc $r(u) \leq r^*_{max}$ pour tout $u \in V \setminus \{v, v_1\}$. Par conséquent, $|I^*_{r^*_{max}}| = |I_{r^*_{max}}| + 1$ et $|I^*_i| = |I_i|$ pour tout $i = 1, \ldots, r^*_{max} - 1$. L'inégalité (4.40) s'écrit alors

$$|E| \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| + \lceil \frac{r^*_{max}}{2} \rceil - 1 + |F_1| & \text{si } r^*_{max} \text{ est impair,} \\ \\ \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| + \lceil \frac{r^*_{max}}{2} \rceil + |F_1| & \text{si } r^*_{max} \text{ est pair.} \end{cases} \tag{4.42}$$

Soit C^* la cardinalité minimum d'une coupe séparant v^* et un sommet ayant un type de connexité égal à r^*_{max} dans le graphe G^*. Puisque G^* vérifie les conditions d'arête-connexité, il est clair que $C^* \geq r^*_{max}$. Nous allons maintenant donner une nouvelle borne inférieure pour la cardinalité de $|F_1|$.

Assertion 4.18.1 $|F_1| \geq r_{max} - \lfloor \frac{C^*}{2} \rfloor$.

Preuve. Soit $W^* \subseteq V^*$ un sous-ensemble de sommets tel que $v^* \in W^*$, $con(W^*) = r^*_{max}$ et $|\delta(W^*)| = C^*$. Considérons alors le sous-ensemble de sommets $W \subseteq V$ tel que $W = (W^* \setminus \{v^*\}) \cup \{v\}$. Nous avons donc $v_1 \in V \setminus W$. Ainsi $con(W) = r_{max}$. Étant donné que le graphe G est arête-fiable, nous avons $|\delta(W)| \geq con(W) = r_{max}$ et $|\delta(v_1)| \geq r_{max}$. Or $|\delta(W)| = |\delta(W^*) \setminus \delta(v_1)| + |F_1|$ et $|\delta(v_1)| = |\delta(W^*) \cap \delta(v_1)| + |F_1|$. Par conséquent, $|F_1| \geq r_{max} - |\delta(W^*) \setminus \delta(v_1)|$ et $|F_1| \geq r_{max} - |\delta(W^*) \cap \delta(v_1)|$. Nous en déduisons donc

$$|F_1| \geq r_{max} - \min\{|\delta(W^*) \setminus \delta(v_1)|, |\delta(W^*) \cap \delta(v_1)|\}. \tag{4.43}$$

Puisque $(\delta(W^*) \setminus \delta(v_1)) \cap (\delta(W^*) \cap \delta(v_1)) = \emptyset$ et $|\delta(W^*| = C^*$, nous avons

$$\min\{|\delta(W^*) \setminus \delta(v_1)|, |\delta(W^*) \cap \delta(v_1)|\} \leq \left\lfloor \frac{C^*}{2} \right\rfloor. \tag{4.44}$$

De (4.43) et (4.44), nous obtenons $|F_1| \geq r_{max} - \lfloor \frac{C^*}{2} \rfloor$. □

L'assertion précédente va nous permettre de réécrire l'inégalité (4.42) d'une manière beaucoup plus simple.

Assertion 4.18.2 $|E| \geq \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| + r_{max}$.

Preuve. Nous allons discuter de deux cas dépendants de l'égalité entre la valeur de C^* et celle de r^*_{max}.

Cas 1 $C^* = r^*_{max}$. D'après l'assertion 4.18.1, l'inégalité (4.42) s'écrit comme suit

$$|E| \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| + \lceil \frac{r^*_{max}}{2} \rceil - 1 + r_{max} - \lfloor \frac{C^*}{2} \rfloor & \text{si } r^*_{max} \text{ est impair,} \\ \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| + \lceil \frac{r^*_{max}}{2} \rceil + r_{max} - \lfloor \frac{C^*}{2} \rfloor & \text{si } r^*_{max} \text{ est pair.} \end{cases} \tag{4.45}$$

Or

$$\left\lceil \frac{r^*_{max}}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{C^*}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{r^*_{max}}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{r^*_{max}}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } r^*_{max} \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } r^*_{max} \text{ est pair.} \end{cases}$$

Donc, de l'inégalité (4.45), nous obtenons

$$|E| \geq \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil |I_i| + r_{max}.$$

Cas 2 $C^* > r^*_{max}$. Alors, toute coupe dans G^* qui sépare deux sommets de type r^*_{max} a une cardinalité supérieure ou égale à C^*. Ainsi, d'après le théorème 2.1, G^* vérifie les conditions d'arête-connexité définies par les types de sommets suivants

$$\overline{r}(u) = \begin{cases} r^*(u) & \text{si } r(u) \neq r^*_{max}, \\ C^* & \text{si } r(u) = r^*_{max}, \end{cases} \quad \text{pour tout } u \in V^*.$$

Posons $I'_i = \{u \in V^* \mid con_{G^*}(u) = i\}$ pour tout $i = 1, \ldots, C^*$. Il est clair que $|I'_i| = |I^*_i|$ pour tout $i = 1, \ldots, r^*_{max} - 1$, $|I'_{r^*_{max}}| = 0$ et $|I'_{C^*}| = |I^*_{r^*_{max}}|$. D'après l'assertion 4.18.1, l'inégalité (4.42) s'écrit alors

$$|E| \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^{r^*_{max}-1} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I^*_i| + \lceil \frac{C^*}{2} \rceil |I^*_{r^*_{max}}| - 1 + r_{max} - \lfloor \frac{C^*}{2} \rfloor & \text{si } C^* \text{ est impair,} \\ \sum_{i=1}^{r^*_{max}-1} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I^*_i| + \lceil \frac{C^*}{2} \rceil |I^*_{r^*_{max}}| + r_{max} - \lfloor \frac{C^*}{2} \rfloor & \text{si } C^* \text{ est pair.} \end{cases} \tag{4.46}$$

Puisque $|I^*_{r^*_{max}}| = |I_{r^*_{max}}| + 1$, nous avons

$$\left\lceil \frac{C^*}{2} \right\rceil |I^*_{r^*_{max}}| = \left\lceil \frac{C^*}{2} \right\rceil |I_{r^*_{max}}| + \left\lceil \frac{C^*}{2} \right\rceil.$$

Or $C^* > r^*_{max}$. Donc $\lceil \frac{C^*}{2} \rceil \geq \lceil \frac{r^*_{max}}{2} \rceil$. Ainsi

$$\left\lceil \frac{C^*}{2} \right\rceil |I_{r^*_{max}}| + \left\lceil \frac{C^*}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{r^*_{max}}{2} \right\rceil |I_{r^*_{max}}| + \left\lceil \frac{C^*}{2} \right\rceil .$$

De plus, $|I^*_i| = |I_i|$ pour tout $i = 1, \ldots, r^*_{max} - 1$. Donc, l'inégalié (4.46) devient

$$|E| \geq \begin{cases} \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| + \lceil \frac{C^*}{2} \rceil |I^*_{r^*_{max}}| - 1 + r_{max} - \lfloor \frac{C^*}{2} \rfloor & \text{si } C^* \text{ est impair,} \\ \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| + \lceil \frac{C^*}{2} \rceil |I^*_{r^*_{max}}| + r_{max} - \lfloor \frac{C^*}{2} \rfloor & \text{si } C^* \text{ est pair.} \end{cases}$$

Étant donné que

$$\left\lceil \frac{C^*}{2} \right\rceil - \left\lfloor \frac{C^*}{2} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } C^* \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } C^* \text{ est pair,} \end{cases}$$

nous obtenons $|E| \geq \sum_{i=1}^{r^*_{max}} \lceil \frac{i}{2} \rceil |I_i| + r_{max}$. □

Donc, puisque $|I_{r_{max}}| = 2$, nous obtenons, d'après l'assertion 4.18.2, l'inégalité (4.38). □

Les inégalités (4.37) seront appelées *inégalités de SP-partition*. Nous pouvons aisément remarquer que ces inégalités généralisent les inégalités (4.36). En effet, nous avons, dans le cas de types de sommets tous égaux à k, avec k impair, $r_\pi = k$, $p_k = p$ et $p_i = 0$ pour tout $i \neq k$.

Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et une partition $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ de V, notons par $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant les sous-ensembles V_i, pour tout $i = 1, \ldots, p$. Supposons que G n'est pas série-parallèle, mais que la partition π est telle que

- $G(V_i)$ soit connexe pour tout $i = 1, \ldots, p$, et
- G_π soit série-parallèle.

Alors, le théorème 4.18 implique que l'inégalité (4.37) est valide pour ESNDP. Par contre, si le graphe G_π n'est pas série-parallèle, ce résultat n'est plus vrai. En effet, considérons le cas d'un graphe complet sur 4 sommets $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tel que $r(v_i) = 3$ pour $i = 1, \ldots, 3$, $r(v_4) = 2$ et $p = 4$ (voir figure 4.3).

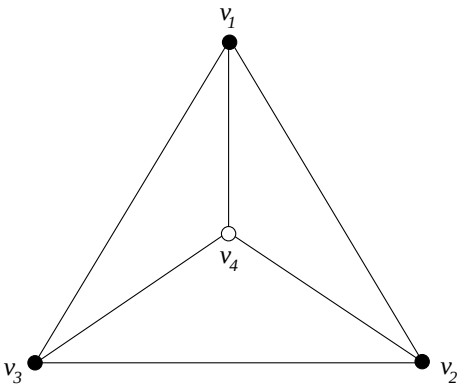

FIG. 4.3 – K_4

Le graphe K_4 est 3-arête connexe et contient 6 arêtes, alors que le membre droit de l'inégalité de SP-partition (4.37) correspondante est égal à

$$\left\lceil \frac{2}{2} \right\rceil * 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil * 3 = 7.$$

Les deux remarques suivantes montrent le lien qui existe entre les inégalités de SP-partition et les inégalités de coupe, respectivement de partition.

Remarque 4.19 Si $con(V_i)$ est pair pour tout $i = 1, \ldots, p$, alors les inégalités (4.37) sont dominées par les contraintes de coupe (4.9).

Preuve. Puisque $con(V_i)$ est pair pour tout $i = 1, \ldots, p$, nous avons r_π qui est pair et la contrainte de SP-partition s'écrit sous la forme

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \sum_{i=1}^{r_\pi} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil p_i = \sum_{j=1}^{\frac{r_\pi}{2}} j p_{2j}.$$

Or, pour tout $i = 1, \ldots, r_\pi$, nous avons

$$\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil p_i = \begin{cases} \frac{i}{2} p_i & \text{si } i \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \sum_{i=1}^{r_\pi} \frac{i}{2} p_i.$$

De plus, pour tout sous-ensemble V_i, $i = 1, \ldots, p$, de π, nous avons

$$x(\delta(V_i)) \geq con(V_i).$$

En sommant ces p inégalités, nous obtenons

$$2\ x(\delta(V_1, \ldots, v_p)) \geq \sum_{i=1}^{p} con(V_i) = \sum_{i=1}^{r_\pi} ip_i.$$

D'où

$$x(\delta(V_1, \ldots, v_p)) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r_\pi} ip_i.$$

Et notre remarque est prouvée. □

Remarque 4.20 Soient $G = (V, E)$ un graphe (pas nécessairement série-parallèle) et $(V_1, \ldots, V_p)$ une partition de V induisant un graphe série-parallèle. Nous avons

i) si $r_\pi \leq 2$, alors la contrainte de partition (4.1) coïncide avec la contrainte de SP-partition (4.37),
ii) si $r_\pi > 2$, alors la contrainte de partition (4.1) est dominée par la contrainte de SP-partition (4.37).

Preuve. i) Triviale en réécrivant l'inégalité (4.37) pour une telle configuration de types de sommets.

ii) Supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $con(V_{i_0}) > 2$, et ainsi il existe au moins deux sous-ensembles de la partition ayant un type de connexité strictement supérieur à 2. L'inégalité de partition correspondante est

$$\begin{aligned} x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) &\geq \left\lceil \tfrac{1}{2} \sum_{i \in I_2} con(V_i) \right\rceil + p_1 \\ &\geq \left\lceil \tfrac{1}{2} \sum_{i=2}^{r_\pi} ip_i \right\rceil + p_1. \end{aligned}$$

Si $\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{r_\pi} ip_i$ est entier, alors nous avons

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=2}^{r_\pi} ip_i + p_1. \tag{4.47}$$

Si $\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r_\pi} ip_i$ n'est pas entier, alors nous avons

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq \frac{1}{2}(\sum_{i=2}^{r_\pi} ip_i + 1) + p_1.$$

Cette dernière inégalité nous donne

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r_\pi} ip_i + p_1 + \frac{1}{2}. \tag{4.48}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r_\pi} \lceil \tfrac{i}{2} \rceil p_i &= \sum_{i=2}^{r_\pi} \lceil \tfrac{i}{2} \rceil p_i + p_1 \\
&= \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ pair}}}^{r_\pi} \tfrac{i}{2} p_i + \sum_{\substack{i=2 \\ i \text{ impair}}}^{r_\pi} \tfrac{i+1}{2} p_i + p_1 \\
&= \sum_{i=2}^{r_\pi} \tfrac{i}{2} p_i + \sum_{\substack{i=3 \\ i \text{ impair}}}^{r_\pi} \tfrac{1}{2} p_i + p_1.
\end{aligned}$$

Si tous les sous-ensembles V_i de la partition sont tels que $con(V_i)$ est pair ou bien égal à 1, alors nous avons $\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{r_\pi} ip_i$ entier et

$$\sum_{\substack{i=3 \\ i \text{ impair}}}^{r_\pi} \frac{1}{2} p_i = 0.$$

Ainsi, l'inégalité de SP-partition s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) &\geq \sum_{i=1}^{r_\pi} \lceil \tfrac{i}{2} \rceil p_i \\
&= \sum_{i=2}^{r_\pi} \tfrac{i}{2} p_i + p_1.
\end{aligned}$$

Et nous retrouvons bien l'inégalité (4.47).

S'il existe au moins un sous-ensemble V_i de la partition tel que $con(V_i)$ soit impair et supérieur ou égal à 3, alors

$$\sum_{\substack{i=3 \\ i \text{ impair}}}^{r_\pi} \frac{1}{2} p_i \geq \frac{1}{2}.$$

Et, l'inégalité de SP-partition s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) &\geq \sum_{i=1}^{r_\pi} \lceil \tfrac{i}{2} \rceil p_i \\ &= \sum_{i=2}^{r_\pi} \tfrac{i}{2} p_i + \sum_{\substack{i=3 \\ i \text{ impair}}}^{r_\pi} \tfrac{1}{2} p_i + p_1 \\ &\geq \tfrac{1}{2} \sum_{i=2}^{r_\pi} i p_i + p_1 + \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, le membre droit de l'inégalité de SP-partition induite par $(V_1,\ldots,V_p)$ est toujours supérieur ou égal à celui de l'inégalité de partition correspondante. □

Dans la suite de cette section, nous allons nous intéresser au problème de séparation des inégalités de SP-partition.

Dans le cas de types de sommets uniformes et donc, par la remarque 4.19, impairs, Didi Biha et Mahjoub [58] ont donné le résultat suivant.

Théorème 4.21 [58] *Pour des types de sommets tous égaux à un entier impair, le problème de séparation des inégalités de SP-partition (4.36) est polynomial.*

Preuve. Découle directement du théorème 4.1. □

Maintenant, dans le but d'étendre notre théorème 4.15 à des types de connexité associés aux sommets en k et $k+1$, nous avons étudié le problème de séparation des inégalités de SP-partition pour de tels vecteurs types de sommets. Nous avons alors été amenés à considérer deux cas suivant la parité de k. En effet, si k est impair, l'inégalité de SP-partition induite par la partition $(V_1,\ldots,V_p)$ de V est de la forme

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq \begin{cases} \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1 & \text{si } r_\pi = k, \\ \lceil \frac{k}{2} \rceil p & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.49}$$

Si k est pair, elle s'écrit comme suit

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq \begin{cases} \lceil \frac{k}{2} \rceil p & \text{si } r_\pi = k, \\ \lceil \frac{k}{2} \rceil p + p_{k+1} - 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.50}$$

Cette distinction vient du fait que lorsque k est impair, $\lceil \frac{k}{2} \rceil = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ tandis que dans le cas contraire, $\lceil \frac{k}{2} \rceil = \lceil \frac{k+1}{2} \rceil - 1$. Nous avons alors le résultat suivant.

Théorème 4.22 *Si les types de connexité associés aux sommets appartiennent tous à $\{k, k+1\}$, avec k impair, alors le problème de séparation des inégalités (4.49) est polynomial.*

Preuve. Similaire à celle du théorème 4.3. □

Pour les inégalités (4.50), nous n'avons pas pu établir la complexité de leur problème de séparation. Si tous les sommets de type $k+1$ sont dans le même élément d'une partition $(V_1, \ldots, V_p)$ de V, alors la contrainte

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil p$$

peut être séparée en temps polynomial par la méthode vue dans le théorème 4.3. Par contre, si au moins deux éléments de la partition sont de type $k+1$, alors le membre droit de la contrainte ne dépend plus uniquement de p (le nombre d'éléments de la partition) mais également de p_{k+1} (le nombre d'éléments de type $k+1$ de la partition). Par conséquent, une application directe des idées développées dans la démonstration du théorème 4.3 n'a pu être envisagée pour séparer les inégalités

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil p + p_{k+1} - 1.$$

En effet, nous n'avons pas réussi à ramener ce problème à la minimisation d'une fonction sous-modulaire.

Comme nous venons de le voir, le problème de séparation des inégalités de SP-partition peut être résolu en temps polynomial sous certaines conditions sur le vecteur types de sommets. Ainsi, pour de telles configurations, nous avons regardé si ces inégalités, combinées aux inégalités triviales et de coupe sont suffisantes pour caractériser complètement le polytope ESNDP(G, r) dans la classe des graphes série-parallèles. Cette étude est décrite dans la section suivante.

4.5 Extension au cas $k \geq 2$

Le but de cette section est de voir si le théorème 4.15 reste vrai lorsque les types de sommets sont en k et $k+1$ avec $k \geq 2$. Supposons donc que nous avons un graphe série-parallèle $G = (V, E)$ et un vecteur types de sommets $r \in \{k, k+1\}^V$ avec $k \geq 2$. Suite au travail réalisé dans la section précédente, nous avons considéré deux cas. Ainsi,

regardons tout d'abord le cas où k est impair.

Rappelons qu'étant donnée une partition $(V_1, \ldots, V_p)$ de V, la contrainte de SP-partition correspondante s'écrit de la manière suivante

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \begin{cases} \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1 & \text{si } r_\pi = k, \\ \lceil \frac{k}{2} \rceil p & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.51}$$

Nous avons alors obtenu le résultat suivant.

Théorème 4.23 *Si $G = (V, E)$ est un graphe série-parallèle et $r(v) \in \{k, k+1\}^V$ avec $k \geq 3$ et impair, alors le polytope ESNDP(G, r) est complètement caractérisé par les contraintes triviales (4.12), (4.13), les contraintes de coupe (4.9) et les contraintes de SP-partition (4.51).*

Preuve. Le preuve de ce théorème utilise les mêmes techniques que celles développées pour démontrer le théorème 4.15. La seule modification notoire est qu'il faut parfois considérer les coupes $x(\delta(W)) = k$ du système définissant le point extrême fractionnaire (lorsque $k = 1$, ces coupes sont redondantes). □

Comme conséquence de ce théorème, nous obtenons le résultat suivant qui généralise celui de Didi Biha et Mahjoub [58].

Théorème 4.24 *Soit $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle. Si les types de connexité sont en k et $k+1$ avec $k \geq 3$ et impair, alors $P(G, r)$ est complètement décrit par les contraintes de non-négativité (4.12), les contraintes de coupe (4.9) et celles de SP-partition (4.51).*

Preuve. Similaire à celle du théorème 3.10. □

Puisque que les problèmes de séparation associés aux inégalités de coupe et de SP-partition (4.51) sont polynomiaux, nous déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 4.25 *Si les types de sommets sont en k et $k+1$, avec $k \geq 3$ et impair, alors les problèmes ESNDP et 3.1 peuvent être résolus en temps polynomial dans la classe des graphes série-parallèles.* □

Intéressons nous maintenant au cas où k est pair. La contrainte de SP-partition induite par une partition $(V_1, \ldots, V_p)$ de V est de la forme

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq \begin{cases} \lceil \frac{k}{2} \rceil p & \text{si } r_\pi = k, \\ \lceil \frac{k}{2} \rceil p + p_{k+1} - 1 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.52}$$

Contrairement au cas précédent, les contraintes triviales, de coupe et de SP-partition (4.52) ne sont pas suffisantes pour décrire le polytope $\mathrm{ESNDP}(G, r)$ quand G est série-parallèle et $r \in \{k, k+1\}$ avec k pair. En effet, regardons le cas où $k = 2$. Considérons alors le graphe $G = (V, E)$ donné par la figure 4.4, où les cercles noirs représentent les sommets ayant un type de connexité égal à 3.

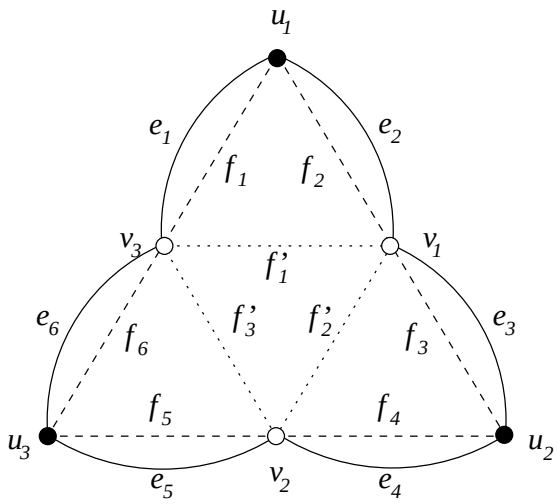

FIG 4.4

Soit $\overline{x} \in \mathbb{R}^E$ la solution donnée par

$$\overline{x}(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e = e_i;\ i = 1, \ldots, 6, \\ \frac{1}{2} & \text{si } e = f_i;\ i = 1, \ldots, 6, \\ \frac{1}{4} & \text{si } e = f'_i;\ i = 1, \ldots, 3. \end{cases}$$

Soit $T(G, r)$ le polytope défini par les contraintes triviales (4.12), (4.13), les contraintes de coupe (4.9) et les contraintes de SP-partition (4.52). Le vecteur $\overline{x}$ est un point extrême du polytope $T(G, r)$. En effet, considérons le graphe $G_1 = (V, E_1)$ où $E_1 = E \backslash \{e_i \mid i = 1, \ldots, 6\}$. Soit $r_1 \in \{0, 1\}^V$ le vecteur types de sommets défini de la manière suivante

$$r_1(v) = \begin{cases} 1 & \text{si } v = u_i;\ i = 1, \ldots, 3, \\ 0 & \text{si } v = v_i;\ i = 1, \ldots, 3. \end{cases}$$

Soit $\overline{x}_1$ la restriction de $\overline{x}$ sur E_1. Didi Biha [57] a montré que $\overline{x}_1$ est un pont extrême du polytope $T(G_1, r_1)$. Notons par $(S_{\overline{x}_1})$ le système d'égalités induites par des contraintes de $T(G_1, r_1)$ et dont $\overline{x}_1$ est l'unique solution. Il n'est pas difficile de voir que toute contrainte de $T(G_1, r_1)$ serrée pour $\overline{x}_1$ peut être étendue à une contrainte de $T(G, r)$ serrée pour $\overline{x}$. Ceci est trivial pour les contraintes de la forme $x(e) = 1$. Si la contrainte est une coupe induite par un sommet u_i, $i = 1, \ldots, 3$, nous avons

$$\begin{aligned} \overline{x}_1(\delta_{G_1}(u_i)) &= \overline{x}_1(f_{2i-1}) + \overline{x}_1(f_{2i}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \overline{x}(\delta_G(u_i)) &= \overline{x}(\delta_{G_1}(u_i)) + \overline{x}(e_{2i-1}) + \overline{x}(e_{2i}) \\ &= \overline{x}_1(\delta_{G_1}(u_i)) + \overline{x}(e_{2i-1}) + \overline{x}(e_{2i}) \\ &= 1 + \overline{x}(e_{2i-1}) + \overline{x}(e_{2i}) \\ &= 3. \end{aligned}$$

Puisque $r(u_i) = 3$, la contrainte de coupe induite par u_i, $i = 1, \ldots, 3$ est serrée pour $\overline{x}$. Supposons maintenant que la contrainte est définie par une partition (V_1, V_2, V_3) de V avec $r_1(V_i) = 1$ et $|V_i| = i$ pour $i = 1, \ldots, 3$. Notons que seules ces inégalités de partition sont serrées pour $\overline{x}_1$. Supposons, sans perte de généralité, que $V_1 = \{u_1\}$, $V_2 = \{v_1, u_2\}$ et $V_3 = \{v_2, u_3, v_3\}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \overline{x}_1(\delta_{G_1}(V_1, V_2, V_3)) &= \overline{x}_1(f_1) + \overline{x}_1(f_2) + \overline{x}_1(f_4) + \overline{x}_1(f'_1) + \overline{x}_1(f'_2) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \overline{x}(\delta_G(V_1, V_2, V_3)) &= \overline{x}(\delta_{G_1}(V_1, V_2, V_3)) + \overline{x}(e_1) + \overline{x}(e_2) + \overline{x}(e_4) \\ &= \overline{x}_1(\delta_{G_1}(V_1, V_2, V_3)) + \overline{x}(e_1) + \overline{x}(e_2) + \overline{x}(e_4) \\ &= 2 + \overline{x}(e_1) + \overline{x}(e_2) + \overline{x}(e_4) \\ &= 5. \end{aligned}$$

Par ailleurs, la contrainte de SP-partition induite par (V_1, V_2, V_3) est $x(\delta(V_1, V_2, V_3)) \geq 3 + 3 - 1 = 5$. Par conséquent, cette dernière est serrée pour $\overline{x}$.

Considérons le système $(S_{\overline{x}})$ composé des équations $x(e_i) = 1$ pour $i = 1, \ldots, 6$ et des égalités obtenues à partir de celles de $(S_{\overline{x}_1})$ comme décrit précédemment. Le système $(S_{\overline{x}})$ a la forme suivante.

$$\begin{pmatrix} I_6 & 0 \\ 0 & (S_{\overline{x}_1}) \end{pmatrix}$$

où I_6 est la matrice identité à 6 lignes et 6 colonnes. Puisque $(S_{\overline{x}_1})$ est un système non singulier, $(S_{\overline{x}})$ l'est aussi. De plus, x est une solution de $(S_{\overline{x}})$. Par conséquent, x est l'unique solution de ce système. Ainsi, le vecteur $\overline{x}$ est un point extrême fractionnaire du polytope $T(G, r)$.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que le problème de conception de réseaux fiables est polynomial dans la classe des graphes série-parallèles et pour des types de sommets en 1 et 2. En effet, après avoir prouvé que le problème de séparation des inégalités de partition est polynomial pour de tels vecteurs types de sommets, nous avons complètement caractérisé, pour la classe des graphes série-parallèles, le polytope associé aux solutions du problème ESNDP par les contraintes triviales, de coupe et de partition. Par la suite, nous avons étendu ces résultats à des types de sommets en k et $k+1$ où k est un entier impair. Pour ce faire, nous avons généralisé les inégalités de SP-partition pour des types de sommets généraux. Lorsque $k = 1$, ces inégalités coïncident avec les inégalités de partition et si $k > 1$, elles les dominent. Comme conséquence de ces résultats, nous avons obtenu une description complète du polyèdre associé aux solutions du problème 3.1 par les inégalités de non-négativité, de coupe et de SP-partition.

Lorsque k est un entier pair, nous n'avons pas pu établir une telle caractérisation. Déja, pour $k = 0$, nous avons le problème du sous-graphe Steiner connexe qui est très étroitement lié au problème de l'arbre Steiner, pour lequel de nombreuses autres familles d'inégalités valides sont connues. L'étude de ce dernier problème (correspondant au cas $k = 0$) est l'objet de notre prochain chapitre.

À notre connaissance, la complexité du problème ESNSP n'a pas encore été établie dans les graphes série-parallèles. Néanmoins, notre investigation du problème nous conduit à donner la conjecture suivante.

Conjecture 4.1 *Le problème ESNDP est polynomial dans les graphes série-parallèles pour tout vecteur types de sommets* $r \in \mathbb{Z}_+^V$.

Chapitre 5

Le problème de l'arbre Steiner

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de l'arbre Steiner qui est étroitement lié au problème ESNDP. Nous introduisons une nouvelle classe d'inégalités valides qui généralise plusieurs familles d'inégalités connues dans la littérature. Puis, nous donnons des conditions suffisantes pour que ces inégalités définissent des facettes. Par la suite, nous décrivons des procédures de construction de facettes. Elles vont nous permettre, d'une part, de donner un contre-exemple à une conjecture de Chopra et Rao [35]. D'autre part, elles vont être utilisées pour décrire le dominant du polytope des arbres Steiner ainsi que le polytope $\mathrm{ESNDP}(G, r)$ quand $r \in \{0,1\}^V$ dans des classes spéciales de graphes. Une grande partie de ce travail a été réalisée en collaboration avec Didi Biha [57] et a fait l'objet d'une publication [59].

5.1 Introduction

Le problème de l'arbre Steiner est une version combinatoire du *problème Steiner dans le plan euclidien*, noté ESP. Ce dernier problème consiste à trouver le plus court réseau couvrant un ensemble de points donnés dans le plan euclidien [85, 175]. Dans le but d'obtenir un tel réseau, il est souvent nécessaire d'introduire des points additionnels aux endroits de jonction d'arêtes. Des algorithmes exacts [24, 25, 43, 136, 178] ainsi que des heuristiques efficaces [29, 121, 128] ont été développées pour le problème ESP.

Dans de nombreuses applications, les locations des points additionnels sont limitées à un ensemble fini. Ainsi, si l'hypothèse que tous les points (donnés et additionnels) sont dans le plan (en nombre fini) et les coûts sur les arêtes sont arbitraires (et non

plus égaux à la distance euclidienne entre deux points), nous obtenons le *problème de l'arbre Steiner*. Ce dernier, que nous noterons STP, peut être formulé de la manière suivante.

Problème 5.1 *Étant donnés un graphe $G = (V, E)$, un vecteur poids $w \in \mathbb{R}^E$ associés aux arêtes de G et un ensemble de sommets $S \subseteq V$, le problème de l'arbre Steiner consiste à trouver un arbre de G, couvrant S et de poids minimum.*

Les sommets de S sont appelés *terminaux* (ou encore *sommets terminaux*) tandis que ceux de $V \setminus S$ *sommets Steiner*. Un sous-graphe (resp. arbre) H couvrant S est alors appelé *sous-graphe Steiner* (resp. *arbre Steiner*). De plus, si pour toute paire de sommets distincts de S, il existe au moins un chemin dans H, nous dirons alors que H est un *sous-graphe Steiner connexe* de G. Et, dans un but de simplification, nous parlerons du *problème du sous-graphe Steiner connexe* à la place du problème de conception de réseaux fiables lorque $r \in \{0,1\}^V$ (en gardant toutefois l'écriture ESNDP(G, r)).

Ces deux dernières décennies, le problème STP a reçu une attention particulière vues ses nombreuses applications dans la conception des circuits intégrés (circuits VLSI) et des réseaux de télécommunication. Par ailleurs, en posant $r(v) = 1$ si $v \in S$ et $r(v) = 1$ sinon, il n'est pas difficile de voir que toute solution réalisable de STP l'est également pour ESNDP. De plus, si $w > 0$ (cas généralement rencontré dans la pratique), ces deux problèmes sont identiques. Ainsi, le problème de l'arbre Steiner et celui du sous-graphe Steiner connexe sont étroitement liés. Nous passerons alors, tout au long de ce chapitre, du problème STP (relatif à un graphe G et un ensemble de terminaaux $S \subseteq V$) au problème ESNDP (relatif à un graphe G et un vecteur types de sommets $r \in \{0,1\}^V$) en posant

$$r(v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v \in V \setminus S \quad \text{(sommets Steiner)}, \\ 1 & \text{si } v \in S \quad \text{(sommets terminaux)}. \end{cases}$$

Le problème de l'arbre Steiner est NP-difficile dans le cas général ainsi que dans la classe des graphes bipartis et dans celle des graphes planaires [84]. Lawler [125] a montré qu'il peut être résolu en temps polynomial si le nombre de sommets terminaux (ou Steiner) est réduit. Aussi, Wald et Colbourn [171] et Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [44] ont montré qu'il est polynomial pour les graphes série-parallèles, et Winter [182] pour les graphes de Halin.

De nombreuses procédures pour réduire la taille du graphe sur lequel le problème de l'arbre Steiner doit être résolu ont été développées par Balakrishnan et Patel [7] et par Duin et Volgenant [64]. Dans [88], Goemans et Bertsimas ont donné, dans le cadre

d'un modèle plus général, une heuristique pour le problème STP avec une garantie dans le pire des cas. Plusieurs heuristiques sont présentées dans [16, 17, 112, 123, 145, 164, 168, 169, 183, 184, 185]. Des tours d'horizon des aspects algorithmiques pour le problème de l'arbre Steiner peuvent être trouvés dans Winter [181] et Hwang, Richards et Myungt [106].

L'aspect polyédral du problème STP a également fait l'objet de nombreuses recherches. Ainsi, Goemans et Myungt [90] en ont donné plusieurs formulations. Une étude récente des différentes formulations et techniques pour STP et ses relaxations est due à Polzin et Daneshmand [146, 147]. Dans [34, 35], Chopra et Rao ont discuté du dominant du polytope des arbres Steiner, en introduiant notamment de nombreuses familles d'inégalités pouvant définir des facettes (voir section 5.2). Prodon, Liebling et Gröflin [151] ont caractérisé ce dominant, dans le cas orienté, quand le graphe sous-jacent est série-parallèle. Toujours dans le cas orienté, Goemans [86] a donné une description complète du polytope correspondant dans cette même classe de graphes. Dans [87], il a considéré des variables auxiliaires associées aux sommets, et a décrit le polytope associé à ce problème dans le cas de graphes série-parallèles. En utilisant des techniques de projection, il a aussi donné des classes générales de facettes pour le polytope des arbres Steiner. Dans [149], Prodon a introduit une nouvelle classe d'inégalités. Ces dernières, associées aux inégalités de non-négativité, sont suffisantes pour décrire complètement le dominant du polytope des arbres Steiner dans la classe des graphes série-parallèles. De plus, elles peuvent être séparées en temps polynomial [31, 161]. Margot, Prodon et Liebling [134] ont donné une formulation étendue du problème de l'arbre Steiner et ainsi obtenu une description linéaire complète du polytope associé quand le graphe est un 2-arbre. Pour le cas spécial où le nombre de terminaux est égal au nombre total de sommets moins un, Prodon [150] a présenté une formulation étendue qui décrit complètement le polytope des arbres Steiner.

Dans le reste de cette section, nous allons donner quelques définitions et notations ainsi que des résultats utiles pour la suite de ce travail.

Le *polytope des arbres Steiner*, relatif à un ensemble de terminaux $S \subseteq V$, noté par $\mathrm{STP}(G, S)$, est l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence de tous les arbres Steiner de G. Notons par $\mathrm{DSTP}(G, S)$ le dominant de $\mathrm{STP}(G, S)$, c'est-à-dire $\mathrm{DSTP}(G, S) = \mathrm{STP}(G, S) + \mathbb{R}^E_+$. Si $w \geq 0$, alors le problème de l'arbre Steiner est équivalent au programme linéaire

$$\text{minimiser } \{wx \mid x \in \mathrm{DSTP}(G, S)\}.$$

Il est clair que le polyèdre $\mathrm{DSTP}(G,S)$ est de pleine dimension. De part l'étroite relation qui existe entre STP et ESNDP, le polytope $\mathrm{ESNDP}(G,r)$ est très lié à $\mathrm{DSTP}(G,S)$. En effet, si $w > 0$, alors nous avons

$$\min\{wx \mid x \in \mathrm{DSTP}(G,S)\} = \min\{wx \mid x \in \mathrm{ESNDP}(G,r)\}.$$

Dans [97], Grötschel et Monma ont donné le résultat suivant.

Lemme 5.1 *Si $G = (V,E)$ est un graphe 2-arête connexe et $r \in \{0,1\}^V$ un vecteur types de sommets, alors le polytope ESNDP(G,r) est de pleine dimension.* □

Puisque le problème ESNDP est décomposable dans tout graphe contenant un sommet d'articulation [161], nous ne considérons, tout au long de ce chapitre, que des graphes 2-sommet connexes. Par conséquent, le polytope $\mathrm{ESNDP}(G,r)$ est de pleine dimension. Ainsi, de Balas et Fischetti [9], nous avons

Lemme 5.2 *Une contrainte différente de $x(e) \geq 0$ et $x(e) \leq 1$ définit une facette de ESNDP(G,r) si et seulement si elle définit une facette de DSTP(G,S).* □

Par ailleurs, comme conséquence de ce dernier lemme, nous obtenons

Lemme 5.3 *Toute inégalité qui définit une facette de DSTP(G,S) est de la forme $a^T x \geq \alpha$ avec $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$.* □

5.2 Contraintes valides

Dans [34, 35], Chopra et Rao ont étudié le dominant du polytope des arbres Steiner. Ils ont introduit des familles d'inégalités valides pour $\mathrm{DSTP}(G,S)$ et pouvant définir des facettes de ce polyèdre. Dans cette section, nous nous proposons de présenter certaines de ces inégalités, qui par le lemme 5.2 peuvent également définir des facettes de $\mathrm{ESNDP}(G,r)$.

5.2.1 Inégalités de partition Steiner

Soient $G = (V,E)$ un graphe et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Considérons une partition $(V_1, \ldots, V_p)$ de V telle que

$$V_i \cap S \neq \emptyset \qquad \text{pour tout } i = 1, \ldots, p,$$

c'est-à-dire telle que $r(V_i) = 1$, pour tout $i = 1, \ldots, p$, pour le problème ESNDP (dans la suite, cette remarque sera à chaque fois sous-entendue). Une telle partition est appelée *partition Steiner*. Chopra et Rao [34] ont montré que l'*inégalité de partition Steiner*

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1 \tag{5.1}$$

est valide pour DSTP(G, S). De plus, ils ont donné le résultat suivant

Théorème 5.4 [34] *L'inégalité de partition Steiner définit une facette de DSTP(G, S) si et seulement si le graphe obtenu en contractant les différents éléments de la partition est 2-connexe et $G(V_i)$ est connexe pour tout $i = 1, \ldots, p$.* □

Cependant, nous faisons remarquer que Grötschel, Monma et Stoer [98, 99] ont également considéré ce type de partition, et que la contrainte (5.1) n'est rien d'autre que la contrainte (2.7) avec $I_2 = \emptyset$.

5.2.2 Inégalités de trou-impair

Étant donné que le problème de l'arbre Steiner est polynomial dans la classe des graphes série-parallèles [44, 171], il est important d'essayer de déterminer, pour ces graphes, quelles inégalités peuvent définir des facettes du dominant du polytope des arbres Steiner. Ainsi, Chopra et Rao [34] se sont intéressés à une classe particulière de graphes série-parallèles.

Soit m un entier impair. Considérons le graphe $G_m = (V_m, E_m)$ tel que

$$V_m = \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m\},$$
$$E_m = \{u_i v_i, u_i v_{i-1}, v_i v_{i-1};\ i = 1, \ldots, m\ (mod\ m)\}.$$

Soit $S_m = \{u_1, \ldots, u_m\}$ l'ensemble des terminaux de G_m. Nous dirons alors que le graphe G_m a une *configuration de trou-impair*. Le graphe G_3 est donné dans la figure 5.1, où les sommets noirs correspondent aux terminaux (cette représentation des terminaux sera conservée tout au long de ce chapitre). Considérons l'inégalité

$$x(E_m) \geq 2(m - 1). \tag{5.2}$$

Chopra et Rao [34] ont montré que cette inégalité est valide pour DSTP(G_m, S_m). Ils ont considéré le graphe $\overline{G}_m = (V_m, \overline{E}_m)$, où $E_m \subseteq \overline{E}_m$, obtenu à partir de G_m en

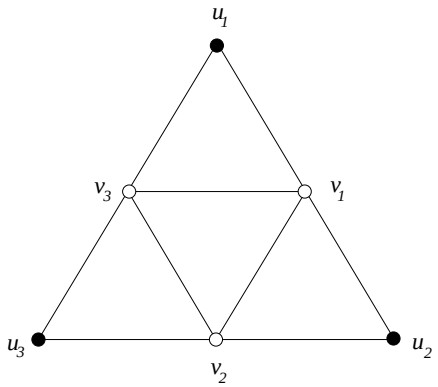

FIG. 5.1 – *Configuration de trou-impair pour* $m = 3$

ajoutant des arêtes entre des sommets non adjacents. Ils ont alors montré que l'inégalité (5.2) peut être étendue (par lifting) à une inégalité valide pour DSTP($\overline{G}_m, S_m$). Cette dernière est donnée par

$$x(E_m) + 2x(\overline{E}_m \setminus E_m) \geq 2(m-1). \tag{5.3}$$

Les inégalités (5.2) et (5.3) sont appelées *inégalités de trou-impair*. Par ailleurs, ils ont donné le théorème suivant.

Théorème 5.5 [34] *Les inégalités de trou-impair (5.2) (resp. (5.3)) définissent des facettes de DSTP(G_m, S_m) (resp. DSTP($\overline{G}_m, S_m$)) si m est impair et $m \geq 3$.* □

5.2.3 Inégalités de roue-impaire

Dans cette section, nous présentons une classe d'inégalités, pouvant définir des facettes de DSTP(G, S).Ces inégalités proviennent de la classe des grilles. Une *grille* est un graphe planaire ayant toutes ses faces, à l'exception de la face extérieure, entourées par quatre arêtes. Le problème de l'arbre Steiner est NP-difficile pour ces graphes [84]. Chopra et Rao ont ainsi restreint leur étude à des cas particuliers de grilles.

Soit $m \geq 3$ un entier. Nous dirons que le graphe $G_m = (V_m, E_m)$ a une *configuration de roue-impaire* s'il peut être défini de la manière suivante

$$V_m = \{u_0, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m\},$$
$$E_m = \{u_i v_i, u_i v_{i-1};\ i = 1, \ldots, m\ (mod\ m)\} \cup \{u_0 v_i;\ i = 1, \ldots, m\}$$

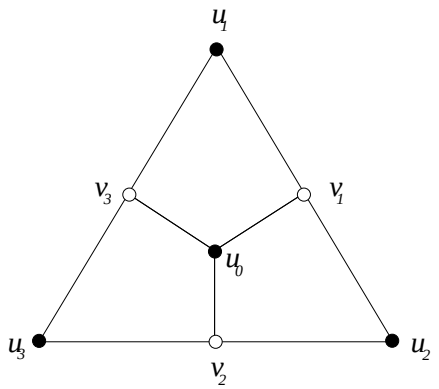

FIG. 5.2 – *Configuration de roue-impaire pour* $m = 3$

Soit $S_m = \{u_0, u_1, \ldots, u_m\}$ l'ensemble des terminaux de G_m. À titre d'exemple, le graphe G_3 est donné sur la figure 5.2. Chopra et Rao [35] ont montré que l'inégalité

$$x(E_m) \geq m + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil . \tag{5.4}$$

est valide pour DSTP(G_m, S_m). De plus, ils ont considéré le graphe $\overline{G}_m = (V_m, \overline{E}_m)$, où $E_m \subseteq \overline{E}_m$, obtenu à partir de G_m, en ajoutant des arêtes entre des sommets non adjacents. Ils ont prouvé que l'inégalité

$$x(E_m \cup F) + 2x(\overline{E}_m \setminus (E_m \cup F)) \geq m + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil , \tag{5.5}$$

où $F \subseteq \overline{E}_m \setminus E_m$ est l'ensemble de toutes les arêtes ajoutées entre des sommets Steiner, est valide pour DSTP$(\overline{G}_m, S_m)$. Chopra et Rao ont appelé les inégalités (5.4) et (5.5), *inégalités de roue-impaire*. Ils ont également montré le théorème suivant.

Théorème 5.6 [35] *Les inégalités de roue-impaire (5.4) (resp. (5.5)) définissent des facettes de DSTP(G_m, S_m) (resp. DSTP$(\overline{G}_m, S_m)$) si m est impair et $m \geq 3$.* □

Par ailleurs, Chopra et Rao [35] ont montré que les inégalités de partition Steiner, de trou-impair et de roue-impaire peuvent définir des facettes de DSTP(G, S) lorsque G est une grille et S un ensemble de terminaux.

5.2.4 Inégalités biparties

Dans le cas d'un graphe biparti $G = (V_1 \cup V_2, E)$, le problème de l'arbre Steiner est NP-difficile, même dans le cas spécial où l'ensemble de terminaux S est égal à V_1. Pour

ce dernier cas, Chopra et Rao [35] ont introduit une nouvelle classe d'inégalités pouvant définir des facettes de DSTP(G, S).

Considérons ainsi un graphe biparti $G_m = (V_m, E_m)$, où $m \geq 4$ est un entier et S_m son ensemble de terminaux, défini comme suit

$$V_m = \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_{m-1}\},$$
$$E_m = \{u_i v_j;\ i,\ j = 1, \ldots, m-1,\ i \neq j-1 (mod\ m)\},$$
$$S_m = \{u_1, \ldots, u_m\}.$$

Nous dirons alors que le graphe G_m a une *configuration bipartie*. Le graphe de la figure 5.3 correspond à G_4.

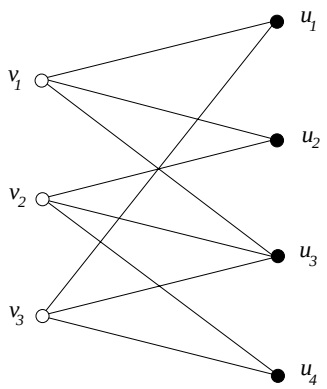

FIG. 5.3 – *Configuration bipartie pour* $m = 4$

L'inégalité

$$x(E_m) \geq m + 1 \tag{5.6}$$

est valide pour DSTP(G_m, S_m). Soit $\overline{G}_m = (V_m, \overline{E}_m)$, où $E_m \subseteq \overline{E}_m$, le graphe obtenu à partir de G_m en utilisant la même procédure de lifting que pour les inégalités de roue-impaire. Posons $F \subseteq \overline{E}_m \setminus E_m$ l'ensemble de toutes les arêtes ajoutées entre des sommets Steiner. Alors, l'inégalité

$$x(E_m \cup F) + 2x(\overline{E}_m \setminus (E_m \cup F)) \geq m + 1 \tag{5.7}$$

est également valide pour DSTP$(\overline{G}_m, S_m)$. Ces deux dernières inégalités sont appelées *inégalités biparties*. Nous avons aussi

Théorème 5.7 [35] *Les inégalités biparties (5.6) (resp. (5.7)) définissent des facettes de DSTP(G_m, S_m) (resp. DSTP$(\overline{G}_m, S_m)$) si* $m \geq 4$. □

5.2.5 Inégalités d'anti-trou

Chopra et Rao [35] ont donné une autre classe d'inégalités pouvant définir des facettes du dominant du polytope des arbres Steiner. Celle-ci se présente de la manière suivante.

Soient $m \geq 5$ un entier et $G_m = (V_m, E_m)$ le graphe tel que

$$V_m = \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m\},$$
$$E_m = F_1 \cup F_2,$$

avec

$$F_1 = \{u_i v_i, u_i v_{i-1};\ i = 1, \ldots, m\ (mod\ m)\},$$
$$F_2 = \{v_i v_{i+2}, v_i v_{i+3}, \ldots, v_i v_{i-2};\ i = 1, \ldots, m-2\ (mod\ m)\}$$

Soit $S_m = \{u_1, \ldots, u_m\}$ l'ensemble des terminaux de G_m. Le graphe G_m a alors une configuration dite d'*anti-trou*. Pour $m = 5$, le graphe G_5 est donné dans la figure 5.4.

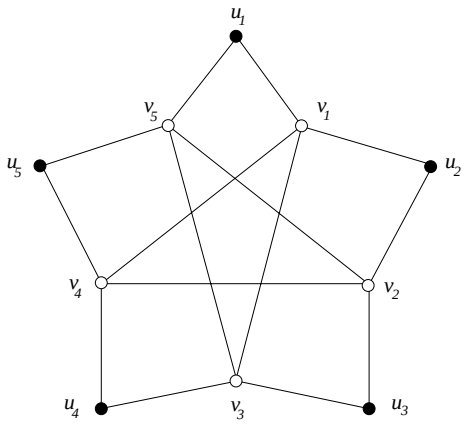

FIG. 5.4 – *Configuration d'anti-trou pour* $m = 5$

Considérons la contrainte

$$x(E_m) \geq (m-1) + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil . \tag{5.8}$$

Chopra et Rao [35] ont montré que cette inégalité est valide pour $\mathrm{DSTP}(G_m, S_m)$. Ils ont considéré le graphe $\overline{G}_m = (V_m, \overline{E}_m)$, où $E_m \subseteq \overline{E}_m$, obtenu à partir de G_m en ajoutant des arêtes supplémentaires. Soit $F \subseteq \overline{E}_m \setminus E_m$ l'ensemble des arêtes ajoutées, et incidentes aux sommets Steiner. Ils ont prouvé que l'inégalité

$$x(E_m \cup F) + 2x(\overline{E}_m \setminus (E_m \cup F)) \geq (m-1) + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil \tag{5.9}$$

est valide pour DSTP($\overline{G}_m, S_m$). Les inégalités (5.8) et (5.9) sont appelées *inégalités d'anti-trou*. Sous certaines conditions, ces contraintes définissent des facettes du dominant du polytope des arbres Steiner.

Théorème 5.8 [35] *Les inégalités d'anti-trou (5.8) (resp. (5.9)) définissent des facettes de DSTP(G_m, S_m) (resp. DSTP($\overline{G}_m, S_m$)) si m est impair et $m \geq 5$.* □

5.3 Contraintes de partition Steiner généralisée

Dans cette section, nous allons introduire une large classe d'inégalités pour le polyèdre DSTP(G, S). Elle généralise les classes que nous venons de présenter dans les sections précédentes. Cette nouvelle classe contient strictement toutes ces classes. Dans ce qui suit, nous allons étudier cette nouvelle famille de contraintes et montrer que ces inégalités peuvent définir des facettes de DSTP(G, S) autres que celles déjà connues dans la littérature.

5.3.1 Motivation

Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Soit $G_c = (V_c, E_c)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant une arête $\overline{e} = uv$ telle que $V_c = (V \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$ et $E_c = E \setminus \{\overline{e}\}$, où w est le sommet résultant de la contraction. Posons $S_c = (S \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$ si $S \cap \{u, v\} \neq \emptyset$ et $S_c = S$ sinon. Chopra et Rao [34] ont donné la procédure de lifting suivante qui permet d'obtenir une facette de DSTP(G, S) à partir d'une facette de DSTP(G_c, S_c).

Théorème 5.9 [34] *Si l'inégalité*

$$\sum_{e \in E_c} a(e)x(e) \geq \alpha$$

définit une facette de DSTP(G_c, S_c), alors l'inégalité

$$\sum_{e \in E} a(e)x(e) \geq \alpha$$

définit une facette de DSTP(G, S) où $a(\overline{e}) = 0$. □

Par ailleurs, Chopra et Rao [34] se sont intéressés au cas de la suppression d'une arête. Étant donnée une arête $\overline{e} \in E$, soit $G_d = (V_d, E_d)$ où $V_d = V$ et $E_d = E \setminus \{\overline{e}\}$ le graphe obtenu en supprimant l'arête $\overline{e}$. Posons $S_d = S$. Ils ont alors donné le théorème de lifting suivant.

Théorème 5.10 [34] *Si l'inégalité*

$$\sum_{e \in E \setminus \{\overline{e}\}} a(e)x(e) \geq \alpha$$

définit une facette de DSTP(G_d, S_d), alors

$$\sum_{e \in E} a(e)x(e) \geq \alpha$$

définit une facette de DSTP(G, S), où

$$a(\overline{e}) = \alpha - min\{\sum_{e \in E \setminus \{\overline{e}\}} a(e)x(e) \mid x \in DSTP(G_c, S_c)\}. \qquad \square$$

Comme conséquence de cette dernière procédure de lifting, si l'inégalité

$$\sum_{e \in E} a(e)x(e) \geq \alpha$$

définit une facette de DSTP(G, S) et $e' \in E$ est une boucle dans le graphe G, alors $a(e') = 0$. Ainsi, en utilisant ces deux résultats, nous pouvons étendre les inégalités de trou-impair, de roue-impaire, biparties et d'anti-trou à des inégalités dont la structure sous-jacente est une partition de l'ensemble des sommets et dont certains éléments intersectent l'ensemble des terminaux et d'autres pas. En effet, soit $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ une partition de V. Considérons le graphe $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ induit par les éléments de π. Soit S_π l'ensemble des terminaux de G_π, c'est-à-dire l'ensemble des sommets résultants de la contraction d'éléments de π intersectants S. Si l'inégalité

$$\sum_{e \in E_\pi} a(e)x(e) \geq \alpha$$

définit une facette de DSTP(G_π, S_π), alors l'inégalité

$$\sum_{e \in E} a(e)x(e) \geq \alpha$$

définit une facette de DSTP(G, S) où $a(e) = 0$ pour tout $e \in E(V_i),\ i = 1, \ldots, p$. A notre connaissance, de telles partitions n'ont pas été considérées dans la littérature.

Par conséquent, il nous a semblé opportun d'étudier les inégalités dont la structure sous-jacente a une telle configuration de partition. Mais avant cela, nous énonçons le lemme suivant qui nous sera utile pour passer de la validité d'une inégalité pour le polytope $\mathrm{STP}(G,S)$ à une validité pour son dominant.

Lemme 5.11 *Soit $a^T x \geq \alpha$ une contrainte telle que $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$. Si $a^T x \geq \alpha$ est valide pour STP(G,S), alors elle est également valide pour DSTP(G,S).*

Preuve. Soit y un point de $\mathrm{DSTP}(G,S)$. Puisque $\mathrm{DSTP}(G,S) = \mathrm{STP}(G,S) + \mathbb{R}_+^E$, il existe $y_1 \in \mathrm{STP}(G,S)$ et $y_2 \in \mathbb{R}_+^E$ tels que $y = y_1 + y_2$. L'inégalité $a^T x \geq \alpha$ étant, par hypothèse, valide pour $\mathrm{STP}(G,S)$, nous avons $a^T y_1 \geq \alpha$. De plus, $y_2 \geq 0$ et $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$. Ainsi, $a^T y_2 \geq \alpha$. Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} a^T y &= a^T(y_1 + y_2) \\ &= a^T y_1 + a^T y_2 \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

□

5.3.2 Inégalités de partition Steiner généralisée

Soient $G = (V,E)$ un graphe et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Considérons une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 2$, de V. Soit q le nombre d'éléments V_i de la partition ne contenant pas de sommets terminaux, c'est-à-dire tels que $V_i \cap S = \emptyset$. Puisque, par hypothèse (section 2.5.1), il existe au moins un terminal dans le graphe, nous avons $0 \leq q \leq p-1$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer

$$\begin{aligned} V_i \cap S &= \emptyset \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, q, \\ V_i \cap S &\neq \emptyset \qquad \text{pour } i = q+1, \ldots, p. \end{aligned}$$

Soit $G_\pi = (V_\pi, E_\pi)$ le graphe obtenu en contractant chaque ensemble V_i en un sommet w_i pour tout $i = 1, \ldots, p$. Posons $S_\pi = \{w_i;\ i = q+1, \ldots, p\}$ et

$$d = \max \{|U| \mid U \subseteq V_\pi \setminus S_\pi,\ G_\pi \setminus U \text{ est Steiner connexe}\}.$$

La valeur d n'est rien d'autre que la cardinalité du plus grand sous-ensemble de sommets Steiner de G_π tels que leur suppression ne déconnecte pas deux sommets terminaux de G_π. Considérons alors l'inégalité

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - d - 1. \tag{5.10}$$

Théorème 5.12 *L'inégalité (5.10) est valide pour ESNDP(G,r).*

Preuve. Soit $r_\pi \in \{0,1\}^{V_\pi}$ le vecteur types de sommets de G_π défini de la manière suivante

$$r_\pi(w) = \begin{cases} 0 & \text{si } w \notin S_\pi, \\ \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $T \subseteq E$ un ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe Steiner connexe de G par rapport à r. Considérons la restriction $T_\pi \subseteq E_\pi$ de T dans G_π. Il n'est pas difficile de voir que T_π induit un sous-graphe Steiner connexe de G_π. Or, par la définition de d, le sous-graphe de G_π, induit par T_π, contient au moins $p-d$ sommets. Par conséquent, T_π doit contenir au minimum $p-d-1$ arêtes. □

Puisque $\mathrm{STP}(G,S) \subseteq \mathrm{ESNDP}(G,r)$, nous avons aussi

Corollaire 5.13 *L'inégalité (5.10) est valide pour STP(G, S) et DSTP(G, S).*

Preuve. Découle immédiatement du théorème 5.12 et du lemme 5.11 □

Étant donné qu'un arbre sur n sommets contient exactement $n-1$ arêtes, nous obtenons la remarque suivante

Remarque 5.14 Pour tout $x \in \mathrm{STP}(G,S)$, l'inégalité (5.10) est vérifiée à l'égalité. □

Du fait que les partitions considérées ici sont plus "générales" que les partitions Steiner, définies dans la section 5.2.1, nous avons appelé les inégalités (5.10) *inégalités de partition Steiner généralisée*. Notons que ces inégalités généralisent toutes celles que nous avons vues auparavant dans ce chapitre. Ainsi, elles sont une généralisation des inégalités

- de partition Steiner (5.1) : $d = 0$,
- de trou-impair (5.2) : $p = 2m$ et $d = 1$,
- de roue-impaire (5.4) : $p = 2m+1$ et $d = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$,
- bipartie (5.6) : $p = 2m-1$ et $d = m-3$,
- d'anti-trou (5.8) : $p = 2m$ et $d = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

Par exemple, pour une inégalité de roue-impaire (5.4), nous avons bien

$$\begin{aligned} p-d-1 &= 2m+1-\lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor - 1 \\ &= m + (m - \lfloor \tfrac{m}{2} \rfloor) \\ &= m + \lceil \tfrac{m}{2} \rceil, \end{aligned}$$

car $m = \lceil \frac{m}{2} \rceil + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$.

Pour toute classe d'inégalités valides pour un polyèdre, il est intéressant d'étudier des conditions sous lesquelles ces inégalités peuvent définir des facettes du polyèdre, ainsi que le problème de séparation qui leurs est associé. Dans la suite de cette section, nous allons nous attacher à ce dernier problème.

Pour prouver la complexité du problème de séparation des inégalités de partition Steiner généralisée, nous utilisons la technique de restriction [84] qui se présente comme suit. Étant donné un problème Π de la classe NP, elle consiste à montrer que Π contient un problème Π', connu pour être NP-difficile, comme cas particulier.

Théorème 5.15 *Le problème de séparation des inégalités de partition Steiner généralisée (5.10) est NP-difficile.*

Preuve. Il est facile de voir que ce problème appartient à la classe NP. En effet, si nous connaissons une inégalité de partition Steiner généralisée, nous pouvons vérifier en temps polynomial si elle est violée ou pas par un certain vecteur x donné.
Si nous ajoutons au problème de séparation des contraintes (5.10) la restriction que $d = 0$, nous obtenons le problème de séparation des inégalités de partition Steiner (5.1) qui est NP-difficile [100]. Ce qui prouve notre théorème. □

Puisque le problème de séparation des inégalités de partition Steiner généralisée est NP-difficile, nous avons réfléchi à une approche approximative pour résoudre ce problème. Notre idée, très intuitive, est de déterminer la partition π^* telle que l'inégalité $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p-1$ induite par π^* soit la plus violée (problème polynomial d'après le corollaire 4.2), et de calculer ensuite la valeur de d dans le graphe G_{π^*}. Ainsi, s'est posé le problème suivant.

Problème 5.2 *Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un sous-ensemble de sommets $S \subseteq V$, déterminer un sous-ensemble de sommets $D \subseteq V \setminus S$, de cardinalité minimum, tel que le graphe induit par $S \cup D$ est connexe.*

Or, comme cela va être montré dans la suite, le problème 5.2 est NP-difficile. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un sous-ensemble de sommets $V' \subseteq V$ est appelé *transversal* de G si chaque arête $e \in E$ est incidente à au moins un sommet de V'. Le problème du transversal minimum, que nous noterons PTM, se présente comme suit.

Problème 5.3 *Étant donné un graphe $G = (V, E)$, déterminer un transversal de G de cardinalité minimum.*

Ce problème est un des problèmes classiques de la théorie des graphes. Il est NP-difficile dans le cas général [84]. Le théorème suivant montre que le problème 5.2 est NP-difficile, en transformant le problème PTM au problème 5.2. La preuve est due à Jordán [109].

Théorème 5.16 [109] *Le probleme 5.2 est NP-difficile.*

Preuve. Tout d'abord, il n'est pas difficile de voir que le problème 5.2 appartient à la classe NP. En effet, si nous connaissons un sous-ensemble $D \subseteq V \setminus S$, nous pouvons vérifier en temps polynomial si le graphe induit par $S \cup D$ est connexe.
Pour prouver ce théorème, nous allons réduire polynomialement le problème PTM au problème 5.2. Soit $G = (V, E)$ une instance du problème du transversal minimum. Pour toute arête $e \in E$, subdivisons la en ajoutant un nouveau sommet v_e. Posons alors $V_E = \{v_e \mid e \in E\}$. À ce nouveau graphe ainsi obtenu, ajoutons un sommet w et connectons le à tous les sommets de V. Nous remarquons que w n'est adjacent à aucun sommet de V_E. Soit $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ le graphe ainsi obtenu où $\overline{V} = V \cup V_E \cup \{w\}$. Posons $\overline{S} = V_E \cup \{w\}$. La figure 5.5 illustre cette construction du graphe $\overline{G}$ sur un exemple, où les sommets de $\overline{S}$ sont représentés par des cercles noirs.

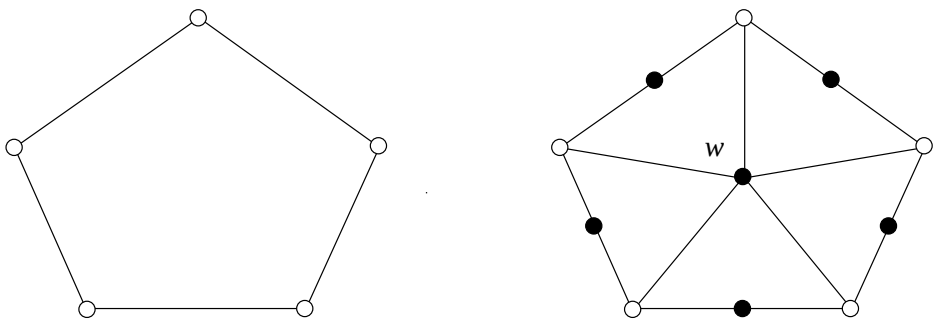

FIG 5.5

Il est évident que la construction du graphe $\overline{G}$ à partir du graphe G peut être effectuée en temps polynomial.

Assertion 5.16.1 Dans $\overline{G}$, si $\overline{D} \subseteq \overline{V} \setminus \overline{S}$ est tel que le graphe induit par $\overline{S} \cup \overline{D}$ est connexe, alors $\overline{D}$ correspond à un transversal de G.

Preuve. Soit $\overline{D} \subseteq \overline{V} \setminus \overline{S}$ un sous-ensemble de sommets induisant un sous-graphe connexe de $\overline{G}$. Puisque $V_E \subseteq \overline{S}$, nous avons, pour tout $v_e \in V_E$, au moins un de ses voisins qui appartient à $\overline{D}$. Or, à toute arête $e \in E$ est associé un sommet $v_e \in V_E$. Par conséquent, puisque tous les sommets de $\overline{D}$ appartiennent aussi à V, toutes les arêtes de E sont incidentes à au moins un sommet de $\overline{D}$. Ainsi, $\overline{D}$ est un transversal de G.□

Montrons maintenant la réciproque de l'assertion 5.16.1

Assertion 5.16.2 Si $D \subseteq V$ est un transversal de G, alors le graphe induit par $\overline{S} \cup D$ est connexe.

Preuve. Soit $D \subseteq V$ un transversal de G. Par la procédure de construction du graphe $\overline{G}$, il est clair que $D \subseteq \overline{V} \setminus \overline{S}$. Puisque D est un transversal de G, toute arête $e \in E$ a au moins une de ses extrémités dans D. Or chaque arête $e \in E$ étant subdivisée par l'ajout d'un sommet v_e, il n'est pas difficile de voir que chaque sommet v_e est adjacent à au moins un sommet de D. De plus, $v_e \in \overline{S}$ et w est adjacent à tous les sommets de V, et par conséquent à tous les sommets de D. Ainsi, le graphe induit par $\overline{S} \cup D$ est connexe.□

Par les assertions 5.16.1 et 5.16.2, nous venons de montrer que D est un transversal de G si et seulement si le graphe induit par $\overline{S} \cup D$ est un sous-graphe connexe de $\overline{G}$. Ce qui termine la preuve de notre théorème. □

Pout illustrer le résultat que nous venons de voir, prenons une inégalité de roue-impaire (5.4). Le graphe $\overline{G}$ de la figure 5.5 n'est rien d'autre que le graphe G_5 de la section 5.2.3. Nous nous apercevons que la recherche de d dans le graphe G_m, se ramène à rechercher un transversal minimum dans le cycle à m sommets. Or, nous savons que pour ces derniers graphes, la cardinalité minimum d'un transversal est égale à $\lceil \frac{m}{2} \rceil$. Nous retrouvons donc bien la valeur de $d = m - \lceil \frac{m}{2} \rceil = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ donnée précédemment pour les graphes de type G_m.

Nous allons maintenant étudier des conditions pour que les inégalités de partition Steiner généralisée (5.10) définissent des facettes de ESNDP(G, r) et donc, par le lemme 5.2, de DSTP(G, S).

5.3.3 Étude faciale

Les résultats que nous allons présenter dans cette section vont concerner le polytope ESNDP(G, r). Étant donné que, par le lemme 5.2, toute facette non triviale de ESNDP(G, r) est également une facette de DSTP(G, S), ils seront également valides

pour le polyèdre DSTP(G,S). Tout d'abord, nous allons donner des conditions nécessaires pour que les inégalités de partition Steiner généralisée (5.10) définissent des facettes de ESNDP(G,r) et de DSTP(G,S).

Théorème 5.17 *Soient $G=(V,E)$ un graphe, $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux et $\pi=(V_1,\ldots,V_p)$ une partition de V telle que $G(V_i)$ soit connexe pour tout $i=1,\ldots,p$. L'inégalité (5.10) définit une facette de ESNDP(G,r) (et de DSTP(G,S)), différente d'une facette triviale, seulement si*

i) Le graphe G_π est 2-sommet connexe,
ii) $d < |V_\pi - S_\pi| - 1$,
iii) $|\delta(V_i)| \geq 3$ pour $i=1,\ldots,q$.

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ la face de ESNDP(G,r) définie par la contrainte (5.10) correspondante à la partition π. Supposons que $\mathcal{F}$ est une facette de ESNDP(G,r) différente d'une facette triviale. Soit $F \subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes qui induit un sous-graphe Steiner connexe tel que x^F vérifie l'inégalité (5.10) à l'égalité. Nous avons $x^F \in \mathcal{F}$.

i) Supposons que le graphe G_π n'est pas 2-sommet connexe. Alors, il existe un sommet $v_0 \in V_\pi$ tel que $G_\pi \backslash \{v_0\}$ n'est pas connexe. Soient $G'_1=(V'_1,E'_1),\ldots,G'_s=(V'_s,E'_s)$ les s composantes connexes du graphe $G_\pi \setminus \{v_0\}$. Considérons alors les graphes $G_i=(V_i,E_i)$ où $V_i = V'_i \cup \{v_0\}$ et $E_i = E'_i \cup \{v_0v_i;\ v_i \in V'_i \text{ et } v_0v_i \in E\}$. Posons $S_i = V_i \cap S_\pi$ pour $i=1,\ldots,s$. Nous avons $S_i \neq \emptyset$, pour tout $i=1,\ldots,s$. En effet, supposons le contraire, c'est-à-dire que, sans perte de généralité, $S_1=\emptyset$. Supposons qu'il existe une arête $e_1 \in E_1 \cap F$. Soit $F_1 = F \setminus \{e_1\}$. Puisque $S_1=\emptyset$ et G_π n'est pas 2-sommet connexe, il n'est pas difficile de voir que F_1 induit un sous-graphe Steiner connexe de G. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} x^{F_1}(\delta(V_1,\ldots,V_p)) &= x^F(\delta(V_1,\ldots,V_p)) - x^F(e_1) \\ &= p-d-1-x^F(e_1) \\ &< p-d-1. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne une contradiction. Par conséquent, F ne peut pas contenir une arête de E_1. Ainsi $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \text{ESNDP}(G,r) \mid x(e)=0\}$ et ce pour tout $e \in E_1$. Ceci implique que $\mathcal{F}$ est contenu dans une face triviale. Puisque (5.10) n'est pas, à un multiple positif, une contrainte triviale, ceci est impossible.
Soit $G^c_i=(V^c_i,E^c_i)$, pour $i=1,\ldots,s$, le graphe obtenu à partir de G_π en contractant tous les sommets n'appartenant pas à V'_i en un sommet w_i. Nous avons alors

$$V^c_i = V'_i \cup \{w_i\},$$

$E_i^c = E_i$,
$S_i^c = (S_i \setminus \{v_0\}) \cup \{w_i\}$.

Posons $p_i = |V_i^c|$ et d_i la cardinalité maximale d'un sous ensemble de sommets $U_i \subseteq V_i^c \setminus S_i^c$ tel que le graphe $G_i^c \setminus U_i$ soit Steiner connexe, pour $i = 1, \ldots, s$. Il est clair que la contrainte

$$x(E_i^c) \geq p_i - d_i - 1 \tag{5.11}$$

est valide pour ESNDP(G, r). Or $E_i^c \cap E_j^c = \emptyset$ pour tous i, $j \in \{1, \ldots, s\}$, $i \neq j$, et $E_\pi = \bigcup_{i=1}^{s} E_i^c$. Par conséquent

$$\begin{aligned} x(E_\pi) &= \sum_{i=1}^{s} x(E_i^c) \\ &\geq \sum_{i=1}^{s} (p_i - d_i - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{s} p_i - \sum_{i=1}^{s} d_i - s. \end{aligned}$$

Puisque G_π n'est pas 2-sommet connexe, il n'est pas difficile de voir que $\sum_{i=1}^{s} d_i = d$. De plus $\sum_{i=1}^{s} p_i = p + s - 1$. Il en résulte alors

$$\begin{aligned} x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) &= x(E_\pi) \\ &\geq p + s - 1 - d - s \\ &= p - d - 1. \end{aligned}$$

Étant donné que $x^F(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p - d - 1$ et $x^F(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$, il s'en suit que les inégalités (5.11) sont toutes vérifiées à l'égalité par x^F. Ainsi $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \text{ESNDP}(G, r) \mid x(E_i^c) = p_i - d_i - 1\}$ pour tout $i = 1, \ldots, s$, ce qui est impossible. Par conséquent, le graphe G_π est 2-sommet connexe.

ii) Supposons tout d'abord que $d = |V_\pi \setminus S_\pi|$. Alors le graphe $G(S_\pi)$ est connexe. Considérons une arête $e_0 \in \delta(v_0)$ où v_0 est un sommet de $V_\pi \setminus S_\pi$. Nous avons $e_0 \notin F$. En effet, supposons le contraire. Puisque $G(S_\pi)$ est connexe, nous avons

$$\begin{aligned} x^F(\delta(V_1, \ldots, V_p)) &\geq x^F(E(S_\pi)) \\ &\geq p - d - 1. \end{aligned}$$

Ceci implique que $x^F(E(S_\pi)) = p - d - 1$. Par conséquent $x^F(e) = 0$ pour tout $e \in E_\pi \setminus E(S_\pi)$. Comme $E_\pi \setminus E(S_\pi) \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \text{ESNDP}(G, r) \mid x(e) = 0\}$ pour tout $e \in E_\pi \setminus E(S_\pi)$, ce qui est impossible. Donc $d < |V_\pi \setminus S_\pi|$.

Supposons maintenant que $d = |V_\pi \setminus S_\pi| - 1$. Pour tout sommet $v \in V_\pi \setminus S_\pi$, il existe $F' \subset E_\pi$ tel que $x^{F'} \in \mathcal{F}$ et $|F' \cap \delta(v)| \geq 1$. En effet, si ce n'est pas le cas, nous avons $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \text{ESNDP}(G,r) \mid x(e) = 0,\ e \in \delta(v)\}$, une contradiction.
Soient $G_1 = (V_1, E(W_1)), \ldots, G_s = (W_s, E(W_s))$ les s composantes connexes obtenues à partir de G_π en supprimant tous les sommets de $V_\pi \setminus S_\pi$. Il est clair que $s \geq 2$ car sinon, nous aurions $d = |V_\pi \setminus S_\pi|$. D'après ce que nous venons de voir, pour tout sommet $v \in V_\pi \setminus S_\pi$, nous avons $|[v, W_i]| \geq 1$ pour $i = 1, \ldots, s$. Posons $V_\pi \setminus S_\pi = \{u_1, \ldots, u_t\}$, et

$$E_i = E(W_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{t} [u_j, W_i]) \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, s.$$

Nous avons alors $x^F(E_i) \geq |W_i|$. En effet, nous devons connecter les $|W_i|$ sommets de W_i avec un sommet de $V_\pi \setminus S_\pi$. Ainsi nous devons connecter entre eux $|W_i|+1$ sommets, et pour cela, il nous faut au minimum $|W_i|$ arêtes.
Supposons maintenant que $x^F(E_i) > |W_i|$. Puisque nous utilisons au moins $|W_i| + 1$ arêtes pour connecter $|W_i| + 1$ sommets, le sous-graphe induit par $F \cap E(W_i)$ contient un cycle (le cas d'arêtes parallèles dans $F \cap E(W_i)$ est trivial). Considérons alors une arête de ce cycle, notée e_i et posons $F_i = F \setminus \{e_i\}$. Nous remarquons que $x^F(e_i) > 0$. Il est facile de voir que F_i induit un sous-graphe Steiner connexe. Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} x^{F_i}(\delta(V_1, \ldots, V_p)) &= x^F(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x^F(e_i) \\ &= p - d - 1 - x^F(e_i) \\ &< p - d - 1, \end{aligned}$$

une contradiction. Donc $x^F(E_i) \leq |W_i|$. Il en résulte alors que $x^F(E_i) = |W_i|$ pour $i = 1, \ldots, s$. Finalement, nous obtenons $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \text{ESNDP}(G,r) \mid x(E_i) = |W_i|\}$, pour tout $i = 1, \ldots, s$, ce qui est impossible. D'où $d < |V_\pi \setminus S_{p^i}| - 1$.

iii) Puisque le graphe G_π est 2-sommet connexe, nous avons $|\delta(V_i)| \geq 2$ pour tout $i = 1, \ldots, q$. Nous rappelons que $V_i \cap S = \emptyset$ pour $i = 1, \ldots, q$. Supposons alors qu'il existe $v_0 \in V_\pi \setminus S_\pi$ tel que $|\delta(v_0)| = 2$. Posons $\delta(v_0) = \{e_1, e_2\}$. Le graphe G_π étant 2-sommet connexe, les arêtes e_1 et e_2 ne sont pas des arêtes parallèles. Nous devons donc avoir $x^F(e_1) = x^F(e_2)$. En effet, si $x^F(e_1) \neq x^F(e_2)$, alors nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $x^F(e_1) = 0$ et $x^F(e_2) = 1$. Considérons le sous-ensemble d'arêtes $F' = F \setminus \{e_2\}$. Étant donné que $v_0 \in V_\pi \setminus S_\pi$ et F contient exactement une arête de $\delta(v_0)$, le sous-graphe induit par F' est Steiner connexe. Ainsi, $x^{F'}(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - d - 1$. Or

$$\begin{aligned} x^{F'}(\delta(V_1, \ldots, V_p)) &= x^F(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x^F(e_2) \\ &= p - d - 1 - 1 \\ &< p - d - 1, \end{aligned}$$

une contradiction. Par conséquent, $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \mathrm{ESNDP}(G,r) \mid x(e_1) = x(e_2)\}$, ce qui est impossible. □

Dans ce qui suit, nous allons donner des conditions suffisantes pour que les inégalités de partition Steiner généralisée définissent des facettes de $\mathrm{DSTP}(G,S)$ et de $\mathrm{ESNDP}(G,r)$ différentes de celles que nous avons vues auparavant. Dans ce but, pour chaque configuration de graphes que nous avons présentée précédemment (trou-impair, roue-impaire, bipartie et anti-trou), définissons le graphe $\tilde{G}_m = (\tilde{V}_m, \tilde{E}_m)$ de la manière suivante. À partir d'un de ces graphes G_m, en réaliser une copie G'_m, et identifier les sommets terminaux de G_m et G'_m pour obtenir le graphe $\tilde{G}_m$. L'ensemble des sommets terminaux de ce nouveau graphe est alors $\tilde{S}_m = S_m$. Soit $\tilde{r}_m$ le vecteur types de connexité associés aux sommets du graphe $\tilde{G}_m$, comme explicité dans l'introduction de ce chapitre.

À titre d'exemple, examinons le cas d'un graphe dans une configuration de roue-impaire. Étant donné un entier impair m, $m \geq 3$, considérons le graphe $\tilde{G}_m = (\tilde{V}_m, \tilde{E}_m)$ tel que

$$\tilde{V}_m = \{u_0, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m, v'_1, \ldots, v'_m\},$$
$$\tilde{E}_m = \{u_i v_i, u_i v_{i-1}, u_i v'_i, u_i v'_{i-1}, u_0 v_i, u_0 v'_i;\ i = 1, \ldots, m,\ (mod\ m)\}.$$

Soit $\tilde{S}_m = \{u_0, u_1, \ldots, u_m\}$ l'ensemble des terminaux de $\tilde{G}_m$. La figure 5.6 représente le graphe $\tilde{G}_3$.

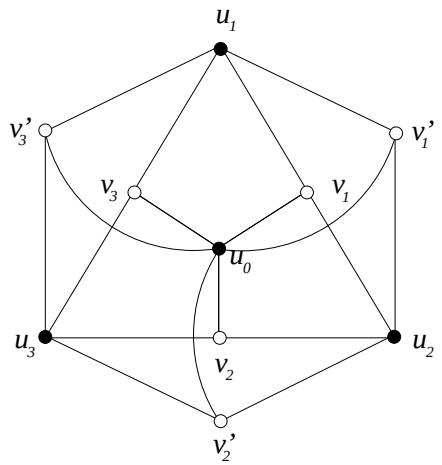

FIG. 5.6 – *Le graphe* $\tilde{G}_3$

Considérons alors l'inégalité

$$x(\tilde{E}_m) \geq m + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil. \tag{5.12}$$

Il n'est pas difficile de voir que l'inégalité (5.12) correspond à une inégalité de partition Steiner généralisée (5.10) où $p = 3m$ et $d = m + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. De plus, cette contrainte ne correspond à aucune autre parmi celles que nous avons présentées dans la section 5.2. Nous avons alors

Théorème 5.18 *Si G_m a une configuration de roue-impaire, m impair et $m \geq 3$, alors l'inégalité (5.12) définit une facette de DSTP($\tilde{G}_m, \tilde{S}_m$) et de ESNDP($\tilde{G}_m$,$\tilde{r}_m$).*

Preuve. Tout d'abord, nous allons montrer la validité de cette contrainte, en utilisant les mêmes idées que Chopra et Rao [35]. Pour cela, considérons un sous-ensemble d'arêtes $T \subseteq \tilde{E}_m$ induisant un sous-graphe Steiner connexe de $\tilde{G}_m$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $|T|$ est minimum. Puisque T doit couvrir l'ensemble $\{u_1, \ldots, u_m\}$, T doit contenir au moins m arêtes de la forme u_iv_i, u_iv_{i-1}, $u_iv'_i$ ou $u_iv'_{i-1}$. Supposons que T contienne t arêtes, $t \geq m$, parmi les arêtes citées ci-dessus. Le sous-graphe défini par ces t arêtes contient au mininmum $1 + \lceil \frac{m}{2} \rceil - \lceil \frac{t-m}{2} \rceil$ composantes connexes devant être reliées entre elles (u_0 est une composante à lui seul). Aussi, nous avons besoin d'au moins $\lceil \frac{m}{2} \rceil - \lceil \frac{t-m}{2} \rceil$ arêtes de la forme u_0v_i ou $u_0v'_i$ pour compléter T. Par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{e \in T} x^T(e) &\geq t + \lceil \tfrac{m}{2} \rceil - \lceil \tfrac{t-m}{2} \rceil \\ &= (t-m) + m + \lceil \tfrac{m}{2} \rceil - \lceil \tfrac{t-m}{2} \rceil. \end{aligned}$$

Or $t \geq m$ et $t - m \geq \lceil \frac{t-m}{2} \rceil$. Donc

$$\sum_{e \in T} x^T(e) \geq m + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil,$$

et la validité de (5.12) est prouvée pour DSTP($\tilde{G}_m, \tilde{S}_m$), ainsi que pour ESNDP($\tilde{G}_m, \tilde{r}_m$).

Soient $\tilde{G}^1_m$ et $\tilde{G}^2_m$ les sous-graphes de $\tilde{G}_m$ induits par $\{u_0, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m\}$ et $\{u_0, u_1, \ldots, u_m, v'_1, \ldots, v'_m\}$ respectivement. Nous pouvons remarquer que $\tilde{G}^1_m$ et $\tilde{G}^2_m$ sont des copies de G_m, et que le graphe $\tilde{G}_m$ peut être obtenu à partir de $\tilde{G}^1_m$ et $\tilde{G}^2_m$ en identifiant u_0, $u_1, \ldots, u_m$.
Étant donné que l'inégalité (5.4) définit une facette de DSTP($\tilde{G}^1_m, \tilde{S}^1_m$) (resp. DSTP($\tilde{G}^2_m, \tilde{S}^2_m$)), où $\tilde{S}^i_m = S_m$ pour $i = 1, 2$, il existe $3m$ solutions réalisables $x_1, \ldots, x_{3m}$ de DSTP($\tilde{G}^1_m, \tilde{S}^1_m$) (resp. $y_1, \ldots, y_{3m}$ de DSTP($\tilde{G}^2_m, \tilde{S}^2_m$)) affinement indépendantes qui satisfont (5.4) à l'égalité. Considérons alors les $6m$ solutions $\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{3m}, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{3m}$ définies de la manière suivante

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i &= (x_i, 0_{3m}) \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, 3m, \\ \tilde{y}_i &= (0_{3m}, y_i) \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, 3m, \end{aligned}$$

avec 0_{3m} le vecteur composé de $3m$ zéros. Il n'est pas difficile de voir que ces $6m$ solutions sont réalisables pour DSTP$(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$, qu'elles vérifient (5.12) à l'égalité et qu'elles sont affinement indépendantes. Par conséquent, la contrainte (5.12) définit une facette de DSTP$(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$. Puisque qu'elle est différente d'une facette triviale, d'après le lemme 5.2, elle définit également une facette de ESNDP$(\tilde{G}^r_m, \tilde{r}^r_m)$. □

Considérons maintenant les inégalités

$$x(\tilde{E}_m) \geq 2(m-1), \tag{5.13}$$

$$x(\tilde{E}_m) \geq m+1, \tag{5.14}$$

$$x(\tilde{E}_m) \geq (m-1) + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil. \tag{5.15}$$

Par une démonstration similaire à celle du théorème 5.18, nous avons le théorème suivant.

Théorème 5.19 *Si G_m a une configuration*

i) de trou-impair, m impair et $m \geq 3$, alors l'inégalité (5.13) définit une facette de DSTP$(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$ et ESNDP$(\tilde{G}_m, \tilde{r}_m)$,

ii) bipartie et $m \geq 4$, alors l'inégalité (5.14) définit une facette de DSTP$(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$ et ESNDP$(\tilde{G}_m, \tilde{r}_m)$,

iii) d'anti-trou, m impair et $m \geq 5$, alors l'inégalité (5.15) définit une facette de DSTP$(\tilde{G}_m, \tilde{S}_m)$ et ESNDP$(\tilde{G}_m, \tilde{r}_m)$. □

Pour prouver et généraliser des résultats sur les facettes d'un polyèdre, des opérations de construction (encore appelées opérations de lifting) sont très utilisées. Nous avons déjà donné, dans la section 5.3.1, de telles opérations qui ont été introduites par Chopra et Rao [34] pour le dominant du polytope des arbres Steiner. Dans les deux prochaines sections, nous allons présenter de nouvelles opérations de construction de facettes pour ce polyèdre et pour le polytope des sous-graphes Steiner connexes.

5.4 Construction de facettes pour DSTP(G, S)

Dans un premier temps, nous donnons une procédure de construction de facettes pour DSTP(G, S). Cette procédure nous sera utile par la suite pour infirmer une conjecture de Chopra et Rao [35] concernant le polyèdre DSTP(G, S) dans la classe des 2-arbres.

5.4.1 Construction par ajout d'un sommet

La première procédure de construction de facettes que nous avons étudiée consiste à ajouter un nouveau sommet, c'est-à-dire à subdiviser une arête. Nous avons alors le théorème suivant.

Théorème 5.20 *Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble de terminaux $S \subseteq V$, supposons que $E = E^* \cup \{f\}$, où $f = v_1v_2$. Soit*

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f) \geq \alpha \tag{5.16}$$

une inégalité qui définit une facette non triviale de DSTP(G,S). Soient $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en remplaçant l'arête f par deux arêtes $f_1 = v_0v_1$ et $f_2 = v_0v_2$, où v_0 est un nouveau sommet, et $S' \subseteq V'$ l'ensemble des terminaux de G' (voir figure 5.7).

i) Si $S' = S$, alors les inégalités

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_1) \geq \alpha, \tag{5.17}$$

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_2) \geq \alpha \tag{5.18}$$

définissent des facettes de DSTP(G', S').

ii) Si $S' = S \cup \{v_0\}$.

ii.a) Si $v_1 \in S$ et $v_2 \in S$, alors l'inégalité

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_1) + a(f)x(f_2) \geq \alpha + a(f) \tag{5.19}$$

définit une facette de DSTP(G', S').

ii.b) Si $v_1 \in S$ et $v_2 \notin S$, alors l'inégalité

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + (\alpha_0 - \alpha)x(f_1) + a(f)x(f_2) \geq \alpha_0 \tag{5.20}$$

définit une facette de DSTP(G', S'), où

$$\alpha_0 = min\{\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_2) \mid x \in DSTP(G' \setminus f_1, S')\}.$$

FIG. 5.7 – *Ajout d'un sommet*

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ la facette de DSTP(G,S) définie par l'inégalité (5.16). Nous ne prouvons le résultat que pour ii.b), les démonstrations pour les cas i) et ii.a) étant similaires. ii.b) Suposons que $S' = S \cup \{v_0\}$, $v_1 \in S$ et $v_2 \notin S$, c'est-à-dire que v_0 et v_1 sont des terminaux de G'.
Tout d'abord, montrons la validité de l'inégalité (5.20) pour le polyèdre DSTP(G',S'). À cette fin, nous allons montrer que cette contrainte est valide pour le polytope ESNDP(G',r') et, par le lemme 5.11, pour DSTP(G',S'). Considérons un sous-ensemble d'arêtes $F' \subseteq E'$ induisant un sous-graphe Steiner connexe de G'. Nous pouvons remarquer que $F' \cup \{f_1,f_2\} \neq \emptyset$ car $v_0 \in S'$ et $\delta(v_0) = \{f_1,f_2\}$. Si $f_1 \notin F'$, alors F' induit un sous-graphe Steiner connexe de $G' \setminus f_1$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E^*} a(e)x^{F'}(e) + (\alpha_0-\alpha)x^{F'}(f_1) + a(f)x^{F'}(f_2) &= \sum_{e\in E^*} a(e)x^{F'}(e) + a(f)x^{F'}(f_2)\\ &\geq \alpha_0.\end{aligned}$$

Supposons maintenant que $f_1 \in F'$. Si $f_2 \notin F'$, alors $F_1 = F' \setminus \{f_1\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E^*} a(e)x^{F'}(e) &= \sum_{e\in E^*} a(e)x^{F_1}(e)\\ &\geq \alpha.\end{aligned}$$

Puisque $x^{F'}(f_1) = 1$ et $x^{F'}(f_2) = 0$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E^*} a(e)x^{F'}(e) + (\alpha_0-\alpha)x^{F'}(f_1) + a(f)x^{F'}(f_2) &\geq \alpha+\alpha_0-\alpha\\ &= \alpha_0.\end{aligned}$$

Si $f_2 \in F'$, alors $F_2 = (F' \setminus \{f_1,f_2\}) \cup \{f\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G, et

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E^*} a(e)x^{F_2}(e) + a(f)x^{F_2}(f) &= \sum_{e\in E^*} a(e)x^{F_2}(e) + a(f)\\ &\geq \alpha.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\sum_{e\in E^*} a(e)x^{F_2}(e) \geq \alpha - a(f).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E^*} a(e)x^{F'}(e) &= \sum_{e\in E^*} a(e)x^{F_2}(e)\\ &\geq \alpha - a(f).\end{aligned}$$

Or $x^{F'}(f_1) = x^{F'}(f_2) = 1$. Donc, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E^*} a(e)x^{F'}(e) + (\alpha_0 - \alpha)x^{F'}(f_1) + a(f)x^{F'}(f_2) &\geq \alpha - a(f) + \alpha_0 - \alpha + a(f)\\ &= \alpha_0.\end{aligned}$$

Et la contrainte (5.20) est valide pour ESNDP(G',r') et DSTP(G',S').

Puisque l'inégalité (5.16) définit une facette de DSTP(G,S), il existe $m = |E|$ vecteurs $x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{R}^E$ affinement indépendants et appartenant à $\mathcal{F}$. Soient $x'_1,\ldots,x'_m \in \mathbb{R}^{E'}$ les vecteurs tels que

$$x'_i = (x^*_i, 1, x_i(f)) \qquad \text{pour tout } i = 1,\ldots,m,$$

où x^*_i est la restriction de x_i sur E^*, $x'_i(f_1) = 1$ et $x'_i(f_2) = x_i(f)$. Soit $x'_{m+1} \in \mathbb{R}^{E'}$ le vecteur de DSTP$(G'\setminus f_1, S')$ que réalise le minimum définissant α_0. Il n'est pas difficile de voir que les vecteurs $x'_1,\ldots,x'_{m+1}$ appartiennent tous à DSTP(G',S'). Considérons alors la matrice A dont les colonnes sont les vecteurs $x_1,\ldots,x_m$. Soit A' la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $x'_1,\ldots,x'_{m+1}$. Alors A' peut être écrite comme suit

$$A' = \begin{pmatrix} A & b \\ 1\ldots1 & 0 \end{pmatrix},$$

où la dernière ligne correspond à f_1 et $x'_{m+1} = (b,0)$. Si la dernière ligne de A' dépend des m premières, il doit exister un vecteur $y \in \mathbb{R}^m$ tel que $y^TA = (1,\ldots,1)$ et $y^Tb = 0$. Étant donné que la matrice A est non-singulière, nous avons

$$y(e) = \begin{cases} \frac{a(e)}{\alpha} & \text{pour tout } e \in E^*,\\ \\ \frac{a(f)}{\alpha} & \text{si } e = f_2. \end{cases}$$

Puisque le vecteur $x'_{m+1} = (b,0)$ réalise le minimum définissant α_0, il en résulte que

$$\begin{aligned} y^tb &= \sum_{e\in E^*} y(e)b(e) + y(f_2)b(f2)\\ &= \sum_{e\in E^*} \tfrac{a(e)}{\alpha}b(e) + \tfrac{a(f)}{\alpha}b(f_2)\\ &= \tfrac{\alpha_0}{\alpha}\\ &\neq 0, \end{aligned}$$

une contradiction.
Par conséquent, la matrice A' est non-singulière. Ainsi, les vecteurs $x'_1, \ldots, x'_{m+1}$ sont linéairement indépendants. Par ailleurs, ils vérifient tous l'inégalité (5.20) à l'égalité. En effet, nous avons, pour tout $i = 1, \ldots, m$,

$$\begin{aligned}\sum_{e \in E^*} a(e)x'_i(e) + (\alpha_0 - \alpha)x'_i(f_1) + a(f)x'_i(f_2) &= \sum_{e \in E^*} a(e)x'_i(e) + a(f)x_i(f) + (\alpha_0 - \alpha) \\ &= \alpha + \alpha_0 - \alpha \\ &= \alpha_0,\end{aligned}$$

car $x_i \in \mathcal{F}$ et x_i vérifie ainsi l'inégalité (5.16) à l'égalité. De plus, il est trivial de voir que x'_{m+1} vérifie l'inégalité (5.20) à l'égalité.
Or, $x'_i \neq 0_{m+1}$ pour tout $i = 1, \ldots, m+1$. Donc, d'après la remarque 1.1, les vecteurs $x'_1, \ldots, x'_{m+1}$ sont affinement indépendants. Par conséquent, l'inégalité (5.20) définit une facette de $\mathrm{DSTP}(G', S')$. □

Maintenant, en utilisant ce résultat ainsi que le théorème 5.10, nous allons donner un contre-exemple à une conjecture de Chopra et Rao.

5.4.2 Infirmation d'une conjecture de Chopra et Rao

Chopra et Rao [35] ont étudié le dominant du polytope des arbres Steiner dans la classe des 2-arbres. Un *2-arbre* est un graphe série-parallèle maximal. Les 2-arbres peuvent être définis récursivement comme suit. Un triangle est un 2-arbre. Étant donné un 2-arbre T_n sur n sommet, un 2-arbre sur $n+1$ sommet est construit en choisissant une arête de T_n et en reliant les deux extrémités de cette arête à un nouveau sommet. Le problème de l'arbre Steiner a été très étudié dans la classe des 2-arbres [35, 151, 171]. Plus particulièrement, Wald et Colbourn [171] ont donné un algorithme de programmation dynamique pour résoudre le problème STP pour ces graphes.
Puisque le problème de l'arbre Steiner est ainsi polynomial dans la classe des 2-arbres, il est intéressant de caractériser complètement le dominant du polytope des arbres Steiner par des inégalités linéaires. Dans leurs travaux [35], Chopra et Rao se sont penchés sur cette question, et ont conjecturé que si G est un 2-arbre et S son ensemble de terminaux, alors le polyèdre $\mathrm{DSTP}(G, S)$ est complètement décrit par les inégalités de non-négativité, les inégalités de partition Steiner (5.1) et celles de trou-impair (5.2) (voir aussi Goemans [86]). Nous allons montrer que cette conjecture n'est pas exacte.

Considérons le graphe $G_1 = (V_1, E_1)$ donné sur la figure 5.7 avec $S_1 = \{s_1, s_2, s_3\}$ son ensemble de terminaux.

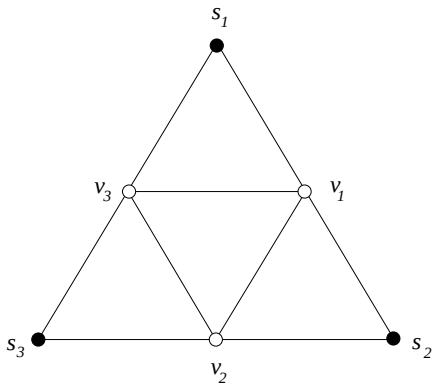

FIG. 5.8 – *Le graphe* G_1

Le graphe G_1 est dans une configuration de trou-impair. Par conséquent, l'inégalité

$$\sum_{e \in E^*} x(e) \geq 4$$

définit une facette de DSTP(G_1, S_1).

Soit $G_2 = (V_2, E_2)$ le graphe obtenu à partir de G_1 en ajoutant un nouveau sommet terminal s_4 et deux nouvelles arêtes s_4s_1 et s_4v_1. Nous avons donc $V_2 = V_1 \cup \{s_4\}$, $E_2 = E_1 \cup \{s_4s_1, s_4v_1\}$, et l'ensemble des terminaux de G_2 est $S_2 = S_1 \cup \{s_4\}$. La figure 5.8 illustre le graphe G_2.

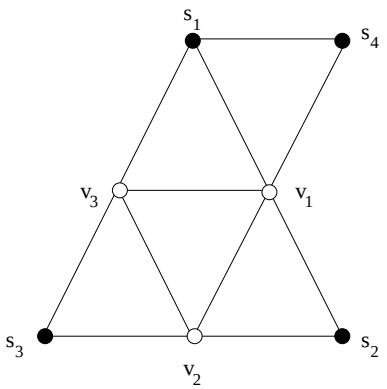

FIG. 5.9 – *Le graphe* G_2

Considérons l'inégalité

$$\sum_{e \in E_2} x(e) \geq 5. \tag{5.21}$$

Théorème 5.21 *L'inégalité (5.21) définit une facette de DSTP(G_2, S_2).*

Preuve. Soit $G'_1 = (V'_1, E'_1)$ le graphe obtenu à partir de G_1 en dupliquant l'arête s_1v_1. Le graphe G'_1 est donné par la figure 5.10.

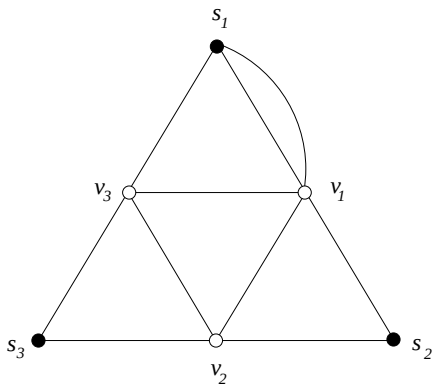

FIG. 5.10 – *Le graphe* G'_1

D'après le théorème 5.10, l'inégalité

$$\sum_{e \in E'_1} x(e) \geq 4 \tag{5.22}$$

définit une facette de $\mathrm{DSTP}(G'_1, S'_1)$, où $S'_1 = S_1$ est l'ensemble des terminaux de G'_1. En effet, si $G_c = (V_c, E_c)$ correspond au graphe obtenu à partir de G'_1 en contractant la nouvelle arête s_1v_1, nous obtenons un graphe avec trois terminaux $\{s'_1, s_2, s_3\}$ (voir figure 5.11).

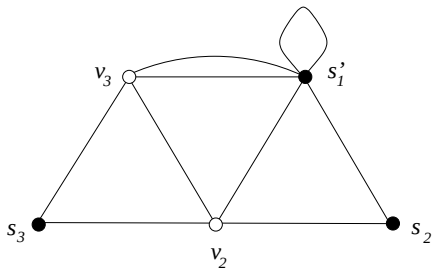

FIG. 5.11 – *Le graphe* G_c

Nous avons alors

$$\min\{\sum_{e \in E_c} x(e) \mid x \in \mathrm{DSTP}(G_c, E_c)\} = 3.$$

Ainsi le coefficient de la nouvelle arête s_1v_1 dans l'inégalité (5.22) est égale à

$$4 - \min\{\sum_{e \in E_c} x(e) \mid x \in \mathrm{DSTP}(G_c, E_c)\} = 4 - 3 = 1.$$

En ajoutant le sommet s_4 sur la nouvelle arête s_1v_1, et en appliquant la procédure décrite dans le théorème 5.20.ii.b), il n'est pas difficile de voir que

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \min\{\textstyle\sum_{e\in E_1} x(e) + x(s_4,v_1) \mid x \in \mathrm{DSTP}(G_2 \setminus s_4s_1, S_2)\} \\ &= 5. \end{aligned}$$

En effet, dans le graphe $G_2 \setminus s_4s_1$, il faut au minimum quatre arêtes pour couvrir les terminaux s_1, s_2 et s_3. De plus, il existe un sous-ensemble d'arêtes F_1 de E_1 couvrant ces trois terminaux ainsi que v_1. Par conséquent, en ajoutant l'arête s_4v_1 à F_1, nous obtenons un sous-ensemble d'arêtes couvrant les terminaux de $G_2 \setminus s_4s_1$.
Il résulte alors que le coefficient des arêtes s_1s_4 et s_4v_1 dans la contrainte obtenue par la procédure de construction sont respectivement égaux à $5-4=1$ et 1. Et ainsi, l'inégalité (5.21) définit une facette de DSTP(G_2,S_2). □

La contrainte (5.21) est différente d'une inégalité de partition Steiner (5.1) et d'une inégalité de trou-impair (5.2). Ce qui infirme la conjecture de Chopra et Rao. Nous faisons remarquer que l'inégalité (5.21) est une inégalité de partition Steiner généralisée avec $p=7$ et $d=1$.

Dans toute la suite de ce chapitre, nous allons considérer essentiellement le polytope des sous-graphes Steiner connexes. Nous allons ainsi décrire plusieurs procédures de construction de facettes pour ESNDP(G,r) et donner des descriptions complètes de ce polytope dans des classes particulières de graphes. Cela nous permettra de donner des descriptions similaires pour le polyèdre DSTP(G,S).

5.5 Construction de facettes pour ESNDP(G,r)

5.5.1 Construction par ajout d'un sommet

Le théorème 5.20 nous permet de donner la procédure de construction de facettes par ajout d'un nouveau sommet pour ESNDP(G,r).

Théorème 5.22 *Étant donnés un graphe $G=(V,E)$ et un vecteur types de sommets $r \in \{0,1\}^V$, supposons que $E = E^* \cup \{f\}$, où $f = v_1v_2$. Soit*

$$\sum_{e\in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f) \geq \alpha$$

une inégalité qui définit une facette non triviale de ESNDP(G, r). Soient $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en remplaçant l'arête f par deux arêtes $f_1 = v_0v_1$ et $f_2 = v_0v_2$, où v_0 est un nouveau sommet, et $r' \in \{0,1\}^{V'}$ le vecteur types de sommets de G' tel que $r'(v) = r(v)$ pour tout $v \in V$ (voir figure 5.7).

i) Si $r(v_0) = 0$, alors les inégalités

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_1) \geq \alpha,$$
$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_2) \geq \alpha$$

définissent des facettes de ESNDP(G', r').

ii) Supposons $r'(v_0) = 1$.

ii.a) Si $r'(v_1) = r'(v_2) = 1$, alors l'inégalité

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_1) + a(f)x(f_2) \geq \alpha + a(f)$$

définit une facette de ESNDP(G', r').

ii.b) Si $r'(v_1) = 1$ et $r'(v_2) = 0$, alors l'inégalité

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + (\alpha_0 - \alpha)x(f_1) + a(f)x(f_2) \geq \alpha_0$$

définit une facette de ESNDP(G', r'), où

$$\alpha_0 = min\{\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f_2) \mid x \in ESNDP(G' \setminus f_1, r')\}.$$

Preuve. Découle directement du lemme 5.2 et du théorème 5.20. □

Notre deuxième opération de construction de facettes est l'inverse de celle que nous venons de présentée. Elle consiste à remplacer une chaîne de longueur deux par une seule arête. Nous appellerons cette opération, *contraction d'une chaîne*, en faisant toutefois remarquer que cette procédure est différente de celle de contraction définie dans le théorème 5.9.

5.5.2 Construction par contraction d'une chaîne

Avant de présenter cette nouvelle opération de construction de facettes, nous donnons le lemme suivant qui établit une relation entre les coefficients de deux arêtes, composant une chaîne de longueur 2, dans une facette de ESNDP(G, r).

Lemme 5.23 *Étant donnés un graphe $G=(V,E)$ et un vecteur types de sommets $r \in \{0,1\}^V$, supposons qu'il existe un sommet $v_0 \in V$ tel que $\delta(v_0)=\{f_1,f_2\}$ avec $f_1=(v_0,v_1)$ et $f_2=(v_0,v_2)$. Soit*

$$a^T x \geq \alpha \tag{5.23}$$

une inégalité définissant une facette, non triviale, de ESNDP(G,r).

i) Si $r(v_0)=0$, alors $a(f_1)a(f_2)=0$.
ii) Supposons $r(v_0)=1$.
ii.a) Si $r(v_1)=r(v_2)=1$, alors $a(f_1)=a(f_2)$.
ii.b) Si $r(v_1)=1$ et $r(v_2)=0$, alors $a(f_1)\geq a(f_2)$.

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ la facette définie par l'inégalité (5.23). D'après le lemme 2.2, nous avons $a(e)\geq 0$ pour tout $e\in E$. Nous ne donnons que la démonstration pour le i), celles de ii.a) et ii.b) étant similaires.
i) Supposons que $r(v_0)=0$ et $a(f_1)a(f_2)\neq 0$. Puisque $\mathcal{F}$ est une facette non triviale de ESNDP(G,r), il doit exister un sous-ensemble d'arêtes $F\subseteq E$ tel que $x^F\in\mathcal{F}$ et $|F\cap\{f_1,f_2\}|=1$. En effet, si $F\cap\{f_1,f_2\}=\emptyset$ pour tout $x^F\in\mathcal{F}$ alors la facette $\mathcal{F}$ est la face $\{x\in \text{ESNDP}(G,r) \mid x(f_1)=x(f_2)=0\}$. Puisque $\mathcal{F}$ est une facette non triviale, nous avons une contradiction. Si $\{f_1,f_2\}\subset F$ pour tout $x^F\in\mathcal{F}$, alors la facette $\mathcal{F}$ est la face $\{x\in \text{ESNDP}(G,r) \mid x(f_1)=x(f_2)\}$, ce qui contredit le lemme 2.2.
Nous pouvons donc supposer, sans perte de généralité, que $f_1\in F$ et $f_2\notin F$. Considérons alors le sous-ensemble d'arêtes $F'=F\setminus\{f_1\}$. Étant donné que $r(v_0)=0$, il est facile de voir que F' induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Puisque $a(f_1)>0$, $x^F(f_1)=1$ et $x^{F'}(f_1)=0$, nous obtenons $a^T x^{F'}<\alpha$. Mais ceci contredit la validité de l'inégalité (5.23). □

Nous pouvons maintenant énoncer notre opération de construction de facettes par contraction d'une chaîne.

Théorème 5.24 *Étant donnés un graphe et un vecteur types de sommets $r\in\{0,1\}^V$, supposons que $E=E^*\cup\{f_1,f_2\}$, où $f_1=v_0v_1$, $f_2=v_0v_2$ et $\delta(v_0)=\{f_1,f_2\}$ (voir figure 5.11). Soit*

$$\sum_{e\in E^*} a(e)x(e)+a(f_1)x(f_1)+a(f_2)x(f_2)\geq\alpha \tag{5.24}$$

une inégalité définissant une facette de ESNDP(G,r). Soient $G'=(V',E')$ le graphe tel que $V'=V\setminus\{v_0\}$ et $E=E^*\cup\{f\}$ avec $f=v_1v_2$, et $r'\in\{0,1\}^{V'}$ le vecteur types

de sommets tel que $r'(v) = r(v)$ *pour tout* $v \in V'$.

i) Si $r(v_0) = 0$, *alors l'inégalité*

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f)x(f) \geq \alpha \tag{5.25}$$

définit une facette de ESNDP(G', r'*), où* $a(f) = max\{a(f_1), a(f_2)\}$.

ii) Supposons $r(v_0) = 1$.

ii.a) Si $r'(v_1) = r'(v_2) = 1$, *alors l'inégalité*

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + \delta x(f) \geq \alpha - \delta \tag{5.26}$$

définit une facette de ESNDP(G', r'*), où* $\delta = a(f_1) = a(f_2)$.

ii.b) Si $r'(v_1) = 1$ *et* $r'(v_2) = 0$, *alors l'inégalité*

$$\sum_{e \in E^*} a(e)x(e) + a(f_2)x(f) \geq \alpha - a(f_1) \tag{5.27}$$

définit une facette de ESNDP(G', r'*)*

FIG. 5.12 – *Contraction d'une chaîne*

Preuve. Nous allons montrer le cas i), (les preuves pour ii.a) et ii.b) sont similaires). Soit $\mathcal{F}$ la facette définie par l'inégalité (5.24).

i) Nous allons tout d'abord montrer la validité de l'inégalité (5.25) pour le polytope ESNDP(G', r'). Par le lemme 5.23.i), nous avons $a(f_1)a(f_2) = 0$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $a(f_2) = 0$. Ainsi, $a(f) = \max\{a(f_1), a(f_2)\} = a(f_1)$. Considérons un sous-ensemble d'arêtes $F' \subseteq E'$ induisant un sous-graphe Steiner connexe de G'. Soit $F \subseteq E$ le sous-ensemble d'arêtes défini comme suit.

$$F = \begin{cases} (F' \setminus \{f\}) \cup \{f_1, f_2\} & \text{si } f \in F', \\ F' & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puisque $r(v_0)=0$, le sous-graphe de G induit par F est Steiner connexe. De plus, nous pouvons remarquer que $x^F(f_1)=x^{F'}(f)$ et $x^F(e)=x^{F'}(e)$ pour tout $e\in E^*$. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E^*} a(e)x^F(e)+a(f_1)x^F(f_1)+a(f_2)x^F(f_2) &= \sum_{e\in E^*} a(e)x^F(e)+a(f_1)x^F(f_1)\\ &= \sum_{e\in E^*} a(e)x^{F'}(e)+a(f_1)x^{F'}(f_1)\\ &= \sum_{e\in E^*} a(e)x^{F'}(e)+a(f)x^{F'}(f_1)\\ &\geq \alpha.\end{aligned}$$

Ceci implique que la contrainte (5.25) est valide pour le polytope ESNDP(G',r').

Soit $\mathcal{F}'$ la face de ESNDP(G',r') définie par l'inégalité (5.25), c'est-à-dire

$$\mathcal{F}'=\{x\in \text{ESNDP}(G',r') \mid \sum_{e\in E^*} a(e)x(e)+a(f)x(f)=\alpha\}.$$

Il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{F}'\neq \text{ESNDP}(G',r')$ et $\mathcal{F}'\neq\emptyset$. Ainsi, $\mathcal{F}'$ est une face propre de ESNDP(G',r'). Supposons que $\mathcal{F}'$ ne soit pas une facette de ESNDP(G',r'). Alors, il existe une facette $\overline{\mathcal{F}}'$ de ESNDP(G',r') telle que $\mathcal{F}'\subseteq\overline{\mathcal{F}}'$. Soit

$$\sum_{e\in E^*}\overline{a}'(e)x(e)+\overline{a}'(f)x(f)\geq\overline{\alpha}'$$

l'inégalité qui définit le facette $\overline{\mathcal{F}}'$. D'après le théorème 5.22.i), la contrainte

$$\sum_{e\in E^*}\overline{a}'(e)x(e)+\overline{a}'(f_1)x(f)\geq\overline{\alpha}'$$

définit une facette $\overline{\mathcal{F}}$ de ESNDP(G,r), où $\overline{a}'(f_1)=\overline{a}'(f)$. Dans ce qui suit, nous allons montrer que $\mathcal{F}\subset\overline{\mathcal{F}}$. Soit $F_1\subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes tel que $x^{F_1}\in\mathcal{F}$. Alors

$$\sum_{e\in E^*} a(e)x^{F_1}(e)+a(f_1)x^{F_1}(f_1)=\alpha.$$

Considérons le sous-ensemble d'arêtes $F_1'\subseteq E'$ défini de la manière suivante

$$F_1'=\begin{cases}(F_1\setminus\{f_1,f_2\})\cup\{f\} & \text{si } \{f_1,f_2\}\subseteq F_1,\\ \\ F_1\setminus\{f_1,f_2\} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que $x^{F_1'}(f)=x^{F_1}(f_1)$. En effet, cette égalité est évidente si $\{f_1,f_2\}\cap F_1\neq\{f_1\}$. Si, au contraire, $\{f_1,f_2\}\cap F_1=\{f_1\}$, alors le sous-ensemble d'arêtes $F_1\setminus\{f_1\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Nous pouvons considérer

$F_1 \setminus \{f_1\}$ à la place de F_1. De plus, $x^{F_1'}(e) = x^{F_1}(e)$ pour tout $e \in E^*$. Par ailleurs, le sous-graphe induit par F_1' est Steiner connexe. Puisque $a(f_2) = 0$ et $a(f) = a(f_1)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E^*} a(e)x^{F_1}(e) + a(f_1)x^{F_1}(f_1) + a(f_2)x^{F_1}(f_2) &= \sum_{e\in E^*} a(e)x^{F_1'}(e) + a(f)x^{F_1'}(f_1)\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Par conséquent, $x^{F_1'} \in \mathcal{F}'$. Étant donné que $\mathcal{F}' \subseteq \overline{\mathcal{F}}'$, il en résulte que

$$\sum_{e\in E^*} \overline{a}'(e)x^{F_1'}(e) + \overline{a}'(f)x^{F_1'}(f) = \overline{\alpha}'.$$

Et ainsi,

$$\sum_{e\in E^*} \overline{a}'(e)x^{F_1}(e) + \overline{a}'(f_1)x^{F_1}(f) = \overline{\alpha}'.$$

Nous avons donc $x^{F_1} \in \overline{\mathcal{F}}$ et, de ce fait, $\mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}$.

Puisque $\mathcal{F}' \subset \overline{\mathcal{F}}'$, il existe un sous-ensemble d'arêtes $\overline{F}' \subseteq E'$ tel que $x^{\overline{F}'} \in \overline{\mathcal{F}}'$ et $x^{\overline{F}'} \notin \mathcal{F}'$, c'est-à-dire

$$\sum_{e\in E^*} a(e)x^{\overline{F}'}(e) + a(f)x^{\overline{F}'}(f) > \alpha,$$

et

$$\sum_{e\in E^*} \overline{a}'(e)x^{\overline{F}'}(e) + \overline{a}'(f)x^{\overline{F}'}(f) = \overline{\alpha}'.$$

Considérons alors le sous-ensemble d'arêtes $\overline{F} \subseteq E$ tel que

$$\overline{F} = \begin{cases} (\overline{F}' \setminus \{f\}) \cup \{f_1, f_2\} & \text{si } \{f\} \in \overline{F}', \\ \overline{F}' \cup \{f_2\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que $\overline{F}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Nous avons $x^{\overline{F}}(f_2) = 1$, $x^{\overline{F}}(f_1) = x^{\overline{F}'}(f)$ et $x^{\overline{F}}(e) = x^{\overline{F}'}(e)$ pour tout $e \in E^*$. Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E^*} \overline{a}'(e)x^{\overline{F}'}(e) + \overline{a}'(f)x^{\overline{F}'}(f) &= \sum_{e\in E^*} \overline{a}'(e)x^{\overline{F}}(e) + \overline{a}'(f)x^{\overline{F}'}(f_1)\\ &= \overline{\alpha}',\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E^*} a(e)x^{\overline{F}'}(e) + a(f)x^{\overline{F}'}(f) &= \sum_{e\in E^*} a(e)x^{\overline{F}}(e) + a(f)x^{\overline{F}}(f)\\ &> \alpha.\end{aligned}$$

Par conséquent, $x^{\overline{F}} \in \overline{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{F}$. Nous obtenons donc $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$. Mais ceci contredit le fait que $\mathcal{F}$ est une facette de ESNDP(G, r). □

Nous allons définir une troisième opération de construction de facettes pour pour ESNDP(G, r), appelée *explosion d'un sommet*. Elle consiste à partitionner un ensemble de sommets en deux sous-ensembles de sommets induisant des sous-graphes 2-arête connexes.

5.5.3 Explosion d'un sommet

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $r \in \{0, 1\}^V$ un vecteur types de sommets. Considérons un sous-ensemble $W \subset V$ et une partition (W_1, W_2) de W tels que

$W = W_1 \cup W_2$,
$W_1 \cap W_2 = \emptyset$,
$|[W_1, W_2]| = 1$,
$r(W_i) = 1$ pour $i = 1, 2$,
$G(W_i)$ est 2-arête connexe, pour $i = 1, 2$.

Supposons que $[W_1, W_2] = \{g\}$ (voir figure 5.12).

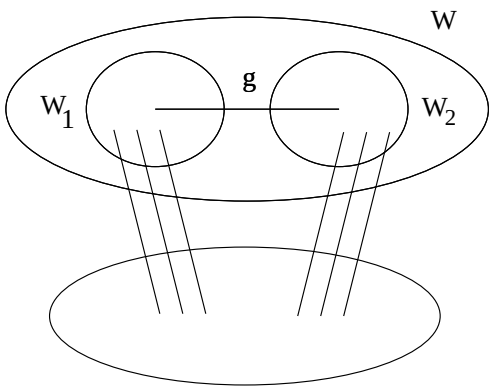

FIG. 5.13 – *Explosion d'un sommet*

Soient $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ le graphe obtenu à partir de G en contractant W et $\overline{r} \in \{0, 1\}^{\overline{V}}$ le vecteur types de connexité associés aux sommets de $\overline{G}$ tel que

$$\overline{r}(v) = \begin{cases} r(v) & \text{si } v \neq w, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où w est le sommet résultant de la contraction de W. Le prochain théorème nous permet de construire une facette de ESNDP(G,r) à partir d'une facette de ESNDP$(\overline{G},\overline{r})$.

Théorème 5.25 *Soit*

$$\sum_{e\in\overline{E}} \overline{a}(e)x(e) \geq \overline{\alpha} \tag{5.28}$$

une inégalité définissant une facette de ESNDP$(\overline{G},\overline{r})$. Alors l'inégalité

$$\sum_{e\in\overline{E}} \overline{a}(e)x(e) + (\alpha-\overline{\alpha})x(g) \geq \alpha \tag{5.29}$$

définit une facette de ESNDP(G,r), où $\alpha = min\{\sum_{e\in\overline{E}} \overline{a}(e)x(e) \mid x \in ESNDP(G\setminus g, r)\}$.

Preuve. Soit $\overline{\mathcal{F}}$ la facette de ESNDP$(\overline{G},\overline{r})$ définie par l'inégalité (5.28).
Dans un premier temps, nous allons montrer la validité de l'inégalité (5.29) pour le polytope ESNDP$(\overline{G},\overline{r})$. Pour cela, considérons un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ qui induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Si $g \notin F$, alors F induit un sous-graphe Steiner connexe de $G\setminus g$ et ainsi

$$\sum_{e\in\overline{E}} \overline{a}(e)x^F(e) \geq \alpha.$$

Si $g \in F$, alors le sous-graphe induit par $\overline{F} = F \setminus E(W)$ est un sous-graphe Steiner connexe de $\overline{G}$. Nous avons donc

$$\sum_{e\in\overline{E}} \overline{a}(e)x^{\overline{F}}(e) \geq \overline{\alpha}.$$

De plus, $x^F(e) = x^{\overline{F}}(e)$ pour tout $e \in \overline{E}$, $x^F(g) = 1$ et

$$\sum_{e\in\overline{E}} \overline{a}(e)x^F(e) + (\alpha-\overline{\alpha})x^F(g) = \sum_{e\in\overline{E}} \overline{a}(e)x^{\overline{F}}(e) + \alpha - \overline{\alpha}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{e\in\overline{E}} \overline{a}(e)x^F(e) + (\alpha-\overline{\alpha})x^F(g) &\geq \overline{\alpha} + \alpha - \overline{\alpha} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Ce qui implique la validité de l'inégalité (5.29) pour ESNDP$(\overline{G},\overline{r})$.

Soit $\mathcal{F}$ la face de ESNDP(G,r) définie par l'inégalité (5.29). Supposons qu'il existe une contrainte $b^T x \geq \beta$ qui définit une facette $\mathcal{F}'$ de ESNDP(G,r) telle que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$. Puisque le polytope ESNDP(G,r) est de pleine dimension (voir section 5.1), pour montrer que $\mathcal{F}$ définit une facette de ESNDP(G,r), il nous suffit de prouver qu'il existe un scalaire $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$.
Montrons tout d'abord que $b(e) = 0$ pour tout $e \in E(W) \setminus \{g\}$. Soit $\overline{F}_1 \subseteq \overline{E}$ un sous-ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe Steiner connexe de $\overline{G}$ tel que $x^{\overline{F}_1} \in \mathcal{F}$. Posons $F_1 = \overline{F}_1 \cup E(W)$. Il n'est pas difficile de voir que le sous-graphe $G(F_1)$ est Steiner connexe. De plus, $x^{F_1} \in \mathcal{F} \subseteq \overline{\mathcal{F}}'$. En effet, nous avons $x^{F_1}(e) = x^{\overline{F}_1}(e)$ pour tout $e \in \overline{E}$ et $x^{F_1}(g) = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \overline{E}} \overline{a}(e) x^{F_1}(e) + (\alpha - \overline{\alpha}) x^{F_1}(g) &= \sum_{e \in \overline{E}} \overline{a}(e) x^{\overline{F}_1}(e) + \alpha - \overline{\alpha} \\ &= \overline{\alpha} + \alpha - \overline{\alpha} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Considérons une arête quelconque e_0 de $E(W) \setminus \{g\}$, et posons $F_1^0 = F_1 \setminus \{e_0\}$. Puisque les sous-graphes $G(W_1)$ et $G(W_2)$ sont 2-arête connexes, le sous-ensemble F_1^0 induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Ainsi,

$$\begin{aligned} b^T x^{F_1^0} &= \sum_{e \in \overline{E}} b(e) x^{F_1^0}(e) + \sum_{e \in E(W) \setminus \{g\}} b(e) x^{F_1^0}(e) + b(g) x^{F_1^0}(g) \\ &= \sum_{e \in \overline{E}} b(e) x^{F_1}(e) + \sum_{e \in E(W) \setminus \{g\}} b(e) x^{F_1}(e) - b(e_0) x^{F_1}(e_0) + b(g) x^{F_1}(g) \\ &= \alpha - b(e_0) \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

Il en résulte alors que $b(e_0) = 0$. D'où $b(e) = 0$ pour tout $e \in E(W) \setminus \{g\}$.

Considérons maintenant la facette $\overline{\mathcal{F}}'$ de ESNDP$(\overline{G}, \overline{r})$ définie comme suit

$$\overline{\mathcal{F}}' = \{x \in \text{ESNDP}(\overline{G}, \overline{r}) \mid \sum_{e \in \overline{E}} b(e) x(e) = \beta - b(g)\}.$$

Nous allons montrer que $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}'$. Soit $\overline{F}_2 \subseteq \overline{E}$ un sous-ensemble d'arêtes tel que $x^{\overline{F}_2} \in \overline{\mathcal{F}}$. Soit $F_2 = \overline{F}_2 \cup E(W)$. Nous avons $x^{F_2}(e) = x^{\overline{F}_2}(e)$ pour tout $e \in \overline{E}$, $x^{F_2}(g) = 1$ et

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \overline{E}} b(e) x^{F_2}(e) + b(g) x^{F_2}(g) &= \sum_{e \in \overline{E}} b(e) x^{\overline{F}_2}(e) + 1 \\ &= \beta. \end{aligned}$$

Par conséquent, $x^{\overline{F}_2} \in \overline{\mathcal{F}}'$. Ainsi $\overline{\mathcal{F}} \subseteq \overline{\mathcal{F}}'$. Puisque $\overline{\mathcal{F}}$ est une facette de ESNDP$(\overline{G}, \overline{r})$, nous en déduisons que $\overline{\mathcal{F}} = \overline{\mathcal{F}}'$. Étant donné que le polytope ESNDP$(\overline{G}, \overline{r})$ est de pleine

dimension, il existe un scalaire $\rho > 0$ tel que

$$\begin{cases} b(e) = \rho\overline{a} = \rho a & \text{pour tout } e \in \overline{E}, \\ \beta - b(g) = \rho\overline{\alpha}. \end{cases}$$

La facette $\overline{\mathcal{F}}'$ est différente de la facette définie par l'inégalité $x(g) \leq 1$. En effet, supposons que $\overline{\mathcal{F}}' = \{x \in \text{ESNDP}(G, r) \mid x(g) = 1\}$. Puisque $\rho > 0$ et $b(e) = 0$ pour tout $e \in \overline{E}$, nous obtenons $\overline{a}(e) = 0$ pour tout $e \in \overline{E}$. Mais ceci contredit le fait que $\overline{\mathcal{F}}$ est une facette de $\text{ESNDP}(\overline{G}, \overline{r})$.
Par conséquent, il existe un sous-ensemble d'arêtes $F_3 \subseteq E \setminus \{g\}$ tel que $x^{F_3} \in \mathcal{F}'$. Ainsi

$$\begin{aligned} \beta &= \min\{\sum_{e \in \overline{E}} b(e)x(e) + b(g)x(g) \mid x \in \text{ESNDP}(G, r)\} \\ &= \min\{\sum_{e \in \overline{E}} b(e)x(e) + b(g)x(g) \mid x \in \text{ESNDP}(G \setminus g, r)\}. \end{aligned}$$

De ce fait, nous obtenons

$$\begin{aligned} \alpha &= \min\{\sum_{e \in \overline{E}} \overline{a}(e)x(e) \mid x \in \text{ESNDP}(G \setminus g, r)\} \\ &= \min\{\sum_{e \in \overline{E}} \tfrac{b(e)}{\rho}x(e) \mid x \in \text{ESNDP}(G \setminus g, r)\} \\ &= \tfrac{1}{\rho}\min\{\sum_{e \in \overline{E}} b(e)x(e) \mid x \in \text{ESNDP}(G \setminus g, r)\} \\ &= \tfrac{\beta}{\rho}. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} b(g) &= \beta - \rho\overline{\alpha} \\ &= \rho\alpha - \rho\overline{\alpha} \\ &= \rho(\alpha - \overline{\alpha}). \end{aligned}$$

Et il en résulte alors que $b = \rho a$, ce qui termine la preuve de notre théorème. □

Dans la prochaine section, nous nous intéressons à la procédure de construction de facettes qui consiste à supprimer une arête parallèle.

5.5.4 Suppression d'une arête parallèle

Tout d'abord, nous énonçons un lemme qui établit l'égalité entre les coefficients de deux arêtes parallèles dans une facette du polytope des sous-graphes Steiner connexes.

Lemme 5.26 *Soient $G=(V,E)$ un graphe et $r \in \{0,1\}^V$ un vecteur types de sommets. Soit*

$$\sum_{e\in E} a(e)x(e) \geq \alpha \tag{5.30}$$

une inégalité non triviale définissant une facette de ESNDP(G,r). Si f et g sont deux arêtes parallèles de G, alors $a(f)=a(g)$.

Preuve. Posons

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathrm{ESNDP}(G,r) \mid \sum_{e\in E} a(e)x(e) = \alpha\}.$$

Puisque l'inégalité (5.30) est différente d'une inégalité triviale, il existe un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que $x^F \in \mathcal{F}$ et $f \notin F$. Nous avons alors

$$\sum_{e\in E} a(e)x^F(e) = \alpha.$$

Si $g \in F$, alors $F_g = F\setminus\{g\}$ (resp. $F_f = F\setminus\{f\}$) induit un sous-graphe Steiner connexe de G et ainsi $a(g)=0$ (resp. $a(f)=0$). En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E} a(e)x^{F_g}(e) &= \sum_{e\in E} a(e)x^F(e) - a(g)\\ &\geq \alpha.\end{aligned}$$

Si $g \notin F$, alors le sous-ensemble d'arêtes $F' = (F\setminus\{f\})\cup\{g\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G et ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E} a(e)x^{F'}(e) &= \sum_{e\in E} a(e)x^F(e) - a(f) + a(g)\\ &= \alpha - a(f) + a(g)\\ &\geq \alpha.\end{aligned}$$

Ce qui nous donne $a(g) \geq a(f)$. Par ailleurs, nous pouvons montrer d'une manière similaire que $a(f) \geq a(g)$. Par conséquent, $a(f)=a(g)$. □

Dans la section 5.3.1, nous avons présenté une procédure de lifting due à Chopra et Rao [34] pour le dominant du polytope des arbres Steiner. Cette procédure établit une facette de ce polyèdre à partir d'une facette pour le graphe auquel il a été enlevé une arête (voir théorème 5.10). Par ailleurs, ils ont fait la remarque suivante.

Remarque 5.27 La procédure de lifting du théorème 5.10 est difficile dans le cas général, à l'exception du cas de deux arêtes parallèles e_1 et e_2 pour lesquelles $a(e_1) = a(e_2)$. □

Étant donné l'équivalence entre les facettes non triviales du polytope des sous-graphes Steiner connexes et celles du dominant du polytope des arbres Steiner, nous donnons le résultat suivant.

Théorème 5.28 *Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle 2-arête connexe et $r \in \{0,1\}^V$ un vecteur types de sommets. Soient f et g deux arêtes parallèles. Supposons que l'inégalité*

$$\sum_{e \in E} x(e) \geq \alpha \tag{5.31}$$

définisse une facette de ESNDP(G, r). Alors l'inégalité

$$\sum_{e \in E \setminus \{g\}} x(e) \geq \alpha \tag{5.32}$$

$$(\textit{resp.} \sum_{e \in E \setminus \{f\}} x(e) \geq \alpha) \tag{5.33}$$

définit une facette de ESNDP($G \setminus g, r$) (resp. ESNDP($G \setminus f, r$)).

Preuve. Nous démontrons le résultat pour l'inégalité (5.32), la preuve étant similaire pour l'inégalité (5.33).
Soit $\mathcal{F}$ la facette de ESNDP(G, r) définie par l'inégalité (5.32). D'après le lemme 5.26, nous avons $a(f) = a(g)$. Puisque tout sous-graphe Steiner connexe de $G \setminus g$ est également un sous-graphe Steiner connexe de G, il est clair que l'inégalité (5.32) est valide pour le polytope ESNDP$(G \setminus g, r)$.

Soit

$$\mathcal{F}_g = \{x \in \text{ESNDP}(G \setminus g, r) \mid \sum_{e \in E \setminus g} a(e)x(e) = \alpha\}$$

la face propre de ESNDP$(G \setminus g, r)$ définie par l'inégalié (5.32). Supposons que $\mathcal{F}_g$ ne soit pas une facette de ce polytope. Alors, il existe une facette $\mathcal{F}'_g$ de ESNDP$(G \setminus g, r)$ telle que $\mathcal{F}_g \subseteq \mathcal{F}'_g$. Supposons que $\mathcal{F}'_g$ soit définie par l'inégalité

$$\sum_{e \in E \setminus g} a'(e)x(e) \geq \alpha'.$$

D'après le théorème 5.10, le lemme 5.2 et la remarque 5.27, la contrainte

$$\sum_{e \in E \setminus \{f,g\}} a'(e)x(e) + a'(f)x(f) + a'(g)x(g) \geq \alpha'$$

définit une facette $\mathcal{F}'$ de ESNDP(G,r). Montrons que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

Considérons alors un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que $x^F \in \mathcal{F}$. Nous avons donc $\sum_{e\in E} a(e)x^F(e) = \alpha$. Soit

$$F_g = \begin{cases} F & \text{si } g \notin F, \\ (F \setminus \{g\}) \cup \{f\} & \text{si } F \cap \{f,g\} = \{g\}, \\ F \setminus \{g\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que F_g induit un sous-graphe Steiner connexe de $G \setminus g$. De plus $x^{F_g}(e) = x^F(e)$ pour tout $e \in E \setminus \{f,g\}$. Nous obtenons alors $x^{F_g} \in \mathcal{F}_g \subset \mathcal{F}'_g$. En effet, si $g \notin F$, alors

$$\sum_{e\in E\setminus g} a(e)x^{F_g}(e) = \sum_{e\in E\setminus g} a(e)x^F(e) = \alpha. \tag{5.34}$$

Supposons maintenant que $F\cap\{f,g\} = \{g\}$. Étant donné que $a(f) = a(g)$ et $x^{F_g}(f) = x^F(g)$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{e\in E\setminus g} a(e)x^{F_g}(e) &= \sum_{e\in E\setminus\{f,g\}} a(e)x^{F_g}(e) + a(f)x^{F_g}(f) \\ &= \sum_{e\in E\setminus\{f,g\}} a(e)x^F(e) + a(g)x^F(g) \\ &= \sum_{e\in E} a(e)x^F(e) \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Si $\{f,g\} \subseteq F$, alors, comme nous l'avons vu dans la démonstration du lemme 5.26, $a(f) = a(g) = 0$. Ainsi, (5.34) est vérifiée. Et de ce fait, $x^{F_g} \in \mathcal{F}_g \subseteq \mathcal{F}'_g$.
Par conséquent, nous avons

$$\sum_{e\in E\setminus g} a'(e)x^{F_g}(e) = \alpha'.$$

Il en résulte alors que

$$\sum_{e\in E\setminus\{f,g\}} a'(e)x^F(e) + a'(f)x^F(f) + a'(f)x^F(g) = \alpha'.$$

Ainsi, $x^F \in \mathcal{F}'_g$. Ceci implique que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$.

Puisque $\mathcal{F}_g \subset \mathcal{F}'_g$, il existe un sous-ensemble d'arêtes $F'_g \subseteq E \setminus \{g\}$ tel que $x^{F'_g} \in \mathcal{F}'_g$ et $x^{F'_g} \notin \mathcal{F}_g$. Il est évident que F'_g induit également un sous-graphe Steiner connexe de G. Par conséquent, $x^{F'_g} \in \mathcal{F}'$ et $x^{F'_g} \notin \mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}'$, ce qui contredit le fait que $\mathcal{F}$ est

une facette de ESNDP(G, r). □

Dans la suite de ce chapitre, nous allons appliquer certaines de ces procédures de construction de facettes pour donner des descriptions complètes du polytope des sous-graphes Steiner connexes dans des sous-classes des graphes série-parallèles.

5.6 Le polytope ESNDP(G, r) dans les graphes série-parallèles

5.6.1 Introduction

Pour de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire, de bonnes descriptions du polyèdre associé peuvent être obtenues en considérant un formulation étendue. Celle-ci utilise des variables additionnelles (auxilaires) et donne lieu à un polyèdre de solutions ayant une dimension supérieure. Ce dernier est ensuite projeté sur les variables initiales pour obtenir une description du polyèdre associé au problème original. L'idée générale de cette projection a été tout d'abord décrite par Benders [15], puis appliquée à des descriptions polyédrales par Balas et Pulleyblank [10].

Dans [31], Chopra a élaboré une formulation en terme de graphes orientés, utilisant $2|E|$ variables entières et les contraintes de coupe orientée, pour le problème ESNDP avec $r \in \{0, 1, 2\}^V$. Ainsi, à partir du graphe $G = (V, E)$, il a construit un graphe orienté $D = (V, A)$ en remplaçant chaque arête $ij \in E$ par deux arcs (i, j) et (j, i). Soit $w \in V$ un sommet de type de connexité égal à r_{max}. Soient $x \in \mathbb{R}^E$ et $y \in \mathbb{R}^A$. Si (x, y) est une solution du système

$$y(\delta^-(W)) \geq 1 \qquad \text{pour tout } W \subseteq V, \emptyset \neq W \neq V, \text{ avec, } con(W) = 2, \text{ ou } (r(W) = 1 \text{ et } w \notin W), \tag{5.35}$$

$$y(i, j) \geq 0 \qquad \text{pour tout } (i, j) \in A, \tag{5.36}$$

$$y(i, j) \in \{0, 1\} \qquad \text{pour tout } (i, j) \in A, \tag{5.37}$$

$$-y(i, j) - y(j, i) + x(ij) = 0 \qquad \text{pour tout } ij \in E, \tag{5.38}$$

$$x(ij) \leq 1 \qquad \text{pour tout } ij \in E, \tag{5.39}$$

alors le vecteur entier x est réalisable pour le problème ESNDP. Ainsi, la projection de ce système sur les variables originales x donne une formulation du problème de

conception de réseaux fiables (initialement, Chopra a considéré ce système sans les contraintes (5.39)). La projection, sur les variables x, du système obtenu en ignorant les contraintes (5.37) et (5.39) implique une relaxation du problème ESNDP. Cette projection donne lieu à une nouvelle classe d'inégalités valides pour le problème ESNDP. Ces inégalités ont la forme générale suivante

$$\sum_{ij\in E} a(ij)x(ij) \geq \sum_{W\in\mathcal{F}} b(W) \quad \text{pour tout } b \geq 0 \text{ et}$$
$$a(ij) = \max\{s(\mathcal{F};b;i;j), s(\mathcal{F};b;j;i)\} \text{ pour tout } ij \in E,$$
$$x \geq 0,$$

où

- $\mathcal{F}$ est l'ensemble des $W \subseteq V$ qui apparaissent dans la formulation des inégalités (5.35),
- $b(W) \geq 0$ sont des variables associées à chaque inégalité (5.35) pour $W \in \mathcal{F}$,
- $a(ij) \in \mathbb{R}$ sont des variables associées à chaque inégalité (5.38) pour $ij \in E$,
- $s(\mathcal{F};b;i;j)$ est la somme des $b(W)$ pour $W \in \mathcal{F}$ avec $i \in W$ et $j \notin W$.

Ces inégalités, appelées *contraintes de Prodon*, ont tout d'abord été établies par Prodon [149] pour le problème de l'arbre Steiner, c'est-à-dire lorsque $r \in \{0,1\}^V$. De plus, elles contiennent comme sous-classe, les contraintes de partition (2.7). Par ailleurs, les inégalités de Prodon peuvent être séparées en temps polynomial [31, 161], à la différence des contraintes (2.7). Et pour le problème de l'arbre Steiner, Prodon [149] a donné le résultat suivant.

Théorème 5.29 [149] *Les contraintes de Prodon et les contraintes de non-négativité décrivent complètement le dominant du polytope des arbres Steiner dans la classe des graphes série-parallèles.* □

Cependant, une caractérisation complète des inégalités de Prodon définissant des facettes du dominant du polytope des arbres Steiner n'est pas connue, et cela même pour des graphes série-parallèles. Une description explicite du polyèdre DSTP(G,S) (ainsi que du polytope ESNDP(G,r)) dans la classe des graphes série-parallèles reste ainsi une question ouverte à laquelle nous nous sommes intéressés.

Nous rappelons qu'un graphe connexe est dit *série-parallèle* [63], s'il peut être obtenu par une application récursive des deux opérations suivantes, en partant du graphe constitué de deux sommets liés par une arête,

θ_1 : dupliquer une arête (*i.e.* ajouter une arête joingant les mêmes sommets),

θ_2 : subdiviser une arête (*i.e.* insérer un nouveau sommet de degré deux).

Un des objectifs de cette section est d'utiliser les opérations de construction de facettes pour tenter de caractériser le polytope ESNDP(G, r). Plus particulièrement, nous voulons utiliser celle du théorème 5.24 qui consite à contracter une chaîne de longueur deux, pour caractériser ce polytope dans des classes particulières de graphes. Cependant, la procédure décrite dans le théorème 5.24 ne considère pas le cas où un sommet de type de connexité 1 possède uniquement deux voisins de type de connexité 0. Ainsi, nous avons été amenés à introduire une sous-classe des graphes série-parallèles de la manière suivante.

Définition 5.30 *Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle 2-arête connexe et $r \in \{0,1\}^V$ un vecteur types de sommets. Nous dirons que le graphe G vérifie la propriété P, s'il peut être obtenu par les opérations θ_1 et θ_2, sans jamais ajouter un sommet de type de connexité 1 entre deux sommets de type de connexité 0.*

Nous allons, dans la prochaine section, étudier le polytope des sous-graphes Steiner connexes dans la classe des graphes série-parallèles 2-arête connexes vérifiant la propriété P, et en donner une description complète.

Cependant, nous avons également étudié le polytope ESNDP(G, r) pour les graphes série-parallèles ne vérifiant pas la propriéte P. Les graphes qui ont une configuration de trou-impair sont des graphes série-parallèles ne vérifiant pas la propriété P. Nous rappelons qu'un graphe $G_m = (V_m, E_m)$, dans une configuration de trou-impair, est défini par un entier impair $m \geq 3$, et

$$
\begin{aligned}
&V_m = \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m\},\\
&E_m = \{u_i v_i, u_i v_{i-1}, v_i v_{i-1};\ i = 1, \ldots, m\ (mod\ m)\},\\
&r_m(u_i) = 1 \qquad\qquad \text{pour tout } i = 1, \ldots, m,\\
&r_m(v_i) = 0 \qquad\qquad \text{pour tout } i = 1, \ldots, m.
\end{aligned}
$$

Notons par Ψ la classe des graphes ayant une configuration de trou-impair. Les graphes de cette classe sont série-parallèles. En effet, ils peuvent être obtenus à partir du cycle sur m sommets en effectuant, pour chaque arête du cycle, l'opération qui consiste à ajouter une arête parallèle puis à subdiviser cette dernière. Néanmoins, ils ne vérifient pas la propriété P, car nous subdivisons chaque arête parallèle $v_{i-1}v_i$ en insérant un sommet u_i de type de connexité 1 entre les deux sommets v_{i-1} et v_i qui ont un type de connexité égal à 0. La classe Ψ fera l'objet d'une caractérisation complète du polytope des sous-graphes Steiner connexes.

5.6.2 Graphes série-parallèles vérifiant la propriété P

Le théorème suivant donne une description linéaire complète du polytope des sous-graphes Steiner connexes lorsque le graphe est série-parallèle et vérifie la propriété P.

Théorème 5.31 *Soient $G=(V,E)$ un graphe série-parallèle 2-arête connexe et $r \in \{0,1\}^V$ un vecteur types de sommets. Si G vérifie la propriété P, alors le polytope ESNDP(G,r) est complètement caractérisé par les contraintes triviales, les contraintes de coupe et les contraintes de partition Steiner.*

Preuve. La démonstration est par récurrence sur le nombre d'arêtes. Soit $G=(V,E)$ un graphe série-parallèle 2-arête connexe vérifiant la propriété P. Il n'est pas difficile de voir que le théorème est vrai si G possède au plus 4 sommets, c'est-à-dire si G est un graphe outerplanaire de 4 sommets avec au moins un sommet de type de connexité égal à 1. Supposons qu'il est vrai pour tout graphe série-parallèle 2-arête connexe vérifiant la propriété P ayant au plus m arêtes. Supposons que G possède $m+1$ arêtes. Soit

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathrm{ESNDP}(G,r) \mid a^T x = \alpha\}$$

une facette de ESNDP(G,r). Supposons par ailleurs que $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale et d'une contrainte de coupe. Nous allons montrer que $\mathcal{F}$ n'est rien d'autre qu'une facette de ESNDP(G,r) définie par une inégalité de partition Steiner.

Étant donné que G est un graphe série-parallèle, il peut être obtenu en appliquant récursivement les opérations θ_1 et θ_2. Intéressons nous à la dernière opération réalisée. Soit $G'=(V',E')$ le graphe sur lequel est effectuée cette dernière opération pour obtenir G. Ainsi, examinons tout d'abord le cas où la dernière opération de construction de G consiste à ajouter un sommet v_0 entre deux sommets v_1 et v_2 (opération θ_2). Posons $\delta(v_0)=\{f_1,f_2\}$, où $f_1=v_0v_1$ et $f_2=v_0v_2$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} V' &= V \setminus \{v_0\}, \\ E' &= (E \setminus \{f_1,f_2\}) \cup \{f\}, \end{aligned}$$

où $f=v_1v_2$. Soit $r' \in \{0,1\}^{V'}$ le vecteur types de connexité associés aux sommets de G' et défini comme suit

$$r'(v) = r(v) \qquad \text{pour tout } v \in V'.$$

Nous sommes alors amenés à considérer trois cas dépendants des types de connexité des sommets v_0, v_1 et v_2.

Cas 1 $r(v_0) = 0$.
D'après le théorème 5.24.i), l'inégalité

$$\sum_{e \in E' \setminus \{f\}} a(e)x(e) + a(f)x(f) \geq \alpha \tag{5.40}$$

définit une facette $\mathcal{F}'$ de $\mathrm{ESNDP}(G', r')$, où $a(f) = \max\{a(f_1), a(f_2)\}$. De plus, par le lemme 5.23.i), nous avons $a(f_1)a(f_2) = 0$. Sans perte de généralité, supposons que $a(f_2) = 0$. Ainsi $a(f) = a(f_1)$. Étant donné que l'inégalité $a^T x \geq \alpha$ est différente d'une inégalité triviale et d'une inégalité de coupe, l'inégalité (5.40) l'est également. En effet, si $a(f_1) = 0$, alors $a(f) = 0$. Ainsi, l'inégalité (5.40) n'est rien d'autre que l'inégalité $a^T x \geq \alpha$. Si $a(f_1) > 0$, alors l'inégalité (5.40) est de la même nature que $a^T x \geq \alpha$ où l'arête f remplace l'arête f_1 dans cette dernière. Puisque $|E'| = |E| - 1 < |E|$, nous savons, par l'hypothèse de récurrence, que l'inégalité (5.40) est induite par une partition Steiner. Soit $(V'_1, \ldots, V'_p)$, $p \geq 3$, cette partition Steiner de V'. Alors, il existe un scalaire $\beta > 0$ tel que

$$(5.41) \begin{cases} a(e) = \beta & \text{si } e \in \delta(V'_1, \ldots, V'_p), \\ a(e) = 0 & \text{si } e \notin \delta(V'_1, \ldots, V'_p), \\ \alpha = \beta(p-1). \end{cases}$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v_2 \in V'_1$. Considérons alors la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ de V définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} V_1 &= V'_1 \cup \{v_0\}, \\ V_i &= V'_i \qquad \text{pour } i = 2, \ldots, p. \end{aligned}$$

Puisque $r'(V'_i) = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, p$, il est évident que la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ est un partition Steiner de V. Soit $x^* \in \mathcal{F}$. D'après (5.41), $\delta(V_1, \ldots, V_p) = \{e \in E \mid a(e) = \beta\}$. Ainsi, nous obtenons

$$\sum_{e \in \delta(V_1, \ldots, V_p)} \beta x^*(e) = \beta(p-1).$$

Par conséquent,

$$\sum_{e \in \delta(V_1, \ldots, V_p)} x^*(e) = p - 1,$$

et $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \mathrm{ESNDP}(G, r) \mid \sum_{e \in \delta(V_1, \ldots, V_p)} x(e) = p - 1\}$.

Étant donné que le polytope $\mathrm{ESNDP}(G, r)$ est de pleine dimension, nous en déduisons donc que l'inégalité $a^T x \geq \alpha$ est, à un coefficient multiplicatif strictement positif,

l'inégalité de partition Steiner $x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq p-1$.

Cas 2 $r(v_0)=1$ et $r(v_1)=r(v_2)=1$.
D'après le lemme 5.23.ii.a), nous avons $a(f_1)=a(f_2)=\delta$. Par le théorème 5.24.ii.a), l'inégalité

$$\sum_{e\in E'\setminus\{f\}} a(e)x(e)+\delta x(f) \geq \alpha-\delta \tag{5.42}$$

définit une facette $\mathcal{F}'$ de ESNDP(G',r'). D'une manière similaire au cas 1, nous pouvons montrer que l'inégalité (5.42) est ni une contrainte triviale, ni une contrainte de coupe. Ainsi, puisque $|E'|<|E|$, la facette $\mathcal{F}'$ est définie par une inégalité de partition Steiner. Par conséquent, il existe une partition Steiner $(V_1',\ldots,V_p')$, $p\geq 3$, de V' et un scalaire $\beta>0$ tels que

$$(5.43)\begin{cases} a(e)=\beta & \text{si } e\in\delta(V_1',\ldots,V_p'),\\ a(e)=0 & \text{si } e\notin\delta(V_1',\ldots,V_p'),\\ \alpha-\delta=\beta(p-1). & \end{cases}$$

Nous distinguons alors deux cas.

Cas 2.1 $\delta>0$. Alors, $f\in\delta(V_1',\ldots,V_p')$ et $\delta=\beta$. Considérons la partition $(V_1,\ldots,V_{p+1})$ de V définie comme suit

$$\begin{aligned} &V_i=V_i' && \text{pour } i=1,\ldots,p,\\ &V_{p+1}=\{v_0\}. \end{aligned}$$

Puisque $r'(V_i')=1$ pour tout $i=1,\ldots,p$ et $r(v_0)=1$, il est clair que $(V_1,\ldots,V_{p+1})$ est une partition Steiner de V. De plus, $\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})=(\delta(V_1',\ldots,V_p')\setminus\{f\})\cup\{f_1,f_2\}$. Soit $x^*\in\mathcal{F}$. Étant donné que $a(f_1)=a(f_2)=\delta=\beta$, et d'après (5.43), $\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})=\{e\in E\mid a(e)=\beta\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})}\beta x^*(e) &= \beta(p-1)+\beta\\ &= \beta p. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})} x^*(e)=p-1.$$

Par conséquent, $\mathcal{F}\subseteq\{x\in\text{ESNDP}(G,r)\mid \sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})}x(e)=p\}$.

Puisque le polytope ESNDP(G,r) est de pleine dimension, l'inégalité $a^Tx\geq\alpha$ est

l'inégalité de partition Steiner $x(\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})) \geq p$ à un coefficient multiplicatif strictement positif.

Cas 2.2 $\delta = 0$. Alors, $f \notin \delta(V_1',\ldots,V_p')$. Nous avons aussi $a(f_1) = a(f_2) = a(f) = 0$. Sans perte de généralité, supposons que v_1 et v_2 appartiennent à V_1' et considérons la partition $(V_1,\ldots,V_p)$ définie comme suit

$$\begin{array}{ll} V_1 = V_1' \cup \{v_0\}, & \\ V_i = V_i' & \text{pour } i = 2,\ldots,p, \end{array}$$

Comme $r'(V_i') = 1$ pour tout $i = 1,\ldots,p$, la partition $(V_1,\ldots,V_p)$ est une partition Steiner de V. Par ailleurs, nous avons $\delta(V_1',\ldots,V_p') = \delta(V_1,\ldots,V_p)$. Soit $x^* \in \mathcal{F}$. D'après (5.43), nous avons $\delta(V_1,\ldots,V_p) = \{e \in E \mid a(e) = \beta\}$. Ainsi,

$$\sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_p)} \beta x^*(e) = \beta(p-1).$$

Ce qui nous donne

$$\sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_p)} x^*(e) = p-1.$$

Il en résulte alors que $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \mathrm{ESNDP}(G,r) \mid \sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_p)} x(e) = p-1\}$.

Or le polytope $\mathrm{ESNDP}(G,r)$ est de pleine dimension. De ce fait, l'inégalité $a^T x \geq \alpha$ est, à un coefficient multiplicatif strictement positif, l'inégalité de partition Steiner $x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq p-1$.

Cas 3 $r(v_0) = 1$, $r(v_1) = 1$ et $r(v_2) = 0$ (le cas $r(v_0) = 1$, $r(v_1) = 0$ et $r(v_2) = 1$ est similaire)
Par le lemme 5.23.ii.b), nous avons $a(f_1) \geq a(f_2)$. Et d'après le théorème 5.24.ii.b), l'inégalité

$$\sum_{e\in E'\setminus\{f\}} a(e)x(e) + a(f_2)x(f) \geq \alpha - a(f_1) \tag{5.44}$$

définit une facette $\mathcal{F}'$ de $\mathrm{ESNDP}(G',r')$. Comme nous l'avons vu précédemment, l'inégalité (5.44) est différente d'une inégalité triviale et d'une inégalité de coupe. Par l'hypothèse de récurrence, la facette $\mathcal{F}'$ est ainsi définie par une inégalité de partition Steiner. Soit $(V_1',\ldots,V_p')$, $p \geq 3$, la partition Steiner de V' induisant la facette $\mathcal{F}'$. Alors, il existe un scalire $\beta > 0$ tel que

$$(5.45)\ \begin{cases} a(e) = \beta & \text{si } e \in \delta(V_1',\ldots,V_p'), \\ a(e) = 0 & \text{si } e \notin \delta(V_1',\ldots,V_p'), \\ \alpha - a(f_1) = \beta(p-1). & \end{cases}$$

Nous considérons deux cas suivant que l'arête f appartienne ou non à la partition $(V'_1,\ldots,V'_p)$.

Cas 3.1 Supposons que $a(f) > 0$, c'est-à-dire que $f \in \delta(V'_1,\ldots,V'_p)$. Ainsi, nous avons $a(f_1) = a(f_2) > 0$. Supposons, sans perte de généralité, que $v_1 \in V'_1$ et $v_2 \in V'_2$. Considérons alors la partition $(V_1,\ldots,V_{p+1})$ de V définie de la manière suivante

$$\begin{aligned} V_i &= V'_i \qquad\qquad \text{pour } i = 1,\ldots,p,\\ V_{p+1} &= \{v_0\}. \end{aligned}$$

Étant donné que $r'(V'_i) = 1$ pour tout $i = 1,\ldots,p$ et $r(v_0) = 1$, la partition $(V_1,\ldots,V_{p+1})$ est une partition Steiner de V. De plus, nous avons $\delta(V_1,\ldots,V_{p+1}) = (\delta(V'_1,\ldots,V'_p) \setminus \{f\}) \cup \{f_1,f_2\}$ et $a(f_1) = a(f_2) = a(f) = \beta$. Soit $x^* \in \mathcal{F}$. D'après (5.45), $\delta(V_1,\ldots,V_{p+1}) = \{e \in E \mid a(e) = \beta\}$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})} \beta x^*(e) &= \beta(p-1) + a(f_1)\\ &= \beta(p-1) + \beta\\ &= \beta p. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})} x^*(e) = p.$$

Par conséquent, $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \mathrm{ESNDP}(G,r) \mid \sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})} x(e) = p\}$.

Puisque le polytope $\mathrm{ESNDP}(G,r)$ est de pleine dimension, l'inégalité $a^T x \geq \alpha$ est l'inégalité de partition Steiner $x(\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})) \geq p$ à un coefficient multiplicatif strictement positif

Cas 3.2 Supposons que $a(f) = 0$, c'est-à-dire $f \notin \delta(V'_1,\ldots,V'_p)$. Nous avons alors $a(f_2) = 0$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v_1 \in V'_1$ et $v_2 \in V'_1$. Si $a(f_1) = 0$, considérons alors la partition $(V_1,\ldots,V_p)$ suivante

$$\begin{aligned} V_1 &= V'_1 \cup \{v_0\},\\ V_i &= V'_i \qquad\qquad \text{pour } i = 2,\ldots,p. \end{aligned}$$

Puisque $r'(V'_i) = 1$ pour tout $i = 1,\ldots,p$, il est clair que $(V_1,\ldots,V_p)$ est une partition Steiner de V. De plus, nous avons $\delta(V'_1,\ldots,V'_p) = \delta(V_1,\ldots,V_p)$. Soit $x^* \in \mathcal{F}$. D'après (5.45), nous avons $\delta(V_1,\ldots,V_p) = \{e \in E \mid a(e) = \beta\}$. Il en résulte donc que

$$\begin{aligned} \sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})} \beta x^*(e) &= \beta(p-1) + a(f_1)\\ &= \beta(p-1). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_p)} x^*(e) = p-1.$$

Ainsi $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \mathrm{ESNDP}(G,r) \mid \sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_p)} x(e) = p-1\}$.

Or le polytope $\mathrm{ESNDP}(G,r)$ est de pleine dimension. Par conséquent, l'inégalité $a^T x \geq \alpha$ est, à un coefficient multiplicatif strictement positif, l'inégalité de partition Steiner $x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq p-1$.

Supposons maintenant que $a(f_1) > 0$. Alors, il existe une partition (W_1', W_2') de V_1' telle que $[W_1', W_2'] = \{f\}$. En effet, supposons le contraire. D'après le théorème 5.4, $G(V_i')$ est connexe pour tout $i = 1,\ldots,p$ et nous avons $|[W_1', W_2']| \geq 1$. Considérons alors une chaîne C dans $G(V_i')$ entre v_1 et v_2 telle que f n'appartienne pas à cette chaîne. Puisque C est contenue dans l'ensemble d'arêtes induit par V_1', nous avons $a(e) = 0$ pour tout $e \in C$. Étant donné que $\mathcal{F}$ est une facette non triviale, il existe un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ qui induit un sous-graphe Steiner connexe de G tel que $x^F \in \mathcal{F}$ et $f_1 \in F$. Posons $\overline{F} = (F \setminus \{f_1\}) \cup (C \cup \{f_2\})$. Il n'est pas difficile de voir que $\overline{F}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Ainsi

$$\sum_{e\in E} a(e)x^{\overline{F}}(e) \geq \alpha.$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E} a(e)x^{\overline{F}}(e) &= \sum_{e\in E} a(e)x^F(e) - a(f_1)x^F(f)\\ &= \alpha - a(f_1).\end{aligned}$$

Il en résulte alors que $a(f_1) = 0$, une contradiction.
Par conséquent, il existe une partition (W_1', W_2') de V_1' telle que $[W_1', W_2'] = \{f\}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $v_1 \in W_1'$ et $v_2 \in W_2'$. Considérons la partition $(V_1,\ldots,V_{p+1})$ définie comme suit

$$\begin{aligned}&V_1 = W_1',\\ &V_2 = W_2' \cup \{v_0\},\\ &V_{i+1} = V_i' \qquad\qquad \text{pour } i = 2,\ldots,p.\end{aligned}$$

Nous avons $r(v_1) = 1$ et $r(v_0) = 1$. Donc $r(V_1) = r(V_2) = 1$. De plus, $r'(V_i') = 1$ pour tout $i = 2,\ldots,p$. Ainsi, la partition $(V_1,\ldots,V_{p+1})$ est une partition Steiner de V. Par ailleurs, nous avons $\delta(V_1,\ldots,V_{p+1}) = \delta(V_1',\ldots,V_p') \cup \{f_1\}$. Soit $x^* \in \mathcal{F}$. Nous avons alors

$$\sum_{e\in\delta(V_1',\ldots,V_p')} a(e)x^*(e) + a(f_1)x^*(f_1) + a(f_2)x^*(f_2) = \alpha.$$

D'après (5.45), nous avons $\delta(V'_1,\ldots,V'_p) = \{e \in E \mid a(e) = \beta\}$. De plus, $a(f_2) = 0$ et $a(f_1) > 0$. En posant $a(f_1) = \beta$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{e\in\delta(V'_1,\ldots,V'_p)} \beta x^*(e) + \beta x^*(f_1) &= \sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})} \beta x^*(e)\\ &= \alpha\\ &= \beta(p-1) + a(f_1)\\ &= \beta(p-1) + \beta\\ &= \beta p.\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{F} \subseteq \{x \in \mathrm{ESNDP}(G,r) \mid \sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})} x(e) = p\}$.

Et, comme le polytope ESNDP(G,r) est de pleine dimension, ceci implique que l'inégalité $a^T x \geq \alpha$ est, à un coefficient multiplicatif strictement positif, l'inégalité de partition Steiner $x(\delta(V_1,\ldots,V_{p+1})) \geq p$.

Nous venons donc de montrer que si la dernière opération de construction pour le graphe G consiste en l'ajout d'un sommet entre deux sommets dont un au moins doit être de type de connexité égal à 1 si celui du sommet ajouté vaut 1 (opération θ_2), alors toute facette est définie par une inégalité triviale, de coupe ou de partition Steiner.

Supposons à présent que la dernière opération dans la construction de G consiste à ajouter une arête g entre deux sommets de V (opération θ_1). D'après le théorème 5.28, l'inégalité

$$\sum_{e\in E\setminus\{g\}} a(e)x(e) \geq \alpha$$

définit une facette de ESNDP$(G\setminus\{g\},r)$. De même que précédemment, cette inégalité est différente d'une inégalité triviale et d'une inégalité de coupe. Par l'hypothèse de récurrence, elle est définie par une partition Steiner. Soit $(V_1,\ldots,V_p)$, $p \geq 3$, cette partition Steiner de V. Alors, il existe un scalaire $\beta > 0$ tel que

$$\begin{cases} a(e) = \beta & \text{si } e \in \delta_{G\setminus g}(V_1,\ldots,V_p),\\ a(e) = 0 & \text{si } e \notin \delta_{G\setminus g}(V_1,\ldots,V_p),\\ \alpha = \beta(p-1). & \end{cases}$$

En posant $a(g) = \beta$, il n'est pas difficile de voir que

$$\mathcal{F} \subseteq \{x \in \mathrm{ESNDP}(G,r) \mid \sum_{e\in\delta(V_1,\ldots,V_p)} x(e) = p-1\}.$$

Or le polytope ESNDP(G,r) est de pleine dimension. Ainsi, l'inégalité $a^T x \geq \alpha$ est, à un coefficient multiplicatif strictement positif, l'inégalité de partition Steiner

$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1$. Ce qui termine la preuve de notre théorème. □

Comme conséquence immédiate du lemme 5.2 et du théorème 5.31, nous obtenons une description complète du dominant du polytope des arbres Steiner quand le graphe est série-parallèle et vérifie la propriéte P.

Corollaire 5.32 *Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle 2-arête connexe et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Si G vérifie la propriété P, alors le polyèdre DSTP(G, S) est complètement caractérisé par les contraintes de non-négativité, les contraintes de coupe et les contraintes de partition Steiner.* □

Dans la suite, nous allons nous intéresser au polytope des sous-graphes Steiner connexes dans la classe Ψ, qui est une sous-classe des graphes série-parallèles.

5.6.3 Graphes de la classe Ψ

Dans cette section, nous allons montrer que si le graphe est dans une configuration de trou-impair, alors le polytope des sous-graphes Steiner connexes est défini par les contraintes triviales, les contraintes de coupe et les contraintes de trou-impair (5.2). Soit $G_m = (V_m, E_m)$ un graphe ayant une configuration de trou-impair, avec $m \geq 3$ un entier impair, et

$$
\begin{aligned}
&V_m = \{u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m\},\\
&E_m = \{(u_i, v_i), (u_i, v_{i-1}), (v_i, v_{i-1});\ i = 1, \ldots, m\ (mod\ m)\},\\
&r_m(u_i) = 1 \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, m,\\
&r_m(v_i) = 1 \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, m,
\end{aligned}
$$

où $r_m \in \{0, 1\}^{V_m}$ est un vecteur types de sommets. Dans un but de simplification des écritures, nous adoptons les notations suivantes

$$
\begin{aligned}
&e_{2i-1} = u_i v_{i-1},\\
&e_{2i} = u_i v_i,\\
&f_i = v_i v_{i-1},\\
&T_i = \{e_{2i-1}, e_{2i}, f_i\}.
\end{aligned}
$$

Avant de donner une description complète du polytope ESNDP(G_m, r_m), nous énonçons tout d'abord un lemme technique.

Lemme 5.33 *Soient $G_m = (V_m, E_m)$ un graphe de la classe Ψ et $r_m \in \{0,1\}^{V_m}$ un vecteur types de sommets. Soit*

$$\sum_{e \in E_m^t} a(e)x(e) \geq \alpha \tag{5.46}$$

une inégalité différente d'une inégalité triviale et d'une inégalité de coupe. Si la contrainte (5.46) définit une facette de ESNDP(G_m, r_m), alors

$$a(f_i) = max\{a(e_{2i-1}), a(e_{2i})\} \qquad pour\ tout\ i = 1, \ldots, m.$$

Preuve. Posons

$$\mathcal{F} = \{x \in \text{ESNDP}(G_m, r_m) \mid \sum_{e \in E_m} a(e)x(e) = \alpha\}.$$

Sans perte de généralité, nous povons supposer que $a(e_{2i-1}) \leq a(e_{2i})$. Considérons un entier $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$. Puisque l'inégalité (5.46) est différente d'une inégalité de coupe, il existe un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E_m$ tel que $\{e_{2i_0-1}, e_{2i_0}\} \subseteq F$. Si $f_{i_0} \in F$, alors les sous-ensembles d'arêtes $F \setminus \{e_{2i_0-1}\}$, $F \setminus \{e_{2i_0}\}$, $F \setminus \{f_{i_0}\}$ induisent tous des sous-graphes Steiner connexes de G_m. Nous obtenons donc $a(e_{2i_0-1}) = a(e_{2i_0}) = a(f_{i_0}) = 0$. En effet, posons par exemple $F' = F \setminus \{e_{2i_0}\}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E_m} a(e)x^{F'}(e) &= \sum_{e \in E_m} a(e)x^F(e) - a(e_{2i_0})x^F(e_{2i_0}) \\ &= \alpha - a(e_{2i_0}) \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

Puisque $a(e_{2i_0}) \geq 0$, il en découle que $a(e_{2i_0}) = 0$.

Supposons maintenant que $f_{i_0} \notin F$. Considérons alors le sous-ensemble d'arêtes $F'' = (F \setminus \{e_{2i_0}\}) \cup \{f_{i_0}\}$. Le sous-graphe induit par F'' est Steiner connexe et

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E_m} a(e)x^{F''}(e) &= \sum_{e \in E_m} a(e)x^F(e) - a(e_{2i_0})x^F(e_{2i_0}) + a(f_{i_0})x^F(f_{i_0}) \\ &= \alpha - a(e_{2i_0}) + a(f_{i_0}) \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

Il en résulte donc que $a(f_{i_0}) \geq a(e_{2i_0})$. Or, par hypothèse, $a(e_{2i_0}) \geq a(e_{2i_0-1})$. D'où

$$a(f_{i_0}) \geq \max\{a(e_{2i_0-1}), a(e_{2i_0})\}. \tag{5.47}$$

Puisque l'inégalité (5.46) est différente d'une inégalité triviale, il existe un sous-ensemble d'arêtes $F_0 \subseteq E_m$ tel que $x^{F_0} \in \mathcal{F}$ et $f_{i_0} \in F_0$. Si e_{2i_0-1} et e_{2i_0} appartiennent à F_0, alors

nous avons déjà montré que $a(e_{2i_0-1}) = a(e_{2i_0}) = a(f_{i_0}) = 0$. Supposons alors que $e_{2i_0} \in F_0$ et $e_{2i_0-1} \notin F_0$, et considérons le sous-ensemble d'arêtes $F_0' = (F_0 \setminus \{f_{i_0}\}) \cup \{e_{2i_0-1}\}$. D'une manière similaire à ci-dessus, nous pouvons montrer que $a(e_{2i_0-1}) \geq a(f_{i_0})$. Par l'inégalité (5.47), nous déduisons que $a(e_{2i_0}) = a(e_{2i_0-1}) = a(f_{i_0})$.

Si maintenant, $e_{2i_0} \notin F_0$ et $e_{2i_0-1} \in F_0$. Alors, en considérant le sous-ensemble d'arêtes $F_0'' = (F \setminus \{f_{i_0}\}) \cup \{e_{2i_0}\}$, nous obtenons de même $a(e_{2i_0}) \geq a(f_{i_0})$. D'après l'inégalité (5.47), il résulte que $a(e_{2i_0}) = a(f_{i_0})$. Et ainsi, notre lemme est prouvé. □

Le théorème suivant nous donne une caractérisation complète du polytope des sous-graphe Steiner connexes dans la classe des graphes ayant une configuration de trou-impair.

Théorème 5.34 *Soient $G = (V, E)$ un graphe ayant une configuration de trou-impair et $r \in \{0,1\}^V$ un vecteur types de sommets. Le polytope ESNDP(G, r) est alors complètement caractérisé par les contraintes triviales, les contraintes de coupe, les contraintes de partition Steiner et les contraintes de trou-impair (5.2).*

Preuve. Soit

$$\sum_{e \in E_m} a(e)x(e) \geq \alpha \tag{5.48}$$

une inégalité différente d'une inégalité triviale et d'une inégalité de coupe. Supposons que cette contrainte définisse une facette $\mathcal{F}$ de ESNDP(G, r). Montrons alors que l'inégalité (5.48) est soit une contrainte de partition Steiner, soit une contrainte de trou-impair (5.2). D'après les lemmes 5.2 et 5.3, nous avons $a(e) \geq 0$ pout tout $e \in E$.

Assertion 5.34.1 Si $a(e) > 0$ pour tout $e \in E$, alors la facette $\mathcal{F}$ est définie par l'inégalité de trou-impair (5.2).

Preuve. Considérons tout d'abord un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que $x^F \in \mathcal{F}$. Nous allons montrer que F contient deux arêtes pour $(m-2)$ sous-ensembles T_i et exactement une arête pour les deux autres. Étant donné que $r(u_i) = 1$, $\delta(u_i) \cap T_i \neq \emptyset$ et $\delta(u_i) \cap T_j = \emptyset$ pour tout $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, m$, $j \neq i$, F doit contenir au moins une arête parmi $\{e_{2i-1}, e_{2i}\}$. De plus, nous avons $|F \cap T_i| \leq 2$ pour tout $i = 1, \ldots, m$. En effet, supposons qu'il existe $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $T_{i_0} = \{e_{2i_0-1}, e_{2i_0}, f_{i_0}\} \subseteq F$. Alors, le sous-ensemble d'arêtes $F_0 = F \setminus \{f_{i_0}\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe

de G. Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E} a(e)x^{F_0}(e) &= \sum_{e\in E} a(e)x^F(e) - a(f_{i_0})x^F(f_{i_0}) \\ &= \alpha - a(f_{i_0}) \\ &\geq \alpha.\end{aligned}$$

Ceci implique que $a(f_{i_0}) = 0$, une contradiction.

Par ailleurs, il existe un sous-ensemble T_{i_1}, $i_1 \in \{1,\ldots,m\}$ tel que $|F \cap T_{i_1}| = 1$. Supposons le contraire. Alors, à la lumière de ce que nous venons de voir, $|F \cap T_i| = 2$, pour tout $i \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i_1\}$. Il n'est donc pas difficile de voir que, dans ce cas, le graphe $G(F)$ contient un cycle. Considérons alors le sous-ensemble $F_e = F \setminus \{e\}$, où e est une arête quelconque de ce cycle. Le sous-graphe induit par F_e est Steiner connexe. Par conséquent $a(e) = 0$, une contradiction.

Supposons que le sous-ensemble T_{i_1} est unique, c'est-à-dire $|F \cap T_i| = 2$ pour tout $i \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{i_1\}$. Nous avons donc $|F \cap \{e_{2i_1-1}, e_{2i_1}\}| = 1$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $e_{2i_1} \in F$. Par hypothèse, $|F \cap T_{i_1-1}| = 2$. Si $f_{i_1-1} \in F$ et $e_{2(i_1-1)-1} \in F$, alors $F \setminus \{f_{i_1-1}\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Ainsi, $a(f_{i_1-1}) = 0$, une contradiction. Si $f_{i_1-1} \in F$ et $e_{2(i_1-1)} \in F$, alors considérons le sous-ensemble d'arêtes $F_1 = (F \setminus \{e_{2(i_1-1)}, f_{i_1-1}\}) \cup \{e_{2(i_1-1)-1}\}$. Le sous-graphe induit par F_1 est Steiner connexe et

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E} a(e)x^{F_1}(e) &= \sum_{e\in E} a(e)x^F(e) - a(e_{2(i_1-1)})x^F(e_{2(i_1-1)}) - a(f_{i_1-1})x^F(f_{i_1-1}) \\ &\qquad + a(e_{2(i_1-1)-1})x^{F_1}(e_{2(i_1-1)-1}) \\ &= \alpha - a(e_{2(i_1-1)}) - a(f_{i_1-1}) + a(e_{2(i_1-1)-1}) \\ &\geq \alpha.\end{aligned}$$

Ceci implique que $a(f_{i_1-1}) \leq a(e_{2(i_1-1)-1}) - a(e_{2(i_1-1)})$. Puisque $a(e) > 0$ pour tout $e \in E$, $a(f_{i_1-1}) < a(e_{2(i_1-1)-1})$, nous obtenons une contradiction avec le lemme 5.33.

Supposons maintenant que $\{e_{2(i_1-1)-1}, e_{2(i_1-1)}\} \subseteq F$. Alors, le sous-graphe induit par $F \setminus \{e_{2(i_1-1)}\}$ est un sous-graphe Steiner connexe. De même que précédemment, nous en déduisons que $a(e_{2(i_1-1)}) = 0$. Par conséquent, il existe au moins deux sous-ensembles parmi les m sous-ensembles T_i, $i = 1,\ldots,m$ qui ne possèdent qu'une seule arête dans F. Montrons alors qu'il ne peut pas en exister plus de deux.
Pour cela, supposons que F contient une seule arête pour les trois sous-ensembles T_{i_1}, T_{i_2} et T_{i_3}, i_1, i_2, $i_3 \in \{1,\ldots,m\}$. Ces trois arêtes sont différentes de f_{i_1}, f_{i_2} et f_{i_3}. Ainsi, il existe une coupe $\delta(W)$ telle que $|W \cap \{u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}\}| = 2$ et $\delta(W) \cap F \neq \emptyset$. Par conséquent, le sous-graphe $G(F)$ n'est pas Steiner connexe. De ce fait, F contient une

arête pour exactement deux sous-ensembles T_i et deux arêtes pour les $(m-2)$ autres. D'où

$$\begin{aligned} |F| &= 2(m-2)+2 \\ &= 2(m-1). \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\mathcal{F} \subseteq \{x \in \mathrm{ESNDP}(G,r) \mid x(E) = 2(m-1)\}.$$

Ceci implique que $\mathcal{F}$ est la facette définie par l'inégalité de trou-impair (5.2). □

À présent, supposons qu'il existe des arêtes de E ayant un coefficient nul dans l'inégalité (5.48). Considérons alors les p composantes connexes $G(V_1), \ldots, G(V_p)$ du graphe $G \setminus \{e \in E \mid a(e) > 0\}$. Les sous-ensembles de sommets V_i forment une partition $(V_1, \ldots, V_p)$ de V. Nous avons ainsi

$$a(e) > 0 \qquad \text{pour tout } e \in \delta(V_1, \ldots, V_p).$$

Assertion 5.34.2 Si $r(V_i) = 1$, pour $i = 1, \ldots, p$, alors la facette $\mathcal{F}$ est définie par l'inégalité de partition Steiner $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1$.

Preuve. Supposons que $r(V_i) = 1$, pour $i = 1, \ldots, p$. Alors, il est évident que $(V_1, \ldots, V_p)$ est une partition Steiner de V. Soit $F \subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes qui induit un sous-graphe Steiner connexe de G et tel que $x^F \in \mathcal{F}$. Supposons que $|F \cap \delta(V_1, \ldots, V_p)| > p - 1$. Considérons le sous-ensemble d'arêtes $F' = F \cup \{e \in E \mid a(e) = 0\}$. Il n'est pas difficile de voir que $x^{F'} \in \mathcal{F}$ et

$$|F' \cap \delta(V_1, \ldots, V_p)| = |F \cap \delta(V_1, \ldots, V_p)| > p - 1.$$

Soient $\tilde{G}_m$ le graphe obtenu à partir de G en contractant les sous-ensembles V_i, $i = 1, \ldots, p$, et $\tilde{F}'$ la restriction de F' dans $\tilde{G}_m$. Étant donné que $|F' \cap \delta(V_1, \ldots, V_p)| > p-1$, nous avons également $|\tilde{F}' \cap \delta(V_1, \ldots, V_p)| > p - 1$. De ce fait, dans le sous-graphe de $\tilde{G}_m$ induit par $\tilde{F}'$, il existe un cycle. Soient e_0 une arête de ce cycle et $F'_0 = F' \setminus \{e_0\}$. Puisque $e_0 \in \delta(V_1, \ldots, V_p)$, nous avons $a(e_0) > 0$. Le sous-ensemble d'arêtes F'_0 induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Par conséquent, $a(e_0) = 0$, une contradiction. Ainsi, $|F \cap \delta(V_1, \ldots, V_p)| \leq p - 1$. De plus, puisque F induit un sous-graphe Steiner connexe de G et $r(V_i) = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, p$, nous avons $|F \cap \delta(V_1, \ldots, V_p)| \geq p-1$. D'où, $|F \cap \delta(V_1, \ldots, V_p)| = p - 1$ et

$$\mathcal{F} \subseteq \{x \in \mathrm{ESNDP}(G,r) \mid x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p - 1\}.$$

Il en résulte donc que $\mathcal{F}$ est la facette définie par l'inégalité $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1$.□

Maintenant, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, qu'il existe un entier q, $1 \leq q < p$ tel que

$$r(V_i) = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = 1, \ldots, q, \\ \\ 0 & \text{pour } i = q+1, \ldots, p. \end{cases}$$

Puisque les graphes que nous considérons contiennent au moins deux sommets ayant un type de connexité égal à $r_{max} = 1$, nous faisons remarquer qu'un tel entier $q \geq 1$ existe. Par ailleurs, nous avons

$$p - q \leq m.$$

En effet, le graphe G contient m sommets ayant un type de connexité nul. Ainsi, il existe au plus m sous-ensembles V_i tels que $r(V_i) = 0$.

Assertion 5.34.3 Si $p - q = m$, alors la facette $\mathcal{F}$ est définie par l'inégalité de trou-impair (5.2).

Preuve. Si $p - q = m$, alors les sous-ensembles V_i, $i = q+1, \ldots, p$ correspondent aux sommets v_i, $i = 1, \ldots, m$. Donc $E = \delta(V_1, \ldots, V_p)$. Par ailleurs, nous avons $a(e) > 0$ pour tout $e \in \delta(V_1, \ldots, V_p)$. Ainsi, $a(e) > 0$ pour tout $e \in E$ et par l'assertion 5.34.1, l'inégalité (5.48) n'est rien d'autre que l'inégalité de trou-impair (5.2). □

Supposons maintenant que $0 < p - q < m$. Nous allons, tout d'abord, énoncer deux assertions qui concernent la structures des sous-ensembles V_i.

Assertion 5.34.4 Les sous-graphes $G(V_i)$, pour $i = 1, \ldots, q$, sont Steiner 2-arête connexes.

Preuve. Supposons qu'il existe un sous-ensemble V_{i_0}, $i_0 \in \{1, \ldots, p\}$ tel que le sous-graphe $G(V_{i_0})$ ne soit pas Steiner 2-arête connexe. Puisque $G(V_{i_0})$ est connexe, nous pouvons supposer qu'il existe ainsi une partition $(V_{i_0}^1, V_{i_0}^2)$ de V_{i_0} telle que $r(V_{i_0}^1) = r(V_{i_0}^2) = 1$ et $[V_{i_0}^1, V_{i_0}^2] = \{g\}$. Étant donné que $g \notin \delta(V_1, \ldots, V_p)$, nous avons $a(g) = 0$. Comme l'inégalité (5.48) est différente d'une contrainte triviale, il existe un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que $g \notin F$ et $x^F \in \mathcal{F}$. Le sous-graphe de G induit par F est Steiner connexe. Ainsi, il existe une chaîne $C \subseteq F$ telle que $C \cap \delta(V_{i_0}^j) \neq \emptyset$,

$j = 1, 2$. Posons $C \cap \delta(V_{i_0}^1) = \{e_1\}$. Nous avons $a(e_1) > 0$ car $e_1 \in \delta(V_{i_0}^1)$ et $a(e) > 0$ pour tout $e \in \delta(V_1, \ldots, V_p)$. Considérons alors le sous-ensemble d'arêtes $F_1 \subseteq E$ tel que $F_1 = (F \setminus \{e_1\}) \cup \{e \in E \mid a(e) = 0\}$. Le sous-graphe de G induit par F_1 est Steiner connexe. Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} a(e) x^{F_1}(e) &= \sum_{e \in E} a(e) x^F(e) - a(e_1) x^F(e_1) \\ &= \alpha - a(e_1) \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

Il en résulte alors que $a(e_1) = 0$, une contradiction. □

Assertion 5.34.5 Soit $F \subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes tel que $x^F \in \mathcal{F}$. Alors le sous-graphe induit par $F \cap E(V_i)$ est Steiner connexe, pour tout $i = 1, \ldots, q$.

Preuve. Supposons qu'il existe un sous-ensemble V_{i_0}, $i_0 \in \{1, \ldots, q\}$, de la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ tel que le sous-graphe induit par $F \cap E(V_{i_0})$ ne soit pas Steiner connexe. Soient u_{i_1} et u_{i_2} deux sommets de type 1 appartenant à V_{i_0} et qui ne sont pas adjacents dans le sous-graphe induit par $F \cap E(V_{i_0})$, où $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, m\}$, $i_1 \neq i_2$. Il est clair que ces deux sommets existent. En effet, dans le cas contraire, le sous-graphe induit par $F \cap E(V_{i_0})$ serait Steiner connexe. Puisque F induit un sous-graphe Steiner connexe de G, il existe une chaîne $C \subseteq F$ reliant u_{i_1} et u_{i_2} telle que $C \cap \delta(V_1, \ldots, V_p) \neq \emptyset$. Soit e_0 une arête quelconque de $C \cap \delta(V_1, \ldots, V_p)$. Nous avons donc $a(e_0) > 0$. Considérons alors le sous-ensemble d'arêtes $F_0 \in E$ défini comme suit

$$F' = (F \setminus \{e_0\}) \cup \{e \in E(V_{i_0})\}.$$

Étant donné que, d'après l'assertion 5.34.4, le sous-graphe $G(V_{i_0})$ est Steiner 2-arête connexe, il n'est pas difficile de voir que le sous-graphe de G induit par F' est Steiner connexe. Ainsi, nous obtenons

$$a(e_0) \leq \sum_{e \in F' \setminus F} a(e).$$

Or $F' \setminus F \subseteq E(V_{i_0})$ et donc $a(e) = 0$ pour tout $e \in F' \setminus F$. Par conséquent, nous en déduisons $a(e_0) \leq 0$, ce qui contredit le fait que $a(e_0) > 0$. □

Nous allons maintenant montrer que les sous-ensembles V_i, de type de connexité nul, sont des singletons.

Assertion 5.34.6 $|V_i| = 1$ pour $i = q + 1, \ldots, p$.

Preuve. Supposons qu'il existe $i_0 \in \{q+1,\ldots,p\}$ tel que $|V_{i_0}| \geq 2$. Puisque $r(V_{i_0}) = 0$ et $G(V_{i_0})$ est connexe, nous avons $\{v_{j-1}, v_j\} \subseteq V_{i_0}$, où $j \in \{1,\ldots,m\}$. Ainsi $f_j = v_j v_{j-1} \in E(V_{i_0})$. Donc $a(f_j) = 0$. Or $u_j \notin V_{i_0}$. Sinon, nous aurions $r(V_{i_0}) = 1$. Par conséquent, les arêtes e_{2j-1} et e_{2j} appartiennent à $\delta(V_{i_0})$. D'où $a(e_{2j-1}) > 0$ et $a(e_{2j}) > 0$. Ainsi, $a(f_j) < \max\{a(e_{2j-1}), a(e_{2j})\}$, ce qui contredit le lemme 5.33. □

Dans la suite de la démonstration, nous allons construire, à partir de la partition $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$ de V, une partition $\pi' = (V'_1,\ldots,V'_{p'})$, $p' \leq q$, de V, et montrer que

$$\mathcal{F} \subseteq \{x \in \text{ESNDP}(G,r) \mid x(\delta(V'_1,\ldots,V_{p'})) = p' - 1\}.$$

Pour cela, nous allons parcourir le cycle composé des m sommets $v_1,\ldots,v_m$, en partant de v_1. Pour chacun de ces sommets correspondant à un sous-ensemble V_i, $i = q+1,\ldots,p$, de la partition $(V_1,\ldots,V_p)$, nous allons l'associer à un sous-ensemble V_j, $j = 1,\ldots,q$ de cette partition. Ainsi, à la fin de ce parcours, c'est-à-dire une fois le sommet v_m traité, nous aurons obtenu une partition Steiner π'.

Considérons alors un sommet v_{i_0}, $i_0 \in \{1,\ldots,m\}$, tel que $V_i = \{v_{i_0}\}$ où $i \in \{q+1,\ldots,p\}$. D'après l'assertion 5.34.6 et puisque $q < p$, nous savons qu'un tel sommet existe. De plus, nous avons $a(e) > 0$ pour tout $e \in \delta(V_1,\ldots,V_p)$. Par conséquent, $a(f_{i_0}) > 0$, $a(e_{2i_0}) > 0$, $a(e_{2i_0+1}) > 0$ et $a(f_{i_0+1}) > 0$.

De manière à placer le sommet v_{i_0} dans un sous-ensemble V_j avec $j \in \{1,\ldots,q\}$, nous sommes amenés à considérer quatre cas. Pour les différentes figures illustrant ces cas, nous adopterons les conventions suivantes

- un trait gras pour une arête $e \in E$ telle que $a(e) > 0$,
- un trait pointillé pour une arête $e \in E$ telle que $a(e) = 0$,
- un trait plein pour une arête $e \in E$ dont le coefficient $a(e)$ n'est pas spécifié,
- un cercle noir pour un sommet $u \in V$ tel que $r(u) = 1$,
- un cercle blanc pour un sommet $v \in V$ tel que $r(v) = 0$.

Cas 1. $a(e_{2i_0+2}) = 0$.
Dans ce cas, il existe $t \in \{1,\ldots,q\}$ tel que $e_{2i_0+2} \in E(V_t)$, c'est-à-dire $\{u_{i_0+1}, v_{i_0+1}\} \subseteq V_t$ (voir figure 5.14).

D'après l'assertion 5.34.4, le sous-graphe $G(V_t)$ est Steiner 2-arête connexe. Par conséquent, $u_{i_0+2} \notin V_t$ et ainsi $a(e_{2i_0+3}) > 0$. Par le lemme 5.33, nous en déduisons $a(f_{i_0}+2) > 0$. D'où, $V_t = \{u_{i_0+1}, v_{i_0+1}\}$. Posons alors

$$\begin{aligned} V'_t &= V_t \cup V_i \\ &= \{u_{i_0+1}, v_{i_0}, v_{i_0+1}\}. \end{aligned}$$

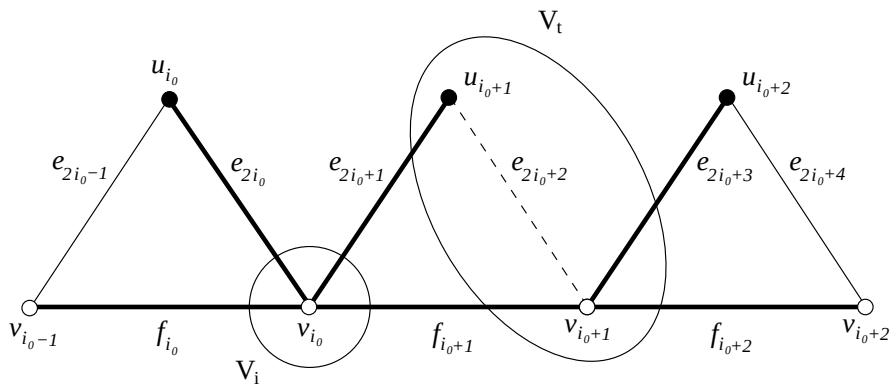

FIG 5.14 - *Cas 1*

Soit $\overline{F} \subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes induisant un sous-graphe Steiner connexe de G tel que $x^{\overline{F}} \in \mathcal{F}$. Si $a(e_{2i_0+4}) > 0$, alors nous avons $V_{s_1} = \{u_{i_0+2}\}$ et $v_{i_0+2} \in V_{s_2}$, où s_1, $s_2 \in \{1, \ldots, q\}$. Il est trivial de voir que $|\overline{F} \cap [V'_t, V_{s_i}]| \leq 1$ pour $i = 1, 2$. Si $a(e_{2i_0+4}) = 0$ alors nous avons $\{u_{i_0+2}, v_{i_0+2}\} \in V_s$ où $s \in \{1, \ldots, q\}$. Supposons que $|\overline{F} \cap [V'_t, V_s]| = 2$. Il n'est pas difficile de voir que l'arête $e_{2i_0+4} \notin \overline{F}$. Considérons alors $\overline{F}' = (\overline{F} \setminus \{e_{2i_0+3}\} \cup \{e_{2i_0+4}\}$. Le sous-graphe de G induit par $\overline{F}'$ est Steiner connexe et

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} a(e) x^{\overline{F}'}(e) &= \sum_{e \in E} a(e) x^{\overline{F}}(e) - a(e_{2i_0+3}) x^{\overline{F}}(e_{2i_0+3}) + a(e_{2i_0+4}) x^{\overline{F}'}(e_{2i_0+4}) \\ &= \alpha - a(e_{2i_0+3}) \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

Il en résulte alors que $a(e_{2i_0+3}) = 0$, une contradiction avec le fait que $a(e_{2i_0+3}) > 0$. Ainsi $|\overline{F} \cap [V'_t, V_s]| \leq 1$.

Cas 2. $a(e_{2i_0+2}) > 0$, $a(e_{2i_0+3}) > 0$.
D'après le lemme 5.33, nous avons $a(f_{i_0} + 2) > 0$. Alors, il existe $t \in \{1, \ldots, q\}$ tel que $V_t = \{U_{i_0+1}\}$ et $j \in \{q+1, \ldots, p\}$ tel que $V_j = \{v_{i_0+1}\}$ (voir figure 5.15).

Posons alors

$$\begin{aligned} V'_t &= V_t \cup V_i \cup V_j \\ &= \{u_{i_0+1}, v_{i_0}, v_{i_0+1}\}. \end{aligned}$$

De même que pour le cas 1, nous pouvons considérer un sous-ensemble d'arêtes $\overline{F} \subseteq E$ tel que $x^{\overline{F}} \in \mathcal{F}$. Si $a(e_{2i_0+4}) > 0$, alors $|\overline{F} \cap [V'_t, V_{s_i}]| \leq 1$ pour $i = 1, 2$ où $V_{s_1} = \{u_{i_0+2}\}$ et $v_{i_0+2} \in V_{s_2}$, s_1, $s_2 \in \{1, \ldots, q\}$. Et si $a(e_{2i_0+4}) = 0$, nous avons $|\overline{F} \cap [V'_t, V_s]| \leq 1$ où $\{u_{i_0+2}, v_{i_0+2}\} \in V_s$, $s \in \{1, \ldots, q\}$.

Cas 3. $a(e_{2i_0+2}) > 0$, $a(e_{2i_0+3}) = 0$, $a(f_{i_0+2}) > 0$.

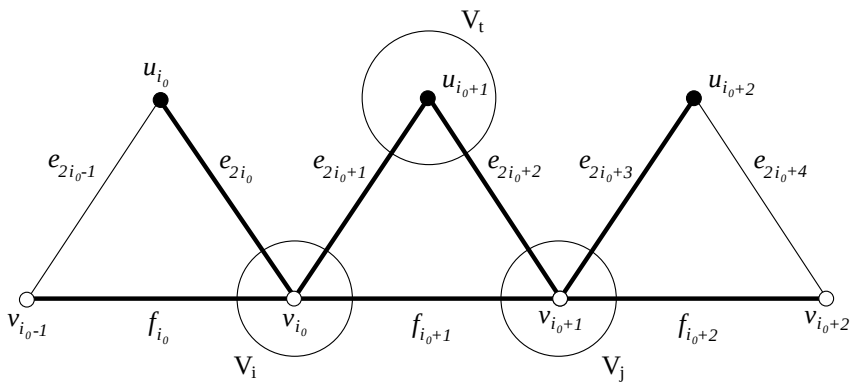

FIG 5.15 - *Cas 2*

D'après le lemme 5.33, nous avons $a(e_{2i_0+4}) > 0$. Par conséquent, il existe s, $t \in \{1, \ldots, q\}$ tels que $V_t = \{u_{i_0+1}\}$ et $V_s = \{u_{i_0+2}, v_{i_0+1}\}$ (voir figure 5.16).

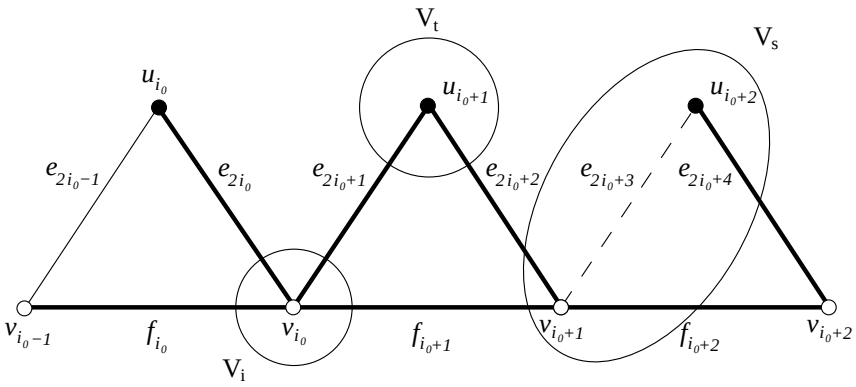

FIG 5.16 - *Cas 3*

Montrons que dans ce cas, $a(e_{2i_0+2}) > a(e_{2i_0+1})$. Étant donné que l'inégalité (5.48) est différente d'une contrainte triviale, il existe un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que $x^F \in \mathcal{F}$ et $e_{2i_0+3} \notin F$. Nous pouvons choisir F de telle sorte que $|F \cap \{e_{2i_0-1}, e_{2i_0}\}|$ soit maximum. Puisque $r(u_{i_0+2}) = 1$, nous avons $e_{2i_0+4} \in F$. De plus $f_{i_0+2} \notin F$. En effet, supposons au contraire que $f_{i_0+2} \in F$. Alors, le sous-graphe de G induit par $F' = (F \setminus \{f_{i_0+2}\}) \cup \{e_{2i_0+3}\}$ est Steiner connexe et

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} a(e) x^{F'}(e) &= \sum_{e \in E} a(e) x^F(e) - a(f_{i_0+2}) x^F(f_{i_0+2}) + a(e_{2i_0+3}) x^{F'}(e_{2i_0+3}) \\ &= \alpha - a(f_{i_0+2}) \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons $a(f_{i_0+2}) = 0$, ce qui contredit nos hypothèses. D'où $f_{i_0+2} \notin F$. De ce fait, $e_{2i_0+1} \in F$. En effet, si ce n'est pas la cas, pour que le sous-graphe induit par F soit

Steiner connexe, il faut que $e_{2i_0+2} \in F$ et $f_{i_0+1} \in F$. Posons $F'' = (F \setminus \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\}) \cup \{e_{2i_0+1}\}$. Il n'est pas difficile de voir que le sous-graphe de G est Steiner connexe, et

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E} a(e)x^{F''}(e) &= \sum_{e\in E} a(e)x^F(e) - a(e_{2i_0+2})x^F(e_{2i_0+2}) - a(f_{i_0+1})x^F(f_{i_0+1}) \\ &\qquad + a(e_{2i_0+1})x^{F''}(e_{2i_0+1}) \\ &= \alpha - a(e_{2i_0+2}) - a(f_{i_0+1}) + a(e_{2i_0+1}) \\ &\geq \alpha.\end{aligned}$$

Il en résulte alors que $a(f_{i_0+1}) + a(e_{2i_0+2}) \leq a(e_{2i_0+1})$. Or $a(e_{2i_0+2}) > 0$. Par conséquent, $a(f_{i_0+1}) < a(e_{2i_0+1})$, ce qui contredit le lemme 5.33.
Puisque $e_{2i_0+3} \notin F$, $f_{i_0+2} \notin F$ et $e_{2i_0+1} \in F$, nous en déduisons que $F \cap \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\} = \emptyset$. Ainsi, $\{e_{2i_0-1}, e_{2i_0}\} \subseteq F$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors $f_{i_0} \in F$, de telle manière que le sous-graphe induit par F soit Steiner connexe. Sans perte de généralité, supposons que $e_{2i_0} \in F$ et $e_{2i_0-1} \notin F$. Soit $F_1 = (F \setminus \{f_{i_0}\}) \cup \{e_{2i_0-1}\}$. Le sous-ensemble d'arêtes F_1 induit un sous-graphe Steiner connexe de G et

$$\begin{aligned}\sum_{e\in E} a(e)x^{F_1}(e) &= \sum_{e\in E} a(e)x^F(e) - a(f_{i_0})x^F(f_{i_0}) + a(e_{2i_0-1})x^{F_1}(e_{2i_0-1}) \\ &= \alpha - a(f_{i_0}) + a(e_{2i_0-1}) \\ &\geq \alpha.\end{aligned}$$

Par le lemme 5.33, nous obtenons ainsi $a(e_{2i_0-1}) = a(f_{i_0})$ et $x^{F_1} \in \mathcal{F}$. Ceci contredit ainsi le fait que $|F \cap \{e_{2i_0-1}, e_{2i_0}\}|$ soit maximum. Considérons alors le sous-ensemble d'arêtes

$$F_2 = (F \setminus \{e_{2i_0}, e_{2i_0+1}\}) \cup \{e_{2i_0+2}, e_{2i_0+3}\}.$$

Il est clair que le sous-graphe de G induit par F_2 est Steiner connexe. Comme conséquence, nous avons

$$a(e_{2i_0}) + a(e_{2i_0+1}) \leq a(e_{2i_0+2}) + a(e_{2i_0+3}).$$

Puisque $a(e_{2i_0+3}) = 0$ et $a(e_{2i_0}) > 0$, nous obtenons

$$a(e_{2i_0+1}) < a(e_{2i_0+2}). \tag{5.49}$$

Posons alors

$$\begin{aligned}V_t' &= V_t \cup V_i \\ &= \{u_{i_0+1}, v_{i_0}\}.\end{aligned}$$

Soit $\overline{F} \subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes tel que $x^{\overline{F}} \in \mathcal{F}$. Alors $|\overline{F} \cap \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\}| \leq 1$. En effet, supposons le contraire. Il est alors évident que $e_{2i_0+1} \notin \overline{F}$. Considérons le

sous-ensemble d'arêtes $\overline{F}' = (\overline{F} \setminus \{e_{2i_0+2}\}) \cup \{e_{2i_0+1}\}$. Le sous-graphe de G induit par $\overline{F}'$ est Steiner connexe et

$$\begin{aligned} \sum_{e \in E} a(e) x^{\overline{F}'}(e) &= \sum_{e \in E} a(e) x^{\overline{F}}(e) - a(e_{2i_0+2}) x^{\overline{F}}(e_{2i_0+2}) + a(e_{2i_0+1}) x^{\overline{F}'}(e_{2i_0+1}) \\ &= \alpha - a(e_{2i_0+2}) + a(e_{2i_0+1}) \\ &\geq \alpha. \end{aligned}$$

Ceci implique que $a(e_{2i_0+1}) \geq a(e_{2i_0+2})$. Et nous obtenons une contradiction avec l'inégalité (5.49). D'où $|\overline{F} \cap \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\}| \leq 1$.

Cas 4. $a(e_{2i_0+2}) > 0$, $a(e_{2i_0+3}) = 0$, $a(f_{i_0+2}) = 0$.
D'après le lemme 5.33, nous avons $a(e_{2i_0+4}) = 0$. Ainsi, il existe s, $t \in \{1, \ldots, q\}$ tels que $V_t = \{u_{i_0+1}\}$ et $\{u_{i_0+2}, v_{i_0+1}, v_{i_0+2}\} \subseteq V_s$ (voir figure 5.17).

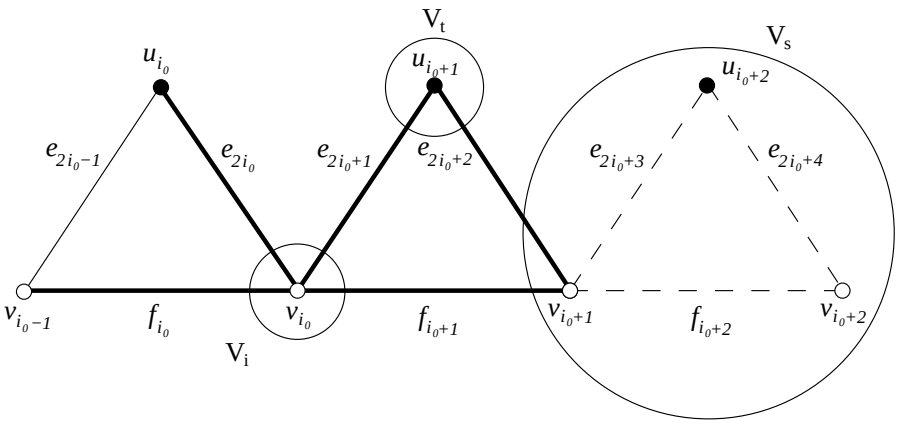

FIG 5.17 - *Cas 4*

Nous avons alors

$$a(e_{2i_0+1}) \leq a(e_{2i_0+2}). \tag{5.50}$$

Étant donné que l'inégalité (5.48) est différente d'une contrainte triviale, il existe un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que $x^F \in \mathcal{F}$ et $e_{2i_0+2} \notin F$. Nous pouvons choisir F de telle sorte que $|F \cap \{e_{2i_0-1}, e_{2i_0}\}|$ soit maximum. Puisque $e_{2i_0+2} \notin F$ et $r(u_{i_0+1}) = 1$, nous avons $e_{2i_0+1} \in F$.
Supposons que $f_{i_0+1} \notin F$. Nous avons alors $\{e_{2i_0-1}, e_{2i_0}\} \subseteq F$. En effet, si ce n'est pas le cas, il faut que f_{i_0} et une arête parmi $\{e_{2i_0-1}, e_{2i_0}\}$ appartiennent à F pour que le sous-graphe induit par F soit Steiner connexe. Sans perte de généralité, supposons que $e_{2i_0} \in F$. Soit $F' = (F \setminus \{f_{i_0}\}) \cup \{e_{2i_0-1}\}$. Il est clair que le sous-graphe induit par F' est Steiner connexe. D'où, $a(e_{2i_0-1}) \geq a(f_{i_0})$. Et d'après le lemme 5.33, nous

en déduisons que $a(e_{2i_0-1}) = a(f_{i_0})$ et $x^{F'} \in \mathcal{F}$. Mais nous obtenons une contradiction avec le fait que $|F \cap \{e_{2i_0-1}, e_{2i_0}\}|$ soit maximum. Considérons alors le sous-ensemble d'arêtes $F'' = (F \setminus \{e_{2i_0}, e_{2i_0+1}\}) \cup \{e_{2i_0+2}, e_{2i_0+3}\}$ Le sous-graphe induit par F'' est Steiner connexe. Ainsi, nous avons

$$a(e_{2i_0+2}) + a(e_{2i_0+3}) \geq a(e_{2i_0}) + a(e_{2i_0+1}).$$

Or $a(e_{2i_0+3}) = 0$ et $a(e_{2i_0}) > 0$. Donc $a(e_{2i_0+2}) > a(e_{2i_0+1})$.
Si maintenant $f_{i_0+1} \in F$, alors le sous-graphe induit par $(F \setminus \{f_{i_0+1}\}) \cup \{e_{2i_0+2}\}$ est Steiner connexe. D'où $a(e_{2i_0+2}) \geq a(f_{i_0+1})$. Et par le lemme 5.33, $a(e_{2i_0+2}) \geq a(e_{2i_0+1})$.

Pour associer v_{i_0} à un sous-ensemble de la partition contenant un sommet de type de connexité égal à un, deux cas se présentent alors, suivant que l'inégalité (5.50) est stricte ou pas.

Cas 4.1 $a(e_{2i_0+2}) = a(e_{2i_0+1})$.
Posons alors

$$\begin{aligned} V_t' &= V_t \cup V_i \cup V_s \\ &= V_s \cup \{u_{i_0+1}, v_{i_0}\}. \end{aligned}$$

Soit $\overline{F} \subseteq E$ un sous-ensemble d'arêtes tel que $x^{\overline{F}} \in \mathcal{F}$. Alors le sous-graphe induit par $\overline{F} \cap E(V_t')$ est Steiner connexe. Tous d'abord, d'après l'assertion 5.34.5, le sous-graphe induit par $\overline{F} \cap E(V_s)$ est Steiner connexe. Montrons donc que, dans ce sous-graphe, il existe un chemin de u_{i_0+1} à u_{i_0+2}. Supposons au contraire qu'il n'en existe pas. Alors $\overline{F} \cap \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\} = \emptyset$. En effet, si $|\overline{F} \cap \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\}| = 2$, alors $e_{2i_0+1} \notin \overline{F}$ et le sous-graphe induit par $(\overline{F} \setminus \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\}) \cup \{e_{2i_0+1}\}$ est Steiner connexe. Nous en déduisons que $a(e_{2i_0+1}) \geq a(e_{2i_0+2}) + a(f_{i_0+1})$. Or $a(f_{i_0+1}) > 0$. D'où $a(e_{2i_0+1}) > a(e_{2i_0+2})$, une contradiction avec notre hypothèse.
Supposons maintenant que $|\overline{F} \cap \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\}| = 1$. Si $f_{i_0+1} \in \overline{F}$ (le raisonnement pour $e_{2i_0+2} \in \overline{F}$ est similaire), alors puisqu'il n'existe pas de chemin dans le sous-graphe induit par $\overline{F}$ entre u_{i_0+1} à u_{i_0+2}, nous avons $\overline{F} \cap \{e_{2i_0+3}, f_{i_0+2}\} = \emptyset$. Ainsi, $\overline{F} \setminus \{f_{i_0+1}\}$ induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Par conséquent, $a(f_{i_0+1}) = 0$, une contradiction. Finalement, nous avons bien $\overline{F} \cap \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\} = \emptyset$. Puisque $r(u_{i_0+1}) = 1$, nous obtenons $e_{2i_0+1} \in \overline{F}$.

Étant donné que le sous-graphe induit par $\overline{F}$ est Steiner connexe, nous avons $|\overline{F} \cap \{e_{2i_0-1}, e_{2i_0}, f_{i_0}\}| = 2$. Supposons que $e_{2i_0-1} \in \overline{F}$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $e_{2i_0} \in \overline{F}$ et $f_{i_0} \notin \overline{F}$. Considérons alors le sous-ensemble d'arêtes $\overline{F}' = (\overline{F} \setminus \{e_{2i_0}, e_{2i_0+1}\}) \cup \{e_{2i_0+2}, e_{2i_0+3}\}$. Le sous-graphe induit par $\overline{F}'$ étant Steiner connexe, il en résulte que

$$a(e_{2i_0+2}) + a(e_{2i_0+3}) \geq a(e_{2i_0}) + a(e_{2i_0+1}).$$

Or $a(e_{2i_0+3}) = 0$ et $a(e_{2i_0}) > 0$. Par conséquent, $a(e_{2i_0+2}) > a(e_{2i_0+1})$, ce qui contredit le fait que $a(e_{2i_0+2}) = a(e_{2i_0+1})$.
Si $e_{2i_0-1} \notin \overline{F}$, alors le sous-graphe induit par $(\overline{F} \setminus \{e_{2i_0}, f_{i_0}\}) \cup \{e_{2i_0+2}, e_{2i_0+3}\}$ est Steiner connexe. Ainsi, nous obtenons

$$a(e_{2i_0+2}) + a(e_{2i_0+3}) \geq a(f_{i_0}) + a(e_{2i_0+1}).$$

Puisque $a(e_{2i_0+3}) = 0$ et $a(f_{i_0}) > 0$, nous en déduisons que $a(e_{2i_0+2}) > a(e_{2i_0+1})$. Nous obtenons à nouveau une contradiction. Ainsi, le sous-graphe induit par $\overline{F} \cap E(V_t')$ est Steiner connexe.

Cas 4.2 $a(e_{2i_0+2}) > a(e_{2i_0+1})$.
Posons alors

$$\begin{aligned} V_t' &= V_t \cup V_i \\ &= \{u_{i_0+1}, v_{i_0}\}. \end{aligned}$$

Considérons un sous-ensemble d'arêtes $\overline{F} \subseteq E$ tel que $x^{\overline{F}} \in \mathcal{F}$. Nous avons donc $|\overline{F} \cap \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\}| \leq 1$. Supposons au contraire que $|\overline{F} \cap \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\}| = 2$. Alors, il est facile de voir que $e_{2i_0-1} \notin \overline{F}$. Considérons le sous-ensemble d'arêtes $\overline{F}' = (\overline{F} \setminus \{e_{2i_0+2}\}) \cup \{e_{2i_0+1}\}$ qui induit un sous-graphe Steiner connexe de G. Nous avons donc $a(e_{2i_0+1}) \geq a(e_{2i_0+2})$, ce qui contredit notre hypothèse. Donc

$$|\overline{F} \cap \{e_{2i_0+2}, f_{i_0+1}\}| \leq 1.$$

Les quatre cas que nous venons de voir représentent bien toutes les configurations dans lesquelles peut se trouver un sous-ensemble $V_i = \{v_{i_0}\}$, $i = q+1, \ldots, p$, $i_0 = 1, \ldots, m$. Soit $\pi' = (V_1', \ldots, V_{p'}')$, $p' \leq q$, la partition obtenue à partir de la partition π en traitant un à un les sous-ensembles V_i, $i = q+1, \ldots, p$. Nous remarquons que, dans la configuration du cas 2, deux sous-ensembles V_{i_1} et V_{i_2}, $i_1, i_2 \in \{q+1, \ldots, p\}$ sont traités simultanément. Au vue des opérations de construction de la partition π', il est clair que cette dernière est une partition Steiner de V. En effet, dans tous les cas, le sous-ensemble V_i, $i = q+1, \ldots, p$, est associé à un sous-ensemble V_t, $t = 1, \ldots, q$. Considérons un sous-ensemble d'arêtes $F' \subseteq E$ tel que $x^{F'} \in \mathcal{F}$. D'après les raisonnenemnts effectués dans les quatres cas, la partition π' a les propriétés suivantes.

- le sous-graphe induit par $F' \cap E(V_i')$ est Steiner connexe, pour tout $i = 1, \ldots, p'$, et
- $|F' \cap [V_i', V_j']| \leq 1$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, p'\}$, $i \neq j$.

Par conséquent, $|F' \cap \delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})| = p' - 1$. De ce fait, nous obtenons

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}' = \{x \in \mathrm{ESNDP}(G, r) \mid x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) = p' - 1\}.$$

En considérant $E \setminus \{e\}$, où $e \in \delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})$, il n'est pas difficile de voir que $\mathcal{F}' \neq \mathrm{ESNDP}(G, r)$. Étant donné que $\mathcal{F}$ est une facette de $\mathrm{ESNDP}(G, r)$, nous avons $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ et ainsi, l'inégalité (5.48) correspond à la contrainte de partition Steiner $x(\delta(V'_1, \ldots, V'_{p'})) \geq p' - 1$. Et notre théorème est prouvé. □

Le corollaire suivant donne une description complète du dominant du polytope des sous-graphes Steiner connexes dans la classe Ψ.

Corollaire 5.35 *Soient $G = (V, E)$ un graphe de la classe Ψ et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Alors le polyèdre DSTP(G, S) est complètement caractérisé par les contraintes de non-négativité, les contraintes de coupe, les contraintes de partition Steiner et la contrainte de trou-impair (5.2).*

Preuve. Immédiate à partir du lemme 5.2 et du théorème 5.34. □

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le polytope des sous-graphes Steiner connexes, ainsi que le dominant du polytope des arbres Steiner. Nous avons tout d'abord introduit une nouvelle classe d'inégalités, les inégalités de partition Steiner généralisée, qui généralisent de nombreuses inégalités connues dans la littératures. Par la suite, nous nous sommes intéressés à la complexité du problème de séparation de ces contraintes. Puis nous avons donné des conditions pour qu'elles définissent des facettes. Nous avons également décrit des procédures de construction de facettes aussi bien pour le polytope des sous-graphes Steiner connexes que pour le dominant du polytope des arbres Steiner. Ces procédures nous ont permis, d'une part, de donner un contre-exemple à une conjecture de Chopra et Rao. D'autre part, elles nous ont permis de caractériser ces deux polyèdres dans la classe des graphes série-parallèles vérifiant la propriété P ainsi que dans la classe Ψ.

Comme nous l'avons vu dans la section 5.4, le dominant du polytope des arbres Steiner peut avoir, dans la classe des 2-arbres, des facettes définies par des inégalités de partition Steiner (5.1) et des inégalités de trou-impair (5.2). De plus, nous pouvons

remarquer que les inégalités de partition Steiner généralisée qui ont pu être identifiées dans la classe des 2-arbres sont toutes produites par des graphes contractibles à des graphes de la classe Ψ. À la vue de cette étude et des résultats précédents, nous donnons la conjecture suivante.

Conjecture 5.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe série-parallèle et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Si G est non contractible à un graphe de la classe Ψ, alors le polyèdre DSTP(G, S) est conplètement caractérisé par les contraintes de non-négativité et les contraintes de partition Steiner.*

D'après le lemme 5.2, une telle conjecture peut également être donnée pour le polytope des sous-graphes Steiner connexes dans la classe des graphes séries-parallèles non contractibles à des graphes de la classe Ψ.

D'une manière tout à fait similaire, les inégalités de partition Steiner généralisée (5.10) peuvent être étendues au cas orienté. Étant donnés un graphe orinté $D = (V, A)$, un vecteur types de sommets $r \in \{0, 1\}^V$ et un sommet $s \in V$ tel que $r(s) = 1$, une *arborescence Steiner $T \subseteq A$ de racine s* est une arborescence couvrant l'ensemble des sommets de type 1, telle que s ne soit l'extrémité terminale d'aucun arc de T et chaque sommet de $V \setminus \{s\}$ couvert par T soit l'extrémité terminale d'exactement un arc de T. Si à chaque arc $a \in A$ est associé un poids $w(a) \in \mathbb{R}$, alors le *problème de l'arborescence Steiner* (SAP) consiste à trouver une arborescence Steiner de racine s qui soit de poids minimum.

Chopra et Rao [34, 35] ont étudié le problème SAP. À partir d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ et d'un vecteur types de sommets $r \in \{0, 1\}^V$, considérons son graphe orienté $D = (V, A)$, construit de la manière suivante

- un sommet s tel que $r(s) = 1$ est déclaré "racine",
- chaque arête $uv \in E$ non incidente à s est remplacée par deux arcs (u, v) et (v, u),
- chaque arête $su \in E$ est remplacée par l'arc (s, u),
- r est le vecteur types de sommets de D.

Si les arêtes dans G ont toutes un poids positif ou nul, alors posons $c(u, v) = c(v, u) = c(uv)$. Résoudre le problème de l'arbre Steiner dans G est équivalent à résoudre le problème de l'arborescence Steiner dans D.

Soient SAP(D, r) l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des arborescences Steiner et DSAP(G, r) le dominant du polytope SAP(D, r). Considérons une partition

$(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, comme définie dans la section 5.3.2. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $s \in V_{q+1}$. D'une manière analogue au graphe G_π, nous pouvons définir le graphe orienté $D_\pi = (V_\pi, A_\pi)$ et le vecteur types de sommets $r_\pi \in \{0,1\}^{V_\pi}$. Soit

$$d = \max\{|U| \mid r_\pi(U) = 0 \text{ et pour tout sommet } v \text{ tel que } r_\pi(v) = 1, \text{ il existe un chemin de } w_{q+1} \text{ à } v \text{ dans } D_\pi\},$$

où w_{q+1} est le sommet résultant de la contraction de V_{q+1}. Posons

$$F = \bigcup_{i=1}^{q} \delta^-(V_i).$$

Considérons alors l'inégalité suivante

$$x(F) \geq q - d. \tag{5.51}$$

Nous avons, par une démonstration similaire à celle du théorème 5.12, le résultat suivant.

Théorème 5.36 *L'inégalité (5.51) est valide pour SAP(D, r) et DSAP(G, r).* □

Les inégalités (5.51), également appelées *inégalités de partition steiner généralisée*, sont une généralisation des inégalités introduites par Chopra et Rao [34, 35] pour le cas orienté. De plus, Chopra et Rao ont montré que, dans le cas orienté, les inégalités de roue-impaire et les inégalités biparties peuvent définir des facettes de DASP(G, r). Par contre, Prodon, Liebling et Gröflin [151] (voir aussi Goemans [86]) ont montré que le dominant du polytope des arborescences Steiner est complètement décrit par les contraintes de non-négativité et par les contraintes de coupe

$$x(\delta^-(W)) \geq 1 \qquad \text{pour tout } W \subseteq V \text{ tel que } r(w) = 1.$$

Étant donné qu'un graphe ayant une configuration de trou-impair est un graphe série-parallèle, les inégalités de trou-impair ne définissent pas des facettes de DSAP(G, r). Par ailleurs, nous pouvons montrer que les inégalités de partition Steiner généralisée (5.51) peuvent définir des facettes de DSAP(G, r) autres que celles connues dans la littérature. En effet, considérons le graphe $\overline{G}$ de la figure 5.5, et construisons, comme indiqué précédemment, son graphe orienté correspondant $\overline{D}$. Supposons que u_0 soit la racine de l'arborescence. Posons

$$F = \{(u_0, v_i), (u_0, v'_i), (u_i, v_{i-1}), (u_i, v_i), (u_i, v'_{i-1}), (u_i, v'_i);\ i = 1, \ldots, m\ (mod\ m)\}.$$

Considérons alors l'inégalité

$$x(F) \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil. \tag{5.52}$$

Nous avons le théorème suivant dont la preuve est similaire à celle du théorème 5.18.

Théorème 5.37 *L'inégalité (5.52) définit une facette de SAP($\overline{D}, \overline{r}$) et de DSAP($\overline{D}, \overline{r}$) si m est impair et $m \geq 3$.* □

Chapitre 6

Un algorithme de coupes et branchements

Dans ce chapitre, nous présentons un algorithme de coupes et branchements pour résoudre le problème de conception de réseaux fiables lorsque tous les sommets ont un type de connexité inférieur ou égal à deux. Cet algorithme est basé sur les résultats polyédraux vus dans les chapitres précédents. Cependant, le problème ESNDP étant NP-difficile dans le cas général, les contraintes que nous avons présentées jusqu'à présent se révèlent parfois insuffisantes dans l'optique d'un algorithme efficace de résolution à l'optimalité. Ainsi, ce travail a également pour but de montrer l'intérêt des contraintes dites de F-partition pour un tel algorithme.

Dans un premier temps, nous allons donc introduire ces contraintes de F-partition et étudier leur problème de séparation. Puis, nous allons décrire nos procédures de réduction de graphes et de séparation des inégalités de coupe, de partition et de F-partition. Par la suite, nous allons présenter nos résultats expérimentaux qui ont porté sur le problème du sous-graphe 2-arête connexe et le problème ESNDP pour des types de sommets en 1 et 2.

6.1 Les contraintes de F-partition

6.1.1 Types de sommets uniformes

Soient $G = (V, E)$ un graphe et r un vecteur types de sommets tel que $r(v) = k$ pour tout $v \in V$, où k est un entier positif. Nous savons que quand $k = 2$ et G est un graphe quelconque, le problème de conception de réseaux fiables est NP-difficile et les contraintes de coupe sont insuffisantes pour donner une description complète du polytope ESNDP(G, r). De plus, comme nous l'avons mentionné dans la section 2.5.3 , les contraintes de partition sont dominées par les contraintes de coupe et n'interviennent pas dans la caractérisation de ce polytope. Néanmoins, une description partielle de ESNDP(G, r) peut être suffisante pour résoudre le problème de conception de réseaux fiables. À cette fin, il est très important de connaitre le maximum de familles d'inégalités valides (définissant des facettes) pour le problème.

Lorsque $k = 2$, Mahjoub [131] a introduit une nouvelle famille de contraintes valides pour le polytope ESNDP(G, r) de la manière suivante. Considérons une partition $(V_0, V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 2$, de V. Soit $F \subseteq \delta(V_0)$ un sous-ensemble d'arêtes de cardinalité impaire. Posons $|F| = 2t + 1$ avec $t \geq 1$. Soit

$$\Delta = \delta(V_0, V_1, \ldots, V_p) \setminus F$$

l'ensemble des arêtes de la partition, à l'exception des arêtes de F. Alors le vecteur d'incidence de toute solution du problème ESNDP vérifie l'inégalité

$$x(\Delta) \geq p - t. \tag{6.1}$$

Ces inégalités sont appelées *inégalités de F-partition*. Dans [12], Barahona et Mahjoub ont également étudié ces inégalités. Ils ont montré qu'elles suffisent, avec les inégalités triviales et celles de coupe, pour caractériser le polytope ESNDP(G, r) dans la classe des graphes de Halin, et ce pour des types de sommets tous égaux à deux. Par ailleurs, Mahjoub [131] a donné des conditions suffisantes pour que les inégalités de F-partition (6.1) définissent des facettes de ESNDP(G, r).

Plus récemment, Didi Biha [57] a étendu les inégalités (6.1) à des types de sommets tous égaux à un entier k. Considérons de nouveau une partition $(V_0, V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 2$, de V et un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq \delta(V_0)$. Nous sommes amenés à distinguer deux cas suivant que k soit pair ou impair.

Supposons, tout d'abord, que k est pair et F est de cardinalité impair. Posons alors $k = 2q$ et $|F| = 2t + 1$ avec $q \geq 1$ et $t \geq 1$. Alors l'inégalité

$$x(\Delta) \geq qp - t. \tag{6.2}$$

est valide pour le polytope $\mathrm{ESNDP}(G, r)$.

Supposons maintenant que k est impair, c'est-à-dire $k = 2q - 1$ avec $q \geq 1$. Si la cardinalité de F et p sont de parité différente, alors le vecteur d'incidence de tout sous-graphe k-arête connexe satisfait l'inégalité

$$x(\Delta) \geq qp - \left\lfloor \frac{p + |F|}{2} \right\rfloor. \tag{6.3}$$

Si $|F|$ et p sont de même parité, alors la contrainte (6.3) est dominée par les contraintes de coupe. Les inégalités (6.2) et (6.3) sont également appelées *inégalité de F-partition*. Didi Biha [57] a donné des conditions suffisantes pour que ces inégalités définissent des facettes de $\mathrm{ESNDP}(G, r)$.

Dans la suite de cette section, nous allons généraliser les contraintes (6.1), (6.2) et (6.3) pour des types de sommets quelconques.

6.1.2 Types de sommets généraux

Soient $G = (V, E)$ un graphe, $r \in \mathbb{Z}_+^V$ un vecteur types de sommets et $\pi = (V_0, V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 2$, une partition de V telle que

$$r(V_i) \geq 1 \qquad \text{pour tout } i = 1, \ldots, p.$$

Nous faisons remarquer que le type de connexité du sous-ensemble V_0 peut être nul. Soit $F \subseteq \delta(V_0)$ un sous-ensemble d'arêtes. Afin de simplifier au maximum les écritures, nous posons

- $r_\pi = \max\{con(V_i) \mid i = 0 \ldots, p\}$,
- p_i le nombre de sous-ensembles V_j, $j = 1, \ldots, p$, de la partition tels que $con(V_j) = i$, pour $i = 1, \ldots, r_\pi$, c'est-à-dire

$$p_i = |\{j \mid con(V_j) = i;\ j = 1, \ldots, p\}|,$$

- S_1 (resp. S_2) l'ensemble des indices des sous-ensembles V_i, $i = 1 \ldots, p$, de la partition tels que $con(V_i)$ est impair (resp. pair), c'est-à-dire

$$S_1 = \{i \mid con(V_i) \text{ est impair}; i = 1, \ldots, p\},$$
$$S_2 = \{i \mid con(V_i) \text{ est pair}; i = 1, \ldots, p\},$$

- $\Delta = \delta(V_0, V_1, \ldots, V_p) \setminus F$.

Considérons alors l'inégalité

$$x(\Delta) \geq \sum_{j=1}^{\lceil \frac{r_\pi}{2} \rceil} j(p_{2j} + p_{2j-1}) - \left\lfloor \frac{|S_1| + |F|}{2} \right\rfloor. \tag{6.4}$$

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 6.1 *Si $|F|$ et $|S_1|$ sont de parité différente, alors l'inégalité (6.4) est valide pour ESNDP(G, r).*

Preuve. La démonstration utilise la même idée que celle développée par Mahjoub [131] pour le cas de types de sommets tous égaux à 2. Le vecteur d'incidence de toute solution du problème ESNDP vérifie les contraintes

$$\begin{array}{ll} x(\delta(V_i)) \geq con(V_i) & \text{pour } i = 1, \ldots, p, \\ -x(e) \geq -1 & \text{pour } e \in F, \\ x(e) \geq 0 & \text{pour } e \in \delta(V_0) \setminus F. \end{array}$$

En sommant ces inégalités, nous obtenons

$$2\, x(\Delta) \geq \sum_{i=1}^{p} con(V_i) - |F|. \tag{6.5}$$

Par ailleurs, nous avons

$$\sum_{i=1}^{p} con(V_i) = \sum_{i=1}^{r_\pi} ip_i.$$

Ainsi, en divisant par 2 l'inégalité (6.5), celle-ci devient

$$\begin{aligned} x(\Delta) &\geq \tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{r_\pi} ip_i - |F|) \\ &= \tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r_\pi}{2} \rfloor} 2ip_{2i} + \sum_{i=1}^{\lceil \frac{r_\pi}{2} \rceil} (2i-1)p_{2i-1} - |F|) \\ &= \tfrac{1}{2}(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{r_\pi}{2} \rfloor} 2ip_{2i} + \sum_{i=1}^{\lceil \frac{r_\pi}{2} \rceil} 2ip_{2i-1} - \sum_{i=1}^{\lceil \frac{r_\pi}{2} \rceil} p_{2i-1} - |F|). \end{aligned}$$

Puisque $|S_1| = \sum_{i=1}^{\lceil \frac{r_\pi}{2} \rceil} p_{2i-1}$, nous en déduisons

$$x(\Delta) \geq \sum_{i=1}^{\lceil \frac{r_\pi}{2} \rceil} i(p_{2i} + p_{2i-1}) - \frac{1}{2}(|S_1| + |F|).$$

En arrondissant le membre droit de cette dernière inégalité au plus petit entier supérieur, nous obtenons l'inégalité (6.4). □

Les contraintes (6.4) seront également appelées *inégalités de F-partition*. Elles sont une généralisation des inégalités évoquées dans la section précédente. Ainsi, les inégalités (6.1) et (6.2) correspondent à la situation où $S_1 = \emptyset$, tandis que les inégalités (6.3) correspondent au cas où $S_1 = \{1, \ldots, p\}$.

Nous avons intégré, dans la validité des inégalités (6.4), une restriction sur la parité de $|F|$ et $|S_1|$. Cette restriction est due à la remarque suivante.

Remarque 6.2 Si F et S_1 sont de même cardinalité, alors

$$\left\lfloor \frac{|S_1| + |F|}{2} \right\rfloor = \frac{|S_1| + |F|}{2}.$$

Ainsi, la contrainte de F-partition (6.4) est redondante par rapport aux contraintes triviales et aux contraintes de coupe. □

Avant d'étudier le problème de séparation des inégalités de F-partition, nous mentionnons les récents travaux de Mahjoub et Pesneau [133] relatifs au problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe, c'est-à-dire lorsque $r \in \{0, 2\}^V$. Ils se sont intéressés à des partitions dont certains sous-ensembles ont un type de connexité nul. Ils ont ainsi généralisé les inégalités de F-partition pour de telles configurations de partition.

6.1.3 Complexité du problème de séparation

Comme pour toute famille d'inégalités valides, il est très intéressant d'étudier le problème de séparation qui est associé aux inégalités de F-partition (6.4). Avant de nous pencher sur ce problème, nous allons évoquer le lien qui existe entre les inégalités de F-partition et les inégalités de r-recouvrement généralisé (2.11). Pour cela, nous faisons l'observation suivante.

Théorème 6.3 *Les inégalités de r-recouvrement généralisé sont une généralisation des inégalités de F-partition (6.4).* □

De plus, si les sous-ensembles de la partition sont des singletons (à l'exception de V_0), alors les inégalités de F-partition ne sont rien d'autre que les inégalités de r-recouvrement (2.10). Or, Padberg et Rao [143] ont donné un algorithme polynomial

pour séparer ces dernières inégalités. Par conséquent, nous pouvons énoncer le prochain théorème.

Théorème 6.4 [143] *Si les sous-ensembles V_i, $i = 1, \ldots, p$, sont des singletons, alors le problème de séparation des inégalités de F-partition (6.4) est polynomial.* □

Pour ce qui est du problème de séparation des inégalités de r-recouvrement généralisé, Grötschel, Monma et Stoer [101, 161] ont montré qu'il est NP-difficile. Par ailleurs, nous n'avons pas pu établir la complexité du problème de séparation des inégalités de F-partition (6.4) dans le cas général. Néanmoins, en apportant des conditions supplémentaires sur le sous-ensemble d'arêtes F, le problème de séparation des inégalités de F-partition correspondantes peut parfois être résolu en temps polynomial.

Ainsi, Baïou, Barahona et Mahjoub [5] ont donné une méthode polynomiale pour résoudre le problème de séparation des inégalités de F-partition (6.1) quand le sous-ensemble F est fixé et $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$. Cette méthode a ensuite été étendue au cas $r(v) = k$ pour tout $v \in V$, où k est un entier pair, par Didi Biha [57], pour séparer les inégalités de F-partition (6.2) quand F est fixé. Ces deux méthodes se ramènent au problème de séparation des inégalités de partition $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1$ qui peut être résolu en temps polynomial en utilisant l'algorithme de Cunningham [51] ou celui de Barahona [11].

Lorsque les types de sommets sont tous égaux à un entier impair, le problème de séparation des inégalités de F-partition (6.3), quand F est fixé, semble plus difficile et sa complexité n'a pas été établie. Mais en utilisant une méthode similaire au cas d'un entier pair, nous pouvons avoir une heuristique de séparation des inégalités (6.3). Cette heuristique nous permettra de séparer les inégalités de F-partition qui sont violées d'au plus $\frac{1}{2}$.

6.2 Implémentation de l'algorithme

6.2.1 Aperçu général

Étant donnés un graphe $G = (V, E)$, un vecteur types de sommets $r \in \mathbb{Z}_+^V$ et un vecteur poids associé aux arêtes $c \in \mathbb{R}^E$, notre algorithme commence par résoudre

le programme linéaire qui consiste en $|E|$ variables, $|V|$ inégalités de degré et 2 $|E|$ inégalités triviales, c'est-à-dire

$$(6.6)\begin{cases} \text{Min } cx & \\ x(\delta(v)) \geq r(v) & \text{pour tout } v \in V, \\ 0 \leq x(e) \leq 1 & \text{pour tout } e \in E. \end{cases}$$

Si la solution optimale de ce programme est une solution du problème ESNDP, c'est-à-dire entière et vérifiant les contraintes de coupe, alors elle est optimale pour ce dernier. En général, la solution ainsi obtenue n'est pas réalisable pour le polytope $\text{ESNDP}(G, r)$. Dans ce cas, à chaque itération de l'algorithme, nous essayons de trouver des inégalités (coupes, partitions, F-partitions suivant la nature du vecteur r) valides pour $\text{ESNDP}(G, r)$ et violées par la solution optimale du programme linéaire courant. Les algorithmes qui nous permettent de détecter de telles inégalités sont appelés des *procédures de séparation*. Les inégalités trouvées sont ajoutées au programme linéaire courant, puis nous résolvons le programme linéaire ainsi obtenu. Ce processus est repris jusqu'à l'obtention d'une solution optimale ou qu'aucune inégalité violée ne soit détectée. Dans cette dernière configuration, l'algorithme procède à un branchement qui se fait à l'aide du logiciel MINTO, qui est décrit plus tard dans la section 3.1. L'Algorithme 6.1 illustre les principales phases de notre algorithme de coupes et branchements.

Algorithme 6.1 : Algorithme de coupes et branchements.

Données : un graphe $G = (V, E)$, un vecteur types de sommets $r \in \{1, 2\}^V$ et un vecteur poids $c \in \mathbb{R}^E$.
Sortie : solution optimale de $\text{Min}\{cx \mid x \in \text{ESNDP}(G, r)\}$.

1 : PL $\longleftarrow$ (6.6)
2 : Résoudre le programme linéaire PL.
Soit y la solution optimale de PL.
3 : **Si** y est réalisable pour $\text{ESNDP}(G, r)$ **alors**
y est une solution optimale. STOP
4 : **Si** des contraintes (coupe, partition, F-partition) violées pas y sont trouvées **alors**
Les ajouter à PL.
Aller en 2.
5) **Sinon**
Brancher sur une variable fractionnaire.

6 : Prendre la meilleure solution de tous les sous-problèmes.

Les prochaines sections vont être consacrées à la présentation des procédures de séparation des inégalités de coupe, de partition et de F-partition. Mais avant cela, nous allons présenter des procédures de réduction du graphe sur lequel seront appliquées nos procédures de séparation.

6.2.2 Réduction de graphes

Pour des graphes de grande taille, les procédures de séparation que nous allons étudier peuvent devenir très lentes à la vue de leur complexité. Ainsi, dans cette section, nous allons montrer comment la taille des problèmes peut être réduite avant l'application de ces procédures.

Étant donnés un graphe $G = (V, E)$ et un vecteur types de sommets $r \in \{1, 2\}^V$, considérons le polytope $Q(G, r)$ défini par les contraintes triviales (2.1) et (2.2) et les contraintes de coupe (2.3). Puisque le problème de séparation des inégalités de $Q(G, r)$ est polynomial, le problème ESNDP peut se résoudre en temps polynomial dans la classe des graphes pour laquelle ESNDP$(G, r) = Q(G, r)$. Lorsque les sommets ont tous un type de connexité égal à 2, Mahjoub [132] a appelé ces graphes, les *graphes parfaitement 2-arête connexes*. Par ailleurs, il a décrit certaines opérations qui préservent la propriété de "parfaitement 2-arête connexité". Dans [70], Fonlupt et Mahjoub ont étudié les points extrêmes de $Q(G, r)$ quand $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$. Ils ont caractérisé les points extrêmes fractionnaires dits critiques. Ceci leur a permis d'obtenir une caractérisation complète des graphes parfaitement 2-arête connexes.

Considérons maintenant des types de sommets en 1 et 2. Soit $R(G, r)$ le polytope défini par les contraintes triviales (2.1) et (2.2), les contraintes de coupe (2.3) et les contraintes de partition (4.3). Comme le problème du sous-graphe 2-arête connexe est un cas particulier du problème ESNDP avec des types de sommets en 1 et 2, nous allons décrire des opérations qui préservent la propriété ESNDP$(G, r) = R(G, r)$. Ces opérations généralisent celles données par Mahjoub lorsque $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$. Par la suite, nous allons étudier les points extrêmes de $R(G, r)$.

Étant donnée une solution x de $R(G, r)$, notons par

- $E_0(x)$ l'ensemble des arêtes $e \in E$ telles que $x(e) = 0$,

- $E_1(x)$ l'ensemble des arêtes $e \in E$ telles que $x(e) = 1$,
- $V(x)$ l'ensemble des sommets $v \in V$ tels que $x(\delta(v)) = r(v)$,
- $\tau_c(x)$ l'ensemble des coupes serrées pour x,
- $\tau_{p_1}(x)$ l'ensemble des partitions de type 1 (voir section 4.3) serrées pour x, et
- $\tau_{p_2}(x)$ l'ensemble des partitions de type 2 (voir section 4.3) serrées pour x.

Soit x un point extrême de $R(G, r)$. Alors il existe des ensembles $\tilde{\tau}_c(x) \subseteq \tau_c(x)$, $\tilde{\tau}_{p_1}(x) \subseteq \tau_{p_1}(x)$ et $\tilde{\tau}_{p_2}(x) \subseteq \tau_{p_2}(x)$ tels que x soit l'unique solution du système

$$S(x) \begin{cases} x(e) = 0 & \text{pour tout } e \in E_0(x), \\ x(e) = 1 & \text{pour tout } e \in E_1(x), \\ x(\delta(v)) = r(v) & \text{pour tout } v \in V(x), \\ x(\delta(W)) = con(W) & \text{pour tout } \delta(W) \in \tilde{\tau}_c(x), \\ x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p - 1 & \text{pour tout } (V_1, \ldots, V_p) \in \tilde{\tau}_{p_1}(x), \\ x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) = p & \text{pour tout } (V_1, \ldots, V_p) \in \tilde{\tau}_{p_2}(x). \end{cases}$$

Considérons les opérations suivantes

Θ_1 : supprimer une arête $e_0 \in E_0(x)$,

Θ_2 : contracter une arête $f = uv \in E_1(x)$ telle que $r(u) = 1$, $x(\delta(u)) \leq 2$ et $\delta(u) \subseteq E_0(x) \cup E_1(x)$,

Θ_3 : contracter une arête $f = uv \in E_1(x)$ telle que $r(u) = 2$, $x(\delta(u)) = 2$, $\delta(u) \cap E_1(x) = \{uv, uw\}$ et $r(w) = 2$,

Soit x une solution de $R(G, r)$. Nous avons alors les lemmes suivants.

Lemme 6.5 *Soient G' le graphe obtenu à partir de G en appliquant l'opération Θ_1, et x' la restriction de x dans G'. Alors x' est un point extrême de $R(G', r)$ si et seulement si x est un point extrême de $R(G, r)$.*

Preuve. Similaire à celle développée dans [132]. □

Lemme 6.6 *Soient G' le graphe obtenu à partir de G en appliquant l'une des opérations Θ_2 et Θ_3, et u' le graphe résultant de la contraction de l'arête f. Soit x' la restriction de x dans G'. Alors x' est un point extrême de $R(G', r')$ où*

$$r'(s) = \begin{cases} r(s) & \text{si } s \in E \setminus \{u, v\}, \\ \\ con(\{u, v\}) & \text{si } s = u', \end{cases}$$

si et seulement si x est un point extrême de $R(G, r)$.

Preuve. Nous montrons le résultat pour l'opération Θ_2, la preuve étant similaire pour l'opération Θ_3.
Supposons que x est un point extrême de $R(G,r)$. Puisque $f \in E_1(x)$, l'équation $x(\delta(u)) = 1$ est redondante par rapport à $x(f) = 1$. Ainsi, elle ne fait pas partie de $S(x)$. Nous sommes amenés à considérer deux cas, suivant que $|\delta(u) \cap E_1(x)| = 2$ soit égal à 1 ou 2.

Cas 1. $\delta(u) \cap E_1(x) = \{f\}$. Alors $x(e) = 0$ pour tout $e \in \delta(u) \setminus \{f\}$. Dans ce cas, f n'appartient à aucune coupe du système $S(x)$. En effet, s'il existe une coupe $\delta(W) \subseteq \tilde{\tau}_c(x)$ qui contient f (le cas où la coupe $\delta(v)$ appartient à $S(x)$ est similaire), alors le sous-graphe $G(W)$ n'est pas connexe, ce qui contredit la remarque 4.8. De même, nous pouvons montrer qu'il n'existe aucune partition $(V_1, \ldots, V_p) \subseteq \tilde{\tau}_{p_1}(x) \cup \tilde{\tau}_{p_2}(x)$ telle que $f \in \delta(V_1, \ldots, V_p)$, $u \in V_i$ et $|V_i| \geq 2$. Supposons qu'il existe une partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$, $p' \geq 3$, du système $S(x)$ telle que $V'_1 = \{u\}$ et $v \in V'_2$. Puisque $r(u) = 1$ et $x[V'_1, V'_2] = 1$, les partitions $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ et $(V'_1 \cup V'_2, V'_3, \ldots, V'_{p'})$ sont de même type. Ainsi, par le lemme 4.5, la partition $(V'_1 \cup V'_2, V'_3, \ldots, V'_{p'})$ est serrée pour x. L'équation définie par cette dernière partition peut être obtenue à partir de celle définie par $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ et des équations triviales. Par conséquent, nous pouvons remplacer la partition $(V'_1, \ldots, V'_{p'})$ par la partition $(V'_1 \cup V'_2, V'_3, \ldots, V'_{p'})$.

Cas 2. $|\delta(u) \cap E_1(x)| = 2$. Notons alors par f' l'arête appartenant à $(\delta(u) \cap E_1(x)) \setminus \{f\}$. Montrons alors que le système $S(x)$ peut être choisi de telle manière que f apparaisse dans aucune coupe. Supposons que f apparait dans une coupe $\delta(W) \subseteq \tilde{\tau}_c(x)$ (le cas où la coupe $\delta(v)$ appartient à $S(x)$ est similaire) telle que, sans perte de généralité, $u \in W$. Remarquons que $|W| \geq 2$ et $con(W) = 2$. Si $\delta(u) \subseteq \delta(W)$, alors le graphe $G(W)$ n'est pas connexe, ce qui contredit la remarque 4.8. Ainsi, $f' \in E(W)$. Soit $W' = W \setminus \{u\}$. Comme $r(u) = 1$, il est clair que $con(W') = con(W) = 2$. De plus, nous avons

$$\begin{aligned} x(\delta(W')) &= x(\delta(W)) - x(\delta(u) \cap \delta(W)) + x(\delta(u) \cap E(W)) \\ &= x(\delta(W)) - x(f) + x(f') \\ &= 2 - 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

L'équation $x(\delta(W')) = con(W')$ peut donc être obtenue à partir de $x(\delta(W)) = con(W)$ et des équations triviales. Par conséquent, nous pouvons remplacer la coupe $\delta(W)$ par la coupe $\delta(W')$ dans le système $S(x)$.

Supposons maintenant que f apparait dans une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, du système $S(x)$. Sans perte de généralité, supposons que $u \in V_1$ et $v \in V_2$. Si $|V_1| = 1$, considérons alors la partition $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$. Puisque $r(u) = 1$, les partitions

$(V_1, \ldots, V_p)$ et $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$ sont de même type. Par ailleurs, nous remarquons que $x[V_1, V_2] = x(f) = 1$. En effet, si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire $x[V_1, V_2] = 2$, nous obtenons une contradiction avec le lemme 4.5. De plus, par le lemmme 4.5, la partition $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$ est serrée pour x. L'équation définie par la partition $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$ peut être obtenue à partir de celle définie par $(V_1, \ldots, V_p)$ et des équations triviales. En conséquence, nous pouvons remplacer la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ par $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$ dans le système $S(x)$.
Si $|V_1| \geq 2$, alors par la remarque 4.8, $x(\delta(u) \cap E(V_1)) = x(f') = 1$. Considérons alors la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ définie de la manière suivante

$$\begin{array}{ll} V'_1 = V_1 \setminus \{u\}, & \\ V'_2 = V_2 \cup \{u\}, & \\ V'_i = V_i & \text{pour } i = 3, \ldots, p. \end{array}$$

Nous avons alors

$$\begin{array}{rcl} x(\delta(V'_1, \ldots, V'_p)) & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x[u, V_2] + x[u, V_2 \setminus \{u\}] \\ & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) - x(f_1) + x(f_2) \\ & = & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)). \end{array}$$

Puisque $r(u) = 1$, les partitions $(V_1, \ldots, V_p)$ et $(V'_1, \ldots, V'_p)$ sont de même type. Ainsi, la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ est serrée pour x. Par conséquent, l'équation définie par la partition $(V'_1, \ldots, V'_p)$ peut être obtenue à partir de celle définie par $(V_1, \ldots, V_p)$ et des équations triviales. Ainsi, nous pouvons remplacer la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ par $(V'_1, \ldots, V'_p)$ dans le système $S(x)$.

Soit $S(x')$ le système obtenu à partir de $S(x)$ en supprimant l'équation $x(f) = 1$. Notons que $x(f)$ n'apparait dans aucune équation du système $S(x')$. Toutes les équations de ce dernier système sont induites par des contraintes valides de $R(G', r')$. De plus, elles sont toutes serrées pour x'. Ainsi, x' est l'unique solution du système $S(x')$. Par ailleurs, par le lemme 4.9, $x' \in R(G', r)$. En conséquence, x' est un point extrême de $R(G', r')$.

D'une manière similaire à celle développée dans la preuve du lemme 6.5, nous pouvons montrer que si x' est un point extrême fractionnaire de $R(G', r')$, alors x est un point extrême fractionnaire de $R(G, r)$. □

Une conséquence immédiate des lemmes 6.5 et 6.6 est la suivante.

Corollaire 6.7 *Soient $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en appliquant successivement les opérations Θ_1, Θ_2 et Θ_3, et $r' \in \{1, 2\}^{V'}$ le vecteur types de connexité*

associés aux sommets de V'. Soit x' la restriction de x dans G'. Alors x' est un point extrême de $R(G', r')$ si et seulement si x est un point extrême de $R(G, r)$. □

Le corollaire 6.7 est très important dans le cadre d'un algorithme de coupes et branchements. En effet, pour chercher une contrainte violée par la solution du programme linéaire courant, nous pouvons considérer le graphe G' et la restriction x' comme définis dans le corollaire précédent à la place du graphe G initial. Et toute contrainte qui coupe x' peut être transformée en une contrainte qui coupe x. De plus, il n'est pas difficile de voir que les opérations Θ_1, Θ_2 et Θ_3 peuvent être réalisées en temps polynomial.

Par ailleurs, nous pouvons légèrement affiner l'opération Θ_2. En effet, nous pouvons ne plus raisonner sur la notion de point extrême de $R(G, r)$, mais par rapport à la propriété qu'une inégalité violée utilisant l'arête f peut être transformée en une inégalité violée n'utilisant pas f. Considérons ainsi l'opération suivante

Θ_2' : contracter une arête $f = uv \in E_1(x)$ telle que $r(u) = 1$ et $x(\delta(u)) \leq 2$.

Lemme 6.8 *Dans G, il existe une inégalité (coupe ou partition) ne contenant pas l'arête f de l'opération Θ_2', qui est au moins aussi violée par x que toute inégalité (coupe ou partition) violée par x utilisant f.*

Preuve. Par le corollaire 6.7, nous pouvons restreindre notre preuve au cas où $\delta(u) \cap E_1(f) = \{f\}$, c'est-à-dire qu'il existe au moins deux arêtes ayant une valeur fractionnaire dans $\delta(u)$.
Supposons, tout d'abord, qu'il existe une coupe $\delta(W)$ violée par x, et, sans perte de généralité, que $u \in W$. Il est clair que $con(W) = 2$. Puisque $r(u) = 1$, nous avons $|W| \geq 2$. Considérons alors la coupe $\delta(W \backslash \{u\})$. Nous avons $con(W \backslash \{u\}) = con(W) = 2$. Comme $f \in \delta(W) \cup \delta(u)$ et $x(f) = 1$, nous obtenons $x(\delta(W) \cup \delta(u)) \geq x(f) = 1$. De plus, $x[u, W \setminus \{u\}] = 2 - x(\delta(W) \cap \delta(u))$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x(\delta(W \setminus \{u\})) &= x(\delta(W)) - x(\delta(W) \cap \delta(u)) + x[u, W \setminus \{u\}] \\ &= x(\delta(W)) + 2 - 2\, x(\delta(W) \cap \delta(u)) \\ &\leq x(\delta(W)) + 2 - 2 \\ &= x(\delta(W)). \end{aligned}$$

Et la coupe $\delta(W \setminus \{u\})$ est au moins aussi violée par x que $\delta(W)$.

Considérons maintenant une partition $(V_1, \ldots, V_p)$, $p \geq 3$, violée par x. Supposons, sans perte de généralité, que $u \in V_1$ et $v \in V_2$. Si $|V_1| = 1$, alors, puisque $r(u) = 1$, les

partitions $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$ et $(V_1, \ldots, V_p)$ sont de même type. Ainsi, en considérant la partition $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$ à la place de $(V_1, \ldots, V_p)$, le membre droit décroit de 1, tandis que le membre gauche décroit de $x[V_1, V_2] \geq x(f) = 1$. Par conséquent, la partition $(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$ est au moins aussi violée par x que $(V_1, \ldots, V_p)$.
Si $|V_1| \geq 2$, alors nous pouvons faire un raisonnement similaire au précédent pour la partition $(V_1 \setminus \{u\}, V_2 \cup \{u\}, V_3, \ldots, V_p)$ et montrer que l'inégalité définie par cette dernière partition est au moins aussi violée par x que celle définie par $(V_1, \ldots, V_p)$. □

À la vue de ces résultats et afin d'améliorer la performance de nos procédures de séparation, nous avons implémenté les opérations Θ_1, Θ_2' et Θ_3. Ainsi, si nous obtenons une inégalité de coupe ou de partition violée par x' (*i.e.* la restriction de x dans le graphe G' obtenu en appliquant successivement Θ_1, Θ_2' et Θ_3), alors cette inégalité peut être "liftée" très aisément en une inégalité de coupe ou de partition dans G qui coupe x. En effet, seules les arêtes traitées dans l'opération Θ_1 doivent être étudiées. Toujours dans un soucis d'efficacité, nous allons également appliquer notre procédure de séparation des inégalités de F-partition à notre graphe G', puisque cette dernière est une heuristique.

Dans ce qui suit, nous allons décrire nos procédures de séparation. Pour cela, supposons que nous avons un graphe $G = (V, E)$, un vecteur types de sommets $r \in \{1, 2\}^V$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}^E$ tel que $0 \leq x(e) \leq 1$, pour tout $e \in E$. Nous considérerons alors le graphe $G' = (V', E')$ obtenu à partir de G en appliquant successivement les opérations Θ_1, Θ_2' et Θ_3, le vecteur types de sommets $r' \in \{1, 2\}^{V'}$ ainsi obtenus et la restriction x' de x dans G'.

6.2.3 Séparation des contraintes de coupe

Le problème qui consiste à déterminer une ou plusieurs contraintes de coupe violées par x' peut être résolu en appliquant l'algorithme de Gomory-Hu [94] au graphe G' avec le vecteur coûts x' associés aux arêtes de G'. Cet algorithme produit, d'une part, une coupe minimum dans le graphe G'. D'autre part, il fournit l'*arbre de Gomory-Hu* T ainsi que des poids $t(e)$ pour tout $e \in T$. Cet arbre a la propriété que, pour toute paire de sommets u, $v \in V'$, la coupe minimum entre u et v dans T (par rapport aux coûts $t(e)$) est aussi la coupe minimum entre ces deux sommets dans G' (par rapport aux coûts $x'(e)$).

Gusfield [102] a donné une version de cet algorithme qui est très simple à implémenter. Elle consiste à résoudre $|V'| - 1$ problèmes de flot maximum dans le graphe G' en

respectant un certain ordre. En effet, en raison du fameux théorème flot maximum - coupe minimum, dû à Ford et Fulkerson [71], nous pouvons résoudre le problème de recherche d'une coupe minimum en temps polynomial. Un des plus performants algorithmes de calcul de flot maximum est celui de Goldberg et Tarjan [93]. Ainsi, pour tous nos problèmes de flot maximum (et donc de coupe minimum), nous allons utiliser le code, implémenté par Goldberg et Tarjan, correspondant à cet algorithme.

Les problèmes ESNDP que nous traitons ont des vecteurs types de sommets en 1 et 2. Par conséquent, dans notre algorithme de séparation des contraintes de coupe, nous sommes amenés à distinguer les coupes $x(\delta(W)) \geq 2$ des coupes $x(\delta(W)) \geq 1$. Tout d'abord, nous traitons les coupes dont le membre droit est égal à 2. Pour cela, nous cherchons l'arbre de Gomory-Hu T_2 dans G' en ne considérant, dans cet arbre, que les sommets ayant un type de connexité égal à 2. Ainsi, si la coupe minimum entre deux sommets dans T_2 est strictement inférieur à 2, alors nous obtenons une coupe dans G' violée par x'.
Par la suite, nous cherchons les coupes de type $x(\delta(W)) \geq 1$ violées par x'. Dans ce cas, tous les sommets ayant un type de connexité égal à 2 appartiennent soit à W soit à $\overline{W}$. Nous considérons le graphe G'_1 obtenu à partir de G' en contractant l'ensemble des sommets de types de connexité égal à 2. Nous cherchons ensuite l'arbre de Gomory-Hu T_1 dans G'_1. Si la coupe minimum entre deux sommets dans T_1 est strictement inférieur à 1, alors cette coupe est violée dans G'_1 et par conséquent dans G'.

Posons $V' = V_1 \cup V_2$, où $V_1 = \{v_1, \ldots, v_{n_1}\}$ et $V_1 = \{u_1, \ldots, u_{n_2}\}$ sont les sous-ensembles de sommets ayant respectivement des types de connexité égaux à 1 et 2. La procédure de séparation des contraintes de coupe est décrite dans l'algorithme 6.2.

Algorithme 6.2 : Séparation des contraintes de coupe.

Données : un graphe $G' = (V_1 \cup V_2, E')$, un vecteur types de sommets $r' \in \{1,2\}^{V_1 \cup V_2}$ et un vecteur $x' \in \mathbb{R}_+^{E'}$.
Sortie : listes de contraintes de coupe violées par x'.

1 : **Pour** i **allant de** 2 **à** n_2 **faire**
    Voisin[i] $\longleftarrow u_1$
  i $\longleftarrow$ 2

2 : Calculer une coupe minimum $\delta(W')$, dans G', entre u_i et Voisin[i] telle que $u_1 \in W'$.

3 : **Si** $x'(\delta(W')) < 2$ **alors**
Ajouter $\delta(W')$ à la liste des coupes violées par x'.
4 : **Pour** j **allant de** i **à** n_2 **faire**
Si $u_j \in W'$ et Voisin$[j]$ = Voisin$[i]$ **alors**
Voisin$[j] \longleftarrow u_i$
5 : $i \longleftarrow i + 1$
Si $i \leq n_2$ **alors**
Aller à 2.
6 : $G'_1 = (V'_1, E'_1) \longleftarrow$ graphe obtenu à partir de G' en contractant V_2.
Soient v_{n_1+1} le sommet résultant de la contraction et x'_1 la restriction de x' dans G'_1.
7 : **Pour** i **allant de** 2 **à** $n_1 + 1$ **faire**
Voisin$[i] \longleftarrow v_1$
i $\longleftarrow$ 2
8 : Calculer une coupe minimum $\delta(W'_1)$, dans G'_1, entre v_i et Voisin$[i]$ telle que $v_1 \in W'_1$.
9 : **Si** $x'_1(\delta(W'_1)) < 1$ **alors**
Ajouter $\delta(W'_1)$ à la liste des coupes violées par x'.
10 : **Pour** j **allant de** i **à** $n_1 + 1$ **faire**
Si $v_j \in W'_1$ et Voisin$[j]$ = Voisin$[i]$ **alors**
Voisin$[j] \longleftarrow v_i$
11 : $i \longleftarrow i + 1$
Si $i \leq n_1 + 1$ **alors**
Aller à 8.

Notre algorithme nécessite donc au plus $|V'|$ appels de la fonction qui calcule une coupe minimum. Or cette dernière a une complexité en $O(n^3)$. Par ailleurs, la construction du graphe G'_1 a une complexité en $O(n^2)$. Ainsi, notre algorithme 6.2 a une complexité en $O(n^4)$.

6.2.4 Séparation des contraintes de partition

Dans la section 4.2.2, nous avons montré que le problème de séparation des contraintes de partition (4.3) est polynomial. De plus, nous avons vu que nous devons distinguer

les partitions de type 1 des partitions de type 2. Par ailleurs, nous rappelons que les contraintes de partition sont dominées par les contraintes de coupe lorsque $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$. Ainsi, les procédures que nous allons présenter seront appliquées exclusivement pour des types de sommets en 1 et 2.

• *partition de type 1*

Pour de telles partitions, tous les sommets ayant un type de connexité égal à 2 appartiennent au même élément de la partition. Ainsi, d'une manière similaire à la séparation des inégalités de coupe $x(\delta(W)) \geq 1$, nous considérons le graphe $G'_1 = (V'_1, E'_1)$ obtenu à partir de G' en contractant l'ensemble des sommets de type de connexité égal à 2.

Ce problème de séparation des contraintes de partition a déjà été étudié dans la littérature. Le premier algorithme de séparation pour ce cas a été donné par Cunningham [51] qui a ramené ce problème à $|E'_1|$ problèmes de coupe minimum. Par la suite, Barahona [11] (voir aussi Baïou, Barahona et Mahjoub [5]) a montré que ce problème peut se ramener à $|V'_1|$ problèmes de coupe minimum. Ainsi, pour séparer les contraintes de partition de type 1, nous avons implémenté l'algorithme de Barahona que nous présentons maintenant. Cet algorithme est basé sur la formulation étendue du dominant du polytope des arbres couvrants. Barahona a alors montré que le problème de séparation des inégalités de partition de type 1 est équivalent à optimiser une fonction linéaire sur un polymatroïde étendu.

Nash-Williams [140] et Tutte [166] ont montré que le dominant du polytope des arbres couvrants dans un graphe $G = (V, E)$, que nous noterons par $PAC(G)$, est défini par

$$\begin{aligned} & x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1 \qquad \text{pour toute partition de } V, \qquad (6.7) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Jünger et Pulleyblank [108] ont donné une formulation étendue de $PAC(G)$ comme suit

$$x(\delta(S)) + y(S) \geq 2 \qquad \text{si } r \notin S,\ S \subset V, \qquad (6.8)$$

$$x(\delta(S)) + y(S) \geq 0 \qquad \text{si } r \in S,\ S \subset V, \qquad (6.9)$$

$$y(V) = 0 \qquad (6.10)$$

$$x \geq 0, \qquad (6.11)$$

où r est un sommet aléatoire de V, et x et y sont des variables associées respectivement aux arêtes et aux sommets.

Le principe de l'algorithme est assez simple. Le problème peut être résolu en utilisant l'algorithme glouton utilisé par Edmonds [67]. À chaque itération, trouver une inégalité qui devient serrée est équivalent à trouver une coupe minimum entre deux sommets dans un graphe orienté particulier. Étant donné un vecteur $\overline{x} \geq 0$, l'algorithme permet de trouver un vecteur $\overline{y} \in \mathbb{R}_+^V$ tel que $(\overline{x}, \overline{y})$ satisfasse (6.8)-(6.11) ou prouver que $\overline{y}$ n'existe pas. Ainsi, comme nous le verrons ultérieurement, cela nous donnera l'inégalité de partition (6.7) la plus violée par $\overline{x}$, s'il en existe une.

Soit

$$f(S) = \begin{cases} 2 - \overline{x}(\delta(S)) & \text{si } r \notin S, \\ \\ -\overline{x}(\delta(S)) & \text{si } r \in S, \end{cases}$$

pour $\emptyset \neq S \subseteq V$. Il n'est pas difficile de voir que la fonction $-f$ est sous-modulaire pour les paires intersectantes. Considérons alors le problème suivant

$$(6.12) \begin{cases} \text{Minimiser } y(V) \\ \\ y(S) \geq f(S) & \text{pour } S \subseteq V. \end{cases}$$

Edmonds [67] a montré que l'algorithme glouton permet, d'une part, de résoudre le programme linéaire (6.12) et, d'autre part, de produire une solution optimale de son problème dual qui peut s'écrire comme suit

$$(6.13) \begin{cases} \text{Maximiser } \sum z_S \ f(S) \\ \\ \sum\{z_s \mid u \in S\} = 1 & \text{pour tout } u \subseteq V, \\ z \geq 0. \end{cases}$$

Étant donnée une solution de (6.12), un ensemble $S \subseteq V$ est dit *serré* si $y(S) = f(S)$. La fonction $y(.) - f(.)$ est non-négative et sous-modulaire pour les paires intersectantes. Par conséquent, d'après le lemme 1.2, si S et T sont deux ensembles serrés, alors $S \cap T$ et $S \cup T$ le sont également. Cette dernière remarque est essentielle pour l'algorithme. Montrons maintenant que cet algorithme fournit l'inégalité la plus violée s'il en existe une.

Notons par $\mathcal{F}$ la famille des ensembles serrés ayant une variable duale positive. Si nous voulons ajouter un ensemble S à $\mathcal{F}$ et il existe $T \in \mathcal{F}$ tel que $S \cap T \neq \emptyset$, alors nous remplaçons S et T par $S \cup T$ qui est également serré. La famille $\mathcal{F}$, obtenue à la fin de l'algorithme, définit une partition de V. De plus, $\overline{y}(S) = f(S)$ pour tout $S \in \mathcal{F}$

où $\overline{y}$ est la solution construite par l'algorithme et qui satisfait (6.12). Posons $\overline{z}_S = 1$ si $S \in \mathcal{F}$ et $\overline{z}_S = 0$ sinon. Il est clair que $\overline{z}$ est une solution de (6.13). Aussi, nous avons

$$y(V) = \sum\{\overline{y}(S) \mid S \in \mathcal{F}\} = \sum\{f(S) \mid S \in \mathcal{F}\} = \sum\{f(S)\overline{z}_S \mid S \in \mathcal{F}\}.$$

Ceci prouve que $\overline{y}$ et $\overline{z}$ sont des solution optimales.

Si la valeur de l'optimum est nulle, alors $(\overline{x}, \overline{y})$ satisfait (6.8)-(6.11). Dans ce cas, pour une partition quelconque $(V_1, \ldots, V_p)$ de V, nous pouvons additionner les inégalités (6.8) et (6.9) associées aux ensembles V_i ainsi que l'inégalité $-y(V) \geq 0$. Nous obtenons alors

$$\overline{x}(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1.$$

Ceci montre que $\overline{x}$ satisfait toutes les contraintes de partition (6.7).

Si la valeur de l'optimum est strictement supérieure à 0, considérons alors $\mathcal{G} = \{S \mid \overline{z}_S = 1\} = \{S_1, \ldots, S_p\}$. La famille $\mathcal{G}$ donne une partition de V, et nous avons

$$\sum f(s)\ \overline{z}_S = 2(p-1) - 2\ \overline{x}(\delta(S_1, \ldots, S_p)).$$

Puisque $\overline{z}$ est l'optimum de (6.13) et $\sum f(s)\ \overline{z}_S > 0$, nous obtenons l'inégalité de partition (6.7) la plus violée par $\overline{x}$.

Nous pouvons maintenant donner l'algorithme 6.3 qui décrit notre procédure de séparation des contraintes de partition de type 1 dans G'_1. Posons $V'_1 = \{v_1, \ldots, v_{n'_1}\}$. Soit x'_1 la restriction de x' dans G'_1.

Algorithme 6.3 : Séparation des contraintes de partition de type 1.

Données : un graphe $G'_1 = (V'_1, E'_1)$ et un vecteur $x'_1 \in \mathbb{R}_+^{E'_1}$.
Sortie : une contrainte de partition de type 1 violées par x'_1.

1 : **Pour** i **allant de** 1 **à** n'_1 **faire**
  $\overline{y}(v_i) \longleftarrow 2$
  $\mathcal{F} \longleftarrow \emptyset$
  $k \longleftarrow 1$
2 : **Si** v_k appartient à un ensemble de $\mathcal{F}$ **alors**
  Aller à 4.

Sinon

$\alpha \longleftarrow f(\overline{S}) - \overline{y}(\overline{S}) = \max\{f(S) - \overline{y}(S) \mid v_k \in S\}$

$\overline{y}(v_k) \longleftarrow +\alpha$

$\mathcal{F} \longleftarrow \mathcal{F} \cup \{\overline{S}\}$

3 : **Tant qu'**il existe deux ensembles S et T dans $\mathcal{F}$ tels que $S \cap T \neq \emptyset$ **Faire**

$\mathcal{F} \longleftarrow (\mathcal{F} \setminus \{S, T\}) \cup \{S \cup T\}$

4 : $k \longleftarrow k + 1$

Si $k \leq n'_1$ **alors**

Aller à 2.

5 : **Si** $\overline{y}(V'_1) > 0$ **alors**

La partition de type 1 obtenue est violée par x'_1.

Il nous reste encore un point à préciser qui est le calcul de α dans l'étape 2. Pour cela, nous construisons le graphe orienté $D = (N, A)$, où

$$N = V'_1 \cup \{s, t\},$$
$$A = \{(i, j),\ (j, i) \mid ij \in E'_1\} \cup \{(s, i), (i, t) \mid i \in V'_1\}.$$

Définissons

$$\eta(i) = \begin{cases} \overline{y}(i) & \text{si } i \in V'_1 \setminus \{r\}, \\ \\ \overline{y}(i) + 2 & \text{si } i = r, \end{cases}$$

et les capacités

$$c(s, i) = \begin{cases} -\eta(i) & \text{si } \eta(i) < 0,\ i \in V'_1,\ i \neq v_k, \\ 0 & \text{si } \eta(i) \geq 0,\ i \in V'_1,\ i \neq v_k, \\ \infty & \text{si } i = v_k, \end{cases}$$

$$c(i, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta(i) < 0,\ i \in V'_1,\ i \neq v_k, \\ \\ \eta(i) & \text{si } \eta(i) \geq 0,\ i \in V'_1, \end{cases}$$

$$c(i, j) = c(j, i) = \overline{x}(ij) \qquad \text{si } ij \in E'_1.$$

Barahona a donné le lemme suivant.

Lemme 6.9 [11] *Si $T \cup \{s\}$ induit une coupe, de capacité λ, séparant s et t dans D, alors*

$$\overline{y}(T) + \overline{x}(\delta(T)) = \begin{cases} \lambda + \sum \{\eta(v) \mid \eta(v) < 0\} - 2 & \textit{si } r \in T, \\ \lambda + \sum \{\eta(v) \mid \eta(v) < 0\} & \textit{si } r \notin T. \end{cases}$$

Par ce lemme, si β est la valeur de la coupe minimum entre s et t dans D, alors la valeur de α est égale à

$$2 - \beta - \sum \{\eta(v) \mid \eta(v) < 0\}.$$

L'algorithme 6.3 calcule au maximum $|V_1'|$ valeurs de α. Or chaque calcul de α nécessite le calcul d'une coupe minimum qui, en utilisant l'algorithme de Goldberg et Tarjan (voir section 6.2.3), a une complexité en $O(n^3)$. Par conséquent, l'algorithme 6.3 a une complexité en $O(n^4)$.

• *partition de type 2*

Le problème de séparation des contraintes de partition a déjà été étudié dans la littérature lorsque les types de connexité associés aux sommtes sont en 0, 1 et 2. Plus particulièrement, Grötschel, Monma et Stoer [100] ont montré que ce problème est NP-Difficile. Ils ont ainsi développé des heuristiques pour résoudre ce problème de séparation. Et, ils ont conclu que les contraintes de partition semblent très utiles dans le cadre d'un algorithme de coupes et branchements. Ils ont, par ailleurs, mis l'accent sur la nécessité d'améliorer les procédures de séparation pour ces contraintes.

Pour des types de sommets en 1 et 2, le problème de séparation des inégalités de partition n'a pas été, à notre connaissance, étudié dans la littérature. Dans le théorème 4.3, nous avons montré que ce problème est polynomial, et que, pour des partitions de type 2, il se ramène à la minimisation d'une fonction sous-modulaire. Récemment, Schrijver [159] et Iwata, Fleischer et Fujishige [107] ont donné des algorithmes fortement polynomiaux pour minimiser une fonction sous-modulaire. Étant donné que ces deux algorithmes sont combinatoires, ils ont un réel intérêt pratique. Malheureusement, leur complexité trop élevée, de l'ordre de $O(n^9)$-$O(n^{10})$, nous a dissuadé de les impléménter. Par conséquent, nous avons développé des heuristiques pour séparer les contraintes

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p \qquad \text{pour toute partition de type 2 de } V. \tag{6.14}$$

Nous allons présenter deux heuristiques. La première est une application directe de l'algorithme de Barahona vu précédemment. En appliquant cet algorithme au graphe G', nous obtenons l'inégalité de partition de type $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p-1$ la plus violée par x'. Nous devons maintenant voir si la partition ainsi obtenue est de type 2. Ainsi, si le nombre d'éléments de cette partition ayant un type de connexité égal à 2 est supérieur ou égal à 2, alors nous avons obtenu une inégalité de partition de type 2 violée par x'. Par contre, si ce nombre est égal à 1, alors nous avons

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geq p - 1 \qquad \text{pour toute partition de type 2 de } V. \tag{6.15}$$

En conséquence, nous avons dû développer une heuristique qui nous permet de trouver des inégalités de partition (6.14) violées par x' mais vérifiant (6.15). Avant de décrire cette heuristique, nous présentons l'algorithme 6.4 qui permet de séparer les inégalités de partition (6.14) violées par x' de plus de 1.

Algorithme 6.4 : Séparation des contraintes de partition de type 2 violées de plus de 1.

Données : un graphe $G' = (V_1 \cup V_2, E')$, un vecteur types de sommets $r' \in \{1,2\}^{V_1 \cup V_2}$ et un vecteur $x' \in \mathbb{R}_+^{E'}$.
Sortie : une contrainte de partition de type 2 violée par x'.

1 : Appliquer l'algorithme 6.3 au graphe G'.
2 : Calculer le nombre α_1 d'élements de la partition ayant un type de connexité égal à 2.
3 : **Si** $\alpha_1 \geq 2$ **alors**
La partition de type 2 obtenue est violée par x'.

Cet algorithme fait appel à l'algorithme 6.3 qui a une complexité en $O(n^4)$. Puisque le calcul de α_1 a une complexité en $0(n)$, la complexité de l'algorithme 6.4 est également en $O(n^4)$.

Notre deuxième heuristique est basée sur la notion d'inégalités de coupe que nous essayons de transformer en inégalités de partition de type 2 violées. De manière à garantir le type 2 de la partition obtenue, nous cherchons les coupes minimum entre les sommets ayant un type de connexité égal à 2, comme nous l'avons décrit dans la première phase (étapes 1-5) de l'algorithme 6.2. Ainsi, nous construisons un arbre de Gomory-Hu. Pour pouvoir transformer une coupe de cet arbre en une partition de type 2 violée, nous avons besoin d'écrire les inégalités de partition de type 2 de manière différente.

Lemme 6.10 *Il existe une inégalité de partition de type 2 violée si et seulement s'il existe* $W_1 \subset V'$, $con(W_1) = 2$ *tel que*

$$x'(\delta(W_1)) - 2 + min\{x'(\delta_{\overline{W_1}}(W_2, \ldots, W_p)) - (p-2)\} < 0.$$

Preuve. Découle directement de l'équivalence entre le problème (4.7) et la minimisation de la fonction g définie dans la preuve du théorème 4.3. □

Puisque le vecteur x' satisfait les contraintes de coupe dans G', alors, pour toute coupe $\delta(W')$ trouvée dans l'arbre de Gomory-Hu, nous avons $x'(\delta(W')) \geq 2$. Par conséquent, si une telle coupe peut être transformée en une partition de type 2 violée par x', nous avons alors

$$\min\{x'(\delta_{\overline{W'}}(W_1, \ldots, W_p)) - (p-1)\} < 0.$$

Et le problème qui consiste à minimiser $x'(\delta_{\overline{W'}}(W_1, \ldots, W_p)) - (p-1)$ peut être résolu en appliquant l'algorithme de Barahona vu précédemment. Ainsi, la deuxième phase de notre algorithme consiste à chercher la partition de poids minimum dans les graphes $G(W')$ et $G(\overline{W}')$. Notre algorithme de séparation des inégalités de partition de type 2 violées de moins de 1 peut s'écrire de la manière suivante. Posons $V' = V_1 \cup V_2$ où $V_1 = \{v_1, \ldots, v_{n_1}\}$ et $V_2 = \{u_1, \ldots, u_{n_2}\}$ sont les sous-ensembles de sommets ayant respectivement des types de connexité égaux à 1 et 2.

Algorithme 6.5 : Séparation des contraintes de partition de type 2 violées de moins de 1.

Données : un graphe $G' = (V_1 \cup V_2, E')$, un vecteur types de sommets $r' \in \{1,2\}^{V_1 \cup V_2}$ et un vecteur $x' \in \mathbb{R}_+^{E'}$.
Sortie : une liste de contraintes de partition de type 2 violées par x'.

1 : **Pour** i **allant de** 2 **à** n_2 **faire**
  Voisin$[i] \longleftarrow u_1$
  $i \longleftarrow 2$
2 : Calculer une coupe minimum $\delta(W')$ dans G' entre u_i et Voisin$[i]$ telle que $u_1 \in W'$.
3 : Appliquer l'algorithme 6.3 au graphe $G(W')$.
4 : **Si** une partition $(W'_1, \ldots, W'_{p'})$ est trouvée dans $G(W')$ **alors**
  $\alpha' \longleftarrow x'(\delta(W')) + x'(\delta(W'_1, \ldots, W'_{p'}))$
  Sinon
  Aller à 6.
5 : **Si** $\alpha' < p' + 1$ **alors**
  Ajouter $(W', W'_1, \ldots, W'_{p'})$ à la liste des partitions de type 2 violées par x'.
6 : Appliquer l'algorithme 6.3 au graphe $G(\overline{W}')$.
7 : **Si** une partition $(W''_1, \ldots, W''_{p''})$ est trouvée dans $G(\overline{W}')$ **alors**
  $\alpha'' \longleftarrow x'(\delta(W')) + x'(\delta(W''_1, \ldots, W''_{p''}))$

Sinon

Aller à 9.

8 : **Si** $\alpha'' < p'' + 1$ **alors**

Ajouter $(\overline{W}', W''_1, \ldots, W''_{p''})$ à la liste des partitions de type 2 violées par x'.

9 : **Pour** j **allant de** i **à** n_2 **faire**

Si $u_j \in W'$ et Voisin$[j]$ = Voisin$[i]$ **alors**

Voisin$[j] \longleftarrow u_i$

10 : $i \longleftarrow i + 1$

Si $i \leq n_2$ **alors**

Aller à 2.

Notre algorithme comporte $|V_2|$ itérations. Et chaque itération consiste à calculer une coupe minimum et à appliquer 2 fois l'algorithme 6.3. Puisque ce dernier a une complexité en $O(n^4)$ et le calcul d'une coupe minimum a une complexité en $O(n^3)$, la complexité de notre algorithme 6.5 est en $O(n^5)$.

6.2.5 Séparation des contraintes de F-partition

Lorsque le vecteur types de sommets est en 1 et 2, les inégalités de F-partition s'écrivent de la manière suivante.

$$x(\delta(V_0, V_1, \ldots, V_p) \setminus F) \geq p - \left\lfloor \frac{p_1 + |F|}{2} \right\rfloor, \tag{6.16}$$

où p_1 est égal au nombre d'éléments, à l'exception de V_0, de la partition $(V_0, V_1, \ldots, V_p)$ ayant un type de connexité égal à 1. À la vue de l'étude réalisée dans la section 6.1.3, la complexité du problème de séparation des inégalités (6.16) nous est inconnue. Ainsi, nous avons développé une heuristique pour séparer ces inégalités. Cette heuristique se décompose en deux parties.

Lorsque tous les sommets ont un type de connexité égal à 2, Fonlupt et Mahjoub [70] ont caractérisé les points extrêmes fractionnaires, dits critiques, du polytope $Q(G, r)$ défini par les contraintes triviales et les contraintes de coupe. Ils ont ainsi montré que si $\overline{x}$ est un point extrême fractionnaire minimal de ce polytope, alors le graphe G et $\overline{x}$ peuvent être réduits, au sens de certaines opérations de réduction, à un graphe $G' = (V', E')$

et un point extrême $\overline{x}'$ de $Q(G', r')$, où G' et $\overline{x}'$ satisfont certaines propriétés. Ils ont prouvé que la paire $G', \overline{x'}$ vérifie les propriétés

i) $V' = V'_1 \cup V'_2$ avec $V'_1 \cap V'_2 = \emptyset$,
$E' = E'_1 \cup E'_2$ avec $E'_1 \cap E'_2 = \emptyset$,
(V'_1, E'_1) est un cycle impair,
(V'_2, E'_2) est une forêt dont les sommets pendants sont dans V'_1 et tous les sommets de V'_2 sont de degré 3,
ii) $\overline{x}'(e) = \frac{1}{2}$ pour $e \in E'_1$,
$\overline{x}'(e) = 1$ pour $e \in E'_2$,
iii) pour toute coupe propre $\delta(W')$ de G', $\overline{x}'(\delta(W')) > 2$.

En se basant en partie sur ce résultat, nous avons développé une heuristique qui a le schéma suivant. Tout d'abord, nous cherchons les cycles composés d'arêtes fractionnaires dans le graphe G'. Puis, pour chaque cycle $(v_1, \ldots, v_p)$ détecté, nous essayons de trouver un sous-ensemble d'arêtes F parmi celles ayant exactement une extrémité appartenant à ce cycle, de telle sorte que l'inégalité de F-partition induite par la partition $(V \setminus \{v_1, \ldots, v_p\}, \{v_1\}, \ldots, \{v_p\})$ et F soit violée. L'algorithme suivant décrit cette heuristique.

Algorithme 6.6 : Séparation des contraintes de F-partition (première partie).

Données : un graphe $G' = (V_1 \cup V_2, E')$, un vecteur types de sommets $r' \in \{1, 2\}^{V_1 \cup V_2}$ et un vecteur $x' \in \mathbb{R}_+^{E'}$.
Sortie : une liste de contraintes de F-partition violées par x'.

1 : Rechercher les cycles composés d'arêtes fractionnaires.
Notons par $(v_1^i, \ldots, v_{p_i}^i)$, $i = 1, \ldots, p$, les cycles ainsi trouvés.
2 : $i \longleftarrow 1$
3 : $p^1 \longleftarrow$ nombre de sommets du $i^{\text{ème}}$ cycle ayant un type de connexité égal à 1.
4 : Sélectionner un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq \delta(\{v_1^i, \ldots, v_{p_i}^i\})$ tel que $|F|$ et p^1 soient de parité différente.
5 : **Si** $x'(\delta(V \setminus \{v_1^i, \ldots, v_{p_i}^i\}, \{v_1^i\}, \ldots, \{v_{p_i}^i\}) \setminus F) < p_i - \frac{p^1 + |F| - 1}{2}$ **alors**
Ajouter cette inégalité à la liste des F-partitions violées par x'.
6 : $i \longleftarrow i + 1$
Si $i \leq s$ **alors**

Aller à 3.

Pour réaliser l'étape 1 de l'algorithme 6.6, nous avons implémenté un algorithme qui permet de déterminer les composantes 2-connexes d'un graphe non orienté. Cet algorithme récursif est basé sur un parcours en profondeur et a une complexité en $O(n^2)$. Ainsi, la complexité de l'algorithme 6.6 est en $O(n^2)$.

Lorsque l'algorithme 6.6 ne détecte plus d'inégalités de F-partition violées par x', la deuxième partie de notre heuristique de séparation des inégalités de F-partition intervient. Dans celle-ci, nous essayons de transformer des inégalités de coupe en inégalités de F-partition. Cependant, les coupes qui vont nous intéresser sont celles qui contiennent le maximum d'arêtes ayant une valeur égale à 1. En effet, ce sont ces arêtes qui ont la probabilité la plus forte d'appartenir à l'ensemble F. Pour déterminer de telles coupes, nous allons construire l'arbre de Gomory-Hu pour le graphe G' et le vecteur poids $w' \in \mathbb{R}_+^{E'}$, associés aux arêtes de G', et défini comme suit

$$w'(e) = 1 - x'(e) \qquad \text{pour tout } e \in E'.$$

Nous faisons remarquer que dans le graphe G', nous avons $x'(e) > 0$ pour tout $e \in E'$. Ainsi, plus une arête $e \in E'$ a un coût $x'(e)$ proche de 1 (et donc $w'(e)$ proche de 0), plus sa probabilité d'être dans une coupe minimum est élevée. Par la suite, pour chaque coupe $\delta(W)$ ainsi trouvée, nous calculons p_1 et p'_1 qui sont respectivement égaux au nombre de sommets de W et $\overline{W}$ ayant un type de connexité égal à 1. Puis nous essayons de sélectionner un sous-ensemble d'arêtes $F_1 \subseteq \delta(W)$ (resp. $F'_1 \subseteq \delta(W)$) tel que $|F_1|$ et p_1 (resp. $|F'_1|$ et p'_1) soient de parité différente, de telle sorte que l'inégalité

$$x'(\delta(W) \setminus F_1) + x'(E(W)) < |W| - \frac{p_1 + |F_1| - 1}{2}$$

$$\text{(resp. } x'(\delta(W) \setminus F'_1) + x'(E(\overline{W})) < |\overline{W}| - \frac{p'_1 + |F'_1| - 1}{2}\text{)}$$

soit violée. Notre deuxième partie de l'algorithme de séparation des inégalités de F-partition se présente donc de la manière suivante. Posons $V' = \{v_1, \ldots, v_{n'}\}$ et $E' = \{e_1, \ldots, e_{m'}\}$.

Algorithme 6.7 : Séparation des contraintes de F-partition (deuxième partie).

Données : un graphe $G' = (V_1 \cup V_2, E')$, un vecteur types de sommets $r' \in \{1,2\}^{V_1 \cup V_2}$ et un vecteur $x' \in \mathbb{R}_+^{E'}$.
Sortie : une liste de contraintes de F-partition violées par x'.

1 : **Pour** i **allant de** 1 **à** m' **Faire**
  $w'(e_i) = 1 - x'(e_i)$.
  Pour i **allant de** 2 **à** n' **Faire**
  Voisin$[i] = v_1$.
2 : $i \longleftarrow 2$
3 : Calculer une coupe minimum $\delta(W')$ dans G' (avec le vecteur poids w') entre v_i et Voisin$[i]$.
4 : $p_1 \longleftarrow$ nombre de sommets de W ayant un type de connexité égal à 1.
5 : Sélectionner un sous-ensemble d'arêtes $F_1 \subseteq \delta(W)$ tel que $|F_1|$ et p_1 soit de parité différente.
6 : **Si** $x'(\delta(W)) \setminus F_1) < |W| - \frac{p_1+|F_1|-1}{2}$ **alors**
  Ajouter cette inégalité à la liste des F-partitions violées par x'.
7 : $p'_1 \longleftarrow$ nombre de sommets de $\overline{W}$ ayant un type de connexité égal à 1.
8 : Sélectionner un sous-ensemble d'arêtes $F'_1 \subseteq \delta(W)$ tel que $|F'_1|$ et p'_1 soit de parité différente.
9 : **Si** $x'(\delta(W)) \setminus F'_1) < |W| - \frac{p'_1+|F'_1|-1}{2}$ **alors**
  Ajouter cette inégalité à la liste des F-partitions violées par x'.
10 : $i \longleftarrow i + 1$
  Si $i \leq n'$ **alors**
  Aller à 3.

L'initialisation du vecteur w' a une complexité en $O(n^2)$. Puis, nous avons ensuite $n'-1$ itérations, qui ont chacune comme opération principale le calcul d'une coupe minimum. Ainsi, chaque itération a une complexité en $O(n^3)$. Par conséquent, l'algorithme 6.7 a une complexité en $O(n^4)$.

6.3 Résultats expérimentaux

6.3.1 Contexte informatique

Avant de présenter nos résultats expérimentaux, nous précisons le contexte purement informatique dans lequel ils ont été obtenus. Plus particulièrement, nous donnons un bref descriptif du logiciel gérant la phase de coupes et branchements.

Notre algorithme est basé sur une utilisation du logiciel MINTO ("Mixed INTeger Optimizer"), version 3.0 [142]. C'est un outil qui permet de résoudre des programmes linéaires mixtes, en utilisant des techniques de branchements et évaluations.

L'efficacité d'un algorithme de branchements et évaluations dépend beaucoup de la procédure d'évaluation utilisée ainsi que de la taille du problème. Lorsque les bornes fournies par cette procédure sont assez larges et la taille du problème est importante, l'obtention d'une solution optimale peut nécessiter un temps considérable. Ainsi, dans le but d'accélérer le calcul de cette solution, MINTO, par sa conception très modulaire, permet à l'utilisateur d'incorporer des fonctions spécifiques au problème. Les procédures de séparation des contraintes valides que nous venons de voir sont des exemples de telles fonctions. Pour ce qui est de la résolution des programmes linéaires, MINTO fait appel au logiciel CPLEX, version 4.0 [19], qui est une implémentation très rapide de l'algorithme du simplexe.

Ce travail expérimental, implémenté en langage C, a été réalisé sur un Pentium III cadencé à 450 Mhz avec 256 Mo de mémoire vive. Dans la prochaine section, nous allons présenter les instances sur lesquelles nous avons effectué nos tests.

6.3.2 Description des instances traitées

L'objectif principal de ce travail expérimental est de mesurer l'efficacité des contraintes présentées précédemment dans un algorithme de coupes et branchements pour le problème de conception de réseaux fiables avec des types de sommets soit tous égaux à 2, soit en 1 et 2. Ainsi, nous avons expérimenté notre algorithme sur des instances du problème du voyageur de commerce symétique prises dans la librairie TSPLIB [155].

Chaque nom d'instance est composé d'une suite alphanumérique dont le nombre donné à la fin correspond à la taille de l'instance, c'est-à-dire aux nombre de sommets. De

plus, pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe, un type de connexité égal à 2 est associé à chaque sommet, tandis que pour le problème ESNDP en 1 et 2, le type de connexité (1 ou 2) est généré aléatoirement pour chaque sommet.

Tous les graphes sur lesquels nous travaillons sont supposés complets. Par ailleurs, les coûts associés aux arêtes sont donnés de manière différente. Ainsi, pour chaque instance, le coût d'une arête peut être

- donné explicitement,
- égal à la distance euclidienne entre ses deux extrémités dont nous connaissons les coordonnées,
- égal à la distance (en kilomètres) entre ses deux extrémités qui sont deux points situés sur la Terre et dont nous connaissons les latitudes et les longitudes,
- égal à une distance "pseudo-eucidienne" entre ses deux extrémités dont nous connaissons les coordonnées.

Avant de donner les résultats expérimentaux obtenus, nous présentons les tableaux dans lesquels nos résultats sont reportés. La première colonne de chaque tableau contient la liste des problèmes traités. Les autres colonnes sont

V_1 : le nombre de sommets de type de connexité égal à 1 (uniquement si $r \in \{1,2\}^V$),

CC : la valeur de la solution optimale après l'ajout
- des contraintes de coupe (si $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$),
- des contraintes de coupe et de partition de type 1 (si $r \in \{1,2\}^V$),

NP : le nombre de contraintes de partition générées (uniquement si $r \in \{1,2\}^V$),

NFP : le nombre de contraintes de F-partition générées,

C : la valeur de la solution optimale avant la phase de branchements,

T : le temps CPU en secondes avant la phase de branchements,

Copt : la valeur de la solution optimale,

Pas1 : le pourcentage de l'erreur relative après l'ajout des contraintes de coupe et de partition de type 1 (uniquement si $r \in \{1,2\}^V$ pour ces dernières), c'est-à-dire

$$\frac{\text{Copt} - \text{CC}}{\text{Copt}} * 100,$$

Pas2 : le pourcentage de l'erreur relative avant la phase de branchements, c'est-à-dire

$$\frac{\text{Copt} - \text{C}}{\text{Copt}} * 100,$$

PB : la profondeur maximum de l'arbre exploré dans la phase de branchements,
SB : le nombre de sommets générés dans la phase de branchements,
TT : le temps CPU total en secondes.

Nous faisons remarquer que CC correspond à la valeur de la solution avant que nos heuristiques de séparation des inégalités de partition de type 2 (si $r \in \{1,2\}^V$) et de F-partition soient appliquées.

6.3.3 Le problème du sous-graphe 2-arête connexe

Les graphes traités ont un nombre de sommets qui est inférieur à 500. Ces graphes sont de taille assez moyenne, mais notre principal objectif est de montrer l'efficacité des opérations de réduction de graphes et des contraintes de F-partition pour résoudre à l'optimalité le problème du sous-graphe 2-arête connexe.

Les résultats présentés dans les tableaux 6.1 et 6.2 représentent les performances de notre algorithme de coupes et branchements lorsque les opérations de réduction sont appliquées et les inégalités de F-partition sont prises en compte.

Problème	**NC**	**CC**	**NFP**	**C**	**T**	**Copt**	**Pas1**	**Pas2**	**PB**	**SB**	**TT**
burma14	2	3323	0	3323	0.01	3323	0.0	0.0	0	1	0.01
ulysses16	5	6859	0	6859	0.02	6859	0.0	0.0	0	1	0.02
gr17	9	2085	0	2085	0.02	2085	0.0	0.0	0	1	0.02
gr21	0	2707	0	2707	0.01	2707	0.0	0.0	0	1	0.01
ulysses22	9	7013	0	7033	0.03	7013	0.0	0.0	0	1	0.02
gr24	5	1272	2	1272	0.03	1272	0.0	0.0	0	1	0.03
fri26	10	937	0	937	0.03	937	0.0	0.0	0	1	0.03
bayg29	11	1608	4	1610	0.07	1610	0.12	0.0	0	1	0.07
bays29	9	2013.50	20	2020	0.14	2020	0.32	0.0	0	1	0.14
dantzig42	19	697	2	698	0.12	699	0.29	0.14	1	3	0.16
swiss42	10	1272	1	1273	0.1	1273	0.08	0.0	0	1	0.1
att48	24	10604	1	10610.33	0.19	10628	0.23	0.17	1	3	0.35
gr48	21	4959	36	5017	0.59	5031	1.43	0.28	3	7	1.26
hk48	18	11444.50	3	11461	0.16	11461	0.14	0.0	0	1	0.16
eil51	22	422.50	62	426	2.15	426	0.82	0.0	0	1	2.82
berlin52	6	7542	0	7542	0.13	7542	0.0	0.0	0	1	0.13
brazil58	28	25354.50	4	25395	0.27	25395	0.0	0.0	0	1	0.27

TABLEAU 6.1

Problème	NC	CC	NFP	C	T	Copt	Pas1	Pas2	PB	SB	TT
st70	40	671	78	673	2.07	675	0.59	0.22	1	3	2.70
eil76	23	537	34	538	1.76	538	0.19	0.0	0	1	1.76
pr76	44	105120	156	106240.33	10.69	106492	1.29	0.24	5	17	14.97
rat99	43	1206	59	1209.50	2.93	1211	0.41	0.12	2	4	7.04
rd100	80	7899.33	15	7910	2.02	7910	0.13	0.0	0	1	2.02
kroA100	70	20936.50	111	21200.83	9.62	21261	1.53	0.28	7	44	18.05
kroB100	66	21834	175	22005.88	31.59	22059	1.02	0.24	3	9	79.71
kroC100	84	20472.50	143	20695.07	18.03	20749	1.33	0.26	4	15	40.08
kroD100	63	21141.50	182	21256.76	25.45	21294	0.72	0.17	3	7	47.66
kroE100	41	21799.50	191	21913.25	13.53	21923	0.56	0.04	1	3	14.57
eil101	45	627.50	73	628	5.17	629	0.24	0.16	3	5	27.19
lin105	49	14370.50	7	14379	1.09	14379	0.06	0.0	0	1	1.09
pr107	86	44303	0	44303	1.22	44303	0.0	0.0	0	1	1.22
bier127	78	117431	245	118082.375	46.04	118282	0.72	0.17	5	21	162.08
kroA150	95	26299	77	26389	19.54	26524	0.85	0.51	11	182	548.29
kroB150	92	25732.50	48	25845.50	11.75	26060	1.26	0.82	10	161	206.70
u159	59	41925	24	41995	4.65	42080	0.37	0.20	3	9	11.94
ts225	0	115605	64	117363	8.74	117363	1.50	0.0	0	1	8.74
a280	115	2566	182	2577.67	109.36	2579	0.50	0.05	1	3	155.15
pr264	90	49020.50	59	49124	25.98	49135	0.23	0.02	1	3	32.71
pr299	150	47380	207	47693.75	125.78	47718	0.71	0.05	2	5	142.68
fl417	258	11789.50	64	11805	126.13	11813	0.20	0.07	5	11	221.06

TABLEAU 6.2

Nous pouvons remarquer que sur les 39 instances traitées, les contraintes de coupe ont été suffisantes pour obtenir la solution optimale pour seulement 8 d'entre elles. Pour les 31 autres instances, nous avons toujours pu détecter des inégalités de F-partition violées par la solution courante, et cela en nombre parfois assez grand. Malgré cela, pour certaines instances, les contraintes de F-partition associées aux contraintes de coupe et aux contraintes triviales n'ont pas suffit pour résoudre le problème du sous-graphe 2-arête connexe à l'optimalité sans phase de branchements. Néanmoins, l'erreur relative entre la borne inférieure donnée à la fin de l'algorithme de coupes et la solution optimale est relativement petite. En effet, à l'exception des instances kroA150 et kroB150, elle n'excède pas 0.3%. Par conséquent, nous obtenons des phases de branchements dans lesquelles le nombre de noeuds évalués et la profondeur de l'arbre généré sont peu élevés. Et ceci semble avoir pour conséquence de rendre la phase de branchements plus rapide.

Par la suite, nous avons voulu mesurer l'efficacité de notre algorithme de coupes et

branchements sans que les opérations de réduction de graphes soient appliquées. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 6.3.

Problème	NC	CC	NFP	C	T	Copt	Pas1	Pas2	PB	SB	TT
burma14	2	3323	0	3323	0.03	3323	0.0	0.0	0	1	0.03
ulysses16	5	6859	0	6859	0.02	6859	0.0	0.0	0	1	0.02
gr17	9	2085	0	2085	0.02	2085	0.0	0.0	0	1	0.02
gr21	0	2707	0	2707	0.02	2707	0.0	0.0	0	1	0.02
ulysses22	14	7013	0	7013	0.04	7013	0.0	0.0	0	1	0.04
gr24	8	1272	2	1272	0.06	1272	0.0	0.0	0	1	0.06
fri26	23	937	0	937	0.06	937	0.0	0.0	0	1	0.06
bayg29	17	1608	2	1610	0.09	1610	0.12	0.0	0	1	0.09
bays29	8	2013.50	8	2020	0.15	2020	0.32	0.0	0	1	0.15
dantzig42	47	697	2	698	0.33	699	0.29	0.14	1	3	0.41
swiss42	29	1272	1	1273	0.16	1273	0.08	0.0	0	1	0.16
att48	42	10604	1	10610.33	0.45	10628	0.23	0.17	1	3	0.77
gr48	30	4959	18	5017	0.61	5031	1.43	0.28	3	7	1.52
hk48	18	11444.50	3	11461	0.31	11461	0.14	0.0	0	1	0.31
eil51	14	422.50	44	426	1.53	426	0.82	0.0	0	1	2.21
berlin52	29	7542	0	7542	0.24	7542	0.0	0.0	0	1	0.24
brazil58	61	25354.50	2	25395	0.51	25395	0.16	0.0	0	1	0.51
st70	167	671	21	673	4.57	675	0.59	0.22	1	3	5.24
eil76	18	537	4	538	0.88	538	0.19	0.0	0	1	0.88
pr76	76	105120	94	106194.83	15.78	106492	1.29	0.28	5	19	20.53
rat99	116	1206	11	1209.50	6.09	1211	0.41	0.12	2	5	10.19
rd100	141	7899.33	6	7910	3.84	7910	0.13	0.0	0	1	3.84
kroA100	142	20936.50	73	21195.33	16.70	21261	1.53	0.31	8	61	47.81
kroB100	100	21834	61	21998.15	16.48	22059	1.02	0.28	4	11	46.05
kroC100	172	20472.50	64	20692	14.02	20749	1.33	0.27	6	26	33.86
kroD100	172	21141.50	161	21266.67	50.94	21294	0.72	0.13	6	17	108.19
kroE100	97	21799.50	52	21911.75	11.23	21923	0.56	0.05	3	7	14.54
eil101	119	627.50	8	628	4.25	629	0.24	0.16	4	8	15.44
lin105	150	14370.50	2	14379	4.15	14379	0.06	0.0	0	1	4.15
pr107	110	44303	0	44303	3.31	44303	0.0	0.0	0	1	3.31
bier127	163	117431	34	118052.75	19.78	118282	0.72	0.19	8	29	120.76
kroA150	255	26299	33	26389	38.52	26524	0.85	0.51	13	167	518.06
kroB150	219	25732.50	20	25845.50	23.42	26060	1.26	0.82	11	201	395.14
u159	132	41925	9	41995	10.94	42080	0.37	0.20	1	3	106.59
ts225	0	115605	36	117363	12.94	117363	1.50	0.0	0	1	12.94
a280	456	2566	79	2577.67	332.49	2579	0.50	0.05	3	6	418.62
pr264	176	49020.50	24	49124	47.62	49135	0.23	0.02	1	3	60.49
pr299	489	47380	101	47712.75	191.26	47718	0.71	0.01	1	3	220.02

Tableau 6.3

Tout d'abord, nous pouvons noter que le temps total de calcul est plus élevé dans une grande majorité des instances traitées (dans environ 75%). Pour les autres, il est sensiblement le même. En effet, pour chaque instance, le nombre d'inégalités de F-partition générées est bien inférieur à celui reporté dans les tableaux 6.1 ou 6.2. Néanmoins, pour chaque instance où les contraintes de coupe sont insuffisantes pour résoudre le problème sans phase de branchements, nous avons toujours généré au minimum une inégalité de F-partition. Ainsi, il semble que notre heuristique de séparation des inégalités de F-partition soit moins efficace lorsque les opérations de réduction ne sont pas appliquées. Et même si l'erreur relative avant la phase de branchements est sensiblement identique avec ou sans les opérations de réduction, le nombre de noeuds évalués est plus grand sans celles-ci.

Dans les tableaux 6.4 et 6.5, nous avons reporté les résultats obtenus sans l'ajout des inégalités de F-partition et sans l'application des opérations de réduction de graphes, pour certaines instances déjà traitées. Puisque les temps total d'exécution des tableaux 6.1 à 6.3 sont tous inférieurs à 600 secondes, nous avons imposé un temps total d'exécution limité à 3 heures. Par ailleurs, il est clair que seules les instances ayant nécessité l'ajout d'inégalités de F-partition nous ont intéressé.

Problème	**NC**	**CC**	**T**	**Copt**	**Pas1**	**PB**	**SB**	**TT**
gr24	8	1272	0.5	1272	0.0	1	2	0.11
bayg29	17	1608	0.09	1610	0.12	1	3	0.12
bays29	3	2013.50	0.7	2020	0.32	1	3	0.17
dantzig42	47	697	0.29	699	0.29	1	3	0.37
swiss42	29	1272	0.16	1273	0.08	1	3	0.22
att48	42	10604	0.38	10628	0.23	4	11	0.89
gr48	21	4959	0.31	5031	1.43	10	111	4.15
hk48	18	11444.50	0.29	11461	0.14	1	3	0.46
eil51	3	422.50	0.21	426	0.82	8	53	4.06
brazil58	61	25354.50	0.47	25395	0.16	1	3	0.68
st70	117	671	1.33	675	0.59	6	12	2.79
eil76	13	537	0.67	538	0.19	5	11	2.70
pr76	62	105120	1.09	106492	1.28	16	863	74.02
rat99	113	1206	3.21	1211	0.41	10	31	11.02
rd100	140	7899.33	3.11	7910	0.13	4	11	6.00
kroA100	56	20936.50	1.53	21261	1.53	24	11221	1379.06
kroB100	77	21834	2.15	22059	1.02	14	213	46.16
kroC100	166	20472.50	4.22	20749	1.33	18	345	66.04
kroD100	115	21141.50	2.32	21294	0.72	10	90	17.31
kroE100	92	21799.50	1.81	21923	0.56	7	63	17.86

Tableau 6.4

Problème	NC	CC	T	Copt	Pas1	PB	SB	TT
eil101	118	627.50	2.93	629	0.24	6	15	9.45
lin105	149	14370.50	3.78	14379	0.06	2	4	5.34
bier127	148	117431	4.73	118282	0.72	37	19716	10800.13
kroA150	215	26299	10.06	26524	1.11	23	2966	1571.02
kroB150	197	25732.50	9.19	26060	1.26	21	4149	2320.17
u159	132	41925	6.50	42080	0.37	14	283	170.49
ts225	0	115605	7.13	117363	1.50	24	5894	10800.15
a280	277	2566	61.54	2579	0.50	35	6176	10800.11
pr264	170	49020.50	22.97	49135	0.23	18	170	204.60
pr299	328	47380	42.72	47730	0.71	23	3043	10801.23

TABLEAU 6.5

À la lumière de ces résultats, nous pouvons remarquer la grande différence dans le temps total d'exécution des trois tableaux précédents et ceux des tableaux 6.4 et 6.5. De plus, nous notons que pour 4 instances (bier127, ts225, a280, pr299), le temps limite d'exécution a été atteint sans que la phase de branchements se soit achevée. Pour trois de ces instances, la meilleure solution trouvée correspond à une solution optimale, alors que pour l'instance pr299, nous n'avons qu'une solution approchée (47730 au lieu de 47718). L'instance ts225 est une des plus significatives. Avec les opérations de réduction et les inégalités de F-partition, nous avons obtenu la solution optimale en 8.74 secondes. Lorsque les opérations de réduction ne sont plus appliquées, il nous a fallu 12.94 secondes pour obtenir la solution optimale. Par contre, dans le tableau 6.5, nous avons atteint le temps limite, c'est-à-dire 3 heures, sans que la phase de branchements soit terminée. Nous avons donc considéré la meilleure solution trouvée (en 3 heures), qui est, pour cette instance, également la solution optimale. Une des explications qui peut être avancée est que l'erreur relative avant la phase de branchements est beaucoup plus élevée. Ainsi, nous avons une explosion de l'arbre généré dans la phase de branchements.

L'analyse que nous venons de réaliser montre très clairement l'importance des inégalités de F-partition dans l'efficacité de notre algorithme de coupes et branchements. Par ailleurs, nos opérations de réduction de graphes sont très importantes pour notre heuristique de séparation des contraintes de F-partition, et donc plus généralement pour notre algorithme de coupes et branchements. Par conséquent, l'efficacité de notre algorithme dépend à la fois de nos opérations de réduction et de l'ajout des contraintes de F-partition.

Par ailleurs, nous faisons remarquer que, sur les 39 instances traitées, les solutions obtenues pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe le sont également pour le problème du voyageur de commerce pour 30 d'entre elles, soit un pourcentage de

76.92%. Il semble donc que les inégalités de F-partition peuvent aussi jouer un rôle important dans une telle approche pour le problème du voyageur de commerce.

6.3.4 Types de sommets en 1 et 2

Notre algorithme de coupes et branchements a été expérimenté sur des instances ayant moins de 101 sommets lorsque les types de sommets sont en 1 et 2. De plus, nous avons limité le temps d'exécution à 3 heures. Notre objectif principal étant de tester l'efficacité de nos procédures de réduction et de séparation. Pour ce qui est de la valeur de la solution (CC) avant l'appel de nos heuristiques de séparation des inégalités de partition de type 2 et de F-partition, nous ne l'avons pas indiquée dans les prochains tableaux, afin de ne pas surcharger ces derniers. Par contre, nous avons bien mentionné l'erreur relative Pas1 avant l'application de ces heuristiques. Dans les tableaux 6.6, 6.7 et 6.8, nous avons reporté les résultats obtenus lorsque les opérations de réduction de graphes sont appliquées.

Problème	$\mathbf{V_1}$	**NC**	**NP**	**NFP**	**C**	**T**	**Copt**	**Pas1**	**Pas2**	**PB**	**SB**	**TT**
burma14	5	24	64	0	3069	0.23	3069	7.35	0.0	0	1	0.23
burma14	6	21	17	0	2836	0.15	2836	8.53	0.0	0	1	0.15
burma14	6	11	45	0	3070	0.11	3070	4.88	0.0	0	1	0.11
burma14	11	39	25	0	3232.67	0.47	3281	9.28	1.47	1	3	0.63
ulysses16	5	12	64	0	6828	0.29	6828	4.36	0.0	0	1	0.29
ulysses16	7	29	27	0	6839.50	0.30	6858	6.38	0.27	1	3	0.39
ulysses16	8	23	45	0	5739	0.53	5739	7.24	0.0	0	1	0.53
ulysses16	12	33	65	0	5499	0.64	5499	11.35	0.0	0	1	0.64
gr17	5	20	26	0	1836	0.17	1836	2.78	0.0	0	1	0.17
gr17	7	37	110	0	1889.25	0.75	1935	7.83	2.36	1	3	1.12
gr17	9	28	60	0	2049	0.31	2049	7.81	0.0	0	1	0.31
gr17	13	45	39	0	1957	1.00	1957	12.98	0.0	0	1	1.00
gr21	9	37	39	0	2516	0.34	2516	5.63	0.0	0	1	0.34
gr21	9	29	20	0	2618	0.19	2618	5.23	0.0	0	1	0.19
gr21	11	43	70	0	2586	0.53	2586	7.21	0.0	0	1	0.53
gr21	13	45	44	0	2541	0.85	2561	11.17	0.78	1	3	1.31
ulysses22	9	40	43	0	6898	0.52	6898	2.41	0.0	0	1	0.52
ulysses22	9	29	102	0	7012	1.12	7012	5.57	0.0	0	1	1.12
ulysses22	11	39	133	0	5886	2.05	5886	5.66	0.0	0	1	2.05
ulysses22	13	48	75	0	5779	1.88	5779	9.08	0.0	0	1	1.88

TABLEAU 6.6

Problème	V_1	NC	NP	NFP	C	T	Copt	Pas1	Pas2	PB	SB	TT
gr24	10	43	94	2	1265	1.03	1265	7.11	0.0	0	1	1.03
gr24	11	45	79	0	1225	0.61	1225	9.02	0.0	0	1	0.61
gr24	12	63	82	0	1168	1.78	1168	8.45	0.0	0	1	1.78
gr24	15	68	135	0	1161	5.62	1161	13.33	0.0	0	1	5.62
fri26	11	44	61	0	896.50	1.52	898	8.00	0.17	1	3	1.60
fri26	11	69	198	0	906.83	5.88	908	9.42	0.13	3	8	6.74
fri26	13	66	177	0	880	6.42	880	12.05	0.0	0	1	6.42
fri26	15	79	166	0	872	7.84	872	11.84	0.0	0	1	7.84
bayg29	12	61	149	0	1534	2.35	1534	10.66	0.0	0	1	2.35
bayg29	12	71	84	0	1543	2.23	1543	8.14	0.0	0	1	2.23
bayg29	14	78	104	0	1545	2.43	1545	10.51	0.0	0	1	2.43
bayg29	18	99	67	0	1452	2.67	1452	13.71	0.0	0	1	2.67
bays29	12	66	43	0	1859	0.60	1859	7.58	0.0	0	1	0.60
bays29	12	63	67	0	1885	1.16	1885	6.24	0.0	0	1	1.16
bays29	14	97	86	0	1900	1.63	1900	7.61	0.0	0	1	1.63
bays29	18	77	44	0	1753	2.93	1753	11.41	0.0	0	1	2.93
dantzig42	19	137	287	2	687	20.48	687	10.72	0.0	0	1	20.51
dantzig42	19	112	240	0	682	11.36	682	7.60	0.0	0	1	11.36
dantzig42	21	122	151	0	686	20.42	686	9.13	0.0	0	1	20.42
dantzig42	25	103	128	0	649.50	13.76	650	10.63	0.08	0	1	13.80
swiss42	19	117	104	0	1217	10.12	1217	9.87	0.0	0	1	10.12
swiss42	19	98	314	0	1256	67.24	1256	10.24	0.0	0	1	67.24
swiss42	21	128	328	0	1204	25.06	1206	10.56	0.16	1	3	25.47
swiss42	25	130	284	0	1244	27.80	1244	12.80	0.0	0	1	27.80
att48	20	144	234	0	10273	26.75	10273	11.53	0.0	0	1	26.75
att48	21	140	389	0	10292.5	54.9	10299	8.93	0.06	1	3	58.40
att48	25	120	339	4	10214	35.54	10259	12.01	0.44	4	13	202.68
att48	30	172	319	0	10136	64.81	10136	13.20	0.0	0	1	64.81
gr48	20	145	281	2	4842.50	65.61	4860	10.04	0.36	3	7	755.06
gr48	21	118	421	5	4819.75	94.93	4863	9.12	0.89	5	23	361.41
gr48	25	156	471	0	4726.08	73.82	4789	11.16	1.31	8	101	340.10
gr48	30	210	415	0	4495	73.03	4523	11.86	0.62	2	7	184.52
hk48	20	150	154	0	11266	13.40	11266	8.41	0.0	0	1	13.40
hk48	21	130	247	0	11014	13.56	11014	10.12	0.0	0	1	13.56
hk48	25	131	219	2	11169.33	32.80	11181	11.46	0.10	3	9	33.83
hk48	30	156	804	0	11215	100.79	11215	12.99	0.0	0	1	100.79
eil51	21	171	1143	14	411.75	336.57	413	11.51	0.30	2	4	345.17
eil51	23	166	1933	15	411.27	211.75	413	11.81	0.42	5	14	812.46
eil51	27	175	669	3	410	103.40	410	13.93	0.0	6	10	137.90
eil51	31	280	1112	2	406.08	302.88	407	13.76	0.23	4	14	389.44

Tableau 6.7

Problème	V_1	NC	NP	NFP	C	T	Copt	Pas1	Pas2	PB	SB	TT
berlin52	22	198	243	0	7326	23.58	7326	7.88	0.0	0	1	23.58
berlin52	24	156	1099	0	7535	178.83	7535	8.85	0.0	0	1	178.83
berlin52	28	151	298	0	7434	114.98	7435	11.20	0.01	1	3	115.22
berlin52	32	192	280	0	6963	48.76	6963	12.67	0.0	0	1	48.76
brazil58	25	172	144	0	24524	28.29	24524	4.34	0.0	0	1	28.29
brazil58	26	166	480	2	23370	188.75	23371	6.20	0.004	1	3	245.60
brazil58	32	200	437	0	24695	649.22	24699	5.92	0.02	1	3	649.95
brazil58	35	166	266	0	23501	76.60	23501	6.36	0.0	0	1	76.60
st70	29	169	380	5	642.5	112.76	647	8.92	0.70	6	25	380.16
st70	30	216	1719	2	656.375	414.42	662	9.85	0.85	10	119	2329.06
st70	39	239	1252	12	625	519.90	626	10.79	0.16	1	3	522.32
st70	40	247	681	0	633	357.45	633	11.44	0.0	0	1	357.45
pr76	32	211	2441	13	98620.25	464.16	98782	7.25	0.16	3	13	784.30
pr76	34	193	479	5	97580.27	108.62	98448	8.34	0.88	13	666	4305.33
pr76	44	294	930	1	98782	234.77	99680	9.29	0.90	17	1129	6134.49
rat99	43	309	1969	7	1192.83	5829.76	1195	11.42	0.18	5	15	6405.18
rat99	45	355	1513	2	1192	2074.16	1193	11.49	0.08	5	10	2214.96
rat99	55	390	1433	0	1164	2183.86	1164	12.12	0.0	0	1	2183.86
rd100	43	325	981	3	7641	1079.21	7645	8.98	0.05	1	3	1089.64
kroA100	46	336	1552	7	20425.125	575.94	20539	9.08	0.55	11	93	3034.27
eil101	46	486	8396	2	598	8518.94	598	12.90	0.0	0	1	8525.02

Tableau 6.8

La première remarque que nous pouvons réaliser est que l'erreur relative entre la valeur de la solution obtenue après l'ajout des contraintes de coupe et de partition de type 1 et la valeur de la solution optimale est élevée. Par ailleurs, il semble que celle-ci soit d'autant plus élevée que le nombre de sommets ayant un type de connexité égal à 1 est important. Par contre, après l'application de nos heuristiques de séparation des inégalités de partition de type 2 et des inégalités de F-partition, l'erreur relative entre la valeur de la solution avant la phase de branchements et la valeur de la solution optimale devient assez faible, moins de 3% à l'exception de 3 instances. Ceci permet d'obtenir des phases de branchements plus rapide, et surtout un nombre très restreint de noeuds à évaluer dans celles-ci. De plus, pour de nombreuses instances, l'algorithme de coupes nous a permis de résoudre à l'optimalité le problème sans aucun branchement.

Dans notre algorithme, un nombre très important de contraintes de partition est ajouté pour chaque instance. Généralement, parmi les contraintes de partition détectées, nous avons au minimum 75% d'inégalités de partition de type 2, donc générées par nos heuristiques, et ce pourcentage tend à augmenter quand le nombre de sommets croit (voir tableau 6.9). Pour les plus grandes instances sur lesquelles nous avons expérimenté

notre algorithme, nous présentons les différents types d'inégalités de partition générées. Ainsi, dans le prochain tableau, NP1 représente le nombre d'inégalités de partition de type 1 générées par l'algorithme 6.3 tandis que $NP2_1$ (resp. $NP2_2$) représente le nombre d'inégalités de partition de type 2 générées par l'algorithme 6.4 (resp. l'algorithme 6.5).

Problème	**NP1**	**$NP2_1$**	**$NP2_2$**
st70	16	53	311
st70	32	72	1615
st70	72	102	1078
st70	65	99	517
pr76	30	45	2366
pr76	22	50	407
pr76	57	50	823
rat99	55	101	1813
rat99	36	109	1368
rat99	70	163	1198
rd100	44	64	873
kroA100	46	49	1457
eil101	84	258	8054

TABLEAU 6.9

Pour ce qui est des contraintes de F-partition, elles apparaissent dans une faible proportion dans notre algorithme de coupes. Ceci ne prouve pas forcément qu'elles ne sont pas utiles pour ce problème, mais simplement que notre heuristique de séparation n'est peut être pas très efficace.

Nous avons, par la suite, appliqué notre algorithme sur les mêmes instances (celles ayant moins de 70 sommets) sans nos procédures de réduction de graphes. Nous avons alors obtenu les résultats présentés dans les tableaux 6.10, 6.11 et 6.12.

Problème	**V_1**	**NC**	**NP**	**NFP**	**C**	**T**	**Copt**	**Pas1**	**Pas2**	**PB**	**SB**	**TT**
burma14	5	20	17	0	3069	0.34	3069	7.35	0.0	0	1	0.34
burma14	6	22	12	0	2836	0.21	2836	8.53	0.0	0	1	0.21
burma14	6	9	11	0	3070	0.23	3070	4.89	0.0	0	1	0.23
burma14	11	34	17	0	3237.67	0.59	3281	9.28	1.32	4	9	1.33
ulysses16	5	15	20	1	6724.50	0.50	6828	4.36	1.52	5	29	3.78
ulysses16	7	31	22	0	6718	0.57	6858	6.19	2.04	3	11	1.53
ulysses16	8	23	21	0	5611.50	0.72	5739	7.65	2.22	1	3	1.10
ulysses16	12	24	12	0	5183.75	0.50	5499	13.74	5.73	6	39	2.58

TABLEAU 6.10

Problème	V_1	NC	NP	NFP	C	T	Copt	Pas1	Pas2	PB	SB	TT
gr17	5	20	16	0	1836	0.18	1836	2.75	0.0	0	1	0.18
gr17	7	46	17	0	1920.50	0.62	1935	7.83	0.75	1	3	1.43
gr17	9	29	16	0	2003	0.0.63	2049	7.81	2.24	2	5	3.00
gr17	13	40	42	0	1917.67	3.54	1957	12.01	2.01	1	3	3.79
gr21	9	43	26	0	2516	1.94	2516	5.63	0.0	0	1	1.94
gr21	9	32	15	0	2618	0.32	2618	5.23	0.0	0	1	0.32
gr21	11	43	18	0	2586	0.79	2586	7.21	0.0	0	1	0.79
gr21	13	45	42	0	2561	4.67	2561	11.17	0.0	0	1	4.67
ulysses22	9	32	20	0	6858	1.37	6898	2.62	0.58	0	1	3.13
ulysses22	9	28	33	0	6907.00	5.33	7012	5.93	1.50	1	3	5.36
ulysses22	11	33	43	0	5814.50	5.68	5886	5.81	1.21	1	3	6.59
ulysses22	13	59	47	0	5779	5.83	5779	9.08	0.0	0	1	5.83
gr24	10	43	27	0	1263	4.10	1265	7.06	0.16	1	3	4.84
gr24	11	34	24	0	1225	2.02	1225	9.02	0.0	0	1	2.02
gr24	12	75	26	0	1168	1.49	1168	8.45	0.0	0	1	1.49
gr24	15	51	74	0	1161	13.32	1161	13.08	0.0	0	1	13.32
fri26	11	55	37	0	896	4.94	898	8.30	0.22	1	3	6.25
fri26	11	59	60	1	907	16.68	908	10.19	0.11	1	3	17.61
fri26	13	55	49	0	880	11.55	880	11.82	0.0	0	1	11.55
fri26	15	75	79	0	869	22	872	11.69	0.34	0	1	22.63
bayg29	12	83	35	0	1525	4.49	1534	10.66	0.59	2	7	7.81
bayg29	12	119	39	0	1543	3.41	1543	8.14	0.0	0	1	3.41
bayg29	14	107	43	0	1545	6.35	1545	10.51	0.0	0	1	6.35
bayg29	18	87	39	0	1452	7.11	1452	13.14	0.0	0	1	7.11
bays29	12	71	23	0	1859	0.80	1859	7.56	0.0	0	1	0.80
bays29	12	99	30	0	1883.50	2.85	1885	6.24	0.08	1	3	7.06
bays29	14	69	33	0	1900	2.74	1900	7.61	0.0	0	1	2.74
bays29	18	85	69	0	1753	25.42	1753	11.22	0.0	0	1	25.42
dantzig42	19	128	89	2	687	129.09	687	10.82	0.0	0	1	129.12
dantzig42	19	109	55	0	680.75	75.57	682	7.92	0.18	1	3	194.73
dantzig42	21	139	84	0	686	136.18	686	8.82	0.0	0	1	136.18
dantzig42	25	125	96	0	649.50	80.35	650	10.64	0.08	0	1	80.39
swiss42	19	122	58	0	1217	20.53	1217	10.15	0.0	0	1	20.53
swiss42	19	101	99	0	1256	134.84	1256	10.21	0.0	0	1	134.84
swiss42	21	137	76	0	1204	34.76	1206	10.49	0.17	1	3	39.05
swiss42	25	151	100	0	1244	68.89	1244	12.79	0.0	0	1	68.89
att48	20	159	90	0	10273	89.14	10273	11.87	0.0	0	1	89.14
att48	21	172	136	0	10292.5	496.96	10299	9.01	0.06	1	3	497.96
att48	25	121	97	0	10213	171.80	10259	12.01	0.45	6	21	471.18
att48	30	191	115	0	10136	122.94	10136	13.33	0.0	0	1	122.94

Tableau 6.11

Problème	V_1	NC	NP	NFP	C	T	Copt	Pas1	Pas2	PB	SB	TT
gr48	20	169	204	0	4842.50	1067.91	4860	10.04	0.36	6	19	1359.66
gr48	21	127	126	0	4815.17	448.63	4863	9.08	0.98	7	50	1124.41
gr48	25	170	116	0	4726.08	218.36	4789	11.07	1.31	10	91	1039.03
gr48	30	214	129	0	4495	185.46	4523	11.90	0.62	2	7	566.47
hk48	20	189	78	0	11266	31.46	11266	8.41	0.0	0	1	31.46
hk48	21	205	87	0	11014	81.08	11014	10.13	0.0	0	1	81.08
hk48	25	171	116	1	11169.33	107.47	11181	11.22	0.10	2	5	128.82
hk48	30	147	128	0	11215	296.40	11215	12.82	0.0	0	1	296.40
eil51	21	168	145	3	411.17	576.85	413	11.44	0.44	3	8	1159.18
eil51	23	186	197	2	411.25	827.30	413	11.80	0.42	5	21	2481.96
eil51	27	167	181	0	410	298.31	410	13.92	0.0	4	8	1108.78
eil51	31	248	235	0	405.70	670.72	407	13.25	0.32	5	16	1190.06
berlin52	22	265	90	0	7326	68.41	7326	7.88	0.0	0	1	68.41
berlin52	24	155	113	0	7535	248.70	7535	8.85	0.0	0	1	248.70
berlin52	28	170	128	0	7434	483.63	7435	10.45	0.01	1	3	494.12
berlin52	32	185	111	0	6963	216.03	6963	12.85	0.0	0	1	216.03
brazil58	25	169	78	0	24524	166.18	24524	4.34	0.0	0	1	166.18
brazil58	26	168	193	1	23370	2133.14	23371	6.20	0.004	1	3	2133.26
brazil58	32	253	276	0	24695	2824.44	24699	5.88	0.02	1	3	2870.60
brazil58	35	191	98	0	23501	155.67	23501	6.30	0.0	0	1	155.67
st70	29	231	119	0	641.5	342.44	647	8.92	0.85	7	29	2709.77
st70	30	221	204	0	656.375	2376.54	662	9.87	0.85	9	126	10835.68
st70	39	249	261	2	625	2476.36	626	10.62	0.16	0	1	2476.86
st70	40	258	197	0	633	574.48	633	11.60	0.0	0	1	574.48

TABLEAU 6.12

Nous pouvons remarquer un temps total d'exécution très grand par rapport à ceux présentés dans les tableaux 6.6, 6.7 et 6.8. Nous notons également un plus grand nombre de noeuds évalués dans la phase de branchements pour certaines instances. Cette grande différence dans le temps d'exécution pour une même instance peut être expliquée par le fait que nos opérations de réduction de graphes réduisent de manière significative la taille des graphes sur lesquels nos procédures de séparation sont appliquées. De plus, les nombres de contraintes de partition ajoutées sont très inférieurs à ceux des tableaux 6.6, 6.7 et 6.8. Ceci a pour conséquence principale d'obtenir, dans de nombreux cas, une erreur relative entre la valeur de la solution avant la phase de branchements et la valeur de la solution optimale non nulle, alors qu'elle l'était dans les tableaux 6.6, 6.7 et 6.8. Par ailleurs, nous pouvons effectuer une remarque similaire à celle effectuée pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe concernant les inégalités de F-partition. Notre heuristique de séparation de ces dernières semble beaucoup moins efficace lorsque les opérations de réduction ne sont pas appliquées.

Ainsi, l'ajout des contraintes de partition de type 2 et des contraintes de F-partition sont essentielles pour une bonne efficacité de notre algorithme de coupes et branchements. Et les opérations de réduction de graphes jouent un rôle très important car elles permettent de réduire considérablement le temps total d'exécution.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme de coupes et branchements pour résoudre le problème ESNDP lorsque les types de connexité sont tous égaux à 2 ou alors en 1 et 2. Nous avons ainsi étendu les inégalités dites de F-partition, et les opérations de réduction de graphes, déjà établies pour le cas où les types de sommets sont tous égaux à 2, au cas où ils sont en 1 et 2. Puis, nous avons décrit nos procédures de séparation des inégalités de coupe, de partition et de F-partition. Nous avons alors testé la performance de notre algorithme sur des instances de moins de 500 sommets pour des types de connexité tous égaux à 2, et des instances de moins de 101 sommets pour des types de connexité en 1 et 2. Nous avons pu résoudre à l'optimalité le problème ESNDP pour toutes ces instances.

Lorsque $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$, nous avons pu mesurer le rôle décisif que jouent les inégalités de F-partition pour déterminer la solution optimale. En effet, elles permettent de réduire, de manière très significative, l'erreur relative avant la phase de branchements, et ainsi de diminuer la taille de l'arbre généré dans la phase de branchements. Par ailleurs, nous avons également vu que l'efficacité de notre heuristique de séparation des inégalités de F-partition est liée à l'application ou non de nos opérations de réduction de graphes.

Lorsque les types de sommets sont en 1 et 2, nous avons ajouté pour chaque instance des inégalités de partition en très grand nombre. En fait, ce sont essentiellement des inégalités de partition de type 2, détectées par nos heuristiques, qui sont ajoutées. Ceci prouve que notre heuristique de séparation de ces contraintes est efficace. Par contre, cette efficacité (et plus généralement celle de notre algorithme de coupes et branchements) dépend énormément de l'application des opérations de réduction. De plus, à la différence du problème du sous-graphe 2-arête connexe, le nombre de contraintes de F-partition ajoutées est assez limité, que les opérations de réduction soient appliquées ou non.

Conclusion

Le travail réalisé dans cette thèse traite du problème de conception de réseaux fiables. Nous avons considéré une approche polyédrale pour ce problème. Plus particulièrement, nous nous sommes intéressés au cas où la fiabilité est mesurée en nombre de chemins arête-disjoints entre deux sommets. Par ailleurs, à chaque sommet est associé un type de connexité qui représente son importance dans le réseau final.

Dans un premier temps, nous avons donné une caractérisation linéaire du polytope des sous-graphes arête-fiables $\mathrm{ESNDP}(G, r)$ dans la classe des graphes série-parallèles, lorsque les sommets ont tous un type de connexité pair.

Par la suite, nous avons étudié le problème de séparation des inégalités de partition. Ainsi, nous avons montré que ce problème est polynomial si les types de connexité sont en 1 et 2. En ramenant ce problème à la minimisation d'une fonction sous-modulaire, nous avons également donné un algorithme combinatoire pour le résoudre. Nous avons ensuite complètement caractérisé le polytope $\mathrm{ESNDP}(G, r)$ dans la classe des graphes série-parallèles lorsque les types de connexité sont en 1 et 2. Puis, par l'introduction des contraintes de SP-partition, nous avons pu étendre cette caractérisation à des types de connexité en k et $k+1$, où k est un entier impair.

Ensuite, nous avons porté une attention particulière au problème du sous-graphe Steiner connexe qui est étroitement lié au problème ESNDP lorsque les types de connexité sont en 0 et 1. Nous avons introduit une nouvelle classe d'inégalités valides pour le polytope des sous-graphes Steiner connexes. Vue la relation étroite qui existe entre le problème du sous-graphe Steiner connexe et le problème de l'arbre Steiner, ces inégalités sont également valides pour le dominant du polytope des arbres Steiner. Des procédures de construction de facettes du polytope des sous-graphes Steiner connexes, ainsi que du dominant du polytope des arbres Steiner, ont été données. Elles nous ont permis, d'une part, d'infirmer une conjecture de Chopra et Rao, et d'autre part, de donner une caractérisation complète du polytope des sous-graphes Steiner connexes dans

deux classes particulières de graphes série-parallèles. Finalement, nous avons donné une description complète du dominant du polytope des arbres Steiner dans ces deux classes.

La dernière partie de ce travail a porté sur une étude expérimentale pour le problème ESNDP lorsque les types de connexité sont tous égaux à 2, ou alors en 1 et 2. Nous avons développé un algorithme de coupes et branchements. Dans un premier temps, nous avons montré que les inégalités de F-partition jouent un rôle essentiel pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe. Puis, nous avons montré l'utilité de nos heuristiques de séparation des inégalités de partition de type 2 lorsque les types de connexité sont en 1 et 2. Pour ces deux problèmes, nous avons pu mesurer l'efficacité des procédures de réduction de graphes.

Avant de présenter quelques perspectives de recherche qu'offrent l'ensemble de ce travail, nous présentons trois tableaux récapitulatifs des principaux résultats connus (caractérisation de ESNDP(G,r), complexité du problème de séparation des inégalités valides et complexité du problème) pour le problème ESNDP. Les résultats reportés en gras sont ceux obtenus au cours de cette thèse.

Description complète de ESNDP(G,r)	graphe	types de sommets
contraintes de coupe et de partition Steiner	général	$r(v)=1, \forall\ v$
contraintes de coupe et de F-partition	de Halin	$r(v)=2, \forall\ v$
contraintes de coupe	série-parallèle	$r \in \{0,k\}^V$, k pair
contraintes de coupe	**série-parallèle**	$\mathbf{r(v)}$ **pair,** $\forall$ **v**
contraintes de coupe et de SP-partition	série-parallèle	$r(v)=k, \forall\ v$, k impair
contraintes de coupe et de partition	**série-parallèle**	$\mathbf{r \in \{1,2\}^V}$
contraintes de coupe et de SP-partition	**série-parallèle**	$\mathbf{r \in \{k,k+1\}^V}$, $\mathbf{k > 1}$ **impair**
?	série-parallèle	$r \in \{k,k+1\}^V$, k pair
contraintes de coupe et de partition Steiner généralisée	**série-parallèle vérifiant la propriéte P**	$\mathbf{r \in \{0,1\}^V}$
contraintes de coupe, de partition Steiner généralisée et de trou-impair	**de la classe Ψ**	$\mathbf{r \in \{0,1\}^V}$
?	série-parallèle	$r \in \{0,1\}^V$
?	série-parallèle	$r \in \mathbb{Z}_+^V$

Caractérisation de ESNDP(G,r).

contraintes	forme	complexité	types de sommets
coupe	$x(\delta(W)) \geq con(W)$	P	$r \in \mathbb{Z}_+^V$
partition	$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq p-1$,	NP-difficile NP-difficile P	$r \in \mathbb{Z}_+^V$ $r \in \{0,1\}^V$ $r(v)=1, \forall\, v$
partition	$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq \lceil \frac{1}{2} \sum_{i \in I_2} con(V_i) \rceil + \lvert I_1 \rvert$	NP-difficile	$r \in \mathbb{Z}_+^V$
partition	$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq p$	NP-difficile **P**	$r \in \mathbb{Z}_+^V$ $\mathbf{r \in \{1,2\}^V}$
SP-partition (graphe série-parallèle)	$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq \sum_{i=1}^{r_\pi} \lceil \frac{i}{2} \rceil p_i$	?	$r \in \mathbb{Z}_+^V$
SP-partition (graphe série-parallèle)	$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq \sum_{i=1}^{r_\pi} \lceil \frac{i}{2} \rceil p_i - 1$	?	$r \in \mathbb{Z}_+^V$
SP-partition (graphe série-parallèle)	$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil p - 1$	P **P**	$r(v)=k, \forall\, v$, k impair $\mathbf{r \in \{k, k+1\}^V}$, $\mathbf{k>1}$, **impair**
SP-partition (graphe série-parallèle)	$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil p$	**P**	$\mathbf{r \in \{k, k+1\}^V}$, $\mathbf{k>1}$, **impair**
partition Steiner généralisée	$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq p-d-1$	**NP-difficile**	$\mathbf{r \in \{0,1\}^V}$
F-partition	$x(\Delta) \geq \sum_{j=1}^{\lceil \frac{r_\pi}{2} \rceil} j(p_{2j}+p_{2j-1}) - \left\lfloor \frac{\lvert S_1 \rvert + \lvert F \rvert}{2} \right\rfloor$	?	$r \in \mathbb{Z}_+^V$
F-partition	$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq p-t$	? P	$r(v)=2, \forall\, v$ $r(v)=2, \forall\, v$, et F fixé
F-partition	$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geq qp-t$	? P	$r(v)=k, \forall\, v$ k pair $r(v)=k, \forall\, v$, k pair et F fixé

Complexité du problème de séparation des contraintes valides.

types de sommets	graphes généraux	graphes série-parallèles
$r \in \mathbb{Z}_+^V$	NP-difficile	?
$r(v) = 1, \forall\ v$	P	P
$r(s) = 1$ $r(t) = 1$ $r(v) = 0\ \forall\ v \neq s,\ t$	P	P
$r \in \{0,1\}^V$	NP-difficile	P
$r(v) = k, \forall\ v$	NP-difficile	P
$r \in \{0,k\}^V$, k pair	NP-difficile	P
$r(v)$ pair, $\forall\ v$	NP-difficile	**P**
$r \in \{1,2\}^V$	NP-difficile	**P**
$r \in \{k,k+1\}^V$, $k > 1$ impair	NP-difficile	**P**
$r \in \{k,k+1\}^V$, $k > 1$ pair	NP-difficile	?

Complexité avec des coûts positifs.

L'ensemble de ce travail ouvre des perspectives très intéressantes aussi bien d'un point de vue polyédral qu'algorithmique.

Tout d'abord, sur le plan polyédral, il serait très intéressant d'étendre les caractérisations du polytope $\mathrm{ESNDP}(G,r)$ à des classes de graphes plus générales que celle des graphes série-parallèles. Par ailleurs, pour le problème du sous-graphe Steiner connexe, une question très intéressante serait de donner des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour que les inégalités de partition Steiner généralisée définissent des facettes du polytope des sous-graphes Steiner connexes. Également, une question qui mérite d'être étudiée est la caractérisation des graphes pour lesquels ce polytope est complètement donné par les contraintes triviales et les contraintes de partition Steiner. La finalité de tout ce travail serait de complètement caractériser le polytope $\mathrm{ESNDP}(G,r)$ pour des classes de graphes lorsque les types de connexité sont en 0, 1 et 2. Par ailleurs, il serait intéressant d'étudier l'importance des inégalités de Prodon pour le problème 3.1 lorsque $r \in \{0,1,2\}^V$. Plus précisément, ces contraintes, associées aux contraintes de non-négativité, sont-elles suffisantes pour décrire complètement le dominant de $\mathrm{ESNDP}(G,r)$ quand $r \in \{0,1,2\}^V$ et G est série-parallèle?

Sur le plan algorithmique, de nombreuses questions se posent. En effet, puisque le problème de séparation des inégalités de partition de type 2 est polynomial, il serait très intéressant de développer des algorithmes polynomiaux de séparation pour ces contraintes. Une deuxième question consiste à trouver une heuristique pour séparer les contraintes de partition Steiner généralisée. Nous avons remarqué, dans le chapitre 6,

que les inégalités de F-partition sont très efficaces pour résoudre le problème du sous-graphe 2-arête connexe. Or, la complexité du problème de séparation de ces contraintes n'a pas pu encore être établie, et reste donc une question ouverte. Ainsi, développer des heuristiques pour séparer ces contraintes est actuellement à l'ordre du jour. Pour conclure, nous avons vu que les opérations de réduction de graphes ont joué un rôle majeur dans l'efficacité de notre algorithme de coupes et branchements. Une question intéressante serait d'essayer de développer d'autres opérations de réduction.

Bibliographie

[1] S. Arnborg, J. Lagergren and D. Seese. "Problems easy for tree-decomposable graphs", *Research Report*, (1989).

[2] S. Arnborg and A. Proskurowski. "Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k-trees", *Discrete Applied Mathematics 23*, (1989), pp 11-24.

[3] M. Baïou. "Le problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe : approche polyédrale", *Thèse de doctorat*, Université de Renne 1, (1996).

[4] M. Baïou. "On the dominant of the Steiner 2-edge connected subgraph polytope", à paraître dans *Discrete Applied Mathematics* (1999).

[5] M. Baïou, F. Barahona and A.R. Mahjoub. "Separation of partition inequalities", *Mathematics of Operation Research 25*, (2000), pp 243-254.

[6] M. Baïou and A.R. Mahjoub. "Steiner 2-edge connected subgraph polytopes on series-parallel graphs", *SIAM Journal of Discrete Mathematics 10*, (1997), pp 505-514.

[7] A. Balakrishnan and N.R. Patel. "Problem reduction methods and a tree generation algorithm for the Steiner network problem", *Networks 17*, (1987), pp 65-85.

[8] A. Balakrishnan, T.L. Magnanti and P. Mirchandani. "Doubling or splitting: strategies for survivable network design", *Technical Report*, OR 297-94, Operations Research Center, MIT, Cambridge, MA, (1994).

[9] E. Balas and M. Fischetti. "On the monotonization of polyhedra", *Mathematical Programming 78*, (1997), pp 59-84.

[10] E. Balas and W.R. Pulleyblank. "The perfectly matchable subgraph polytope of a bipartite graph", *Networks 13*, (1983), pp 495-516.

[11] F. Barahona. "Separating from the dominant of the spanning tree polytope", *Operations Research Letters 12*, (1992), pp 201-203.

[12] F. Barahona and A.R. Mahjoub. "On two-connected subgraph polytopes", *Discrete Mathematics 147*, (1995), pp 19-34.

[13] Bellcore. FIBER OPTIONS, "Software for designing survivable optimal fiber networks", Software package, (décembre 1988).

[14] R.E. Bellman. "On a routing problem", *Quarterly Applied Mathematics 16*, (1957), pp 87-90.

[15] J.F. Benders. "Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems", *Numerische Mathematik 4*, (1962), pp 238-252.

[16] P. Berman and V. Ramaiyer. "Improved approximation algorithms for the Steiner tree problem", *Journal of Algorithms 17*, (1994), pp 381-408.

[17] M. Bern and P. Plassmann. "The Steiner tree problem with edge lengths 1 and 2", *Inform. Process. Lett. 32*, (1989), pp 171-176.

[18] D. Bienstock, E.F. Brickell and C.L. Monma. "On the structure of minimum-weight k-connected spanning networks", *SIAM Journal of Discrete Mathematics 3*, (1990), pp 320-329.

[19] R.E. Bixby. "Implementing the simplex method: The initial basis", *Technical Report TR 90-32*, Department of Mathematical Sciences, Rice University, Houston, Texas, (1991).

[20] R.E. Bixby, W.H. Cunningham and D.M. Topkis. "The partial order of a polymatroid extreme point", *Mathematics of Operations Research 10*, (1985), pp 367-378.

[21] F.T. Boesch and A. Felzer. "On the invulnerability of the regular complete k-partite graphs", *SIAM Journal of Applied Mathematics 20*, (1971), pp 176-182.

[22] F.T. Boesch and R.E. Thomas. "On graphs of invulnerable communication nets", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-17, (1970), pp 183-192.

[23] M. Boulala and J.P. Uhry. "Polytope des indépendants d'un graphe série-parallèle", *Discrete Mathematics 27*, (1979), pp 225-243.

[24] W.M. Boyce. "An improved program for the full Steiner tree problem", *ACM Trans. on Math. Software 3*, (1977), pp 359-385.

[25] W.M. Boyce and J.B. Seery. "STEINER72: An improved version of the minimal network problem", *Technical Report 35*, Comp. Sci. Res. Ctr. Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, (undated).

[26] S.C. Boyd and T. Hao. "An integer polytope related to the design of survivable communication networks", *SIAM Journal on Discrete Mathematics 6*, (1993), pp 612-630.

[27] G-R. Cai and Y-G. Sun. "The minimal augmentation of any graph to a k-edge connected graph", *Networks 19*, (1989), pp 151-172.

[28] R.H. Cardwell, C.L. Monma and T-H. Wu. "Computer aided design procedures for survivable fiber optic networks", *IEEE Journal on Selected Areas in Communications 7*, (1989).

[29] S.K. Chang. "The generation of minimal trees with a Steiner topology", *Journal of the ACM 19*, (1972), pp 669-711.

[30] J. Cheriyan, A. Sebö and Z. Sziget. "An improved approximation algorithm for minimum size 2-edge connected spanning subgraphs", preprint, (1998).

[31] S. Chopra. "Polyhedra of the equivalent subgraph problem and some edge connectivity problems", *SIAM Journal on Discrete Mathematics 5*, (1992), pp 321-337.

[32] S. Chopra. "The equivalent subgraph polytope and directed cut polyhedra on series-parallel graphs", *SIAM Journal on Discrete Mathematics 5*, (1992), pp 475-490.

[33] S. Chopra. "The k-edge connected spanning subgraph polyhedron", *SIAM Journal of Discrete Mathematics 7*, (1994), pp 245-259.

[34] S. Chopra and M.R. Rao. "The Steiner tree problem I: formulations, compositions and extension of facets", *Mathematical Programming 64*, (1994), pp 209-230.

[35] S. Chopra and M.R. Rao. "The Steiner tree problem II: properties and classes of facets", *Mathematical Programming 64*, (1994), pp 231-246.

[36] S. Chopra and M. Stoer. Private communication.

[37] W. Chou and H. Frank. "Survivable communication networks and the terminal capacity matrix", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-17, (1970), pp 192-197.

[38] W. Chou and H. Frank. "Connectivity considerations in the design of survivable networks", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-17, (1970), pp 486-490.

[39] N. Christofides. "Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem", *Technical Report 388*, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburg, PA, (1976).

[40] N. Christofides. "The traveling salesman problem", In N. Christofides editor, *Combinatorial Optimization*, Wiley, New York, (1979), pp 131-150.

[41] N. Christofides and C.A. Whitlock. "Network synthesis with connectivity constraints - a survey", In J.P. Brans editor, *Operationnal Research 81*, North-Holland Publishing Company, (1981), pp 705-723.

[42] L.W. Clarke and G. Anandalingam. "A bootstrap heuristic for designing minimum cost survivable networks", *Computers and Operations Research 22*, (1995), pp 921-924.

[43] E.J. Cockayne and D.G. Schiller. "Computation of Steiner minimal trees", In Welsh and Woddall editors., *Combinatorics*, Inst. Math. Appl., (1972), pp 52-71.

[44] G. Cornuéjols, J. Fonlupt and D. Naddef. "The traveling salesman problem on a graph and some related integer polyhedra", *Mathematical Programming 33*, (1985), pp 1-27.

[45] C.R. Coullard, A. Rais, R.L. Rardin and D.K. Wagner. "The 2-connected spanning subgraph polytope for series-parallel graphs", *Technical Report 90-12*, School of Industrial Engineering, Purdue University, West Lafayette, Indiana, (1990).

[46] C.R. Coullard, A. Rais, R.L. Rardin and D.K. Wagner. "The 2-connected Steiner subgraph polytope for series-parallel graphs", *Technical Report 91-32*, School of Industrial Engineering, Purdue University, West Lafayette, Indiana, (1991).

[47] C.R. Coullard, A. Rais, R.L. Rardin and D.K. Wagner. "Linear-time algorithms for the 2-connected Steiner subgraph problem on special classes of graphs", *Networks 23*, (1993), pp 195-206.

[48] C.R. Coullard, A. Rais, R.L. Rardin and D.K. Wagner. "The dominant of the 2-connected Steiner subgraph polytope for W_4-free graphs", *Discrete Applied Mathematics 66*, (1996), pp 195-206.

[49] S. A. Cook. "The complexity of theorem-proving procedures", *Proceedings 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, Association for Computing Machinery, New York, (1971), pp 151-158.

[50] W.H. Cunningham. "Testing membership in matroid polyhedra", *Journal of Combinatorial Theory 36*, (1984), pp 161-188.

[51] W.H. Cunningham. "Optimal attack and reinforcement of a network", *Journal of the ACM 32*, (1985), pp 549-561.

[52] W.H. Cunningham. "On submodular function minimization", *Combinatorica 5*, (1985), pp 185-192.

[53] G. Dahl. "Directed Steiner problems with connectivity requirements", *Discrete Applied Mathematics 47*, (1993), pp 109-128.

[54] G. Dahl. "The design of survivable directed networks", *Telecommunication System 2*, (1994), pp 349-377.

[55] E. Dahlhaus, D.S. Johnson, C.H. Papadimitriou, P. Seymour and M. Yannakakis. "The complexity of multiway cuts", unpublished extended abstract.

[56] G.B. Dantzig. "Linear programming and extensions", *Princeton University Press*, Princeton, NJ, (1963).

[57] M. Didi Biha. "Graphes k-arêtes connexes et polyèdres", *Thèse de doctorat*, Université de Bretagne Occidentale, Brest, (1998).

[58] M. Didi Biha and A.R. Mahjoub. "k-edge connected polyhedra on series-parallel graphs", *Operations Research Letters 19*, (1996), pp 71-78.

[59] M. Didi Biha, H. Kerivin and A.R. Mahjoub. "Steiner trees and polyhedra", à paraître dans *Discrete Applied mathematics*, (1999).

[60] M. Didi Biha and A.R. Mahjoub. "Steiner k-edge connected subgraph polytope", *Journal of Combinatorial Optimization 4*, (2000), pp 131-144.

[61] E.W. Dijkstra. "A note on two problems in connection with graphs", *Numerische Mathematik 1*, (1959), pp 269-271.

[62] E.A. Dinits. "Algorithm for solution of a problem of maximum flow in a network with power estimation", *Soviet Mathematics Doklady 11*, (1970), pp 1277-1280.

[63] R.J. Duffin. "Topology of series-parallel networks", *Journal of Mathematical Analysis and Applications 10*, (1965), pp 303-318.

[64] C.W. Duin and A. Volgenant. "Reduction tests for the Steiner problem in graphs", *Networks 19*, (1989), pp 549-567.

[65] J. Edmonds. "Covers and packings in a family of sets", *Bull. Amererican Mathematical Society 68*, (1962), pp 494-499.

[66] J. Edmonds. "Maximun matching and a polyhedron with 0,1-vertices", *Journal of Research of the National Bureau of Standards (B) 69*, (1965), pp 9-14.

[67] J. Edmonds. "Submodular functions, matroids, and certain polyhedra", *Combinatorial Structures and Their Applications*, R.K. Guy, H. Hanani, N. Sauer and J. Schönheim, editors Gordon and Breach, New York, (1970), pp 69-87.

[68] J. Edmonds and R.M. Karp, "The theoretical improvement in algorithmic efficiency for network flow problems", *Journal of the ACM 19*, (1972), pp 248-264.

[69] K.P. Eswaran and R.E. Tarjan. "Augmentation problems", *SIAM Journal on Computing 5*, (1976), pp 653-665.

[70] J. Fonlupt, and A.R. Mahjoub. "Critical extreme points of the 2-edge connected spanning subgraph polytope", preprint, (1999).

[71] L.R. Ford, and D.R. Fulkerson. "Maximal flow through a network", *Canadian Journal of Mathematics 8*, (1956), pp 399-404.

[72] B. Fortz. "Design of survivable networks with bounded rings", *SMG thesis series*, Université Libre de Bruxelles, Belgique, (1998).

[73] B. Fortz, M. Labbé and F. Maffioli. "Two-connected networks with boubed meshes", *Technical Report IS-MG 96/8* (à paraître dans *Operations Research*), Université Libre de Bruxelles, CP 210/01, B-1050 Bruxelles, Belgique (1996).

[74] B. Fortz, M. Labbé and F. Maffioli. "Methods for designing reliable networks with boubed meshes", In V. Ramaswami and P.E. Wirth, editors, *Teletraffic Contributions for the Information Age*, volume 2a of *Teletraffic Science and Engineering*, Elsevier, (1997), pp 341-350.

[75] A. Frank. "Finding feasible vectors of Edmonds-Giles polyhedra", *Journal of Combinatorial Theory 36*, (1984), pp 221-239.

[76] A. Frank. "Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements", *SIAM Journal on Discrete Mathematics 5*, (1992), pp 25-53.

[77] A. Frank and E. Tardos. "An application of submodular flows", *Linear Algorithms Application 114/115*, (1989), pp 329-348.

[78] H. Frank. "Vulnerability of communication nets", *IEEE Transactions on Communication Technology*, COM-15, (1967), pp 778-789.

[79] G.N. Frederickson and J. Jájá. "Approximation algorithms for several graph augmentation problems", *SIAM Journal on Computing 10 (2)*, (1981), pp 270-283.

[80] G.N. Frederickson and J. Jájá. "On the relationship between the biconnectivity augmentation problem and traveling salesman problem", *Theoretical Computer Science 19*, (1982), pp 189-201.

[81] H. Friedman. "A design for (d,k) graphs", *IEEE Transactions*, EC-15, (1966), pp 253-254.

[82] S. Fujishige. "Submodular Functions and Optimization", North-Holland, (1991).

[83] H.N. Gabow, M.X. Goemans and D.P. Williamson. "An efficient approximation algorithm for the survivable network design problem", *Proceedings 3rd MPS Conference Integer Programming and Combinatorial Optimization*, (1993), pp 57-74.

[84] M.R. Garey and D.S. Johnson. "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness", Freeman, San Francisco, (1979).

[85] E.N. Gilbert and H.O. Pollak. "Steiner minimal trees", *SIAM Journal on Applied Mathematics 16*, (1968), pp 1-29.

[86] M.X. Goemans. "Arborescence polytopes for series-parallel graphs", *Discrete Applied Mathematics 51*, (1994), pp 277-289.

[87] M.X. Goemans. "The Steiner tree polytope and related polyhedra", *Mathematical Programming 63*, (1994), pp 157-182.

[88] M.X. Goemans and D.J. Bertsimas. "Survivable networks, linear programming relaxations and the parsimonious property", *Mathematical Programming 60*, (1993), pp 145-166.

[89] M.X. Goemans, A. Goldberg, S. Plotkin, D.B. Shmoys, E. Tardos and D.P. Williamson. "Improved approximation algorithms for network design problems", *Proceedings of the 5th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, (1994), pp 223-232.

[90] M.X. Goemans and Y.-S. Myung. "A catalog of Steiner tree formulations", *Networks 23*, (1993), pp 19-28.

[91] M.X. Goemans and V.S. Ramakrishnan. "Minimizing submodular fuctions over families of subsets", *Combinatorica 15*, (1995), pp 169-197.

[92] M.X. Goemans and D.P. Williamson. "A general approximation technique for constrained forest problems", *SIAM Journal of Computing 24*, (1995), pp 296-317.

[93] A.V. Goldberg, and R.E. Tarjan. "A new approach to the maximum-flow problem", *Journal of the Association for Computing Machinery 35*, (1988), pp 921-940.

[94] R.E. Gomory, and T.C. Hu. "Multi-terminal network flows", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 9*, (1961), pp 551-570.

[95] M. Grötschel, L. Lovász and A. Schrijver. "The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization", *Combinatorica 1*, (1981), pp 169-197.

[96] M. Grötschel, A. Martin and R. Weismantel. "Packing Steiner trees", *SIAM Journal on Discrete Mathematics 9*, (1996), pp 233-257.

[97] M. Grötschel and C.L. Monma. "Integer polyhedra arising from certain networks design problems with connectivity constraints", *SIAM Journal of Discrete Mathematics 3*, (1990), pp 502-523.

[98] M. Grötschel, C.L. Monma and M. Stoer. "Polyhedral approaches to network survivability", In F. Roberts, F. Hwang and C.L. Monma editors, *Reliability of Computer and Communication Networks 5*, Series in Discrete Mathematics and Computer Science, AMS/ACM, (1991), pp 121-141.

[99] M. Grötschel, C.L. Monma and M. Stoer. "Facets for polyhedral arising in the design of communication with low-connectivity constraints", *SIAM Journal on Optimization 2*, (1992), pp 474-504.

[100] M. Grötschel, C.L. Monma and M. Stoer. "Computational results with a cutting plane algorithm for designing communication networks with low-connectivity constraints", *Operations Research 40*, (1992), pp 309-330.

[101] M. Grötschel, C.L. Monma and M. Stoer. "Polyhedral and computational investigations for designing communication networks with high survivability requirements", *Operations Research 43*, (1995), pp 1012-1024.

[102] D. Gusfield. "Very simple algorithms and programs for all pairs network flow analysis", Computer Science Division, University of California, Davis, (1987).

[103] S.L. Hakimi and A.T. Amin. "On the design of reliable networks", *Networks 3*, (1973) pp 241-260.

[104] T-S. Hsu and M.-Y. Kao. "An unifying augmentation algorithm for two-edge connectivity and biconnectivity", *Journal of Combinatorial Optimization 2*, (1998), pp 237-256.

[105] T-S. Hsu and V. Ramachandran. "On finding a minimum augmentation to biconnect a graph", *SIAM Journal on Computing 22*, (1993), pp 889-891.

[106] F.K. Hwang, D.S. Richards and P. Winter. "The Steiner tree problem", *Annals of Discrete Mathematics 53*, North Holland, Amsterdam, (1992).

[107] S. Iwata, L. Fleischer and S. Fujishige. "A strongly polynomial-time algorithm for minimizing submodular functions", preprint, (1999).

[108] M. Jünger and W.R. Pulleyblank. "New primal and dual matching heuristics", *Algorithmica 13*, (1995), pp 357-381.

[109] T. Jordán. Private communication, (2000).

[110] N. Karmarkar. "A new polynomial-time algorithm for linear programming", *Combinatorica 4*, (1984), pp 373-395.

[111] R.M. Karp and C.H. Papadimitriou. "On linear characterisation of combinatorial optimization problems", *SIAM Journal on Computing 11*, (1982), pp 620-632.

[112] M. Karpinski and A. Zelikovsky. "New approximation algorithms for the Steiner tree problems", *Journal of Combinatorial Optimization 1*, (1997), pp 1-19.

[113] H. Kerivin, and A.R. Mahjoub. "On survivable network polyhedra", soumis à *Networks*, (2000)

[114] H. Kerivin, and A.R. Mahjoub. "Survivable networks with low connectivity constraints and polyhedra", à soumettre à *Mathematical Programming*, (2000).

[115] L.G. Khachiyan. "A polynomial algorithm in linear programming", *Soviet Mathematics Doklady 20*, (1979), pp 191-194.

[116] S. Khuller and B. Raghavachari. "Improved approximation algorithms for uniform connectivity problems", *Journal of Algorithms 21*, (1996), pp 434-450.

[117] S. Khuller, B. Raghavachari and N. Young. "Approximating the minimum equivalent digraph", *SIAM Journal on Computing 24*, (1995), pp 859-872.

[118] S. Khuller, B. Raghavachari and N. Young. "On strongly connected digraphs with bounded cycle length", *Discrete Applied Mathematics 69*, (1996), pp 281-289.

[119] S. Khuller and U. Vishkin. "Biconnectivity approximations and graph carvings", *Journal of the ACM 41*, (1994), pp 214-235.

[120] C-W. Ko and C.L. Monma. "Heuristic methods for designing highly survivable communication networks", *Technical report*, Bellcore, (1989).

[121] P. Korhonen. "An algorithm for transforming a spanning tree into a Steiner tree", *Proceedings of the 9th International Symposium on Mathematical Programming*, Budapest 1976, Noth Holland, Amsterdam, (1979), pp 349-357.

[122] I. Korn. "On (d,k) graphs", *IEEE Transactions*, EC-16:90, (1967).

[123] L.T. Kou, G. Markowsky and L. Berman. "A fast algorithm for Steiner trees", *Acta Inform. 15*, (1981), pp 141-145.

[124] J.B. Kruskal. "On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem", *Proceedings of the American Mathematical Society 7*, (1956), pp 48-50.

[125] E.L. Lawler. "Combinatorial Optimization: Networks and Matroids", Holt, Rinehart and Winston, New York, (1976).

[126] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnoy-Kan, and D.B. Shmoys. "The traveling salesman problem", Wiley, New York, (1985).

[127] L. Lovász. "Submodular functions and convexity", *Mathematical Programming - The State of the Art*, A. Bachem, M. Grötschel, B. Keote editors, Springer, Berlin, (1983), pp 234-257.

[128] J. MacGregor Smith. "An $O(n \log n)$ heuristic for Steiner minimal tree problems on the Euclidian metric", *Networks 11*, (1981), pp 23-39.

[129] T.L. Magnanti and S. Raghavan. "A dual-ascent algorithm for low-connectivity network design", *Technical Rapport*, Operations Research Center, MIT, Cambridge, MA, (1997).

[130] A.R. Mahjoub. "On the stable set polytope of series-parallel graphs", *Mathematical Programming 40*, (1988), pp 53-57.

[131] A.R. Mahjoub. "Two-edge connected spanning subgraphs and polyhedra", *Mathematical Programming 64*, (1994), pp 199-208.

[132] A.R. Mahjoub. "On perfectly two-edge connected graphs", *Discrete Mathematics 170*, (1997), pp 153-172.

[133] A.R. Mahjoub, and P. Pesneau. "On the Steiner 2-edge connected subgraph polytope", preprint, (2000).

[134] F. Margot, A. Prodon, and T.M. Liebling. "Tree polytopes on 2-trees", *Mathematical Programming 63*, (1994), pp 183-191.

[135] J.F. Maurras. "Complexité et LP-Réduction", manuscrit, (1999).

[136] Z.A. Melzak. "On the problem of Steiner", *Canad. Math. Bull. 4*, (1961), pp 143-148.

[137] K. Menger. "Zur allgemeinen kurventheorie", *Fundamanta Mathematicae 10*, (1927), pp 96-115.

[138] C.L. Monma, B.L. Munson and W.R. Pulleyblank. "Minimum-weight two-connected spanning networks", *Mathematical Programming 46*, (1990), pp 153-171.

[139] C.L. Monma and D.F. Shallcross. "Methods for designing communication networks with certain two-connected survivability constraints", *Operations Research 37*, (1989), pp 531-541.

[140] C.St.J.A. Nash-Williams. "Edge-disjoint spanning trees of finite graphs", *Journal of the London Mathematical Society 36*, (1961), pp 445-450.

[141] D. Naor, D. Gusfield, and Ch. Martel. "A fast algorithm for optimally increasing the edge-connectivity", *Proceedings of the Foundation of Computer Science 90*, St. Louis, (1990), pp 698-707.

[142] G.L. Nemhauser, M.W.P. Savelsbergh and G.C. Sigismondi. "MINTO, a Mixed INTeger Optimizer", *Operations Research Letters 15*, (1994), pp 47-58.

[143] N.W. Padberg and M.R. Rao. "Odd minimum cut sets and b-matchings", *Mathematics of Operations Research 7*, (1982), pp 67-80.

[144] R.G. Parker and R.L. Rardin. "The traveling salesman problem : an update of research", *Naval Research Logistics Quarterly 30*, (1983), pp 69-96.

[145] J. Plesník. "A bound for the Steiner tree problem in graphs", *Math. Slovaca 31*, (1981), pp 155-163.

[146] T. Polzin and S.V. Daneshmand. "A comparison of Steiner tree relaxations", *Technical Report*, Mannheim University, (1998).

[147] T. Polzin and S.V. Daneshmand. "Improved algorithms for the Steiner problem in networks", *Technical Report*, Mannheim University, (1998).

[148] R.C. Prim. "Shortest connection networks and some generalization", *Bell System Technical Journal 36*, (1957), pp 1389-1401.

[149] A. Prodon. "A polyhedron for Steiner trees in series parallel graphs", Département de Mathématiques, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, (1985).

[150] A. Prodon. "Steiner trees with n terminals among $n+1$ nodes", *Operation Research Letters 11*, (1992), pp 125-133.

[151] A. Prodon, T.M. Liebling and H. Gröflin. "Steiner's problem on two-trees", *Technical Report RO-850315*, Département de Mathématiques, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, (1985).

[152] W.R. Pulleyblank. "Polyhedral combinatorics", G.L. Nemhauser et al. editors, Handbook in OR-MS, volume 1, Noth-Holland, Amsterdam, pp 371-446.

[153] M. Queyranne. "A combinatorial algorithm for minimizing symmetric submodular function", *in Proceedings 6th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, (1995), pp 98-101.

[154] R. Ravi and D.P. Williamson. "An approximation algorithm for minimum-cost vertex connectivity problems", *Proceedings 6th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, (1995), pp 332-341.

[155] G. Reinelt. "TSPLIB - A traveling salesman problem library", *ORSA Journal on Computing 3*, (1991), pp 376-384.

[156] A. Rosenthal and A. Goldner. "Smallest augmentation to biconnect a graph", *SIAM Journal on Computing 6*, (1977), pp 55-66.

[157] M. Schaffers. "A polynomial algorithm for the single source network flow design problem on series-parallel graphs", *CORE Discussion Paper 9062*, Université Catholique de Louvain, (1990).

[158] A. Schrijver. "Theory of Linear and Integer Programming", Wiley Interscience, Chichester, (1986).

[159] A. Schrijver. "A combinatorial algorithm minimizing submodular functions in strongly polynomial time", preprint, (1999).

[160] K. Steiglitz, P. Weiner and D.J. Kleitman. "The design of minimum-cost survivable networks", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, CT-16, (1969), pp 455-460.

[161] M. Stoer. "Design of survivable networks", *Lectures Notes in Mathematics 1531*, Springer-Verlag, (1992).

[162] J.W. Suurballe. "Disjoint paths in a network", *Networks 4*, (1974), pp 125-145.

[163] J.W. Suurballe and R.E. Tarjan. "A quick method for finding shortest pairs of disjoint paths", *Networks 14*, (1984), pp 325-336.

[164] H. Takahashi and A. Matsuyama. "An approximate solution for the Steiner problem in graphs", *Math. Japonica 6*, (1980), pp 573-577.

[165] K. Takamizawa, T. Nishizeki and N Saito. "Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs", *Journal of the Association for Computing Machinery 29*, (1982), pp 623-641.

[166] W.T. Tutte. "On the problem of decomposing a graph into n connected factors", *Journal of the London Mathematical Society 36*, (1961), pp 221-230.

[167] S. Uena, Y. Kajitani and H. Wada. "Minimum augmentation of a tree to a k-edge connected graph", *Networks 18*, (1988), pp 19-25.

[168] S. Voβ. "Steiner-Probleme in Graphen", Hain, Frankfurt/Main, (1990).

[169] S. Voβ. "Steiner's problem in graphs : heuristic methods", *Discrete Applied Mathematics 40*, (1992), pp. 45-72.

[170] J.A. Wald and C.J. Colbourn. "Steiner trees in outerplanar graphs", *Congressus Numeratum 36*, (1982), pp 15-22.

[171] J.A. Wald and C.J. Colbourn. "Steiner trees, partial 2-trees, and minimum IFI networks", *Networks 13*, (1983), pp 159-167.

[172] T. Watanabe and A. Nakamura. "Edge-connectivity augmentation problems", *Computer and System Sciences 35*, (1987) pp 96-144.

[173] T.G. Williams. "The design of survivable communications networks", *IEEE Transactions on Communications Systems*, CS-11, (1963), pp 230-241.

[174] D.P. Williamson, M.X. Goemans, M. Mihail and V. Vazirani. "A primal-dual approximation algorithm for generalized Steiner network problems", *Combinatorica 15*, (1995), pp 435-454.

[175] P. Winter. "The Steiner problem", *M. Sc. Thesis*, Institute of Datalogy, Univiversity of Copenhagen, Denmark, (1981).

[176] P. Winter. "Generalized Steiner problem in outerplanar networks", *BIT 25*, (1985), pp 485-496.

[177] P. Winter. "An algorithm for the Steiner problem in the Euclidian plane", *Networks 15*, (1985), pp 323-345.

[178] P. Winter. "Generalized Steiner problem in Halin networks", *Proceedings of the 12th International Symposium on Mathematical Programming*, MIT, (1985).

[179] P. Winter. "Generalized Steiner problem in series-parallel networks", *Journal of Algorithms 7*, (1986), pp 549-566.

[180] P. Winter. "Topogical network synthesis", In B. Simeone, editor, *Combinatorial Optimization - Como 1986*, volume 1403, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, (1986), pp 282-303.

[181] P. Winter. "Steiner problems in networks : a survey", *Networks 17*, (1987), pp 129-167.

[182] P. Winter. "Steiner problem in Halin networks", *Discrete Applied Mathematics 17*,(1987), pp 281-294.

[183] P. Winter and J. MacGregor Smith. "Path-distance heuristics for the Steiner tree problem in undirected networks", *Algorithmica 7*, (1992), pp 309-327.

[184] A.Z. Zelikovsky. "A faster algorithm for the Steiner tree problem", *Information Processing Letters 46*, (1993), pp 79-83.

[185] A.Z. Zelikovsky. "New approximation algorithm for the Steiner tree problem", *Journal of Combinatorial Optimization 1*, (1997), pp 47-65.