

Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE CLERMONT-FERRAND

THÈSE

présentée par

Pierre Pesneau

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ
Spécialité : INFORMATIQUE

Conception de réseaux 2-connexes avec contraintes de bornes

Soutenue publiquement le 5 Novembre 2003 devant le jury :

A.R.	Mahjoub	Directeur de thèse
A.	Quilliot	Président du jury
M.	Labbé	Rapporteur
J-F.	Maurras	Rapporteur
M.	Queyranne	Rapporteur
M.	Baïou	Examineur
B.	Fortz	Invité

Remerciements

Je voudrais avant tout remercier Monsieur Ali Ridha Mahjoub pour la confiance qu'il m'a accordée durant ces quatre années de thèse. Sa disponibilité et son constant soutien m'ont permis de mener à bien ces travaux. Je lui manifeste aussi ma plus grande gratitude pour m'avoir impliqué dans de fructueuses collaborations. Enfin, il a su me transmettre sa passion pour la recherche et l'enseignement. Pour tout cela, je lui témoigne ma plus sincère reconnaissance.

Ma gratitude va ensuite vers Madame Martine Labbé pour avoir accepté de rapporter mes travaux. Je la remercie également pour l'accueil qu'elle m'a réservé à maintes reprises à Bruxelles.

Mes remerciements vont ensuite à Monsieur Jean-François Maurras qui m'a fait l'honneur de rapporter ma thèse. Qu'il reçoive ici toute ma reconnaissance.

J'ai été très honoré que Monsieur Maurice Queyranne ait accepté de compter parmi mes rapporteurs. Je le remercie pour l'attention toute particulière qu'il a portée à mon mémoire et ses remarques constructives sur mes travaux.

Je remercie également Monsieur Alain Quilliot pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse. De plus, je remercie Monsieur Mourad Baïou d'avoir bien voulu examiner mes travaux et participer au jury.

Je désire également remercier Bernard Fortz et Tom McCormick pour leur fructueuse collaboration. Je remercie encore plus chaudement Bernard Fortz qui m'a fait le plaisir de participer au jury. Je voudrait également lui témoigner ici toute mon amitié qui s'est forgée au cours de nos différentes rencontres.

Mon amitié va également vers David Huygens avec qui j'ai grandement collaboré au cours de ces deux dernières années. Je le remercie également pour tous les bons moments que nous avons passés au cours de nos séjours respectifs à Bruxelles et Clermont-Ferrand.

Je désire également témoigner de toute ma reconnaissance envers les membres de l'équipe Polyèdre et Optimisation Combinatoire du Laboratoire LIMOS de Clermont-Ferrand au sein de laquelle j'ai passé plus de quatre années très agréables. Je renouvelle toute mon amitié à Ridha Mahjoub. Je remercie également Fatiha et Jean Mailfert pour leur soutien et leur bonne humeur. Un immense merci aussi à Sylvie Borne et Pierre Fouilhoux pour les agréables moments que l'on a passé ensemble, leur aide tant en recherche qu'en enseignement, les discussions (de temps en temps interminables) autour d'un café ou d'un thé. Je salue également Lise Slama qui s'est jointe à la bonne humeur générale de l'équipe.

Je tiens également à remercier tous les autres membres du laboratoire et d'autres collègues extérieurs au laboratoire. Je salue entre autres Fabien, Naouel, Christophe, Jean-Marc, Stéphane, Emmanuelle, Christophe, Loïc, Eric, Nathalie, David, ...

Enfin, je tiens à remercier de tout mon cœur mes parents qui m'ont supporté durant ces quatre années de thèse. Cela n'a pas dû être facile tous les jours, mais ils ont toujours été là pour me soutenir. Et un grand merci à Ines, Isabelle, Mustapha, Jean, Françoise, Jeremy, Dominique et tous les autres membres de ma famille.

Résumé

Un graphe est dit 2-arête connexe si entre chaque paire de sommets, il existe au moins deux chemins arête-disjoints. Etant donné un graphe $G = (V, E)$ et des coûts sur les arêtes, le problème du sous-graphe 2-arête connexe consiste à trouver un sous-graphe 2-arête connexe de G contenant tous les sommets de V et qui soit de coût minimum. Ce problème a des applications dans les domaines des télécommunications et du transport. Dans cette thèse, nous étudions différentes extensions de ce problème d'un point de vue polyédral.

Dans une première partie, nous étudions le problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe. Celui-ci consiste, étant donné un ensemble de terminaux $S \subset V$, à trouver un sous-graphe 2-arête connexe de G qui couvre S et qui soit de coût minimum. Nous introduisons une famille d'inégalités valides pour le polytope associé à ce problème. Cette classe généralise les contraintes dites de F -partition Steiner. Nous montrons que ces contraintes, avec les contraintes de coupe Steiner et les contraintes triviales décrivent entièrement le polytope dans les roues. Comme conséquence, nous obtenons une description du polytope associé dans les graphes de Halin quand les terminaux ont une certaine disposition dans le graphe. Ceci généralise le résultat de Barahona et Mahjoub [7] quand $S = V$.

Par la suite, nous considérons le problème du sous-graphe 2-arête connexe où chaque arête doit appartenir à un cycle de longueur bornée. Nous introduisons une classe d'inégalités appelées contraintes de cycle. Nous montrons que ces contraintes, avec les contraintes de coupe et les contraintes d'intégrité suffisent pour formuler le problème comme un programme linéaire en nombres entiers. Nous discutons ensuite de plusieurs classes d'inégalités valides pour le polytope associé. Nous décrivons des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces contraintes définissent des facettes. Nous discutons également de techniques de séparation pour ces contraintes, et nous montrons en particulier que le problème de séparation des contraintes de cycle est polynomial quand la borne est ≤ 4 . En utilisant ces résultats, nous développons un algorithme de coupes et branchements pour le problème et nous discutons de certains résultats expérimentaux.

La dernière partie de la thèse concerne le problème qui consiste à trouver, entre deux sommets d'un graphe, deux chemins arête-disjoints de coût minimum et de longueur bornée. Nous présentons une formulation du problème comme un programme en nombres entiers quand la borne sur les chemins ne dépasse pas 3, et nous montrons que la relaxation linéaire de ce programme est entière. Nous donnons également des conditions nécessaires et suffisantes pour que cette description soit minimale. Nous discutons aussi du dominant du polytope associé.

Nous présentons en annexe d'autres résultats liés aux problèmes étudiés. La première annexe introduit quelques classes supplémentaires d'inégalités valides pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés. Quant à une seconde annexe concerne le problème du sous-graphe 2-arête connexe de coût minimum avec des chemins bornés. Pour ce dernier problème, nous donnons en particulier une description complète du polytope associé quand la borne est 2 et le graphe est une roue.

Mots clés : sous-graphe 2-arête connexe, polytope, facette, cycles et chemins bornés, algorithme polynomial, algorithme de coupes et branchements.

Abstract

A graph is said to be 2-edge connected if between each pair of nodes there exist at least two edge-disjoint paths. Given a graph $G = (V, E)$ and a cost function that associates to each edge $e \in E$, a cost $c(e)$, the 2-edge connected subgraph problem is to find a minimum cost spanning 2-edge connected subgraph of G . This problem has applications in the design of telecommunication networks. In this thesis, we study some generalizations of this problem from a polyhedral point of view.

First, we consider the Steiner 2-edge connected subgraph problem. Given a set of terminals S , the problem consists in finding a minimum cost 2-edge connected subgraph spanning S . We introduce a class of valid inequalities for the associated polytope. This class generalizes the so-called Steiner F -partition inequalities. We show that these inequalities together with the Steiner cut and the trivial inequalities describe the polytope in the wheels. In consequence, we obtain a characterization of the associated polytope in the class of Halin graphs when the terminals have a certain arrangement in the graph. This generalizes a result of Barahona and Mahjoub [7] when $S = V$.

After that, we consider the 2-edge connected subgraph problem when each edge must belong to a bounded cycle. We introduce a class of valid constraints called cycle inequalities. We show that the integrity, cut and cycle inequalities are sufficient to formulate the problem as an integer program. We then discuss some classes of valid inequalities. We describe necessary and sufficient conditions for these constraints to be facet defining. We also discuss the separation problem for these inequalities. In particular, we show that the cycle inequalities can be separated in polynomial time when the bound is not greater than 4. Using these results, we develop a branch-and-cut algorithm for the problem and discuss some experimental results.

Finally, we study the problem that is to find, between two nodes of the graph, two edge-disjoint paths of bounded length. We give an integer programming formulation for the problem when the bound is ≤ 3 . We also show that the linear relaxation of the problem in this case is integral. In addition, we discuss necessary and sufficient

conditions for the linear relaxation of the problem to be minimal, and investigate the relation between this relaxation and the dominant of the associated polytope.

Further results are given in two apendicies. The first appendix introduces more valid inequities for the the 2-edge connected problem with bounded rings. The second one deals with the hop-constrained 2-edge connected subgraph problem. In particular, we give a complete description of the associated polytope when the number of hops is limited to 2 and the graph is a wheel.

Key words : 2-edge connected subgraph, polytope, facet, bounded cyles, bounded paths, polynomial algorithm, branch-and-cut algorithm.

Table des matières

Introduction	1
1 Notions préliminaires	3
1.1 Polyèdres	3
1.2 Approche polyédrale et algorithme de coupes et branchements	4
1.3 Notations et Définitions	6
2 Conception de réseaux : état de l'art	9
2.1 Introduction	9
2.2 Modélisation	10
2.3 Cas particuliers	12
2.3.1 k -arête (sommet) connexité	12
2.3.2 $(k, k + 1)$ -fiabilité	17
2.4 Cas général	18
2.5 Fiabilité avec contraintes de borne	19
3 Sous-graphes Steiner 2-arête connexes	21
3.1 Les contraintes de F-partition Steiner généralisées	21
3.2 STECSP(G, S) dans les graphes de Γ	25
3.3 Preuve du Théorème 3.1	33
3.4 Applications aux graphes de Halin	40
3.5 Conclusion	44
4 Le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés	45
4.1 Formulation et polytope associé	46
4.2 Inégalités valides et séparation	50
4.2.1 Contraintes de coupe	51

4.2.2	Contraintes de cycle	53
4.2.3	Contraintes de sous-ensemble	58
4.2.4	Contraintes métriques	60
4.2.5	Contraintes cyclomatiques	61
4.2.6	Contraintes de cycle-partition	67
4.3	Algorithme de coupes et branchements	72
4.4	Résultats expérimentaux	76
4.5	Conclusion	84
5	Le problème des deux chemins arête-disjoints de longueur bornée	87
5.1	Introduction	87
5.2	Formulation pour $L = 2$ et 3	90
5.3	Polytope du THPP quand $L = 2, 3$	93
5.4	Propriétés structurales	98
5.5	Preuve du Théorème 5.3	112
5.6	Facettes de $P(G, L)$	116
5.7	Dominant de $P(G, L)$	120
5.8	Généralisation	122
5.9	Conclusion	125
	Conclusion	127
	Annexe	131
A	Autres contraintes valides pour $\mathcal{P}(G, K)$	131
A.1	Contraintes d'éventail	131
A.2	Contraintes de rayon	135
A.3	Contraintes valides pour $\mathcal{P}(G, 4)$	138
A.4	Contraintes de roue	141
A.5	Conclusion	143
B	Le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des chemins bornés	145
B.1	Contraintes valides	146
B.2	Le polytope $P(G)$ dans les roues	149
B.3	Conclusion	156

Introduction

Avec l'introduction de la technologie des fibres optiques dans les réseaux de télécommunications et l'explosion de l'Internet, le problème de sécurisation (fiabilité) des réseaux est devenu un des problèmes majeurs pour les opérateurs de télécommunications.

Ce problème consiste à déterminer les liaisons à installer dans un réseau de telle manière que si une de ces liaisons tombe en panne, le trafic puisse être rerouté et le réseau continue ainsi à fonctionner.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à certaines variantes de ce problème. Nous discutons de certaines approches polyédrales et nous développons des algorithmes de type Branch-and-Cut pour les résoudre.

Les conditions de fiabilité dans les réseaux s'expriment généralement en termes de connexité. Une condition de fiabilité qui s'est avérée efficace en pratique est celle de la 2-connexité. C'est-à-dire qu'il doit exister entre chaque paire de sommets du réseau, au moins deux chaînes arête-disjointes. Ainsi, en cas de panne d'une liaison, il existe toujours un second chemin pour router le trafic. Un réseau vérifiant cette propriété est dit 2-arête connexe.

Une des approches de sécurisation d'un réseau de télécommunications est celle dite "locale". Si une liaison tombe en panne, on cherche un chemin entre les extrémités de la liaison pour rerouter le trafic. Ce type de sécurisation est privilégiée dans les couches dites basses (couches optiques). Dans ces couches, le volume du trafic est important. On sécurise globalement tout le contenu d'un lien en le reroutant sur un autre chemin entre les sommets de ce lien. Afin que le reroutage s'effectue au moindre coût, on va minimiser la longueur de ce chemin. Pour cela on s'intéresse à des réseaux (2-connexes) où chaque liaison appartient à un cycle borné.

Un autre type de sécurisation est la sécurisation dite "de bout en bout". Dans cette stratégie, les origines-destinations des demandes affectées par la panne d'une liaison

gèrent le rétablissement du trafic sur des chemins entre les extrémités de ces demandes. Dans ce cas, et pour limiter la longueur du reroutage, il doit y avoir entre chaque paire origine-destination au moins deux chemins disjoints de longueur bornée.

Dans un premier temps, nous considérons le problème de sécurisation sans contrainte de borne. Ce problème n'est rien d'autre que le problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe. Ici, on suppose que le réseau comporte certains sommets terminaux, et qu'il existe une demande entre chaque paire de terminaux. En supposant que chaque liaison possède un certain coût (de réalisation), le problème est de déterminer un sous-graphe 2-arête connexe contenant les sommets terminaux et qui soit de coût minimum.

Par la suite, nous nous intéressons à ce problème quand tous les sommets sont des terminaux et chaque liaison du réseau doit appartenir à un cycle borné. Enfin, nous étudions ce problème en limitant la longueur des chemins entre les terminaux.

Ces problèmes sont reconnus difficiles. La difficulté vient en particulier de la combinatoire liée au choix de topologie. De plus, la sécurisation (comme la limitation sur la longueur des chemins de routage) introduit des contraintes de nature complexe. La méthode dite polyédrale s'est avérée très puissante pour les problèmes d'optimisation combinatoire difficiles. Cette technique consiste à ramener le problème à la résolution d'un programme linéaire, par la description complète (ou partielle) de son polytope de solutions par un système d'inégalités linéaires. Cette approche a été appliquée avec succès à plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire comme le problème du voyageur de commerce [24, 1] et le problème de la coupe maximale [6]

Dans cette thèse, nous considérons cette approche pour les problèmes de fiabilité de réseaux présentés ci-dessus. Nous étudions les polyèdres associés et nous discutons d'algorithmes de résolution.

Dans le chapitre suivant, nous introduisons quelques notions de base de l'approche polyédrale. Dans le chapitre 2, nous présentons l'état de l'art des problèmes de fiabilité de réseaux et des méthodes de résolution développées. Les chapitres 3, 4 et 5 constituent la partie principale de la thèse. Le chapitre 3 concerne le problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe. Et les chapitres 4 et 5 discutent des problèmes du sous-graphe 2-arête connexe avec respectivement des cycles et des chemins bornés.

Le mémoire est clôturé par une conclusion présentant en particulier des problèmes ouverts et des perspectives de travail.

Certains résultats portant sur des cas particuliers ou des généralisations des problèmes étudiés dans les chapitres 4 et 5, font l'objet de deux annexes rajoutées à la fin de la thèse.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Ce chapitre est dédié à quelques notions de bases sur les polyèdres combinatoires et les méthodes de coupes et branchements. Nous donnerons également quelques définitions et notations qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.

1.1 Polyèdres

Dans cette section, nous allons introduire des définitions et des propriétés concernant la théorie des polyèdres.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On dit que x est une *combinaison linéaire* des points $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ s'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$. Si de plus $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, alors on dit que x est une *combinaison affine* de ces points. Enfin, si $\lambda_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, alors x est une *combinaison convexe* de ces points.

Les points $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ sont dits *linéairement indépendants* (resp. *affinement indépendants*) si le système

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$$

$$\left(\text{resp. } \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0 \right)$$

admet une solution unique $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \dots, k$.

Soit S un ensemble non vide de points de $\mathbb{R}^n$. L'enveloppe convexe de S , notée $\text{conv}(S)$ est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ qui sont des combinaisons convexes de points de S .

Un *polyèdre* P de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de points de $\mathbb{R}^n$ engendré par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de $\mathbb{R}^n$. On peut alors noter $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ où A est une matrice réelle à m lignes et n colonnes. Un polyèdre borné est un *polytope*. Le *dominant* d'un polyèdre $P \subset \mathbb{R}^n$ est le polyèdre

$$\text{Dom}(P) = \{z = x + y \in \mathbb{R}^n \mid x \in P, \text{ et } y \geq 0\}.$$

La *dimension* d'un polyèdre P , notée $\dim(P)$, est égale à d si et seulement si le nombre maximum de points de P affinement indépendants est $d + 1$. Un polyèdre P de $\mathbb{R}^n$ est dit de *pleine dimension* si $\dim(P) = n$. Un *point extrême* de P est un point de P ne pouvant pas s'écrire comme une combinaison linéaire de plusieurs autres points de P . Un polyèdre dont tous les points extrêmes sont entiers est dit *entier*.

Une inégalité $ax \geq b$ est dite *valide* pour un polyèdre P si elle est satisfaite par tous les points de P . Soit $ax \geq \alpha$ une inégalité valide pour P . L'ensemble $\mathcal{F}_a = \{x \in P \mid ax = b\}$ est appelé *face* de P . On dit que $\mathcal{F}_a$ est la face définie par $ax \geq \alpha$. Si $P \neq \mathcal{F}_a \neq \emptyset$, alors $\mathcal{F}_a$ est dite *face propre*. Si $\mathcal{F}_a$ est une face propre et $\dim(\mathcal{F}_a) = \dim(P) - 1$ alors, $\mathcal{F}_a$ est appelé *facette* de P .

Une contrainte $ax \geq b$ est dite *serrée* (resp. *violée*) par un point x^* si $ax^* = b$ (resp. $ax^* < b$).

1.2 Approche polyédrale et algorithme de coupes et branchements

Soient $\mathcal{P}$ un problème d'optimisation combinatoire et $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses solutions. Alors $\mathcal{P}$ peut s'écrire

$$\max\{cx \mid x \in \mathcal{S}\}$$

où c est une fonction coût associée aux variables du problème. En considérant l'enveloppe convexe des solutions du problème $\mathcal{P}$, ce dernier est équivalent à rechercher une solution de base du problème

$$\max\{cx \mid x \in \text{conv}(\mathcal{S})\}.$$

En conséquence, si nous caractérisons l'enveloppe convexe de S par un système d'inégalités linéaires, alors nous ramenons le problème $\mathcal{P}$ à la résolution d'un programme linéaire. Noter que ce dernier peut être résolu en temps polynomial [60, 65].

L'approche polyédrale, introduite par Edmonds [29] dans le cadre du problème de couplage, consiste en l'étude du polyèdre associé à un problème d'optimisation combinatoire afin de pouvoir le ramener à un programme linéaire. La caractérisation du polyèdre associé à un problème d'optimisation combinatoire est généralement difficile à obtenir. De plus, une description complète (ou partielle) du polyèdre peut comporter un nombre non polynomial de contraintes. Cependant, seul un nombre réduit de ces inégalités peut être nécessaire pour résoudre le problème à l'aide d'une *méthode de coupes*. En effet, cette technique ramène le problème à une séquence de programmes linéaires, chacun étant une relaxation linéaire du problème. La méthode de coupe est basée sur le problème suivant dit *problème de séparation*:

Problème 1.1 Soient $\mathcal{C}$ une famille d'inégalités linéaires et $x \in \mathbb{R}^n$. Le problème de séparation associé à $\mathcal{C}$ et à x consiste à vérifier si x satisfait toutes les inégalités de $\mathcal{C}$ et sinon à trouver une inégalité de $\mathcal{C}$ violée par x .

Le problème de séparation est la clef essentielle de tout algorithme de coupes. En effet, Grötschel et al. [49] ont montré qu'un problème d'optimisation combinatoire sur un ensemble de contraintes $\mathcal{C}$ peut être résolu en temps polynomial si et seulement si le problème de séparation pour ces contraintes peut être résolu en temps polynomial. En conséquence, un algorithme efficace de séparation pour une famille de contraintes valides d'un problème d'optimisation combinatoire est un outil important pour résoudre le problème dans le cadre d'une méthode de coupes.

Cependant, comme il a déjà été noté précédemment, nous ne connaissons pas forcément toutes les inégalités décrivant le polyèdre des solutions du problème. De plus, le problème de séparation sur certaines classes de contraintes valides peut être lui-même NP-difficile et, dans ce cas, nous ne pouvons disposer que de techniques de séparation approchées. Une simple méthode de coupes ne nous conduit donc pas toujours à une solution optimale du problème, cette dernière étant fractionnaire. A ce stade de la résolution intervient la phase de branchement. Cette phase consiste à choisir une variable fractionnaire x_i de la solution courante du programme linéaire. On crée alors deux sous-problèmes du problème courant en fixant, par exemple, d'un côté la variable x_i à 0 et de l'autre à 1. La solution optimale du problème sera la meilleure des deux solutions données par chacun des deux sous-problèmes. Cette phase de branchement est répétée d'une manière récursive pour les sous-problèmes ainsi obtenus jusqu'à l'obtention d'une solution optimale. L'arborescence de l'ensemble des sous-problèmes est

gérée par un arbre appelé *arbre de branchement*. Chaque nœud de cet arbre correspond à un sous-problème.

Comme à chacun des nœuds de l'arbre de branchement correspond un programme linéaire, il est possible de relancer la méthode de coupe à chaque nœud. Cette méthode est appelée *méthode de coupes et de branchements*. Celle-ci s'est révélée très efficace pour la résolution de problèmes d'optimisation combinatoire réputés pour être difficiles tel que le problème du voyageur de commerce et celui de la coupe maximale.

1.3 Notations et Définitions

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques notations et définitions concernant les graphes, qui seront fréquemment utilisées dans la suite de ce mémoire.

Nous notons par $G = (V, E)$ un graphe fini, non orienté, pouvant contenir des arêtes multiples. L'ensemble V représente l'ensemble des sommets (ou nœuds) du graphe et E l'ensemble des arêtes. Un *sous-graphe* $H = (W, F)$ de G est un graphe tel que $W \subset V$ et $F \subset E$. Celui-ci est dit *couvrant* si $W = V$.

Si e est une arête de E reliant les sommets u et v de V , alors u et v sont les *extrémités* de e et on note $e = uv$. On dit qu'une arête e est *incidente* à un sommet u si u est l'une des extrémités de e . Par extension, on dira qu'une arête e est incidente à un ensemble de sommets W si e possède exactement une extrémité dans W . Si u et v sont deux sommets de V , on dira que u est *adjacent* à v s'il existe une arête dans E reliant u et v . De même, on dira qu'une arête e est *adjacente* à une arête f si ces deux arêtes ont une extrémité commune. Si les arêtes e et f ont les mêmes extrémités, alors e et f sont dites *parallèles* (ou *multiples*).

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *complet* si pour toute paire de sommets $u, v \in V$, il existe au moins une arête dans E entre u et v . Un graphe ne contenant ni arêtes parallèles, ni boucles, est dit *simple*. Enfin, un graphe *planaire* est un graphe pouvant être représenté dans le plan de manière à ce que ses arêtes ne se croisent pas.

Soit c une fonction qui associe à chaque arête $e \in E$, un coût $c(e)$. Soit $F \subset E$ un ensemble d'arêtes. On pose $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$. Le coût d'un sous-graphe (W, F) est la valeur de $c(F)$. Si x est un vecteur de réels non négatifs indicé sur les arêtes de E , alors le *graphe support* de x est le graphe $G_x = (V, E_x)$ où E_x est l'ensemble des arêtes $e \in E$ telles que $x(e) > 0$.

Soit $F \subset E$ un ensemble d'arêtes. On dénote par $V(F) \subseteq V$ l'ensemble des extrémités des arêtes de F . Le graphe *induit* par les arêtes de F est le graphe $G(F) = (V(F), F)$. De même, si W est un ensemble de sommets de V , on note par $E(W)$ l'ensemble des arêtes ayant leurs deux extrémités dans W . Le graphe $G(W) = (W, E(W))$ est le graphe induit par les sommets de W . La *coupe* associée à W , notée par $\delta(W)$, est l'ensemble des arêtes ayant exactement une extrémité dans W . Remarquons que si $\overline{W} = V \setminus W$, alors $\delta(W) = \delta(\overline{W})$. Si W est réduit à un seul sommet, on écrit $\delta(w)$ à la place de $\delta(\{w\})$.

Soit F un ensemble d'arêtes. On dénote par $G \setminus F$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant les arêtes de F . De la même manière, si W est un ensemble de sommets, $G \setminus W$ correspond au graphe obtenu à partir de G en supprimant les sommets de W et les arêtes incidentes à au moins un sommet de W . Si F (resp. W) est réduit à une seule arête e (resp. un seul sommet v), alors on écrira $G - e$ (resp. $G - v$) au lieu de $G \setminus \{e\}$ (resp. $G \setminus \{v\}$).

Un *chemin* P est une séquence de sommets distincts $(u_1, \dots, u_p)$ telle que $u_i u_{i+1} \in E$ pour $i = 1, \dots, p-1$ et tous les sommets internes sont différents. Si s et t sont deux sommets de V et $P = (u_1, \dots, u_p)$ un chemin tel que $u_1 = s$ et $u_p = t$, alors P est appelé un *st-chemin*. Deux chemins P_1 et P_2 sont *arête-disjoints* (resp. *sommet-disjoints*) si les deux chemins n'ont aucune arête (resp. aucun sommet) en commun. Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* si, pour toute paire de sommets $u, v \in V$, il existe au moins un uv -chemin dans G . Un cycle $C = (u_1, \dots, u_{p-1})$ est un chemin $P = (u_1, \dots, u_p)$ tel que $u_1 = u_p$.

Soient $V_0, \dots, V_p, p+1$ ensembles non-vides de sommets de V deux à deux disjoints. On note par $[V_i, V_j]$ l'ensemble des arêtes incidentes à V_i et à V_j . Si V_i (resp. V_j) est réduit à un seul sommet v , on écrira $[v, V_j]$ (resp. $[V_i, v]$) à la place de $[\{v\}, V_j]$ (resp. $[V_i, \{v\}]$). On dénote par $\delta(V_0, \dots, V_p)$ l'ensemble des arêtes ayant leurs extrémités dans deux ensembles distincts V_i . Si les ensembles V_i sont tels que $\bigcup_{i=0}^p V_i = V$, alors $V_0, \dots, V_p$ forme une *partition* de V .

Chapitre 2

Conception de réseaux : état de l'art

2.1 Introduction

La conception de réseaux fiables à coûts réduits prend de nos jours une importance cruciale tant dans l'industrie des télécommunications que dans toute entreprise de distribution d'énergie. En effet, on peut facilement imaginer qu'un réseau de distribution d'électricité peu fiable puisse, en cas de panne, plonger dans le noir une région fortement habitée. D'un autre côté, dans le domaine des télécommunications, la mise en place de la technologie des fibres optiques a entraîné une augmentation du débit des flux d'informations dans les réseaux tel que l'Internet. En conséquence, une panne dans ces réseaux peut avoir de lourdes conséquences. Cependant, concevoir des réseaux optiques très maillés (denses) et donc très fiables, peut être très coûteux pour les opérateurs. Mais diminuer la densité d'un réseau peut non seulement diminuer son coût, mais aussi sa fiabilité. Prenons pour exemple un réseau dans lequel il n'existe qu'un seul chemin permettant de transférer des informations entre deux terminaux du réseau. Si une liaison de ce chemin vient à défaillir, le trafic entre les deux terminaux ne peut alors plus être assuré. Le réseau se retrouve ainsi déconnecté.

La fiabilité d'un réseau s'exprime généralement en termes de connexité : plus un terminal a de l'importance au sein du réseau, plus il doit être connecté au reste du réseau. Ainsi, la défaillance d'un lien n'entraîne pas l'isolement d'un nœud important du reste du réseau. Pour cela, on associe à chaque nœud du réseau un certain degré de connexité. Celui-ci exprime le nombre de liaisons minimum qui doivent connecter le nœud au réseau final. Ainsi on assure entre chaque paire de sommets, en fonction de leur importance, un certain nombre de chemins de routage.

Le problème de conception d'un réseau fiable est donc de déterminer les liaisons à installer dans le réseau afin de respecter les conditions de fiabilité tout en minimisant le coût total du réseau.

2.2 Modélisation

Nous allons donner ici une formulation mathématique du problème de conception d'un réseau fiable. On représente dans la suite un réseau par un graphe $G = (V, E)$ où chaque sommet de V correspond à un terminal du réseau et chaque arête de E représente un lien possible dans le réseau. Soit $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction qui associe à chaque arête de E son coût de construction $c(e)$.

Dans [88, 90, 91], Winter introduit le problème général suivant de conception d'un réseau fiable.

Problème 2.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction coût associée aux arêtes. Soit $R = (r_{ij})$ une matrice carrée d'entiers non négatifs de taille $|V|$. Trouver un sous-graphe de G de coût minimum tel qu'entre chaque paire de sommets $i, j \in V$, il existe au moins r_{ij} chaînes arête-disjointes (ou sommet-disjointes) entre i et j .*

Ce problème a été considéré plus tard par Grötschel et Monma [50], Grötschel, Monma et Stoer [51, 53, 52, 54] et Stoer [83] dans un cadre légèrement plus restreint. Leur modèle se présente comme suit. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction coût associée aux arêtes. On associe à chaque sommet $v \in V$ un entier $r(v)$ appelé *type de connexité*. On dit qu'un graphe $H = (V, F)$ vérifie les conditions d'arête-fiabilité (sommet-fiabilité) si pour toute paire de sommets $i, j \in V$, il existe au moins $r(i, j) = \min(r(i), r(j))$ chaînes arête-disjointes (sommet-disjointes). Le problème de conception d'un réseau fiable se présente par conséquent de la manière suivante :

Problème 2.2 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction coût sur les arêtes. Soit $r : V \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction qui associe à chaque sommet un type de connexité. Trouver un sous-graphe de G de coût minimum vérifiant les conditions de fiabilité par rapport à r .*

Plusieurs cas particuliers de ce problème ont été largement étudiés. Si $r(v) = 1$ pour tout $v \in V$, le problème est équivalent au problème de l'arbre couvrant de poids minimum. Ce dernier peut être résolu efficacement, c'est-à-dire en

temps polynomial, en utilisant, par exemple, un des algorithmes bien connus de Kruskal [69] ou de Prim [82].

Si $r(v) = 1$ pour exactement deux sommets s et t de V et $r(v) = 0$ pour tous les autres, alors le problème n'est rien d'autre que celui du plus court chemin entre s et t . Ce problème est NP-difficile dans le cas général. Il peut cependant être résolu en temps polynomial quand les coûts sont non négatifs avec, par exemple, l'algorithme de Dijkstra [28]. Suurballe [84] et Suurballe et Tarjan [85] ont, quant à eux, résolu le problème un peu plus général lorsque $r(s) = r(t) = k$ avec $k \geq 2$ et $r(v) = 0$ pour les autres sommets.

Si $r(v) \in \{0, 1\}$ pour tout $v \in V$, nous avons alors le problème de l'arbre Steiner. Celui-ci est connu pour être NP-difficile. Lawler [71] a montré qu'il pouvait être résolu en temps polynomial quand le nombre de sommets de type de connexité égal à 0 (égal à 1) est réduit.

Afin de formuler le problème de conception d'un réseau arête-fiable, nous rappelons d'abord le théorème de Menger [76] suivant.

Théorème 2.3 *Dans un graphe G , il n'existe pas de coupe de cardinalité inférieure strictement à k déconnectant deux sommets s et t si et seulement s'il existe au moins k chaînes arête-disjointes entre s et t .*

Nous pouvons étendre la notion de type de connexité d'un sommet à un ensemble de sommets $W \subset V$ en posant $r(W) = \max\{r(v) \mid v \in W\}$. On pose également $\text{con}(W) = \min(r(W), r(V \setminus W))$. Ainsi, par le théorème 2.3, on peut s'apercevoir que, pour tout ensemble de sommets W du graphe, au moins $\text{con}(W)$ chemins arête-disjoints doivent intersecter la coupe $\delta(W)$. Associons maintenant à chaque arête $e \in E$ du graphe une variable $x(e) \in \{0, 1\}$. Si $F \subset E$, le vecteur d'incidence associé à F , noté x^F , est défini par $x^F(e) = 1$ si $e \in F$ et $x^F(e) = 0$ sinon. Par le théorème 2.3, il s'ensuit que le problème de conception d'un réseau arête-fiable est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant :

Minimiser cx

$$x(e) \geq 0, \quad \text{pour tout } e \in E, \quad (2.1)$$

$$x(e) \leq 1, \quad \text{pour tout } e \in E, \quad (2.2)$$

$$x(\delta(W)) \geq \text{con}(W), \quad \text{pour tout } W \subset V, \emptyset \neq W \neq V, \quad (2.3)$$

$$x(e) \in \{0, 1\}, \quad \text{pour tout } e \in E. \quad (2.4)$$

Les contraintes (2.1) et (2.2) sont appelées *inégalités triviales*, les contraintes (2.3)

sont appelées *inégalités de coupe* et les contraintes (2.4) sont appelées *contraintes d'intégrité*. En ajoutant au programme en nombres entiers précédent, la contrainte

$$\begin{aligned} x(\delta_{G-Z}(W)) &\geq \text{con}_{G-Z}(W) - |Z|, \quad \text{pour tout } Z \subset V, \emptyset \neq Z \neq V, \\ &\text{et pour tout } W \subset V \setminus Z, \emptyset \neq W \neq V \setminus Z, \\ &\text{avec } |Z| < \text{con}_{G-Z}(W), \end{aligned} \quad (2.5)$$

on obtient une formulation du problème de conception d'un réseau sommet-fiable [50]. Ici, $\delta_{G \setminus Z}(W)$ et $\text{con}_{G \setminus Z}(W)$ représentent la coupe et le type de connexité de W dans le graphe $G \setminus Z$.

Notons que le problème de séparation des contraintes de coupe se réduit à un problème de flot maximum dans un graphe [32]. Ce dernier pouvant être résolu en temps polynomial, le problème de séparation des inégalités de coupe est lui aussi polynomial. Ceci implique que la relaxation linéaire du problème de conception d'un réseau fiable ci-dessus peut être résolue en temps polynomial.

2.3 Cas particuliers

2.3.1 k -arête (sommet) connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est dit k -arête (k -sommet) *connexe* s'il existe au moins k chaînes arête(sommet)-disjointes entre chaque paire de sommets de V . Par conséquent, si $r(v) = k$ pour tout $v \in V$, alors un sous-graphe k -arête (k -sommet) connexe de G sera arête(sommet)-fiable. Si $k = 2$ ce problème de conception d'un réseau fiable est connu sous le nom du *problème du sous-graphe 2-arête (2-sommet) connexe* (TECSP).

Comme le type de connexité égal à 2 s'est révélé être une condition de connexité adéquate pour la plupart des réseaux de télécommunications actuels, ce problème s'est vu porter beaucoup d'attention. Eswaran et Tarjan ont montré dans [30] que le problème du voyageur de commerce (TSP), consistant à trouver un cycle Hamiltonien dans un graphe (cycle passant une et une seule fois par tous les sommets du graphe), peut être ramené au TECSP. Ceci implique que le TECSP, comme le problème de conception d'un réseau fiable, sont NP-difficiles. Cependant, de nombreuses études sur la structure faciale du polytope associé au problème TECSP ont été réalisées.

Monma et al. [77] ont étudié le TECSP dans le cas métrique, c'est-à-dire lorsque le graphe G est complet et la fonction coût c satisfait les inégalités triangulaires ($c_{ij} \leq$

$c_{ik} + c_{kj}$ pour tout triplet de sommets distincts i, j et k). Ils ont montré que dans ce cas, le coût d'un cycle Hamiltonien optimal ne dépasse pas $\frac{4}{3}Q$ où Q est le coût d'une solution optimale du TECSP. Ils ont également montré qu'une solution optimale du TECSP pouvait être choisie de telle manière que chaque sommet ait un degré égal à 2 ou 3 et les composantes connexes, obtenues après la suppression d'une ou de deux arêtes, ne sont pas toutes 2-arête connexes. Ceci montre qu'une solution optimale du TECSP possède une structure proche de celle d'un cycle Hamiltonien. Ils ont également montré des résultats similaires pour le problème du sous-graphe 2-sommet connexe (TNCSP). Frederickson et Jájá [39] ont montré, dans le cas où les coûts satisfont les inégalités triangulaires, qu'un graphe 2-arête connexe peut être transformé en un graphe 2-sommet connexe sans en augmenter le coût.

Un graphe G est dit *contractible* à un graphe H si H peut être obtenu à partir de G par suppression et/ou contraction d'arêtes, la *contraction* d'une arête e consistant à supprimer l'arête e ainsi que ses arêtes parallèles et à identifier ses deux extrémités. Un graphe est dit *série-parallèle* s'il n'est pas contractible à K_4 (le graphe complet sur 4 sommets).

Cornuéjols et al. [14] ont étudié le polytope du TECSP lorsque chaque arête peut être prise plus d'une fois. Ils ont montré que si le graphe G est série-parallèle, alors ce polytope est donné par les contraintes de non-négativité et les contraintes de coupe. Dans [72], Mahjoub a étudié le polytope associé au TECSP dans les graphes série-parallèles. Il a montré que les contraintes de coupe et les contraintes triviales suffisent pour caractériser ce polytope dans cette classe de graphe. Mahjoub [72] a également introduit la classe suivante d'inégalités valides pour le polytope du TECSP.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Considérons une partition $V_0, \dots, V_p$ de V et soit $F \subseteq \delta(V_0)$ un ensemble d'arêtes de cardinalité impaire. En ajoutant les inégalités

$$\begin{aligned} x(\delta(V_i)) &\geq 2, & \text{pour tout } i = 1, \dots, p, \\ -x(e) &\geq -1, & \text{pour tout } e \in F, \\ x(e) &\geq 0, & \text{pour tout } e \in \delta(V_0) \setminus F, \end{aligned}$$

on obtient

$$2x(\Delta) \geq 2p - |F|,$$

où $\Delta = \delta(V_0, \dots, V_p) \setminus F$. En divisant par 2 et en arrondissant le membre de droite à l'entier supérieur, on obtient l'inégalité

$$x(\Delta) \geq p - \left\lceil \frac{|F|}{2} \right\rceil. \quad (2.6)$$

Les inégalités (2.6) sont appelées *inégalités de F -partition*. Dans [3], Baïou et al. ont montré que les contraintes de F -partition peuvent être séparées en temps polynomial

quand F est fixé. Dans [25], Didi Biha a généralisé les contraintes de F -partition au problème du sous-graphe k -arête connexe. Il a également montré, dans ce cas, que le problème de séparation des contraintes de F -partition peut être résolu en temps polynomial quand F est fixé. Fonlupt et Mahjoub [31] ont montré que les points extrêmes dits *critiques* (points extrêmes du polytope comportant un ensemble non-vide minimal de composantes fractionnaires) peuvent être séparés en temps polynomial en utilisant les contraintes de F -partition. De plus, les contraintes de F -partition se sont révélées très efficaces dans la résolution du problème du sous-graphe 2-arête (sommet) connexe [3, 64].

Un *graphe de Halin* est un graphe $G = (V, T \cup C)$ planaire où T est un arbre sans sommet de degré 2 et C un cycle reliant chacune des feuilles de l'arbre T . Une *roue* sur $n + 1$ sommets, notée W_n , est un graphe composé d'un cycle de n sommets auquel on ajoute un sommet universel (sommet relié à tous les autres sommets du graphe). Notons qu'une roue est un graphe de Halin dont l'arbre est une étoile.

Barahona et Mahjoub [7] ont donné une description minimale du polytope associé au TECSP dans la classe des graphes de Halin. Ils ont montré que les contraintes de coupe, les contraintes de F -partition et les contraintes triviales suffisent pour décrire le polytope dans ces graphes. Pour montrer ce résultat, Barahona et Mahjoub ont utilisé le fait que les graphes de Halin se décomposent par des coupes de cardinalité 3 en un ensemble de roues.

Soit $V_0, \dots, V_p$ une partition de V , les contraintes du type

$$x(\delta(V_0, \dots, V_p)) \geq p, \quad (2.7)$$

sont appelées *inégalités de partition*. Ces contraintes sont valides pour le polytope des arbres couvrants. Barahona et Mahjoub [7] ont également étudié le polytope associé au problème du sous-graphe 2-sommet connexe (TNCSP). Notons que si un graphe est 2-sommet connexe, alors pour tout sommet u , le graphe $G - u$ reste connexe. Ainsi pour tout sommet u , la contrainte (2.7) doit être vérifiée dans le graphe $G - u$. Et les contraintes

$$x(\delta(V_0, \dots, V_p) \setminus \delta(u)) \geq p, \quad \text{pour tout } u \in V, \quad (2.8)$$

sont valides pour le polytope associé au TNCSP. D'une manière similaire au cas arête-connexe, Barahona et Mahjoub [7] ont montré que le polytope associé au TNCSP dans la classe des graphes de Halin, est décrit par les contraintes triviales, les contraintes de coupe, les contraintes de F -partition et les contraintes (2.8).

Un *algorithme de α -approximation* pour un problème d'optimisation combinatoire à minimiser (maximiser) est un algorithme polynomial qui donne une solution dont

la valeur est inférieure (supérieure) à $\alpha C(SO)$ où $C(SO)$ est la valeur de la solution optimale du problème.

Dans [67], Khuller et Vishkin ont présenté un algorithme de $\frac{3}{2}$ -approximation pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe lorsque tous les coûts sont égaux à 1. Sous ces mêmes conditions, ils ont également proposé un algorithme de $\frac{5}{3}$ -approximation pour la version 2-sommet connexe du problème. Plus tard, Khuller et Raghavachari [66] ont donné un algorithme d'approximation de facteur $2 + \frac{1}{|V|}$ pour ce même problème et quels que soient les coûts sur les arêtes.

Considérons la formulation en nombres entiers suivante du problème du voyageur de commerce :

$$\begin{aligned} &\text{Minimiser } cx \\ &x(\delta(v)) = 2, \quad \text{pour tout } v \in V, \\ &x(\delta(W)) \geq 2, \quad \text{pour tout } W \subset V, \emptyset \neq W \neq V, \\ &x(e) \in \mathbb{N}, \quad \text{pour tout } e \in E. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Soit z_{TSP} la solution optimale du TSP et z'_{TSP} la solution de la relaxation linéaire de la formulation ci-dessus. La $\frac{4}{3}$ -conjecture du voyageur de commerce dit que si la fonction coût c vérifie les inégalités triangulaires, alors $z'_{TSP} \leq \frac{4}{3}z_{TSP}$. Cheriyan et al. [10, 11] ont montré que, si la $\frac{4}{3}$ -conjecture pour le problème du voyageur de commerce métrique est vérifiée, alors il existe un algorithme de $\frac{4}{3}$ -approximation pour le TECSP.

Considérons maintenant un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble de sommets $S \subseteq V$. Le problème du *sous-graphe Steiner 2-arête connexe* (STECSP) est de trouver un sous-graphe de G de coût minimum tel qu'entre chaque paire de sommets de S , il existe au moins 2 chaînes arête-disjointes. Notons que l'appellation de ce problème est abusive car si les coûts sur les arêtes ne sont pas positifs, le réseau obtenu n'est pas forcément 2-arête connexe. Ce problème est équivalent au problème de conception d'un réseau fiable quand les types de connexité prennent leur valeur dans $\{0, 2\}$. Dans ce type de problèmes, les contraintes de coupe sont habituellement appelées *contraintes de coupe Steiner* et les sommets de S sont appelés *terminaux*.

Baïou et Mahjoub [4] ont étudié le polytope associé au problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe. Ils ont montré que ce dernier est entièrement décrit par les contraintes de coupe Steiner et les contraintes triviales dans la classe des graphes série-parallèles. Baïou et Mahjoub [4] ont également étudié ce problème lorsque la solution doit être elle-même 2-arête connexe. Pour cela, ils ont introduit les inégalités suivantes, valides pour le polytope associé au problème :

$$x(\delta(W)) - 2x(e) \geq 0, \quad \text{pour tout } W \subset V, S \subseteq W, e \notin E(W). \tag{2.10}$$

Ils ont montré que le polytope associé au STECSP lorsque le graphe est série-parallèle et la solution doit être 2-arête connexe, est décrit par les contraintes triviales, les contraintes de coupe Steiner et les contraintes (2.10). Par la suite, Baïou [2] a étendu ce dernier résultat au dominant de ce même polytope lorsque le graphe est série-parallèle.

Coullard et al. [16] ont étudié le polytope associé au problème du sous-graphe Steiner 2-sommet connexe. Ils en ont donné une caractérisation dans la classe des graphes série-parallèles. Dans [18], ils ont décrit le dominant de ce polytope pour les graphes sans W_4 . Ils ont également donné dans [17] un algorithme linéaire pour résoudre ce problème dans cette classe de graphes ainsi que dans la classe des graphes de Halin. Auparavant, Winter [89, 88] avait déjà proposé un algorithme pouvant résoudre le problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe dans la classe des graphes de Halin et pour les graphes outerplanaires. (Un graphe est dit *outerplanaire* s'il peut être représenté dans le plan de manière à ce que tous les sommets appartiennent à la face extérieure.) Dans [90] il a également présenté un algorithme pour résoudre ce problème dans les graphes série-parallèles dans les deux cas d'arête et de sommet-connexité.

De manière plus générale, dans [12], Chopra a étudié le problème du sous-graphe k -arête connexe (k ECSP) dans le cas où l'on peut utiliser plusieurs fois une même arête. Il a introduit une nouvelle famille de contraintes valides pour le polytope associé au problème de la manière suivante. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $V_1, \dots, V_p$ une partition de V telle que le graphe $G(V_i)$ induit par les sommets de V_i soit connexe pour $i = 1, \dots, p$. Les inégalités

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil p - 1, \quad (2.11)$$

sont valides pour le polytope associé au k ECSP lorsqu'on peut prendre plusieurs fois une même arête et quand le graphe est outerplanaire et k impair. Il a également montré que ces contraintes et les contraintes (2.1) suffisent pour caractériser le polyèdre associé au problème quand le graphe est outerplanaire et k impair. Il a aussi conjecturé que ces résultats restent vrais pour les graphes série-parallèles. Didi Biha et Mahjoub [26] ont étendu la validité des contraintes (2.11) à la classe des graphes série-parallèles. Ils ont appelés ces inégalités *contraintes de SP-partition*. Ils ont aussi montré que le polytope associé au problème du sous-graphe k -arête connexe est entièrement décrit par les contraintes (2.1), (2.2) et (2.3) (resp. (2.1), (2.2) et les contraintes de SP-partition) quand k est pair (resp. impair) et le graphe G est série-parallèle. Ils ont ainsi démontré la conjecture de Chopra.

Dans [27], Didi Biha et Mahjoub ont étudié le problème du sous-graphe Steiner k -arête connexe. Ils ont généralisé les résultats de Baïou et Mahjoub [4] établis pour

$k = 2$. En effet, ils ont montré que les contraintes triviales et les contraintes de coupe Steiner caractérisent complètement le polytope associé à ce problème quand k est pair et le graphe est série-parallèle.

Dans le cas où tous les coûts sont égaux à 1 et $S = V$, Khuller et Vishkin [67] ont donné un algorithme de 2-approximation pour le k ECSP. Plus tard, Khuller et Raghavachari [66] ont proposé un algorithme de (1.85)-approximation quand les coûts sont uniformes. Dans le cas où les coûts vérifient les inégalités triangulaires, ils ont présenté un algorithme de 2-approximation pour le problème du sous-graphe k -sommet connexe. Dans [10, 11], Cheriyan, Sebö et Szigeti ont donné un algorithme de $\frac{17}{12}$ -approximation pour résoudre le k ECSP.

2.3.2 $(k, k + 1)$ -fiabilité

Certains travaux ont porté sur des problème de conception d'un réseau fiable quand les types de connexité peuvent prendre des valeurs particulières.

Kerivin et Mahjoub [63] ont étudié le problème de conception d'un réseau fiable quand les types de connexité sont tous pairs. Ils ont montré que dans ce cas, si le graphe sous-jacent est série-parallèle, alors le polytope associé au problème est décrit par les contraintes triviales et les contraintes de coupe.

Dans [61], Kerivin s'est intéressé au polytope associé à ce problème lorsque les types de connexité prennent leur valeur dans $\{1, 2\}$. Dans ces conditions, le problème de conception d'un réseau fiable s'appelle le problème du réseau $\{1, 2\}$ -fiable. Kerivin [61] a introduit la classe d'inégalités suivante. Soient $G = (V, E)$ un graphe, $r \in \{1, 2\}^V$ un vecteur associant à chaque sommet un type de connexité et $V_1, \dots, V_p$ une partition de V . On pose $I_2 = \{i \mid \text{con}(V_i) = 2, i = 1, \dots, p\}$. Alors la contrainte

$$x(\delta(V_1, \dots, V_p)) \geq \begin{cases} p - 1 & \text{si } I_2 = \emptyset, \\ p & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.12)$$

est valide pour le polytope associé au problème. Et il a montré que le polytope associé à ce problème lorsque le graphe est série-parallèle, est décrit par les contraintes triviales, les contraintes de coupe et les contraintes (2.12). Dans [62], Kerivin et Mahjoub ont montré que les contraintes (2.12) peuvent être séparées en temps polynomial. Ainsi le problème du réseau $\{1, 2\}$ -fiable peut être résolu en temps polynomial dans la classe des graphes série-parallèles. Dans [64], Kerivin et al. ont discuté d'autres facettes pour le polytope associé à ce problème et ont développé un algorithme de coupes et branchements pour ce problème. Ils discutent également de résultats expérimentaux.

Dans [61], Kerivin a également étudiée le problème plus général où les types de connexité prennent leur valeur dans $\{k, k+1\}$ avec k impair. Il a généralisé la classe des contraintes de *SP*-partition introduite par Didi Biha et Mahjoub dans [26] quand les types de connexité sont en $\{k, k+1\}$ avec k impair et G série-parallèle. Cette classe de contraintes contient également les contraintes (2.12). Il a montré que cette classe de contraintes avec les inégalités de coupe et les inégalités triviales caractérisent le polytope associé au problème dans ce cas quand G est série-parallèle.

Monma et Shallcross [78] ont développé des heuristiques très efficaces concernant le problème de conception d'un réseau fiable quand les types de connexité sont en $\{1, 2\}$. Ko et Monma [68] ont généralisé ces heuristiques pour la conception de réseaux k -arête (sommet) connexes.

2.4 Cas général

Dans un cadre plus général, Grötschel et Monma [50] et Grötschel et al. [51, 53, 52, 54] ont étudié le polytope associé au problème de conception d'un réseau arête(sommet)-fiable. Ils ont introduit des classes d'inégalités valides pour ces polytopes. Ils ont également développé un algorithme de coupes et branchements qu'ils ont utilisé pour résoudre des instances réelles et aléatoires du problème. Des synthèses de ces travaux et d'autres travaux liés à ces problèmes peuvent être trouvés dans [13, 83].

Plusieurs algorithmes d'approximation ont également été développés concernant le problème de conception d'un réseau fiable. Ces algorithmes sont basés sur une fonction f qui à chaque ensemble de sommets $W \subseteq V$ associe le nombre minimum d'arêtes devant intersecter la coupe $\delta(W)$. En d'autres termes, pour chaque ensemble de sommets W , on a $f(W) = \text{con}(W)$. Williamson et al. [87] ont développé un algorithme polynomial de $2f_{\max}$ -approximation quand la fonction f est propre et $f_{\max} = \max\{f(S), S \subseteq V\}$. Une fonction f est dite *propre* si $f(V) = 0$, $f(S) = f(V \setminus S)$ pour tout $S \subseteq V$, et $f(A \cup B) \leq \max\{f(A), f(B)\}$ quand A et B sont disjoints. Goemans et al. [40] ont amélioré cet algorithme en donnant une garantie de performance de $2\mathcal{H}(f_{\max})$ où $\mathcal{H}(f_{\max}) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{f_{\max}}$ est la fonction harmonique. Quand la fonction f est faiblement surmodulaire, Jain [59] a proposé un algorithme de 2-approximation. Une fonction f est dite *faiblement surmodulaire* si $f(V) = 0$ et si pour tout ensemble $A, B \subseteq V$, f vérifie au moins l'une des deux propriétés : $f(A) + f(B) \leq f(A \setminus B) + f(B \setminus A)$ et $f(A) + f(B) \leq f(A \cup B) + f(A \cap B)$.

Goemans et Bertsimas [8] ont étudié une relaxation de ce problème. Ils ont, en effet, considéré le cas où l'on peut prendre plus d'une fois une arête, c'est-à-dire $x(e) \in \mathbb{N}$. Si

$x(e) > 1$, le réseau correspondant comportera $x(e)$ liaisons parallèles. Ils ont développé un algorithme de $\min\{2\mathcal{H}(f_{max}), 2q\}$ -approximation où q est le nombre de types de connexité différents.

2.5 Fiabilité avec contraintes de borne

Dans la plupart des travaux réalisés sur la topologie des réseaux, la performance du reroutage du trafic en cas de panne n'a pas été prise en compte. L'évolution de la technologie optique et l'augmentation, en conséquence, du trafic dans les réseaux de télécommunications, nécessitent la mise en place de stratégies de reroutage optimales.

Une de ces stratégies de routage, appelée "routage local" consiste, en cas de panne d'une liaison, à rerouter le trafic entre les extrémités de cette liaison. On impose ici à chacun des liens du réseau, d'appartenir à un cycle borné. On limite ainsi la longueur de la déviation imposée par la panne. Le problème qui résulte de cette stratégie est le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés.

Une seconde politique de routage consiste, en cas de panne, à rerouter le trafic entre les origines-destinations des demandes affectées par la panne. Pour assurer cette fiabilité, il sera alors nécessaire qu'il existe au moins deux chemins arête-disjoints ne dépassant pas une certaine longueur entre l'origine et la destination de chaque demande. La limitation de longueur de ces deux chemins assure ainsi un reroutage rapide et peu coûteux. On parle ici, du problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des chemins bornés.

Ces problèmes ont eu, à notre connaissance, peu d'attention dans le cas général. Des travaux liés au problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés peuvent être trouvés dans Fortz [33], Fortz et Labbé [34, 35, 36] et Fortz et al. [37]. Ces travaux concernent le problème quand la fiabilité porte sur les sommets. Ils ont, en particulier, étudié le polyèdre associé et développé un algorithme de coupes et branchements.

Le problème de fiabilité avec les chemins bornés n'a, par contre, été que très peu considéré. Dans [21], Dahl a considéré le polytope associé au problème du plus court chemin de longueur bornée. Dans [23], Dahl et Johannessen ont discuté du problème qui consiste à concevoir un réseau de coût minimum contenant un chemin de longueur au plus 2 entre certaines paires de sommets. Dahl [20] et Dahl et Gouveia [22] ont étudié le problème de l'arbre avec des chemins bornés.

Ces travaux ainsi que d'autres investigations liées aux problèmes de conception de

réseaux avec des contraintes de borne sur les cycles et les chemins seront présentés plus en détail aux chapitres 4 et 5.

Chapitre 3

Sous-graphes Steiner 2-arête connexes

Dans ce chapitre, nous allons étudier la structure faciale du polytope associé au problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe dans la classe des graphes de Halin. Nous introduisons, dans un premier temps, une classe d'inégalités valides pour ce polytope appelées contraintes de F -partition Steiner généralisées. Nous montrons, par la suite, que ces inégalités avec les contraintes de coupe et les contraintes triviales caractérisent entièrement le polytope dans une classe de graphe généralisant les roues. Enfin, nous utilisons ces résultats pour montrer que les contraintes triviales, les contraintes de coupe Steiner et les contraintes de F -partition généralisées suffisent pour décrire le polytope dans les graphes de Halin quand les terminaux ont une disposition particulière dans le graphe. Ceci généralise un résultat de Barahona et Mahjoub [7] sur le polytope des sous-graphes 2-arête connexes. Ce chapitre fait l'objet de l'article [73].

3.1 Les contraintes de F-partition Steiner généralisées

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$ un ensemble de sommets terminaux. Si on associe à chaque arête e un coût $c(e)$, alors le *problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe* (STECSP) consiste à trouver un sous-graphe $H = (W, F)$ de G de coût minimum tel qu'entre chaque paire de sommets de S , il existe au moins 2 chaînes

arête-disjointes. Le problème STECSP peut donc être formulé de la manière suivante.

$$\begin{aligned} & \text{Minimiser } cx \\ & x(\delta(W)) \geq 2, \quad \text{pour tout } W \subset V, \emptyset \neq W \cap S \neq S, \\ & x(e) \in \{0, 1\}, \quad \text{pour tout } e \in E. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Dans la suite, les contraintes (3.1) seront appelées *contraintes de coupe Steiner*. Soit

$$\text{STECSP}(G, S) = \text{conv}\{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x \text{ satisfait (2.1), (2.2), (3.1), (2.4)}\}$$

le polytope des sous-graphes Steiner 2-arêtes connexes associé à ce problème.

Considérons une partition $V_0, \dots, V_p$ de l'ensemble des sommets et $F \subseteq \delta(V_0)$ un ensemble d'arêtes de cardinalité impaire. Quand $S \neq V$, si $V_i \cap S \neq \emptyset$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il est clair que les inégalités de F -partition (2.6) sont valides pour $\text{STECSP}(G, S)$. Dans ce cas, elles sont appelées *contraintes de F -partition Steiner*.

Comme il a déjà été mentionné auparavant, Barahona et Mahjoub [7] ont montré que les contraintes de F -partition avec les contraintes de coupe et les contraintes triviales décrivent entièrement $\text{STECSP}(G, S)$ lorsque G est un graphe de Halin et $S = V$. Une question naturelle qui peut être posée est la suivante : les contraintes de F -partition Steiner caractérisent-elles, avec les contraintes de coupe Steiner et les contraintes triviales, le polytope $\text{STECSP}(G, S)$ dans la classe des graphes de Halin lorsque $S \neq V$? La réponse à cette question est malheureusement négative. En effet, considérons la configuration suivante. Supposons que $G = (V, E)$ est la roue W_4 sur 5 nœuds donnée par la figure 3.1. Posons $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ et soit $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ tel que $x(e_1) = x(e_2) = x(e_3) = x(e_4) = x(f_4) = \frac{1}{2}$ et $x(f_1) = x(f_2) = x(f_3) = 1$. Il n'est pas difficile de voir que x satisfait les contraintes triviales, les contraintes de coupe Steiner et les contraintes de F -partition Steiner. De plus, x est un point extrême du polytope défini par ces contraintes.

Ceci implique que d'autres classes d'inégalités valides sont nécessaires afin de pouvoir décrire $\text{STECSP}(G, S)$ dans la classe des graphes de Halin. En effet, il est facile de voir que x ne vérifie pas la contrainte

$$2x(e_1) + 2x(e_2) + x(e_3) + x(e_4) + x(f_4) \geq 4,$$

qui est pourtant valide pour $\text{STECSP}(G, S)$. Nous allons dans la suite, montrer que cette inégalité est un cas particulier d'une famille plus générale de contraintes valides pour $\text{STECSP}(G, S)$.

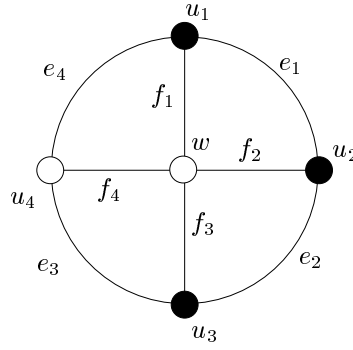


FIG. 3.1 –

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Considérons une partition $W, V_0, \dots, V_p$ de V telle que si un élément V_i , $i = 0, \dots, p$ de la partition n'intersecte pas S , alors V_{i-1} et V_{i+1} contiennent des sommets de S (les indices sont pris modulo $p+1$). Nous pouvons remarquer que cette condition implique qu'il y a un certain ordre sur les éléments $V_0, \dots, V_p$ de la partition. Soient $F \subseteq \delta(W)$ et

$$\begin{aligned} R &= \bigcup_{V_i \cap S \neq \emptyset} [W, V_i], & \bar{R} &= \delta(W) \setminus R, \\ D &= \bigcup_{V_i \cap S = V_j \cap S = \emptyset} [V_i, V_{i-1} \cup V_{i+1} \cup V_j], & \bar{D} &= \delta(V_0, \dots, V_p) \setminus D. \end{aligned}$$

Posons q comme étant le nombre d'éléments V_i , intersectant l'ensemble S , et considérons les inégalités suivantes valides pour le STECSP(G, S).

$$\begin{aligned} x(\delta(V_i)) &\geq 2, & \text{pour tout } V_i \text{ tel que } V_i \cap S \neq \emptyset, \\ -x(e) &\geq -1, & \text{pour tout } e \in R \cap F, \\ x(e) &\geq 0, & \text{pour tout } e \in R \setminus F, \\ x(e) &\geq 0, & \text{pour tout } e \in [V_i, V_j], V_i \cap S = \emptyset, V_j \cap S \neq \emptyset, \\ & & j \notin \{i-1, i+1\}, \\ x(\delta(V_0, \dots, V_p) \setminus \bigcup_{V_i \cap S = \emptyset} [V_i, V_{i+1}]) + x(\delta(W) \setminus F) &\geq q - \left\lfloor \frac{|F|}{2} \right\rfloor, \\ x(\delta(V_0, \dots, V_p) \setminus \bigcup_{V_i \cap S = \emptyset} [V_i, V_{i-1}]) + x(\delta(W) \setminus F) &\geq q - \left\lfloor \frac{|F|}{2} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Les deux dernières inégalités correspondent aux contraintes de F -partition Steiner données par les partitions obtenues à partir de $W, V_0, \dots, V_p$ en prenant W comme nouveau V_0 et en rassemblant les ensembles V_i et V_{i+1} (resp. V_i et V_{i-1}) quand $V_i \cap S = \emptyset$.

En sommant ces inégalités, on obtient

$$2x(T_1) + 4x(T_2) \geq 4q - 2 \left\lfloor \frac{|F|}{2} \right\rfloor - |R \cap F|,$$

où $T_1 = (D \cup \bar{R}) \setminus F$ et $T_2 = (\bar{D} \cup R) \setminus F$.

En divisant cette inégalité par 2 et en arrondissant le membre de droite à l'entier supérieur, on obtient l'inégalité

$$x(T_1) + 2x(T_2) \geq 2q - \left\lfloor \frac{|F|}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{|R \cap F|}{2} \right\rfloor \quad (3.2)$$

qui est donc valide pour le $\text{STECSP}(G, S)$. On peut noter que les inégalités (3.2) généralisent les contraintes de F -partition Steiner. En effet, ces dernières correspondent au cas où $V_i \cap S \neq \emptyset$ pour $i = 0, \dots, p$. Les inégalités (3.2) sont appelées *inégalités de F -partition Steiner généralisées*. On peut également noter que si $|R \cap F|$ est pair, alors l'inégalité (3.2) est redondante par rapport aux contraintes triviales, aux contraintes de coupe Steiner et aux contraintes de F -partition Steiner. On peut noter que les coefficients de la contrainte de F -partition Steiner généralisée peuvent prendre des valeurs différentes de 0 et 1, et de plus l'inégalité est de rang de Chvátal 2. C'est à notre connaissance les premières contraintes connues pour le $\text{STECSP}(G, S)$ qui ne soient pas des contraintes de rang (les contraintes de rang sont les contraintes ayant uniquement des coefficients égaux à 0 ou 1).

Soit Γ la classe des graphes $G = (V, E)$ tels que G soit une roue pouvant avoir des arêtes multiples entre les nœuds du cycle et le sommet central. Dans ce qui suit, nous allons montrer que les contraintes de F -partition Steiner généralisées, avec les contraintes de coupe Steiner et les contraintes triviales, caractérisent le $\text{STECSP}(G, S)$ quand G est un graphe de Γ . Mais avant, nous allons donner quelques notations.

Soit $G = (V, E)$ un graphe de Γ sur $n + 1$ nœuds. On pose $V = \{w, u_1, \dots, u_n\}$ où w est le nœud central et $u_1, \dots, u_n$ les nœuds du cycle extérieur (voir figure 3.2). On dénotera par e_i l'arête entre les sommets u_i et u_{i+1} et par $C = \{e_1, \dots, e_n\}$ le cycle extérieur. Soit $A_i = [w, u_i]$, pour $i = 1, \dots, n$. Si $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on dénotera par $C(i, j)$ le chemin $e_i, \dots, e_{j-1}$ où les indices sont modulo n . Noter que si $|A_i| = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $G = W_n$.

La suite de ce chapitre étant principalement axée sur les graphes de Γ , il est utile d'avoir la configuration simplifiée des contraintes de F -partition Steiner généralisées dans cette classe de graphes. Soient $G = (V, E)$ un graphe de Γ et $W, V_0, \dots, V_p$ une partition telle que $W = \{w\}$ et les V_i soient des ensembles de sommets consécutifs du cycle. Soit $F \in \delta(W)$ un ensemble d'arêtes. Noter que (voir figure 3.3)

$$\begin{aligned} T_1 &= \left(\bigcup_{V_i: V_i \cap S \neq \emptyset} \delta(V_i) \right) \setminus F, \\ T_2 &= \delta(W, V_0, \dots, V_p) \setminus (T_1 \cup F). \end{aligned}$$

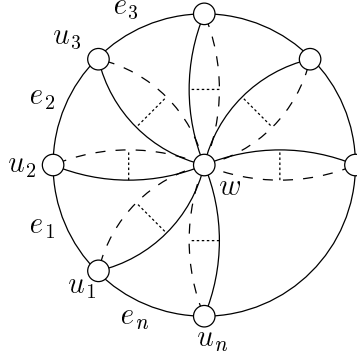


FIG. 3.2 –

La contrainte de F -partition Steiner généralisée associée à la partition $W, V_0, \dots, V_p$ et à F s'écrit

$$x(T_1) + 2x(T_2) \geq 2q - \left\lfloor \frac{|F|}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{|R \cap F|}{2} \right\rfloor.$$

3.2 STECSP(G, S) dans les graphes de Γ

Le principal résultat de ce chapitre est le suivant.

Théorème 3.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe de Γ et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Alors le polytope $\text{STECSP}(G, S)$ est donné par les contraintes triviales, les contraintes de coupe Steiner et les contraintes de F -partition généralisées.*

La preuve du théorème 3.1 sera donnée dans la section 3.3. Dans la suite, nous allons donner quelques propriétés structurales du $\text{STECSP}(G, S)$ qui seront utilisées pour démontrer ce théorème. Le lemme technique suivant, qui sera très utilisé dans la suite, décrit une procédure permettant d'obtenir une facette à partir d'une autre facette en contractant une arête.

Lemme 3.2 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Soit $ax \geq \alpha$ une contrainte définissant une facette du $\text{STECSP}(G, S)$ différente d'une contrainte triviale. Soit $f = uv \in E$ une arête telle que $a(f) = 0$. Soit $G' = (V', E')$ le graphe obtenu à partir de G en contractant l'arête f . Posons $S' = (S \setminus \{u, v\}) \cup \{s'\}$ si $\{u, v\} \cap S \neq \emptyset$ et $S' = S$ sinon, où s' est le sommet issu de la contraction de f . Si $ax \geq \alpha$ est valide pour le polytope $\text{STECSP}(G', S')$, alors $ax \geq \alpha$ définit une facette pour $\text{STECSP}(G, S)$.*

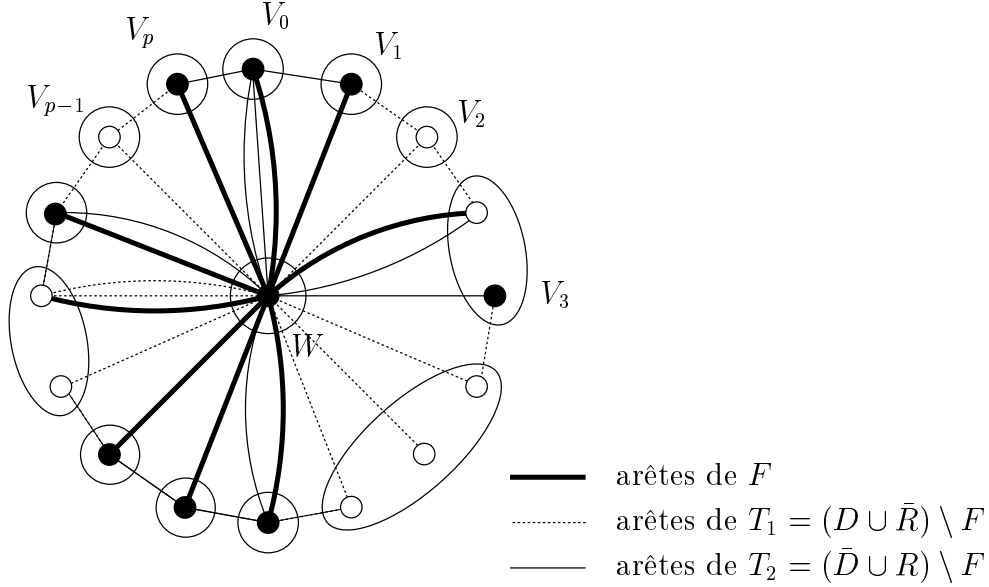


FIG. 3.3 –

Preuve. Sans perte de généralité (s.p.d.g.), on peut supposer que $\text{STECSP}(G, S)$ est de pleine dimension. Alors $\text{STECSP}(G', S')$ est de pleine dimension. En effet, comme $\text{STECSP}(G, S)$ est de pleine dimension, les ensembles E et $F_e = E \setminus \{e\}$ pour tout $e \in E$ sont solutions du STECSP pour le graphe G . Notons que les vecteurs d'incidence de ces solutions sont affinement indépendants. Considérons maintenant les ensembles $F'_e = F_e \setminus \{f\}$ pour tout $e \in E \setminus \{f\} = E'$. Les ensembles F'_e forment des solutions du STECSP pour le graphe G' . De plus, les ensembles E' et F'_e pour tout $e \in E'$ sont affinement indépendants, ce qui prouve que $\text{STECSP}(G', S')$ est de pleine dimension. Maintenant, comme $ax \geq \alpha$ définit une facette du $\text{STECSP}(G, S)$, il existe $|E|$ ensembles d'arêtes $T_1, \dots, T_{|E|}$ induisant des sous-graphes Steiner 2-arêtes connexes de G tels que $ax^{T_i} = \alpha$, pour $i = 1, \dots, |E|$ et $x^{T_1}, \dots, x^{T_{|E|}}$ sont affinement indépendants. Soit

$$T'_i = \begin{cases} T_i \setminus \{f\} & \text{si } f \in T_i, \\ T_i & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $i = 1, \dots, |E|$. Il est clair que les ensembles T'_i , $i = 1, \dots, |E|$ induisent des sous-graphes Steiner 2-arêtes connexes de G' . De plus, comme $a(f) = 0$, nous avons $ax^{T'_i} = \alpha$ pour $i = 1, \dots, |E|$. Comme $x^{T_1}, \dots, x^{T_{|E|}}$ sont affinement indépendants, il doit exister $|E| - 1$ ensembles parmi $T'_1, \dots, T'_{|E|}$ dont les vecteurs d'incidence sont affinement indépendants. Comme $ax \geq \alpha$ est valide pour $\text{STECSP}(G', S')$, elle définit donc une facette pour $\text{STECSP}(G', S')$. $\square$

Dans la suite de ce chapitre, nous posons

$$T(G) = \{T \subseteq E \mid (V, T) \text{ induit un sous-graphe Steiner 2-arête connexe de } G\}.$$

Lemme 3.3 *Soient $G = (V, E)$ un graphe de Γ et $S \subseteq V$ un ensemble de terminaux. Soit $ax \geq \alpha$ une inégalité valide du STECSP(G, S). Soit $e_i \in C$ tel que $a(e_i) = 0$. Soient $G' = (V', E')$ le graphe obtenu en contractant l'arête e_i , et a' la restriction de a sur E' . Soit $S' = (S \setminus \{u_i, u_{i+1}\}) \cup \{u'_i\}$ si $\{u_i, u_{i+1}\} \cap S \neq \emptyset$ et $S' = S$ sinon, où u'_i est le nœud résultant de la contraction de e_i .*

- 1) *Si $u_i, u_{i+1} \notin S$ alors $a'x \geq \alpha$ est valide pour STECSP(G', S').*
- 2) *Si $u_i \in S$ et $u_{i+1} \notin S$ alors $a'x \geq \alpha$ est valide pour STECSP(G', S') si pour chaque arête $e \in A_{i+1}$, il existe une arête f de A_i telle que $a(e) \geq a(f)$.*
- 3) *Si $u_i, u_{i+1} \in S$, alors $a'x \geq \alpha$ est valide pour STECSP(G', S') si $\min\{a(e), e \in A_i\} = \min\{a(e), e \in A_{i+1}\}$.*

Preuve. Nous allons montrer le lemme pour 1) et 2). La démonstration pour 3) est similaire. Soit $E^* \subseteq E'$ tel que (V, E^*) est un sous-graphe Steiner 2-arête connexe de G' .

1) Soit $E_1^* = E^* \cup \{e_i\}$. Comme $u_i, u_{i+1} \notin S$, $E_1^* \in T(G)$. On a alors $a'x^{E^*} = ax^{E_1^*} \geq \alpha$, et $a'x \geq \alpha$ est valide pour STECSP(G', S').

2) On distingue trois cas :

Cas 1 : $E^* \cap \delta(u_{i+1}) = \emptyset$. Comme $u_{i+1} \notin S$, on a $E^* \in T(G)$ et $a'x^{E^*} = ax^{E^*} \geq \alpha$.

Cas 2 : $E^* \cap \delta(u_i) \neq \emptyset$ et $E^* \cap \delta(u_{i+1}) \neq \emptyset$. On a alors $E_2^* = E^* \cup \{e_i\} \in T(G)$ et $a'x^{E^*} = ax^{E_2^*} \geq \alpha$.

Cas 3 : $E^* \cap \delta(u_i) = \emptyset$ et $E^* \cap \delta(u_{i+1}) \neq \emptyset$. Donc $E^* \cap A_{i+1} \neq \emptyset$. Soient $f_2^* \in E^* \cap A_{i+1}$, et $f_1^* \in A_i$ telles que $a(f_1^*) \leq a(f_2^*)$, une telle arête existe par hypothèse. Il est facile de voir que $E_3^* = (E^* \setminus \{f_2^*\}) \cup \{e_i, f_1^*\}$ appartient à $T(G)$. De plus, comme $a(e_i) = 0$ et $a(f_1^*) \leq a(f_2^*)$, on a $a'x^{E^*} \geq ax^{E_3^*} \geq \alpha$.

Dans tous les cas, nous avons $a'x^{E^*} \geq \alpha$, ce qui implique que $a'x \geq \alpha$ est valide pour STECSP(G', S'). $\square$

Maintenant, on suppose que $G = (V, E)$ est un graphe de Γ sur $n + 1$ nœuds. Supposons que $w \in S$ et soient $u_{i_1}, \dots, u_{i_s}$, où $s = |S \cap V(C)|$, les nœuds terminaux de C . Nous supposons que $s \geq 2$. Soit $ax \geq \alpha$ une inégalité définissant une facette de

STECSP(G, S) différente des contraintes triviales et des contraintes de coupe Steiner. On pose

$$t_a = \{T \in T(G) \mid ax^T = \alpha\}.$$

Notons que, comme $ax \geq \alpha$ définit une facette, si pour une inégalité $bx \geq \beta$ on a $bx^T = \beta$ pour tout $T \in t_a$, alors $bx \geq \beta$ est un multiple positif de $ax \geq \alpha$.

Soit $E_0 = \{e \in E \mid a(e) = 0\}$. Nous avons les lemmes suivants. Le premier, donné sans preuve, est une conséquence directe du fait que $ax \geq \alpha$ définisse une facette du STECSP(G, S) différente d'une contrainte triviale et d'une contrainte de coupe Steiner.

- Lemme 3.4** 1) Pour chaque arête $e \in E$, il existe un ensemble d'arêtes $T \in t_a$ (resp. $T' \in t_a$) tel que $e \in T$ (resp. $e \notin T$).
- 2) Pour tout sommet v de S , il existe un ensemble d'arêtes $T \in t_a$ tel que $|T \cap \delta(v)| \geq 3$.
- 3) $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$.

Pour $i = 1, \dots, n$, notons par f_i une arête de A_i telle que $a(f_i) = \min\{a(f) \mid f \in A_i\}$.

Lemme 3.5 Soient $T \in t_a$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $u_i \in S$, $|\delta(u_i) \cap T| \geq 3$ et pour tout $f \in A_i$, $a(f) > 0$. Alors les arêtes e_{i-1} , e_i et f_i appartiennent à T si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- 1) $u_{i-1}, u_{i+1} \in S$.
- 2) Si $u_{i-1} \notin S$ (resp. $u_{i+1} \notin S$), alors soit $a(e_{i-1}) > 0$ (resp. $a(e_i) > 0$), soit $a(e_{i-1}) = 0$ et $a(f_{i-1}) = 0$ (resp. $a(e_i) = 0$ et $a(f_{i+1}) = 0$).

Preuve. Nous montrons le lemme pour 1), la preuve pour 2) est similaire. D'abord, comme $|\delta(u_i) \cap T| \geq 3$, on peut supposer, s.p.d.g., que $f_i \in T$. Si e_i et e_{i-1} ne sont pas dans T , alors il doit exister deux arêtes f et f' dans $A_i \setminus \{f_i\}$ telles que $f, f' \in T$. Ceci implique que $T \setminus \{f_i\}$ appartient à $T(G)$ et donc $a(f_i) = 0$, une contradiction.

Supposons maintenant que $|\{e_i, e_{i-1}\} \cap T| = 1$ et s.p.d.g., que $e_i \in T$. Il existe alors une arête f de A_i , différente de f_i , telle que $f \in T$. Comme $u_{i+1} \in S$ et $e_{i-1} \notin T$, il doit exister $k \in \{i+1, \dots, i-1\}$ tel que $A_k \cap T \neq \emptyset$ et $C(i+1, k) \subset T$. En conséquence, nous avons $T \setminus \{f_i\} \in T(G)$. Mais ceci implique de nouveau que $a(f_i) = 0$, une contradiction.

□

Remarque 3.6 Si $a(e) > 0$ pour tout $e \in C$ alors au moins une des deux propriétés 1) et 2) du lemme 3.5 est vérifiée et le lemme 3.5 s'ensuit.

Lemme 3.7 Soient $T \in t_a$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $u_i \in S$ et $e_i, e_{i-1}, f \in T$ pour une arête $f \in A_i$ où $a(f) > 0$. Alors $C \subset T$ si l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

- 1) $u_{i-1}, u_{i+1} \in S$.
- 2) $a(e_{i-1}) > 0$ si $u_{i-1} \notin S$ (resp. $a(e_i) > 0$ si $u_{i+1} \notin S$).

Preuve. Nous montrons le lemme pour 1), la preuve pour 2) est similaire.

Supposons que $C \not\subset T$. Comme $e_i, e_{i-1} \in T$ et $u_{i-1}, u_{i+1} \in S$, alors il doit exister $l, p \in \{1, \dots, n\}$, $l < i < p$ tels que $C(l, p) \subset T$, $A_l \cap T \neq \emptyset$ et $A_p \cap T \neq \emptyset$. Ceci implique que $T \setminus \{f\}$ appartient à $T(G)$ et donc $a(f) = 0$, une contradiction. $\square$

Lemme 3.8 Soit $j \in \{1, \dots, s\}$ tel que $A_{i_j} \cap E_0 = \{f_{i_j}\}$. Soit $T \in t_a$ tel que $f_{i_j} \notin T$. Alors $A_{i_j} \cap T = \emptyset$. De plus, si $a(e_{i_{j-1}}) > 0$ (resp. $a(e_{i_j}) > 0$) alors $C(i_{j-1}, i_j) \subset T$ (resp. $C(i_j, i_{j+1}) \subset T$).

Preuve. Supposons que $A_{i_j} \cap T \neq \emptyset$ et soit $f \in A_{i_j} \cap T$ (f est différent de f_{i_j} par hypothèse). Comme $(T \setminus \{f\}) \cup \{f_{i_j}\} \in T(G)$, il s'ensuit que $a(f) = 0$, une contradiction. Supposons maintenant que $a(e_{i_{j-1}}) > 0$. Comme $A_{i_j} \cap T = \emptyset$ et $u_{i_j} \in S$, nous avons $e_{i_{j-1}}, e_{i_j} \in T$. Si $C(i_{j-1}, i_j)$ n'est pas contenu dans T , il doit exister un $k \in \{i_{j-1} + 1, \dots, i_j - 1\}$ tel que $e_{k-1} \notin T$ et $C(k, i_j) \subset T$. Comme $u_i \notin S$ pour $i = k, \dots, i_j - 1$, l'ensemble d'arêtes $(T \setminus C(k, i_j)) \cup \{f_{i_j}\}$ induit un sous-graphe Steiner 2-arête connexe de G . Comme $a(f_{i_j}) = 0$, on obtient $a(e) = 0$ pour tout $e \in C(k, i_j)$ et donc $a(e_{i_{j-1}}) = 0$, une contradiction.

La preuve pour $a(e_{i_j}) > 0$ est similaire. $\square$

Lemme 3.9 Supposons que $C \cap E_0 = \emptyset$. Alors $|A_{i_j} \cap E_0| = 1$ pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$.

Preuve. Supposons qu'il existe un $j \in \{1, \dots, s\}$ tel que $a(f) > 0$ pour tout $f \in A_{i_j}$. Par le lemme 3.4 2), il doit exister un ensemble $T \in t_a$ tel que $|T \cap \delta(u_{i_j})| \geq 3$. De plus, par les lemmes 3.5 et 3.7, il s'ensuit que $C \cup \{f_{i_j}\} \subset T$. Comme $w \in S$, il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $A_k \cap T \neq \emptyset$. On peut supposer que $k \neq i_j$. En effet, si cela n'est pas possible, alors on a $(A_{i_j} \setminus \{f_{i_j}\}) \cap T \neq \emptyset$. Soit $g \in (A_{i_j} \setminus \{f_{i_j}\}) \cap T$. On a alors pour tout $f \in \delta(w) \setminus A_{i_j}$, $a(f) > a(g) \geq a(f_{i_j})$, sinon g pourrait être remplacée par f . Cela implique que $a(f) > 0$ pour tout $f \in A_{i_{j+1}}$. Par un raisonnement analogue, il existe une solution $T' \in t_a$ telle que $C \cup \{f_{i_{j+1}}\} \subset T'$. Comme $w \in S$ et $a(f_{i_j}) < a(f)$ pour tout $f \in \delta(w) \setminus \{f_{i_j}\}$, on peut supposer s.p.d.g. que $f_{i_j} \in T'$. Il en résulte que $T' \setminus C(i_j, i_{j+1}) \in T(G)$. En conséquence, on obtient $a(e_i) = 0$ pour $i = i_j, \dots, i_{j+1} - 1$, une contradiction.

On peut donc supposer que $k \neq i_j$ et par conséquent $T = C \cup \{f_{i_j}, f_k\}$. S.p.d.g., on peut supposer que $u_l \notin S$ pour tout $l \in \{k+1, \dots, i_j-1\}$. En effet, supposons qu'il existe un l tel que $u_l \in S$. Si $a(f_l) = 0$ alors on peut considérer f_l au lieu de f_k , sinon, on aurait $a(f) > 0$ pour tout $f \in A_l$ et on pourrait remplacer i_j par l . Il s'ensuit que $T \setminus C(k, i_j) \in T(G)$, et par conséquent $a(e_{i_j-1}) = 0$. Comme par hypothèse $a(e) > 0$ pour tout $e \in C$, on a une contradiction.

Ainsi $A_{i_j} \cap E_0 \neq \emptyset$ pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$. Supposons maintenant que A_{i_j} contienne au moins deux arêtes, f et f' , avec $a(f) = a(f') = 0$. Nous avons $A_{i_{j+1}} \cap E_0 = \{f_{i_{j+1}}\}$. En effet, s'il existait une arête g différente de $f_{i_{j+1}}$ dans $A_{i_{j+1}}$ telle que $a(g) = 0$, par le lemme 3.4 1), il existerait un ensemble d'arêtes $T \in t_a$ contenant e_{i_j} . Soit $T' = (T \setminus \{e_{i_j}\}) \cup \{f, f', g, f_{i_{j+1}}\}$. Il est clair que $T' \in T(G)$. Comme $a(f) = a(f') = a(g) = a(f_{i_{j+1}}) = 0$, ceci impliquerait que $a(e_{i_j}) = 0$, une contradiction. Donc $A_{i_{j+1}} \cap E_0 = \{f_{i_{j+1}}\}$. Soit $T'' \in t_a$ tel que $f_{i_{j+1}} \notin T''$. Par le lemme 3.8, il en résulte que $C(i_j, i_{j+1}) \subset T''$. Comme $(T'' \setminus C(i_j, i_{j+1})) \cup \{f, f', f_{i_{j+1}}\} \in T(G)$, il s'ensuit que $a(e) = 0$ pour tout $e \in C(i_j, i_{j+1})$, une contradiction, et notre lemme est démontré. $\square$

Dans le reste de la section nous supposons que $s \geq 3$.

Lemme 3.10 *Supposons que $C \cap E_0 = \emptyset$. Alors il existe $\beta > 0$ tel que*

- 1) $a(C(i_j, i_{j+1})) = \beta$ pour tout $j \in \{1, \dots, s\}$, et
- 2) si $j \in \{1, \dots, s\}$ est tel que $|A_{i_j}| \geq 2$, alors $a(f) = \beta$ pour tout $f \in A_{i_j} \setminus \{f_{i_j}\}$.

Preuve. 1) Comme $C \cap E_0 = \emptyset$, par le lemme 3.9, il s'ensuit que pour $j = 1, \dots, s$, $A_{i_j} \cap E_0 = \{f_{i_j}\}$ et $a(f) > 0$ pour tout $f \in A_{i_j} \setminus \{f_{i_j}\}$. Par le lemme 3.4 1), il existe un ensemble d'arêtes $T \in t_a$ ne contenant pas f_{i_2} . Alors, par le lemme 3.8, on a $C(i_1, i_3) \subset T$. Il en résulte que $e_{i_1-1} \notin T$. En fait, si ce n'est pas le cas, alors l'ensemble $(T \setminus C(i_1, i_2)) \cup \{f_{i_1}, f_{i_2}\}$ est dans $T(G)$, ce qui implique que $a(e_{i_1}) = \dots = a(e_{i_2-1}) = 0$, une contradiction. De manière similaire, on peut montrer que $e_{i_3} \notin T$. On peut ainsi supposer que $f_{i_1}, f_{i_3} \in T$. Comme $(T \setminus C(i_1, i_2)) \cup (C(i_s, i_1) \cup \{f_{i_2}, f_{i_s}\})$ appartient à $T(G)$ et $a(f_{i_2}) = a(f_{i_s}) = 0$, il s'ensuit que $a(C(i_s, i_1)) \geq a(C(i_1, i_2))$. Par symétrie, on obtient $a(C(i_1, i_2)) \geq a(C(i_s, i_1))$ et donc $a(C(i_1, i_2)) = a(C(i_s, i_1))$. En échangeant u_{i_1} et u_{i_2} avec tous les couples u_{i_j} et $u_{i_{j+1}}$ pour $j = 2, \dots, s$, on obtient $a(C(i_j, i_{j+1})) = \beta$, $j = 1, \dots, s$ pour un $\beta > 0$.

2) Nous montrons le lemme pour $j = 1$. Supposons que $|A_{i_1}| \geq 2$ et soit $f \in A_{i_1} \setminus \{f_{i_1}\}$. Comme $C \cap E_0 = \emptyset$, d'après le lemme 3.9, on a $a(f) > 0$. De plus, par le lemme 3.4 1),

il existe un ensemble d'arêtes $T' \in t_a$ contenant f . On a $f_{i_1} \in T'$, sinon $(T' \setminus \{f\}) \cup \{f_{i_1}\}$ appartiendrait à $T(G)$, ce qui impliquerait que $a(f) = 0$, une contradiction. De plus, nous avons $e_{i_1-1} \notin T'$. Supposons le contraire. Si $C \not\subset T'$, alors il doit exister au moins une autre arête de $\delta(w)$ dans T' , différente de f et f_{i_1} . Mais dans ce cas, $T' \setminus \{f\}$ est dans $T(G)$ et donc $a(f) = 0$, une contradiction. Si $C \subset T'$, alors $(T' \setminus \{f\}) \cup \{f_{i_s}\} \in T(G)$. Mais comme par le lemme 3.9, $a(f_{i_s}) = 0$, on a donc $a(f) = 0$, donnant encore une contradiction.

Ainsi $e_{i_1-1} \notin T'$. Par conséquent, il existe un entier $k \in \{i_s, \dots, i_1 - 1\}$ tel que $A_k \cap T' \neq \emptyset$. Donc $(T' \setminus \{f\}) \cup C(k, i_1) \in T(G)$ et en conséquence $a(C(k, i_1)) \geq a(f)$. Comme, par le lemme 3.4 3), $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$, on a $a(f) \leq C(k, i_1) \leq C(i_s, i_1)$. Par 1), il s'ensuit que

$$a(f) \leq a(C(i_1, i_2)) = \beta \text{ pour tout } f \in A_{i_1} \setminus \{f_{i_1}\}. \quad (3.3)$$

Considérons maintenant l'ensemble T introduit en 1). Rappelons que $C(i_1, i_3) \subset T$, $e_{i_1-1}, e_{i_3} \notin T$ et $f_{i_1}, f_{i_3} \in T$. Soit $T_f = (T \setminus C(i_1, i_2)) \cup \{f_{i_2}, f\}$. Il est facile de voir que $T_f \in T(G)$. Comme $a(f_{i_2}) = 0$, on a $a(f) \geq a(C(i_1, i_2))$. En combinant ceci avec (3.3), on obtient $a(f) = \beta$. $\square$

Lemme 3.11 *Supposons que $C \cap E_0 = \emptyset$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $u_i \notin S$. Alors $a(f) = \gamma_i$ pour tout $f \in A_i$, pour un $\gamma_i > 0$.*

Preuve. Nous allons d'abord montrer que $a(f) > 0$ pour tout $f \in A_i$. Supposons que $a(f_i) = 0$. Soit $j \in \{1, \dots, s\}$ tel que $i \in \{i_j + 1, \dots, i_{j+1} - 1\}$. S.p.d.g., on peut supposer que $j = 1$. Par le lemme 3.4 1), il existe un ensemble d'arêtes $T \in t_a$ tel que $f_{i_2} \notin T$. Ainsi, par le lemme 3.8, il s'ensuit que $C(i_1, i_2) \subset T$. Donc $(T \setminus C(i, i_2)) \cup \{f_i, f_{i_2}\} \in T(G)$. Comme par le lemme 3.9, $a(f_{i_2}) = 0$, on a $a(e_i) = \dots = a(e_{i_2} - 1) = 0$, une contradiction. Par conséquent, $a(f) > 0$ pour tout $f \in A_i$.

Maintenant, si $|A_i| = 1$, le lemme est montré. Supposons donc que $|A_i| \geq 2$ et qu'il existe deux arêtes dans A_i ayant des coefficients différents. Soit $\tilde{f} \in A_i$ telle que $a(\tilde{f}) = \max\{a(f), f \in A_i\}$. D'où $a(f_i) < a(\tilde{f})$. Par le lemme 3.4, il existe un ensemble d'arêtes $T' \in t_a$ contenant $\tilde{f}$. Si $f_i \notin T'$, alors $(T' \setminus \{\tilde{f}\}) \cup \{f_i\} \in T(G)$ et $a(f_i) \geq a(\tilde{f})$, une contradiction. Par conséquent, $f_i \in T'$. Comme $(T' \setminus \{\tilde{f}\}) \cup \{f_{i_1}, f_{i_2}\}$ induit un sous-graphe Steiner 2-arête connexe et par le lemme 3.9, $a(f_{i_1}) = a(f_{i_2}) = 0$, il s'ensuit que $a(\tilde{f}) = 0$, ce qui est impossible. $\square$

Lemme 3.12 *Supposons que $C \cap E_0 = \emptyset$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $u_i \notin S$. Alors il existe un ensemble d'arêtes $T_1 \in t_a$ (resp. $T_2 \in t_a$) tel que $e_{i-1} \in T_1$ et $e_i \notin T_1$ (resp. $e_{i-1} \notin T_2$ et $e_i \in T_2$).*

Preuve. Nous montrons le lemme pour T_1 , la preuve pour T_2 peut être obtenue par symétrie. Supposons que le lemme n'est pas vrai. Alors pour chaque ensemble $T \in t_a$, on a soit $e_{i-1}, e_i \notin T$, soit $e_{i-1} \notin T$ et $e_i \in T$, soit $e_{i-1}, e_i \in T$.

Supposons d'abord que $e_i, e_{i-1} \notin T$. Ceci implique que $A_i \cap T = \emptyset$. En effet, s'il existe une arête $f \in A_i \cap T$, alors $T \setminus \{f\} \in T(G)$ et donc $a(f) = 0$. Mais ceci contredit le lemme 3.11. D'où $T \cap A_i = \emptyset$.

Supposons maintenant que $e_i \in T$. Si $e_{i-1} \in T$, alors on a $A_i \cap T = \emptyset$. En effet, supposons qu'il existe $f \in A_i \cap T$. Comme $a(e_i) > 0$ et $a(e_{i-1}) > 0$, il s'ensuit que $C(i_j, i_{j+1}) \subset T$ pour un $j \in \{1, \dots, s\}$ tel que $i \in \{i_j + 1, \dots, i_{j+1} - 1\}$. Donc $(T \setminus \{f\}) \cup \{f_{i_j}, f_{i_{j+1}}\} \in T$ et en conséquence, $a(f) = 0$, une contradiction.

Si $e_{i-1} \notin T$, alors il y a exactement une arête de A_i dans T . En effet, si $A_i \cap T = \emptyset$ alors $T \setminus \{e_i\}$ appartient à $T(G)$ et donc $a(e_i) = 0$, ce qui est impossible. S'il y a deux arêtes $f, g \in A_i \cap T$ alors $T \setminus \{f\} \in T(G)$ et donc $a(f) = 0$, contredisant le lemme 3.11. Il en résulte donc pour tout $T \in t_a$ ce qui suit :

$$\begin{aligned} e_i \notin T \text{ et } e_{i-1} \notin T &\Rightarrow A_i \cap T = \emptyset, \\ e_i \in T \text{ et } e_{i-1} \in T &\Rightarrow A_i \cap T = \emptyset, \\ e_i \in T \text{ et } e_{i-1} \notin T &\Rightarrow |A_i \cap T| = 1. \end{aligned}$$

Ceci implique que pour toute solution $T \in t_a$, x^T vérifie l'équation

$$x(e_i) - x(e_{i-1}) - \sum_{e \in A_i} x(e) = 0.$$

Puisque par le lemme 3.4 3), $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$, cette équation ne peut pas être un multiple positif de $ax \geq \alpha$, une contradiction. $\square$

Lemme 3.13 *Supposons que $C \cap E_0 = \emptyset$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $u_i \notin S$. On a alors*

- 1) $u_{i+1} \in S$,
- 2) $a(e_{i-1}) = a(e_i) = \gamma_i = \beta/2$.

Preuve. 1) Supposons que $u_{i+1} \notin S$. S.p.d.g., on peut supposer que $i, i+1 \in \{i_1 + 1, \dots, i_2 - 1\}$. Comme $u_i \notin S$, par le lemme 3.12, il existe un ensemble d'arêtes $T_1 \in t_a$ tel que $e_{i-1} \notin T_1$ et $e_i \in T_1$. Si $A_i \cap T_1 = \emptyset$, alors $T_1 \setminus \{e_i\} \in T(G)$ et, en conséquence, $a(e_i) = 0$, une contradiction. Donc $A_i \cap T_1 \neq \emptyset$. De plus, on a $C(i, i_2) \subset T_1$. En fait, s'il existe un $k \in \{i+1, \dots, i_2 - 1\}$ tel que $e_k \notin T_1$ alors $T_1 \setminus \{e_i, \dots, e_{k-1}\}$ appartient à $T(G)$ et on a $a(e_i) = \dots = a(e_{k-1}) = 0$, une contradiction.

Maintenant, par le lemme 3.9, on a $a(f_{i_1}) = a(f_{i_2}) = 0$. On peut donc supposer que

$f_{i_1}, f_{i_2} \in T_1$. Pour toute arête g de $A_i \cap T_1$, on a $(T_1 \setminus \{g\}) \cup C(i_1, i) \in T(G)$. D'où $a(g) \leq a(C(i_1, i))$.

Par le lemme 3.4 1), il existe un ensemble d'arêtes $T_2 \in t_a$ ne contenant pas f_{i_1} . Par le lemme 3.8, il s'ensuit que $C(i_1, i_2) \subset T_2$. Comme $(T_2 \setminus C(i_1, i)) \cup \{g, f_{i_1}\} \in T(G)$ et $a(f_{i_1}) = 0$, on obtient $a(g) \geq a(C(i_1, i))$. Il en résulte que $a(g) = a(C(i_1, i))$ pour tout $g \in A_i$.

Par symétrie, on peut montrer que $a(g) = a(C(i, i_2))$. On a donc

$$a(g) = a(C(i_1, i)) = a(C(i, i_2)) \text{ pour tout } g \in A_i. \quad (3.4)$$

En échangeant u_{i+1} avec u_i , on obtient par symétrie

$$a(g) = a(C(i_1, i+1)) = a(C(i+1, i_2)) \text{ pour tout } g \in A_{i+1}. \quad (3.5)$$

En combinant (3.4) et (3.5), on obtient $a(e_i) = 0$, ce qui est impossible.

2) Comme $u_i \notin S$, par 1), on a $u_{i-1}, u_{i+1} \in S$. Par un raisonnement similaire que pour 1), on montre que $a(e_i) = a(g) = a(e_{i-1})$ pour tout $g \in A_i$. Comme par le lemme 3.11 on a $a(g) = \gamma_i$ et par le lemme 3.10 on a $a(e_{i-1}) + a(e_i) = \beta$, l'assertion s'ensuit. $\square$

3.3 Preuve du Théorème 3.1

La preuve de ce théorème est par récurrence sur le nombre de sommets. Le théorème est vrai pour un graphe de Γ sur trois sommets. En effet, dans ce cas, le graphe est série-parallèle et Baïou et Mahjoub [4] ont montré que le $\text{STECSP}(G, S)$ est entièrement décrit par les contraintes de coupe Steiner et les contraintes triviales dans cette classe de graphe. On suppose donc que le théorème est vrai pour tout graphe de Γ sur au plus n sommets et soit G un graphe de Γ sur exactement $n+1$ sommets.

Soit $ax \geq \alpha$ une contrainte définissant une facette du $\text{STECSP}(G, S)$ différente d'une contrainte triviale et d'une contrainte de coupe Steiner. Nous allons montrer que $ax \geq \alpha$ est nécessairement une contrainte de F -partition Steiner généralisée. Pour cela, notons tout d'abord que s'il existe une arête $f \in E$ avec $a(f) = 0$ satisfaisant les conditions du lemme 3.2, alors la contrainte $ax \geq \alpha$ définit une facette du polytope associé au graphe obtenu en contractant l'arête f . Par l'hypothèse de récurrence, il s'ensuit que $ax \geq \alpha$ est du type (3.2). Dans la suite, nous supposons qu'aucune arête e de E avec $a(e) = 0$ ne vérifie les conditions du lemme 3.2. En conséquence, par le lemme 3.3, nous avons :

Lemme 3.14 1) Si $u_i, u_{i+1} \notin S$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ alors $a(e_i) > 0$.

- 2) Si $u_i \in S$, $u_{i+1} \notin S$ et $a(e_i) = 0$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $a(f_{i+1}) < a(f_i)$.
 3) Si $u_i, u_{i+1} \in S$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ alors $a(f_i) \neq a(f_{i+1})$.

On peut supposer que $w \in S$, la preuve quand $w \notin S$ est similaire. Si $s = 1$ ou $s = 0$, alors il n'est pas difficile de démontrer que, dans ce cas, $a(e) = 0$ pour tout $e \in E$, ce qui est impossible. Dans le reste de la preuve, on supposera $s \geq 2$.

On distingue deux cas.

Cas 1. $a(e) > 0$ pour tout $e \in C$.

Supposons d'abord que $s = 2$ et donc $V(C) \cap S = \{u_{i_1}, u_{i_2}\}$. Puisque $C \cap E_0 = \emptyset$, d'après le lemme 3.9, on a $A_{i_1} \cap E_0 = \{f_{i_1}\}$ et $A_{i_2} \cap E_0 = \{f_{i_2}\}$. Par le lemme 3.4 1), il existe un ensemble d'arêtes $T \in t_a$ tel que $f_{i_1} \notin t_a$. Par le lemme 3.8, il s'ensuit que $C \subset T$. Soit $T_1 = (T \setminus C(i_1, i_2)) \cup \{f_{i_1}, f_{i_2}\}$. Il est clair que $T_1 \in T(G)$. Il en résulte que $a(e) = 0$ pour tout $e \in C(i_1, i_2)$, une contradiction. En conséquence, si $|V(C) \cap S| = 2$ alors $\text{STECSP}(G, S)$ est donné par les contraintes triviales et les contraintes de coupe Steiner.

Supposons maintenant que $s \geq 3$. A partir des lemmes 3.9, 3.10, 3.11 et 3.13, on a

$$a(e) = \begin{cases} \beta & \text{si } e = uv \in C \text{ et } u, v \in S, \\ \beta/2 & \text{si } e = uv \in C \text{ et } |\{u, v\} \cap S| = 1, \\ \beta/2 & \text{si } e \in A_i \text{ et } u_i \notin S, \\ \beta & \text{si } e \in A_{i_j} \setminus \{f_{i_j}\} \text{ et } j \in \{1, \dots, s\}, \\ 0 & \text{si } e \in \{f_{i_1}, \dots, f_{i_s}\}, \end{cases}$$

pour un $\beta > 0$. Ceci implique que $ax \geq \alpha$ est une contrainte de F -partition Steiner généralisée, les éléments de la partition étant les sommets du graphe, et F étant l'ensemble $\{f_{i_1}, \dots, f_{i_s}\}$.

Cas 2. $a(e_i) = 0$ pour un $i \in \{1, \dots, n\}$.

Par le lemme 3.14 1), on a $\{u_i, u_{i+1}\} \cap S \neq \emptyset$. Dans ce qui suit, on considère le cas où $|\{u_i, u_{i+1}\} \cap S| = 1$. Le cas où $u_i, u_{i+1} \in S$ peut être traité de manière similaire.

Supposons que $u_i \in S$ et $u_{i+1} \notin S$. (Le cas $u_i \notin S$ et $u_{i+1} \in S$ est similaire.) On peut supposer, s.p.d.g., que $u_i = u_{i_1}$.

Lemme 3.15 1) $a(f) > 0$ pour tout $f \in A_{i_1}$.

2) $T^* = (C \setminus \{e_{i_1}\}) \cup \{f_{i_1}, f_{i_1+1}\} \in t_a$.

Preuve. 1) Supposons qu'il existe une arête $f \in A_{i_1}$ avec $a(f) = 0$. Alors $a(g) \geq a(f)$ pour tout $g \in A_{i_1+1}$, ce qui contredit le lemme 3.14 2).

2) Par le lemme 3.4 1), il existe un ensemble d'arêtes $T \in t_a$ tel que $e_{i_1} \notin T$. Comme $u_{i_1} \in S$ et par conséquent, $|T \cap \delta(u_{i_1})| \geq 2$, on peut supposer que $f_{i_1} \in T$. Si $A_{i_1+1} \cap T = \emptyset$, alors $(T \setminus \{f_{i_1}\}) \cup \{e_{i_1}, f\} \in T(G)$ pour tout $f \in A_{i_1+1}$ et $a(f) \geq a(f_{i_1})$ pour tout $f \in A_{i_1+1}$. Or ceci contredit le lemme 3.14 2). Par conséquent $A_{i_1} \cap T \neq \emptyset$. On peut donc supposer que $f_{i_1+1} \in T$.

Il en résulte que $C \setminus \{e_{i_1}\} \subset T$. En effet, si ce n'est pas le cas, alors il doit exister $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1 + 1\}$ tel que $e_{k-1} \notin T$ et $C(k, i_1) \subset T$. En utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, on peut montrer que $A_k \cap T \neq \emptyset$. (Notons que k peut être égal à i_1 , dans ce cas on aurait $|A_{i_1} \cap T| \geq 2$.) Alors $(T \setminus \{f_{i_1}\}) \cup \{e_{i_1}\} \in T(G)$ et donc $a(f_{i_1}) = 0$, contredisant 1).

Ainsi, on a $C \setminus \{e_{i_1}\} \subset T$ et donc $T^* = (C \setminus \{e_{i_1}\}) \cup \{f_{i_1}, f_{i_1+1}\} \in t_a$. $\square$

Lemme 3.16 1) $a(f) > 0$ pour tout $f \in \delta(w) \setminus \{f_{i_1+1}\}$.

2) $a(f_{i_1+1}) = 0$.

Preuve. 1) Supposons qu'il existe $\bar{f} \in \delta(w) \setminus \{f_{i_1+1}\}$ tel que $a(\bar{f}) = 0$. A partir du lemme 3.15 2), il s'ensuit que $(T^* \setminus \{f_{i_1}\}) \cup \{e_{i_1}, \bar{f}\}$ appartient à t_a . On a donc $a(f_{i_1}) = 0$, ce qui contredit le lemme 3.15 1).

2) Comme $w \in S$, par le lemme 3.4 2) il doit exister un ensemble d'arêtes $T \in t_a$ tel que $|\delta(w) \cap T| \geq 3$. Nous allons d'abord montrer que $A_{i_1+1} \cap T \neq \emptyset$. Supposons le contraire. Si $|T \cap \delta(w)| = 3$, alors il est facile de voir qu'il existe une arête $f \in \delta(w) \cap T$ (par hypothèse $f \notin A_{i_1+1}$) telle que $T \setminus \{f\} \in T(G)$. Mais ceci implique que $a(f) = 0$ ce qui contredit 1). Ainsi $|\delta(w) \cap T| \geq 4$. Soient $k_1, k_2, k_3 \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1 + 1\}$ tels que $k_1 \leq k_2 \leq k_3$, $A_{k_j} \cap T \neq \emptyset$ pour $j = 1, \dots, 3$ et $|T \cap (A_{k_1} \cup A_{k_2} \cup A_{k_3})| \geq 3$. Si $k_1 = k_2 = k_3$, l'ensemble $T \setminus \{f_{k_1}\}$ induit toujours une solution du STECSP. Or ceci entraîne $a(f_{k_1}) = 0$ et contredit 1). Supposons, s.p.d.g., que $k_1 < k_2$ et $f_{k_1}, f_{k_2} \in T$. On peut également supposer, s.p.d.g., que $A_i \cap T = \emptyset$ pour $i \in \{k_1 + 1, \dots, k_3 - 1\} \setminus \{k_2\}$. Si $C(k_1, k_3) \subset T$, alors $T \setminus \{f_{k_2}\} \in T(G)$ et $a(f_{k_2}) = 0$, ce qui contredit 1). On peut donc supposer, s.p.d.g., que $C(k_1, k_2) \not\subset T$. On a alors $u_i \notin S$ pour tout $i \in \{k_1 + 1, \dots, k_2 - 1\}$. Soit $T' = (T \setminus \{f_{k_1}, f_{k_2}\}) \cup C(k_1, k_2)$. Comme $|\delta(w) \cap T| \geq 4$, on a $T' \in T(G)$. En effet, il est clair que toutes les contraintes de coupe Steiner différentes de celle associée à $\delta(w)$ sont vérifiées. Puisque $|\delta(w) \cap T| \geq 4$, la contrainte de coupe Steiner associée à $\delta(w)$ est également satisfaite. On obtient, en conséquence $a(f_{k_1}) + a(f_{k_2}) \leq a(C(k_1, k_2))$.

D'un autre côté, du lemme 3.15 2) on déduit que $(T^* \setminus C(k_1, k_2)) \cup \{f_{k_1}, f_{k_2}\}$ appartient

à $T(G)$. Ainsi $a(C(k_1, k_2)) \leq a(f_{k_1}) + a(f_{k_2})$, et donc

$$a(C(k_1, k_2)) = a(f_{k_1}) + a(f_{k_2}). \quad (3.6)$$

Notons que $(T^* \setminus (C(k_1, k_2) \cup \{f_{i_1}, f_{i_1+1}\})) \cup \{e_{i_1}, f_{k_1}, f_{k_2}\}$ est aussi un ensemble de $T(G)$. Comme $a(e_{i_1}) = 0$, par (3.6) il s'ensuit que $a(f_{i_1}) = 0$, ce qui est impossible.

Donc $A_{i_1+1} \cap T \neq \emptyset$ et par conséquent, on peut supposer que $f_{i_1+1} \in T$. Comme $a(e_{i_1}) = 0$, on peut également supposer que $e_{i_1} \in T$. S'il existe une autre arête $\bar{f} \in A_{i_1+1} \cap T$, alors, comme $u_{i_1} \in S$, $T \setminus \bar{f} \in T(G)$ et $a(\bar{f}) = 0$, ce qui est impossible par 1). D'où $A_{i_1+1} \cap T = \{f_{i_1+1}\}$. Soit $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1 + 1\}$ tel que $A_k \cap T \neq \emptyset$ et $A_l \cap T = \emptyset$ pour tout $l \in \{i_1 + 2, \dots, k - 1\}$. Notons que, comme $|\delta(w) \cap T| \geq 3$, un tel k existe. Notons également que k ne peut pas coïncider avec i_1 . En effet, si $k = i_1$, comme $|\delta(w) \cap T| \geq 3$, il y a au moins deux arêtes $g_1, g_2 \in A_{i_1} \cap T$. Or ceci implique que $T \setminus \{g_i\} \in T(G)$, pour $i = 1, 2$ et $a(g_1) = a(g_2) = 0$, une contradiction. Aussi, puisque $|\delta(w) \cap T| \geq 3$ et comme $u_{i_1} \in S$, il doit exister $k' \in \{k, \dots, i_1\}$ tel que $A_{k'} \cap T \neq \emptyset$ et $C(k', i_1) \subset T$. On peut supposer, s.p.d.g., que $f_{k'} \in T$. Notons que l'on peut avoir $k' = i_1$. Si c'est le cas, $C(k', i_1) = \emptyset$. On a alors $k \neq k'$. En effet, si $k = k'$, on aurait $T \setminus \{f_k\} \in T(G)$ et donc $a(f_k) = 0$, ce qui contredit 1).

Nous allons maintenant montrer que $a(f_{i_1+1}) = 0$. Tout d'abord, si $C(i_1 + 1, k) \subset T$, alors $T \setminus \{f_{i_1+1}\}$ est un élément de $T(G)$ et, par conséquent, $a(f_{i_1+1}) = 0$. Supposons maintenant que $C(i_1 + 1, k) \not\subset T$. Comme $A_l \cap T = \emptyset$ pour tout $l \in \{i_1 + 2, \dots, k - 1\}$, on a $u_l \notin S$ pour tout $l \in \{i_1 + 1, \dots, k\}$. De plus, on a $C(k, k') \not\subset T$. Sinon, $T \setminus \{f_{k'}\} \in T(G)$ et $a(f_{k'}) = 0$, contredisant 1). En conséquence, il doit exister $k'' \in \{k, \dots, k' - 1\}$ tel que $f_{k''} \in A_{k''} \cap T$ et $C(k, k'') \subset T$. Sinon, l'ensemble $T \setminus \{f_k\}$ serait une solution de $T(G)$. Or ceci entraînerait $a(f_k) = 0$, contredisant 1). Il n'est pas difficile de voir maintenant que l'ensemble $(T \setminus \{f_{i_1+1}, f_k\}) \cup C(i_1 + 1, k)$ appartient à $T(G)$, et par conséquent

$$a(f_{i_1+1}) + a(f_k) \leq a(C(i_1 + 1, k)). \quad (3.7)$$

Comme $u_l \notin S$ pour tout $l \in \{i_1 + 1, \dots, k - 1\}$, l'ensemble $(T^* \setminus (C(i_1 + 1, k) \cup \{f_{i_1+1}\})) \cup \{f_k\}$ est une solution de $T(G)$ où T^* est l'ensemble introduit dans le lemme 3.15 2). Ce qui implique

$$a(f_{i_1+1}) + a(C(i_1 + 1, k)) \leq a(f_k). \quad (3.8)$$

En combinant (3.7) et (3.8), on obtient $a(f_{i_1+1}) = 0$, ce qui complète la preuve du lemme. $\square$

Lemme 3.17 1) $a(e_{i_j}) > 0$ pour tout $j \in \{2, \dots, s\}$.

- 2) $a(e_{i_j-1}) > 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, s\} \setminus \{2\}$.
 3) $i_2 = i_1 + 2$ et $a(e_{i_2-1}) = 0$.

Preuve. Nous montrons seulement 1) et 3), la preuve du 2) est similaire à celle du 1).

1) Supposons qu'il existe $j \in \{2, \dots, s\}$ tel que $a(e_{i_j}) = 0$. Si $u_{i_j+1} \notin S$, alors par le lemme 3.16 2), nous avons $a(f_{i_j+1}) = 0$, ce qui contredit le lemme 3.16 1). Supposons maintenant que $u_{i_j+1} \in S$. Par le lemme 3.4 1), il existe un ensemble d'arêtes $\overline{T} \in t_a$ ne contenant pas e_{i_j} . On peut alors supposer, s.p.d.g., que $f_{i_j}, f_{i_j+1} \in \overline{T}$. Si $C \setminus \{e_{i_j}\} \not\subset \overline{T}$, alors $|(\delta(w) \setminus \{f_{i_j}, f_{i_j+1}\}) \cap \overline{T}| \geq 2$, et par conséquent $(\overline{T} \setminus \{f_{i_j}, f_{i_j+1}\}) \cup \{e_{i_j}\}$ appartient à $T(G)$, ce qui implique que $a(f_{i_j}) = a(f_{i_j+1}) = 0$, contredisant le lemme 3.16 1). Ainsi $C \setminus \{e_{i_j}\} \subset \overline{T}$ et $(\overline{T} \setminus \{f_{i_j}\}) \cup \{e_{i_j}, f_{i_j+1}\}$ est une solution de $T(G)$. Comme $a(e_{i_j}) = a(f_{i_j+1}) = 0$, nous avons $a(f_{i_j}) = 0$, ce qui contredit encore une fois le lemme 3.16 1).

3) Supposons au contraire que $i_2 = i_1 + l$ avec $l \geq 3$. Dans ce cas $a(e_i) > 0$ pour $i = i_1 + 1, \dots, i_1 + l - 1$. En fait, ceci est clair pour $i = i_1 + 1, \dots, i_1 + l - 2$ par le lemme 3.14 1). Si $a(e_{i_1+l-1}) = 0$ alors par le lemme 3.16 2), on a $a(f_{i_1+l-1}) = 0$, ce qui contredit le lemme 3.16 1). Donc $a(e_{i_1+l-1}) > 0$.

Puisque $u_{i_2} \in S$, par le lemme 3.4 2), il existe un ensemble $\tilde{T} \in t_a$ tel que $|\delta(u_{i_2}) \cap \tilde{T}| \geq 3$. Comme par 1), $a(e_{i_2}) > 0$, par les lemmes 3.5 et 3.7, il s'ensuit que $C \cup \{f_{i_2}\} \subset \tilde{T}$. Donc, puisque $u_{i_1+1}, \dots, u_{i_2-1} \notin S$, l'ensemble $(\tilde{T} \setminus C(i_1 + 1, i_2)) \cup \{f_{i_1+1}\}$ est une solution de $T(G)$. Or comme par le lemme 3.16 2) $a(f_{i_1+1}) = 0$, ceci implique que $a(e_{i_1+1}) = \dots = a(e_{i_2-1}) = 0$, ce qui est impossible et donc $i_2 = i_1 + 2$.

Nous allons maintenant montrer que $a(e_{i_2-1}) = 0$. Si, au contraire, $a(e_{i_2-1}) > 0$, en utilisant les mêmes arguments que ci-dessus, on obtient $C \cup \{f_{i_2}\} \subset \tilde{T}$. Comme $(\tilde{T} \setminus \{e_{i_2-1}\}) \cup \{f_{i_1+1}\} \in T(G)$, on a $a(e_{i_2-1}) = 0$, une contradiction. $\square$

Lemme 3.18 *Il existe exactement un seul sommet $u_i = u_{i_1+1} \notin S$.*

Preuve. Supposons le contraire. Comme $i_2 = i_1 + 2$, il existe $l \in \{1, \dots, s\}$ tel que $V(C(i_2, i_l)) \subset S$ et $u_{i_l+1} \notin S$. Noter que l peut être égal à 2. Par le lemme 3.17 1) et 2), on a $a(e_{i_l}) > 0$ et $a(e_{i_{l+1}-1}) > 0$. Comme $u_{i_l} \in S$, par le lemme 3.4 2), il existe un ensemble d'arêtes $T_1 \in t_a$ tel que $|T_1 \cap \delta(u_{i_l})| \geq 3$. Puisque $a(e_{i_l}) > 0$, par les lemmes 3.5 et 3.7 nous avons $C \cup \{f_{i_l}\} \subset T_1$. En considérant $u_{i_{l+1}}$ à la place de u_{i_l} , on montre d'une manière analogue qu'il existe un ensemble d'arêtes $T_2 \in t_a$ tel que $C \cup \{f_{i_{l+1}}\} \subset T_2$. Comme par le lemme 3.16 2), on a $a(f_{i_{l+1}}) = 0$, on peut supposer que $f_{i_{l+1}} \in T_1 \cap T_2$. Par conséquent, $T_1 = C \cup \{f_{i_{l+1}}, f_{i_l}\}$ et $T_2 = C \cup \{f_{i_{l+1}}, f_{i_{l+1}}\}$. Comme

par le lemme 3.15 2) $T^* = (C \setminus \{e_{i_1}\}) \cup \{f_{i_1}, f_{i_1+1}\} \in t_a$ et $a(e_{i_1}) = 0$, il s'ensuit que $a(f_{i_1}) = a(f_{i_1+1}) = a(f_{i_1})$. L'ensemble $(T_1 \setminus \{f_{i_1}\}) \cup \{f\}$ est également une solution de $T(G)$ pour tout $f \in A_k$, $k \in \{i_l + 1, \dots, i_{l+1} - 1\}$. D'où

$$a(f) \geq a(f_{i_l}) \text{ pour tout } f \in A_k, k = i_l + 1, \dots, i_{l+1} - 1. \quad (3.9)$$

D'un autre côté, il doit exister un ensemble d'arêtes $T_3 \in t_a$ tel que $|T_3 \cap \{e_{i_l}, e_{i_{l+1}-1}\}| = 1$. Sinon, tout ensemble T de t_a satisferait l'équation $x^T(e_{i_l}) - x^T(e_{i_{l+1}-1}) = 0$. Comme cette équation ne peut pas être un multiple positif de $ax \geq \alpha$, ceci conduirait à une contradiction.

S.p.d.g., on peut supposer que $e_{i_l} \in T_3$ et $e_{i_{l+1}-1} \notin T_3$. Ainsi $A_{i_{l+1}} \cap T_3 \neq \emptyset$ et on peut, en conséquence, supposer que $f_{i_{l+1}} \in T_3$. Comme $a(e_{i_l}) > 0$, il doit exister $j \in \{i_l + 1, \dots, i_{l+1} - 1\}$ tel que $C(i_l, j) \subset T_3$ et $A_j \cap T_3 \neq \emptyset$. Sinon, $T_3 \setminus \{e_{i_l}\}$ appartiendrait à $T(G)$ et $a(e_{i_l}) = 0$, une contradiction. On peut alors supposer que $f_j \in T_3$.

Si $C(i_{l+1}, j) \not\subset T_3$, alors $\delta(w) \cap T_3$ doit contenir deux autres arêtes. D'où l'ensemble $(T_3 \setminus \{f_{i_{l+1}}, f_j\}) \cup C(j, i_{l+1})$ est dans $T(G)$ et on a

$$a(f_{i_{l+1}}) + a(f_j) \leq a(C(j, i_{l+1})). \quad (3.10)$$

Or, on peut remarquer que l'ensemble $(T^* \setminus (C(j, i_{l+1}) \cup \{f_{i_1}\})) \cup \{f_{i_{l+1}}, f_j, e_{i_1}\}$ est aussi une solution de $T(G)$. Ainsi on en déduit que

$$a(C(j, i_{l+1})) + a(f_{i_1}) \leq a(f_{i_{l+1}}) + a(f_j) + a(e_{i_1}). \quad (3.11)$$

En combinant (3.10) et (3.11), on obtient $a(f_{i_1}) \leq a(e_{i_1})$. Comme $a(e_{i_1}) = 0$, il s'ensuit que $a(f_{i_1}) = 0$, une contradiction.

On a donc $C(i_{l+1}, j) \subset T_3$ et en conséquence, $T_3 = C(i_{l+1}, j) \cup \{f_{i_{l+1}}, f_j\}$. Or $(T_3 \setminus (C(i_l, j) \cup \{f_j\})) \cup \{f_{i_l}\}$ est une solution admissible du STECSP. On en déduit que $a(f_{i_l}) \geq a(C(i_l, j)) + a(f_j)$. Comme par (3.9), $a(f_{i_j}) \geq a(f_{i_l})$, on a $a(C(i_l, j)) = 0$ et par conséquent $a(e_{i_l}) = 0$, une contradiction. $\square$

Lemme 3.19 1) $a(e_i) = a(f_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_1 + 1\}$.

2) $a(e_{i-1}) = a(f_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1 + 1, i_1 + 2\}$.

Preuve. Nous montrons 1), la preuve pour 2) est similaire.

Par le lemme 3.4 1), il existe un ensemble d'arêtes $T \in t_a$ tel que $e_i \notin T$. Puisque par le lemme 3.18, $u_i, u_{i+1} \in S$, on a $|A_i \cap T| \neq \emptyset$ et $|A_{i+1} \cap T| \neq \emptyset$. On peut supposer, s.p.d.g., que $f_i, f_{i+1} \in T$. On a $a(e_i) \geq a(f_i)$. En effet, si $|\delta(w) \cap T| \geq 3$ alors l'ensemble $(T \setminus \{f_i\}) \cup \{e_i\}$ reste une solution de $T(G)$ et donc $a(e_i) \geq a(f_i)$. Sinon, $C(i+1, i) \subset T$

et l'ensemble $(T \setminus \{f_i\}) \cup \{e_i, f_{i+1}\}$ serait également dans $T(G)$, ce qui donnerait $a(e_i) \geq a(f_i)$.

Par le lemme 3.4 1), il existe également un ensemble d'arêtes $T' \in t_a$ tel que $|\delta(u_{i+1}) \cap T'| \geq 3$. Par les lemmes 3.5 et 3.7, il s'ensuit que $C \cup \{f_{i+1}\} \subset T'$ et on peut supposer que $T' = C \cup \{f_{i+1}, f_{i+1}\}$. Comme $(T' \setminus \{e_i\}) \cup \{f_i\} \in T(G)$, on a $a(f_i) \geq a(e_i)$ et donc $a(f_i) = a(e_i)$. $\square$

Lemme 3.20 *Pour tout $f \in A_i$, $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1 + 1\}$, $a(f) = \beta_i$ pour un $\beta_i \in \mathbb{R}_+$.*

Preuve. Il n'y a rien à démontrer si $|A_i| = 1$. Supposons donc que $|A_i| \geq 2$ et qu'il existe $f' \in A_i$ tel que $a(f_i) < a(f')$. Par le lemme 3.4 1), il existe un ensemble d'arêtes $T \in t_a$ tel que $f' \in T$. On peut supposer que $f_i \in T$ sinon, $T' = (T \setminus \{f'\}) \cup \{f_i\} \in T(G)$ et on aurait $ax^{T'} < \alpha$, ce qui est impossible. On a également $e_{i-1}, e_i \notin T$. En effet, si $|\{e_{i-1}, e_i\} \cap T| = 1$, alors il existe au moins une arête de $\delta(w)$, différente de f_i et f' , appartenant à T . Il est facile de voir dans ce cas que $T \setminus \{f_i\}$ et $T \setminus \{f'\}$ appartiennent à $T(G)$ et donc $a(f_i) = a(f') = 0$, une contradiction. Maintenant, supposons que $e_{i-1}, e_i \in T$. Si $C \not\subset T$, il doit exister deux autres arêtes de $\delta(w) \setminus \{f_i, f'\}$ appartenant à T . Or ceci implique que $T \setminus \{f_i, f'\} \in T(G)$ et $a(f_i) = a(f') = 0$, une contradiction. Sinon, on aurait $C \subset T$ et, en conséquence, $(T \setminus \{f_i\}) \cup \{f_{i+1}\} \in T(G)$. Mais puisque $a(f_{i+1}) = 0$, il en résulterait que $a(f_i) = 0$, une contradiction. Ainsi $e_{i-1}, e_i \notin T$ et par conséquent, $(T \setminus \{f'\}) \cup \{e_i, f_{i+1}\}$ est une solution de $T(G)$. D'où $a(e_i) \geq a(f')$ et donc $a(e_i) > a(f_i)$. Mais ceci contredit le lemme 3.19 1). $\square$

Par les lemmes 3.19 et 3.20, on obtient

$$a(e) = \beta, \text{ pour tout } e \in E \setminus (\{e_{i_1}, e_{i_1+1}\} \cup A_{i_1+1}) \text{ pour un } \beta \in \mathbb{R}_+. \quad (3.12)$$

Lemme 3.21 *Si $|A_{i_1+1}| \geq 2$, alors $a(f) = \beta$ pour tout $f \in A_{i_1+1} \setminus \{f_{i_1+1}\}$.*

Preuve. Tout d'abord, notons que par le lemme 3.15 2), $(T^* \setminus \{f_{i_1}\}) \cup \{e_{i_1}, f\} \in T(G)$ pour tout $f \in A_{i_1+1} \setminus \{f_{i_1+1}\}$, ce qui implique que $a(f) \geq a(f_{i_1}) = \beta$.

D'autre part, pour toute arête $f \in A_{i_1+1} \setminus \{f_{i_1+1}\}$, par le lemme 3.4 1), il doit exister un ensemble d'arêtes $T_f \in t_a$ contenant f . L'ensemble T_f doit contenir également f_{i_1+1} . Or, comme $(T_f \setminus \{f\}) \cup \{e_{i_1}, f_{i_1}\} \in T(G)$, on a $a(f) \leq a(f_{i_1})$, et donc $a(f) = a(f_{i_1}) = \beta$. $\square$

Maintenant, par (3.12) et les lemmes 3.16 2), 3.17 3) et 3.21, on a

$$\begin{aligned} a(e) &= 0 && \text{pour tout } e \in \{e_{i_1}, e_{i_1+1}, f_{i_1+1}\}, \\ a(e) &= \beta && \text{pour tout } e \in E \setminus \{e_{i_1}, e_{i_1+1}, f_{i_1+1}\}. \end{aligned}$$

Ceci implique que $ax \geq \alpha$ est la contrainte de F -partition Steiner associée à la partition donnée par les sommets du graphe telle que $V_0 = \{u_{i_1+1}\}$ et $F = \{e_{i_1}, e_{i_1+1}, f_{i_1+1}\}$. Comme toute contrainte de F -partition Steiner est une contrainte de F -partition Steiner généralisée, ceci termine la preuve du théorème.

3.4 Applications aux graphes de Halin

Dans cette section, nous allons discuter de quelques applications des résultats de la section précédente à la classe des graphes de Halin.

Une coupe contenant exactement 3 arêtes est appelée une *coupe à 3 arêtes*. Si G est un graphe contenant une coupe à 3 arêtes $\delta(W)$, alors G peut se décomposer en deux graphes G_1 et G_2 où G_1 (resp. G_2) est obtenu en contractant W (resp. $V \setminus W$) en un seul sommet. Barahona et Mahjoub [7] ont montré que si G se décompose en G_1 et G_2 par une coupe à 3 arêtes $\delta(W)$, alors le système qui définit $\text{STECSP}(G, V)$ est obtenu comme l'union des systèmes définissant $\text{STECSP}(G_1, V)$ et $\text{STECSP}(G_2, V)$ en identifiant les variables associées aux arêtes de $\delta(W)$.

Ce résultat ne peut malheureusement pas être étendu au cas $S \neq V$. En effet, considérons le graphe donné par la figure 3.4 et $S = \{u_1, u_3, u_4, u_6\}$. Considérons la coupe induite par $W = \{u_1, u_4, u_5\}$. La coupe $\delta(W)$ contient exactement trois arêtes. La décomposition de ce graphe par rapport à cette coupe donne deux roues de 4 sommets. Par le théorème 3.1, le polytope associé à ces deux roues est décrit par les contraintes triviales, les contraintes de coupe Steiner et les contraintes de F -partition Steiner généralisées. Soit x la solution donnée par $x(e_1) = x(e_3) = x(e_4) = x(e_7) = x(e_9) = 1$ et $x(e_2) = x(e_5) = x(e_6) = x(e_8) = 0$. Remarquons que le vecteur x vérifie toutes les contraintes provenant de l'union des systèmes caractérisant les deux roues. Bien que le vecteur x soit entier, il n'induit pas une solution du STECSP . Aussi, l'union des systèmes provenant des deux graphes n'est même pas suffisante, avec les contraintes d'intégrité, pour formuler le problème en un programme en nombres entiers pour le graphe G .

Cependant, si les extrémités des arêtes formant la coupe à trois arêtes sont des terminaux, nous avons le résultat suivant qui généralise celui de Barahona et Mahjoub [7] et dont la preuve est similaire à celle donnée dans [7] quand $S = V$.

Théorème 3.22 *Soient $G = (V, E)$ un graphe contenant une coupe à 3 arêtes $\delta(W) = \{u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3\}$ et $S \subset V$ un ensemble de sommets terminaux tel que $u_1, u_2, u_3, v_1,$*

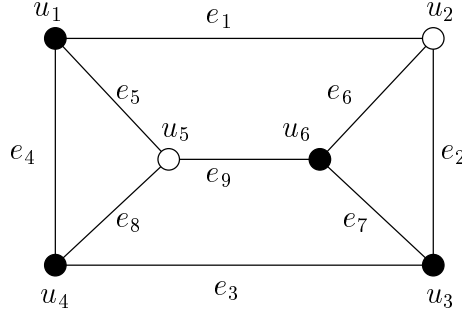


FIG. 3.4 –

$v_2, v_3 \in S$. Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ les deux graphes obtenus à partir de G en contractant W et $V \setminus W$, respectivement. Alors un système linéaire suffisant pour décrire le $\text{STECSP}(G, S)$ est obtenu comme l'union des systèmes définissant le $\text{STECSP}(G_1, S_1)$ et le $\text{STECSP}(G_2, S_2)$ en identifiant les variables associées aux arêtes de $\delta(W)$. Ici, $S_1 = S \cup \{w_1\}$ et $S_2 = S \cup \{w_2\}$ où w_1 (resp. w_2) est le nœud issu de la contraction de W (resp. $V \setminus W$).

Soit $G = (V, T \cup C)$ un graphe de Halin. Notons que chaque arête de T appartient à une unique coupe contenant exactement trois arêtes dont deux appartiennent à C . Si un graphe de Halin $G = (V, T \cup C)$ n'est pas une roue, alors toute arête non-pendante de T (arête qui n'est pas reliée à une feuille de l'arbre) induit une coupe non triviale. Une coupe non triviale est une coupe $\delta(W)$ telle que $|W| \geq 2$ et $|V \setminus W| \geq 2$. La décomposition d'un graphe de Halin par une coupe à 3 arêtes non triviale, produit deux graphes de Halin. En répétant récursivement cette opération, un graphe de Halin différent d'une roue peut se décomposer en un ensemble de roues.

Cette décomposition a permis à Barahona et Mahjoub [7] de montrer que le $\text{STECSP}(G, S)$ est décrit par les contraintes triviales, les contraintes de coupes Steiner et les contraintes de F -partition Steiner quand G est un graphe de Halin et $S = V$. De la même manière, en conséquence des théorèmes 3.1 et 3.22, on a le résultat suivant.

Corollaire 3.23 *Soit $G = (V, E)$ un graphe de Halin. Supposons que toutes les extrémités des arêtes de toutes les coupes à 3 arêtes de G sont des sommets terminaux. Alors $\text{STECSP}(G, S)$ est donné par les contraintes triviales, les contraintes de coupe Steiner et les contraintes de F -partition Steiner généralisées.*

Le corollaire 3.23 généralise le résultat de Barahona et Mahjoub [7] quand $S = V$. Afin d'illustrer le corollaire 3.23, considérons le graphe de Halin $G = (V, E)$ donné par

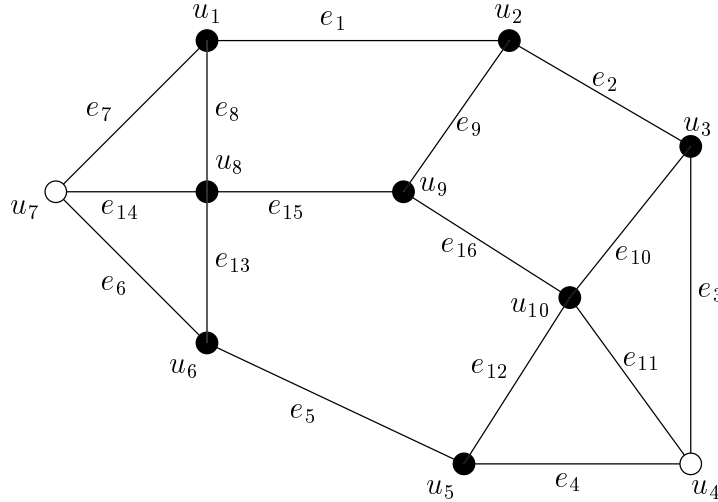


FIG. 3.5 –

la figure 3.5 où $S = \{u_1, u_2, u_3, u_5, u_6, u_8, u_9, u_{10}\}$. G se décompose par des coupes à 3 arêtes en les roues W^1 , W^2 et W^3 données par la figure 3.6. Les sommets u_0 et u'_0 sont les sommets issus de la décomposition du graphe G . Soit S^i l'ensemble des terminaux de W^i pour $i = 1, \dots, 3$.

Par le théorème 3.1, le polytope $\text{STECSP}(W^1, S^1)$ est décrit par les contraintes triviales, les contraintes de coupe Steiner, les contraintes de F -partition Steiner et la contrainte de F -partition Steiner généralisée

$$2x(e_1) + 2x(e_5) + x(e_6) + x(e_7) + x(e_{14}) \geq 4. \quad (3.13)$$

On peut noter qu'il y a sept contraintes de F -partition Steiner dans la caractérisation de $\text{STECSP}(W^1, S^1)$ qui sont également, par définition, des F -partition Steiner généralisées.

Comme tous les sommets de W^2 sont des terminaux, on sait, par [7], que le $\text{STECSP}(W^2, S^2)$ est complètement décrit par les contraintes triviales, les contraintes de coupe Steiner et les contraintes de F -partition Steiner. Enfin, comme W^3 possède la même structure que W^1 , $\text{STECSP}(W^3, S^3)$ est donné par les contraintes triviales, les contraintes de coupe Steiner, les contraintes de F -partition Steiner et la contrainte de F -partition Steiner généralisée

$$2x(e_2) + 2x(e_5) + x(e_3) + x(e_4) + x(e_{11}) \geq 4. \quad (3.14)$$

Par le corollaire 3.23, $\text{STECSP}(G, S)$ est décrit par les contraintes triviales, les contraintes de coupe Steiner, les contraintes de F -partition Steiner et les deux contraintes de F -partition Steiner généralisées (3.13) et (3.14).

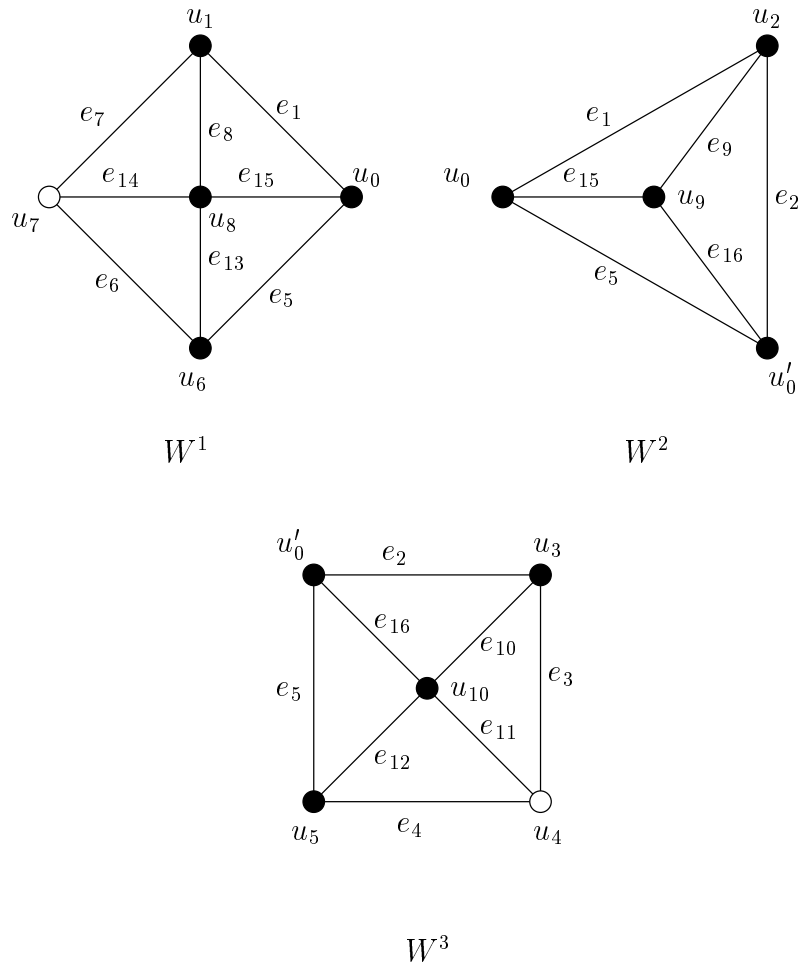


FIG. 3.6 –

Comme on l'a déjà mentionné ci-dessus, la composition utilisée dans le théorème 3.22 ne peut pas être appliquée quand les extrémités des arêtes formant les coupes à 3 arêtes ne sont pas toutes des terminaux. De plus, les contraintes triviales, les contraintes de coupe et les contraintes de F -partition Steiner généralisées ne suffisent malheureusement pas pour caractériser le $\text{STECSP}(G, S)$ quand G est un graphe de Halin. En effet, reprenons le graphe donné par la figure 3.4 où $S = \{u_1, u_3, u_4, u_6\}$. Soit $\bar{x}$ la solution donnée par $\bar{x}(e_1) = \bar{x}(e_3) = \bar{x}(e_8) = \bar{x}(e_9) = 1$ et $\bar{x}(e_2) = \bar{x}(e_4) = \bar{x}(e_5) = \bar{x}(e_6) = \bar{x}(e_7) = 1/2$. Cette solution satisfait ces contraintes. De plus, $\bar{x}$ est un point extrême du polytope donné par ces contraintes. La contrainte

$$x(e_2) + x(e_4) + x(e_5) + x(e_6) + x(e_7) \geq 3$$

qui n'est pas du type (2.1), (2.2), (3.1) et (3.2), est valide pour le $\text{STECSP}(G, S)$ et violée par $\bar{x}$.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le polytope associé au problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe. Nous avons introduit une nouvelle classe d'inégalités appelées contraintes de F -partition Steiner généralisées. Celles-ci généralisent les contraintes de F -partition Steiner. On a montré que ces inégalités, avec les contraintes de coupe et les contraintes triviales, permettent de caractériser le polytope des sous-graphes Steiner 2-arête connexes dans une classe de graphes qui généralise les roues. En conséquence, nous avons obtenu une description du polytope associé dans les graphes de Halin tels que les extrémités de chaque arête appartenant à une coupe de trois arêtes soient des sommets terminaux. Ce résultat généralise celui de Barahona et Mahjoub [7] quand tous les sommets du graphe sont des terminaux.

Comme les contraintes de F -partition Steiner généralisées sont nécessaires pour décrire le polytope des sous-graphes Steiner 2-arête connexes dans des graphes non triviaux, il serait intéressant de caractériser celles qui définissent des facettes. De plus, ces contraintes n'étant pas restreintes au cas des graphes de Halin, des procédures de séparation de ces contraintes seraient très utiles pour résoudre le STECSP dans le cadre d'une méthode de coupes.

Chapitre 4

Le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème consistant à trouver un sous-graphe 2-arête connexe de poids minimum où chaque arête doit appartenir à un cycle de longueur bornée. Nous introduisons une classe d'inégalités valides pour le polytope associé à ce problème. Celle-ci avec les contraintes de coupe et les contraintes d'intégrité permettent de formuler ce problème comme un programme linéaire en nombres entiers. Nous étudions ensuite la structure faciale du polytope associé au problème. Nous introduisons de nouvelles classes d'inégalités et nous donnons pour certaines d'entre elles, des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles définissent des facettes quand le graphe est complet. Pour chacune de ces classes, nous discutons aussi d'algorithmes de séparation. En utilisant ces résultats, nous développons un algorithme de coupes et branchements pour le problème. Nous discutons enfin de certains résultats expérimentaux sur des instances réelles et des instances aléatoires.

Ce travail, réalisé en collaboration avec B. Fortz et S.T. McCormick, a fait l'objet de l'article [38].

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, un entier $K \geq 3$ et un coût $c(e)$ associé à chaque arête $e \in E$, le *problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés (2ECSBR)* consiste à trouver un sous-graphe $H = (V, F)$ de G , 2-arête connexe de coût minimum tel que chaque arête de F appartienne à un cycle de longueur au plus K (ici, la longueur d'un cycle correspond au nombre d'arêtes qui le composent). Un cycle de cardinalité au plus K sera appelé *cycle admissible*. Ce problème est une généralisation du problème du sous-graphe 2-arête connexe. En effet, ce dernier n'est rien d'autre que le 2ECSBR quand $K \geq |V|$. Le problème 2ECSBR est donc NP-difficile.

Fortz et Labbé [35] et Fortz et al. [37] ont étudié la version sommet-connexe du problème, c'est à dire, le problème qui consiste à trouver un sous-graphe 2-sommet connexe de coût minimum dont chaque arête appartient à un cycle de longueur ne dépassant pas K . Ils ont introduit des inégalités valides ainsi que des inégalités définissant des facettes pour le polytope associé. Ils ont également discuté d'algorithmes de séparation pour ces classes d'inégalités et de résultats expérimentaux obtenus à l'aide d'un algorithme de coupes et branchements. Une synthèse de ces travaux ainsi que d'autres travaux liés au problème peut être trouvée dans [33, 36].

Un k -cycle est un cycle de cardinalité exactement k . Si $G = (V, E)$ est un graphe et $k = |V|$, alors un k -cycle est un cycle hamiltonien de G . Dans [74], Maurras et Nguyen ont étudié le polytope des 3-cycles. Ils ont introduit des inégalités valides qui définissent des facettes pour ce polytope. Ils ont également discuté de procédures de lifting permettant d'obtenir de nouvelles facettes pour ce polytope. Ils ont également donné une description du polytope des 3-cycles dans le graphe complet sur 8 sommets. De plus, Nguyen [80] a décrit le dominant de ce polytope. Dans [79], on peut trouver une synthèse de travaux réalisés sur le polytope des k -cycles.

Avant de discuter de la formulation du polytope, nous donnons quelques notations qui seront fréquemment utilisées dans la suite de ce chapitre.

Soit $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V . On pose (voir Figure 4.1)

$$C_\pi = \bigcup_{i=0}^{p-1} [V_i, V_{i+1}] \cup [V_0, V_p],$$

et

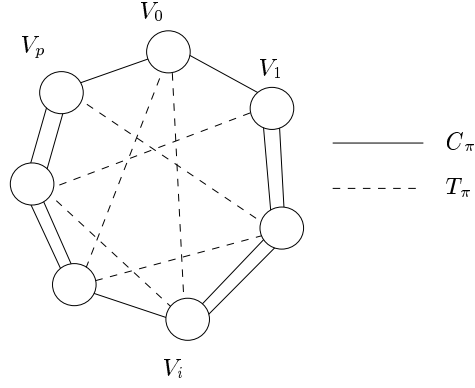
$$T_\pi = \delta(V_0, \dots, V_p) \setminus C_\pi.$$

Notons que T_π est l'ensemble des cordes de la partition, c'est-à-dire l'ensemble des arêtes qui sont entre des éléments non consécutifs de la partition. On note par $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des ensembles d'arêtes induisant une solution réalisable du 2ECSBR, et par $\mathcal{P}(G, K)$ l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence de ces solutions, i.e.

$$\mathcal{P}(G, K) = \text{conv}\{x^F \in \{0, 1\}^m \mid F \in \mathcal{F}(G)\}.$$

4.1 Formulation et polytope associé

Dans cette section, nous allons donner une formulation du 2ECSBR comme un programme linéaire en nombres entiers ne faisant intervenir que les variables de conception x . Nous discutons également de la dimension du polytope $\mathcal{P}(G, K)$.

FIG. 4.1 – C_π et T_π

Pour donner une formulation du problème, nous avons besoin d'introduire une nouvelle classe d'inégalités valides pour $\mathcal{P}(G, K)$. Celle-ci est décrite par le théorème suivant.

Théorème 4.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $K \geq 3$. Soit $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V telle que $p \geq K$, et soit $e \in [V_0, V_p]$. Alors l'inégalité*

$$x(T_\pi^e) \geq x(e) \quad (4.1)$$

est valide pour $\mathcal{P}(G, K)$, où

$$T_\pi^e = T_\pi \cup ([V_0, V_p] \setminus \{e\}).$$

Preuve. Soit $F \subseteq E$ un ensemble d'arêtes induisant une solution du 2ECSBR. Si x^F ne satisfait pas (4.1), alors $e \in F$ et $F \cap T_\pi^e = \emptyset$. Donc tout cycle de F utilisant e est entièrement contenu dans C_π . Comme $p \geq K$, un tel cycle est par conséquent de longueur $> K$. Il s'ensuit que e n'appartient pas à un cycle admissible, une contradiction. $\square$

Les inégalités (4.1) seront appelées *contraintes de cycle*.

Théorème 4.2 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $K \geq 3$. Le problème 2ECSBR est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant :*

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{e \in E} c(e)x(e) \\ \text{s.t.} & x(\delta(W)) \geq 2 \quad \text{pour tout } W \subset V, \emptyset \neq W \neq V, \\ & x(T_\pi^e) \geq x(e) \quad \text{pour tout } e \in [V_0, V_p], \\ & \pi = (V_0, \dots, V_p) \text{ une partition de } V, \\ & x(e) \in \{0, 1\} \quad \text{pour tout } e \in E. \end{array}$$

Preuve. Par le théorème 4.1, les vecteurs d'incidence de chaque solution du 2ECSBR satisfont les contraintes (4.1). Comme ces vecteurs vérifient également les contraintes (2.3) et (2.4), toute solution du 2ECSBR est une solution du programme ci-dessus. Considérons maintenant un ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ qui n'induit pas une solution du 2ECSBR. Nous allons montrer qu'il existe une contrainte parmi (2.3), (2.4), (4.1) qui n'est pas satisfaite par x^F . Il est clair que si F n'induit pas un sous-graphe 2-arête connexe, alors au moins une des contraintes (2.3) est violée par x^F . On peut donc supposer que x^F induit un sous-graphe 2-arête connexe et, par conséquent, il doit exister une arête $e \in [u, v] \cap F$, $u, v \in V$ qui n'appartient pas à un cycle de longueur au plus K . Soit $d(u, i)$ la distance entre le sommet u et le sommet i dans $F \setminus \{e\}$. (La distance entre deux sommets correspond au nombre d'arêtes contenues dans le plus court chemin entre u et i .) Posons $p = d(u, v)$. On a alors $p \geq K$. La contrainte de cycle, associée à la partition

$$\begin{aligned} V_i &= \{w \in V \mid d(u, w) = i\}, & i = 0, \dots, p-1, \\ V_p &= \{w \in V \mid d(u, w) \geq p\}, \end{aligned}$$

et à l'arête e , est donc violée par x^F , ce qui complète la preuve du théorème. $\square$

La remarque suivante découle directement du théorème 4.2.

Remarque 4.3 Si pour une arête $e \in [s, t]$, $s, t \in V$, il n'existe pas de cycle admissible dans G la contenant, alors il existe une partition $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ avec $p \geq K$ et $e \in [V_0, V_p]$ telle que $T_\pi^e = \emptyset$. De plus, cette partition peut être obtenue par un parcours en largeur du graphe à partir d'un des sommets s ou t .

Remarque 4.4 En ajoutant à la formulation donnée dans le théorème 4.2, les contraintes

$$x(\delta_{G-v}(W)) \geq 1, \quad W \subset V \setminus V, v \in V,$$

on obtient une formulation du problème du sous-graphe 2-sommet connexe avec des cycles bornés.

Par le théorème 4.2, il s'ensuit que

$$\mathcal{P}(G, K) = \text{conv}\{x \in \mathbb{R}^m \mid x \text{ satisfait (2.3), (2.4) et (4.1)}\}.$$

Dans ce qui suit, nous allons étudier la dimension de $\mathcal{P}(G, K)$. Pour ce faire, nous introduisons d'abord quelques définitions. Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une

constante $K \geq 3$ et un ensemble d'arêtes $F \subseteq E$, la *restriction de F aux cycles bornés* (Fortz et Labbé [35]) est définie par

$$F_K = \{e \in F \mid e \text{ appartient à au moins un cycle admissible dans } F\}.$$

Par extension, le sous-graphe $G_K = (V, E_K)$ est appelé *la restriction de G aux cycles bornés*. Remarquons qu'une arête $e \in E \setminus E_K$ n'appartiendra à aucune solution du 2ECSBR et sera donc appelée *arête inutile*.

Etant donnés deux arêtes $e, f \in E_K$, $e \neq f$, on dit que e *dépend* de f , et on écrit $e \prec f$, si

$$e \in F \Rightarrow f \in F, \text{ pour tout } F \in \mathcal{F}(G),$$

ou de manière équivalente,

$$x^F(e) \leq x^F(f), \text{ pour tout } F \in \mathcal{F}(G).$$

Notons que la relation de dépendance $\prec$ est transitive et réflexive, et par conséquent définit un semi-ordre sur les arêtes de E . On définit $\Gamma(e)$ comme l'ensemble des arêtes dépendant de e , c'est-à-dire

$$\Gamma(e) = \{f \in E \mid f \prec e\}.$$

Si $e \prec f$ et $f \prec e$, alors, on dit que e et f sont *équivalentes* et on a $x^F(e) = x^F(f)$ pour tout $F \in \mathcal{F}(G)$. Un ensemble maximal (par rapport à l'inclusion) T d'arêtes équivalentes est une *classe d'équivalence* pour le semi-ordre $\prec$, et $\prec$ induit ainsi une partition de l'ensemble des arêtes en classes d'équivalence. Comme $\Gamma(e) = \Gamma(f)$ si e et f sont équivalentes, on étend la notation Γ à un ensemble d'arêtes équivalentes T en posant $\Gamma(T) = \Gamma(e)$, $e \in T$. Enfin, une arête e est dite *essentielle* si e appartient à chaque solution $F \in \mathcal{F}(G)$.

La dimension de $\mathcal{P}(G, K)$ est donnée par le théorème suivant.

Théorème 4.5 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $K \geq 3$. Soit E^* l'ensemble des arêtes essentielles. Supposons que $\prec$ induit une partition de $E_K \setminus E^*$ en l classes d'équivalence. Alors*

$$\dim(\mathcal{P}(G, K)) = l.$$

Preuve. Supposons que les l classes d'équivalence de $E_K \setminus E^*$ sont $T_i = \{e_1^i, \dots, e_{k_i}^i\}$ de cardinalité k_i pour $i = 1, \dots, l$. Comme les ensembles T_i , $i = 1, \dots, l$, forment une partition de $E_K \setminus E^*$, on a

$$\sum_{i=1}^l k_i = |E_K| - |E^*|.$$

Soit x le vecteur d'incidence d'une solution réalisable du 2ECSBR. De par la définition de E_K , E^* et $\prec$, il est facile de voir que x est une solution du système

$$(S) \begin{cases} x(e) = 0, & e \in E \setminus E_K, \\ x(e) = 1, & e \in E^*, \\ x(e_j^i) - x(e_{j+1}^i) = 0, & j = 1, \dots, k_i - 1, k_i \geq 2, i = 1, \dots, l. \end{cases}$$

Comme $E \setminus E_K$, E^* et T_i , $i = 1, \dots, l$, sont deux à deux disjoints, les équations de (S) sont linéairement indépendantes et par conséquent

$$\dim(\mathcal{P}(G, K)) \leq |E_K| - |E^*| - \sum_{i=1}^l (k_i - 1) = l.$$

Considérons maintenant les $l + 1$ ensembles d'arêtes $F_0 = E_K$ et $F_i = E_K \setminus \Gamma(T_i)$, $i = 1, \dots, l$. Il est facile de voir que $F_i \in \mathcal{F}(G)$ pour $i = 0, \dots, l$. Comme les ensembles T_i , $i = 1, \dots, l$, sont des classes d'équivalence pour le semi-ordre $\prec$, et par la définition de Γ , il existe une permutation σ de $1, \dots, l$ telle que, pour tout $i = 1, \dots, l$, il existe $e_i \in \Gamma(T_{\sigma(i)})$, $e_i \notin \Gamma(T_{\sigma(j)})$, pour $j = i + 1, \dots, l$. Il s'ensuit que les vecteurs d'incidence de $F_0, \dots, F_l$ sont affinement indépendants, ce qui implique que $\dim(\mathcal{P}(G, K)) \geq l$. $\square$

Corollaire 4.6 *Si $G = (V, E)$ est un graphe complet avec $|V| \geq 4$, alors $\mathcal{P}(G, K)$ est de pleine dimension.*

Preuve. Il est facile de voir que E et $E \setminus \{e\}$, pour tout $e \in E$, induisent des solutions réalisables du 2ECSBR. De plus, $E = E_K$, $E^* = \emptyset$ et aucune arête ne dépend d'une autre arête. Il s'ensuit qu'il n'y a pas d'arêtes équivalentes, et $E_K \setminus E^* = E$ est partitionné en m classes d'équivalence, chacune étant formée d'une seule arête. Par le théorème 4.5, on a donc $\dim(\mathcal{P}(G, K)) = m$. $\square$

Dans la suite de ce chapitre, on suppose que $G = (V, E)$ est un graphe complet. Cette hypothèse n'est pas restrictive car le problème dans un graphe incomplet peut être ramené à un problème dans un graphe complet en donnant un coût suffisamment grand aux arêtes inexistantes. On suppose également que G ne contient pas d'arêtes parallèles.

4.2 Inégalités valides et séparation

Dans cette section, nous introduisons quelques classes de contraintes valides pour $\mathcal{P}(G, K)$. Nous donnons, pour certaines de ces classes, des conditions nécessaires et

suffisantes pour qu'elles définissent des facettes de $\mathcal{P}(G, K)$. Nous discutons également de procédures de séparation pour ces inégalités.

4.2.1 Contraintes de coupe

Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que les contraintes de coupe (2.3) définissent des facettes de $\mathcal{P}(G, K)$.

Théorème 4.7 *Soient $G = (V, E)$ un graphe complet et $K \geq 3$ un entier fixé. Soit $W \subset V$ un ensemble de sommets tel que $\emptyset \neq W \neq V$. L'inégalité*

$$x(\delta(W)) \geq 2$$

définit une facette de $\mathcal{P}(G, K)$ si et seulement si

- 1) *soit $K \geq 4$, $|W| \neq 2$ et $|V \setminus W| \neq 2$,*
- 2) *soit $K = 3$, $|W| \notin \{2, 3\}$ et $|V \setminus W| \notin \{2, 3\}$.*

Preuve. Si $W = \{u, v\}$, alors $E(W)$ est composé d'une unique arête $e = uv$ et la contrainte de coupe associée à W peut être écrite comme la somme de $x(\delta(u)) \geq 2$, $x(\delta(v)) \geq 2$ et $-2x(e) \geq -2$. Elle ne peut donc pas définir une facette de $\mathcal{P}(G, K)$. D'où $|W| \geq 3$. De manière similaire, si $x(\delta(W)) \geq 2$ définit une facette, on doit avoir $|V \setminus W| \geq 3$.

Supposons maintenant que $K = 3$ et $W = \{u, v, w\}$. Le cas $|V \setminus W| = 3$ peut être traité de la même manière. Soit $F \in \mathcal{F}(G)$ une solution telle que le vecteur d'incidence de F appartient à la face définie par $x(\delta(W)) \geq 2$. Comme $|F \cap \delta(W)| = 2$, il doit exister un sommet dans W qui ne soit pas incident à une arête de la coupe appartenant à la solution. S.p.d.g., soit u ce sommet. Comme u a un degré au moins égal à 2, il doit être adjacent à v et w . Comme les arêtes uv et uw doivent appartenir à un cycle de longueur au plus 3, vw doit également appartenir à la solution et donc $E(W) \subseteq F$. Il s'ensuit que les vecteurs d'incidence de chaque solution appartenant à la face définie par $x(\delta(W)) \geq 2$ est solution du système

$$\begin{aligned} x(E(W)) &= 3, \\ x(\delta(W)) &= 2. \end{aligned}$$

Comme ce système est de rang 2, la face $x(\delta(W)) \geq 2$ est de dimension au plus $|E| - 2$, et ne peut donc pas définir une facette de $\mathcal{P}(G, K)$.

Supposons maintenant que les conditions 1) et 2) sont satisfaites pour une inégalité $ax = x(\delta(W)) \geq 2$. Soit $bx \geq \beta$ une contrainte définissant une facette de $\mathcal{P}(G, K)$ telle que la face F_a induite par $ax \geq 2$ soit contenue dans la face F_b induite par $bx \geq \beta$. Pour montrer que $ax \geq 2$ définit une facette de $\mathcal{P}(G, K)$, il suffit de montrer que $b = \rho a$ avec $\rho > 0$.

Pour toute paire d'arêtes $e, f \in \delta(W)$, on définit le sous-ensemble d'arêtes $C_{e,f}$ par

$$C_{e,f} = E(W) \cup E(V \setminus W) \cup \{e, f\}.$$

Il est clair que les ensembles $C_{e,f}$ induisent des sous-graphes 2-arête connexes. Si de plus, e et f sont incidentes à un même sommet, alors e et f appartiennent à un cycle de longueur 3 dans $C_{e,f}$. Comme toutes les autres arêtes de $C_{e,f}$ appartiennent à un cycle de longueur 3 (car $E(W)$ et $E(V \setminus W)$ induisent des sous-graphes complets sur au moins 3 sommets), le vecteur d'incidence de $C_{e,f}$ appartient alors à la face définie par la contrainte $x(\delta(W)) \geq 2$.

Considérons deux arêtes e et f de $\delta(W)$ n'ayant pas d'extrémité commune. Supposons que $e = u_1u_2$ et $f = v_1v_2$ avec $u_1, v_1 \in W$ et $u_2, v_2 \in V \setminus W$, et considérons l'arête $g = u_1v_2$. De la remarque ci-dessus, on déduit que $x^{C_{e,g}}$ et $x^{C_{f,g}}$ appartiennent à la face définie par la contrainte de coupe et par conséquent $b(e) = b(f)$.

Si e et f sont deux arêtes de $\delta(W)$ ayant une extrémité commune, toute arête $g \in \delta(W)$ distincte de e et f et partageant la même extrémité avec e et f donne lieu à deux ensembles $C_{e,g}$ et $C_{f,g}$ dont les vecteurs d'incidence appartiennent à F_a . Ceci nous donne encore une fois $b(e) = b(f)$. Ainsi, nous avons

$$b(e) = \rho, \quad \text{pour tout } e \in \delta(W) \text{ pour un } \rho \in \mathbb{R}.$$

Si $K \geq 4$ et $|W| = 3$, considérons une arête $e \in E(W)$, et deux arêtes $f, g \in \delta(W)$ telles que e, f et g forment un triangle. Supposons que $W = \{u, v, w\}$, $e = uv$, $f = uz$ et $g = vz$ avec $z \in V \setminus W$. Alors f et g avec les arêtes uw et vw forment un cycle admissible et $C_{f,g} \setminus \{e\}$ est une solution du 2ECSBR telle que $x^{C_{f,g} \setminus \{e\}} \in F_a$. Comme $x^{C_{f,g}}$ appartient également à la face F_a , on a $b(e) = 0$.

Supposons maintenant que $|W| \geq 4$. Considérons trois sommets distincts $u, v, w \in W$ et un sommet $z \in V \setminus W$. Soit $e = uv$, $f = uz$ et $g = wz$. Les arêtes f, g et uw forment un triangle. Aussi, comme $|W| \geq 4$, les arêtes de $E(W) \setminus \{e\}$ et $E(V \setminus W)$ appartiennent chacune à un cycle de longueur 3. Il s'ensuit que $x^{C_{f,g} \setminus \{e\}}$ est une solution de F_a . Comme $x^{C_{f,g}}$ est aussi solution de F_a , on obtient $b(e) = 0$.

Nous pouvons démontrer de manière similaire que $b(e) = 0$ pour tout $e \in E(V \setminus W)$. Nous avons donc prouvé que $b = \rho a$. Comme E est une solution du 2ECSBR, et $|\delta(W)| > 2$, on a $bx^E > \beta$. Ceci implique que $\rho > 0$. $\square$

La séparation des contraintes de coupe par rapport à une solution $\bar{x}$ peut être effectuée en calculant une coupe minimum dans le graphe, avec les capacités données

par la solution $\bar{x}$. Ceci peut être fait en temps polynomial en utilisant par exemple l'algorithme de Hao-Orlin [56] qui nécessite le calcul d'un seul flot maximum. Cet algorithme ne permet malheureusement pas d'obtenir l'arbre de Gomory-Hu [42] qui produit la coupe minimum pour toute paire de sommets. Pour cela, nous utilisons pour nos expérimentations l'algorithme de Gomory-Hu [42] pour séparer ces inégalités.

Afin d'accélérer le calcul, nous avons également développé une heuristique afin de séparer les contraintes de coupe. Cet algorithme fonctionne comme suit : il contracte répétitivement les arêtes ayant de grandes valeurs jusqu'à ce que l'on obtienne soit un graphe de poids inférieur à p , où p est le nombre de sommets, soit un graphe sur deux sommets. Si l'algorithme s'arrête dans le premier cas, alors au moins une des coupes induites par les sommets du graphe est violée. Sinon, on vérifie simplement si la coupe donnée par les deux sommets du graphe est violée.

4.2.2 Contraintes de cycle

Le théorème suivant caractérise les contraintes de cycle qui définissent des facettes de $\mathcal{P}(G, K)$.

Théorème 4.8 *Soient $G = (V, E)$ un graphe complet et $K \geq 3$ un entier fixé. Soit $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V telle que $p \geq K$. Soit $e = uv$ une arête de $[V_0, V_p]$. La contrainte de cycle $x(T_\pi^e) \geq x(e)$ associée à π et e définit une facette de $\mathcal{P}(G, K)$ si et seulement si*

- 1) $p = K$,
- 2) $|V_0| = |V_p| = 1$,
- 3) $|V_i| + |V_{i+1}| \geq 3$ pour $i = 0, \dots, p - 1$.

Preuve. Supposons que $p > K$ et considérons la partition $\pi' = (V'_0, \dots, V'_K)$ définie par $V'_i = V_i$ pour $i = 0, \dots, K - 1$ et $V'_K = \bigcup_{j=K}^p V_j$. Puisque $x(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$, la contrainte de cycle associée à π et e est dominée par celle associée à π' et e . En conséquence, $x(T_\pi^e) \geq x(e)$ ne définit pas une facette de $\mathcal{P}(G, K)$.

Supposons maintenant que $p = K$ et $|V_0| > 1$ (le cas $|V_p| > 1$ est similaire). Soit $\pi' = (V'_0, \dots, V'_K)$ la partition définie par

$$\begin{aligned} V'_0 &= \{u\}, \\ V'_1 &= V_1 \cup (V_0 \setminus \{u\}), \\ V'_i &= V_i, \text{ pour } i = 2, \dots, K. \end{aligned}$$

De nouveau, la contrainte de cycle associée à π et e est dominée par celle associée à π' et e .

Enfin, supposons qu'il existe $i \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $|V_i| + |V_{i+1}| < 3$. Comme les ensembles définissant la partition ne sont pas vides, il s'ensuit que $|V_i| = |V_{i+1}| = 1$ et donc $[V_i, V_{i+1}]$ ne contient qu'une seule arête f . Si $x(T_\pi^e) \geq x(e)$ définit une facette de $\mathcal{P}(G, K)$, alors, il doit exister une solution F de $\mathcal{F}(G)$ telle que $x^F(T_\pi^e) = x^F(e) = 0$. Sinon, la face définie par $x(T_\pi^e) \geq x^F(e)$ serait incluse dans la face définie par $x(e) \leq 1$. On a donc

$$\delta\left(\bigcup_{j=0}^i V_j\right) \cap F = [V_i, V_{i+1}] = \{f\}.$$

Mais alors F n'est plus 2-arête connexe, et donc n'est pas réalisable, une contradiction.

Les conditions 1)-3) sont donc nécessaires pour que $x(T_\pi^e) \geq x(e)$ définisse une facette de $\mathcal{P}(G, K)$. Supposons maintenant qu'elles sont toutes satisfaites et dénotons par $ax \geq \alpha = 0$ la contrainte de cycle. Soit $bx \geq \beta$ une contrainte définissant une facette de $\mathcal{P}(G, K)$ telle que la face F_a induite par $ax \geq \alpha$ soit contenue dans la face F_b induite par $bx \geq \beta$. Nous allons montrer comme précédemment qu'il existe $\rho > 0$ tel que $b = \rho a$. Pour ce faire, nous allons d'abord montrer que $\bar{E} = E \setminus (T_\pi^e \cup \{e\})$ induit une solution réalisable du 2ECSBR, dont le vecteur d'incidence appartient à F_a .

Considérons une arête $g = v_1 v_2 \in \bar{E}$. Si $g \in E(V_i)$ pour un $i \in \{1, \dots, K-1\}$, alors pour tout $w \in V_{i-1}$, le cycle composé de g , $v_1 w$ et $v_2 w$ est inclu dans $\bar{E}$. Si $g \in [V_i, V_{i+1}]$ pour un $i \in \{0, \dots, K-1\}$. Selon la condition 3), le graphe induit par $V_i \cup V_{i+1}$, avec l'ensemble d'arêtes $E(V_i) \cup E(V_{i+1}) \cup [V_i, V_{i+1}]$, est un graphe complet sur au moins trois sommets. Ainsi g appartient à un cycle de longueur 3.

Comme $\bar{E}$ induit un graphe connexe, chaque coupe contient au moins une arête. Or, chaque arête appartient à un cycle. Comme tout cycle intersecte un nombre pair de fois une coupe, il en résulte que toute coupe contient au moins deux arêtes. Et par conséquent, $\bar{E}$ induit un sous-graphe 2-arête connexe.

Considérons maintenant les ensembles d'arêtes $E_f = \bar{E} \cup \{f, e\}$, avec $f \in T_\pi^e$. Comme $\bar{E}$ est 2-arête connexe, E_f l'est aussi. Pour montrer que E_f induit une solution admissible du 2ECSBR, il suffit de montrer que e et f appartiennent à un cycle de longueur $\leq K$. Supposons que $f \in [V_i, V_j]$ avec $i < j$. Comme $f \in T_\pi^e$, $j \geq i+2$. Pour $k = 0, \dots, i-1, j+1, \dots, K$, on sélectionne un sommet $v_k \in V_k$. Comme $e = v_0 v_K \in E_f$, $f = v_i v_j \in E_f$ et $v_k v_{k+1} \in E_f$ pour $k = 0, \dots, i-1, j, \dots, K-1$, les arêtes e , f et $v_k v_{k+1}$ pour $k = 0, \dots, i-1, j, \dots, K-1$ forment un cycle de longueur $2 + i + K - j \leq K$. Le vecteur d'incidence de E_f appartient par conséquent à la face F_a , et donc à F_b . Ainsi $bx^{\bar{E}} = bx^{E_f}$. Il s'ensuit que $b(f) = -b(e)$ pour tout $f \in T_\pi^e$.

Il reste maintenant à montrer que $b(g) = 0$ pour toute arête $g \in \bar{E}$. Supposons d'abord que $g \in E(V_i)$ pour un $i \in \{1, \dots, K-1\}$. Soit $g = u_1 u_2$, et considérons deux

sommets $w_1 \in V_{i-1}$ et $w_2 \in V_{i+1}$. Observons que $w_1w_2 \in T_\pi^e$. Soit $\tilde{E} = (\bar{E} \setminus \{g\}) \cup \{w_1w_2, e\}$. Comme $\tilde{E}$ induit un sous-graphe connexe, pour montrer qu'il induit une solution réalisable du 2ECSBR, il suffit de montrer que toute arête de $\tilde{E}$ appartient à un cycle admissible. Soit $h = st \in \bar{E} \setminus \{g\}$. Si $h \in E(V_j)$ pour un $j \in \{1, \dots, K-1\}$, alors il est clair que h appartient à un triangle et donc à un cycle admissible. Supposons donc que $s \in V_j$ et $t \in V_{j+1}$ pour un $j \in \{0, \dots, K-1\}$. Si $j \neq i-1$ et $j \neq i$, alors par la condition 3), on peut supposer s.p.d.g. que $|V_j| \geq 2$. Soit $s' \in V_j \setminus \{s\}$. Il s'ensuit que h appartient au triangle induit par les sommets $\{s, t, s'\}$. Supposons maintenant que $j = i$ (le cas $j = i-1$ est similaire). Si $|V_{i+1}| \geq 2$, alors il est facile de montrer comme précédemment, que h appartient à un triangle. Si $|V_{i+1}| = 1$, alors $w_2 = t$ et h appartient au triangle induit par les sommets $\{s, t, w_1\}$.

De plus, w_1w_2 et e appartiennent à un cycle admissible. En effet, pour $k = 0, \dots, i-2, i+2, \dots, K$, sélectionnons un sommet $v_k \in V_k$. Alors, $e, w_1w_2, v_{i-2}w_1, w_2v_{i+2}$ et v_kv_{k+1} pour $k = 0, \dots, i-3, i+2, \dots, K-1$ forment un cycle de longueur $4 + (i-2) + (K-i-2) = K$. Par conséquent, le vecteur d'incidence de $\tilde{E}$ appartient à la face F_a et donc à F_b . On obtient $bx^{\tilde{E}} = bx^{\bar{E}}$ et alors $b(e) + b(w_1w_2) - b(g) = 0$. Comme $b(w_1w_2) = -b(e)$, il s'ensuit que $b(g) = 0$ pour tout $g \in E(V_i)$, $i = 1, \dots, K-1$.

Une preuve similaire conduit à $b(g) = 0$ pour $g \in [V_i, V_{i+1}]$, $i \in \{0, \dots, K-1\}$. Comme conséquence directe, on a $\beta = bx^{\tilde{E}} = 0$.

Nous avons montré que $b = \rho a$ avec $\rho = -b(e)$. Comme le graphe complet définit une solution réalisable n'appartenant pas à F_b et $|T_\pi^e| > 1$, on a $bx^E > 0$, et donc $\rho > 0$. On a donc $ax \geq 0$ et $bx \geq \beta$ qui définissent la même facette de $\mathcal{P}(G, K)$. $\square$

Nous allons maintenant discuter du problème de séparation des contraintes de cycle. En particulier, nous allons montrer que ces inégalités peuvent être séparées en temps polynomial lorsque $K \leq 4$. Remarquons qu'en se basant sur la preuve du Théorème 4.2, on peut montrer que le problème de séparation des contraintes (4.1) peut être résolu en temps polynomial pour une solution $\bar{x}$ en 0-1 quel que soit $K \geq 2$.

Soient $G = (V, E)$ un graphe et s et t deux sommets de V . Etant donné un entier positif B , un ensemble d'arêtes C de E intersectant tous les chemins entre s et t de longueur au plus B est appelé une B - st -coupe. Si $w \in \mathbb{R}_+^m$ est un vecteur poids, le problème de la B - st -coupe minimum (BPCP) consiste à trouver une B - st -coupe de poids minimum. Nous allons montrer que le problème de séparation des inégalités (4.1) se ramène au BPCP.

Lemme 4.9 *Etant donné une solution $\bar{x}$ de $\mathbb{R}_+^m$, le problème de séparation des contraintes (4.1) par rapport à $\bar{x}$ se ramène à la résolution du BPCP par rapport au vecteur poids $\bar{x}$ pour toute arête $e = st \in E$ avec $B = K-1$.*

Preuve. Supposons que $\bar{x}(C_e) < \bar{x}(e)$ où C_e est une B - st -coupe minimum pour $\bar{x}$. Comme il n'y a pas de cycle de longueur $\leq K$ dans $E \setminus C_e$ contenant e , par la remarque 4.3 il existe une partition $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ de V avec $e \in [V_0, V_p]$ telle que $T_\pi^e \subseteq C_e$. Comme $\bar{x}(f) \geq 0$ pour tout $f \in E$, on a

$$\bar{x}(T_\pi^e) - \bar{x}(e) \leq \bar{x}(C_e) - \bar{x}(e) < 0,$$

ce qui implique que l'inégalité (4.1) associée à la partition π et e est violée.

Supposons maintenant que pour toute arête $e = st \in E$, $\bar{x}(C_e) \geq \bar{x}(e)$ où C_e est une $(K - 1)$ - st -coupe minimum pour $\bar{x}$. Alors aucune inégalité du type (4.1) n'est violée par $\bar{x}$. En fait, s'il existe pour une arête $e = st$, une partition $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ avec $e \in [V_0, V_p]$ et $p \geq K$ telle que $\bar{x}(T_\pi^e) - \bar{x}(e) < 0$, comme T_π^e est une $(K - 1)$ - st -coupe, et donc une solution du BPCP, on a $\bar{x}(T_\pi^e) < \bar{x}(C_e)$, une contradiction. $\square$

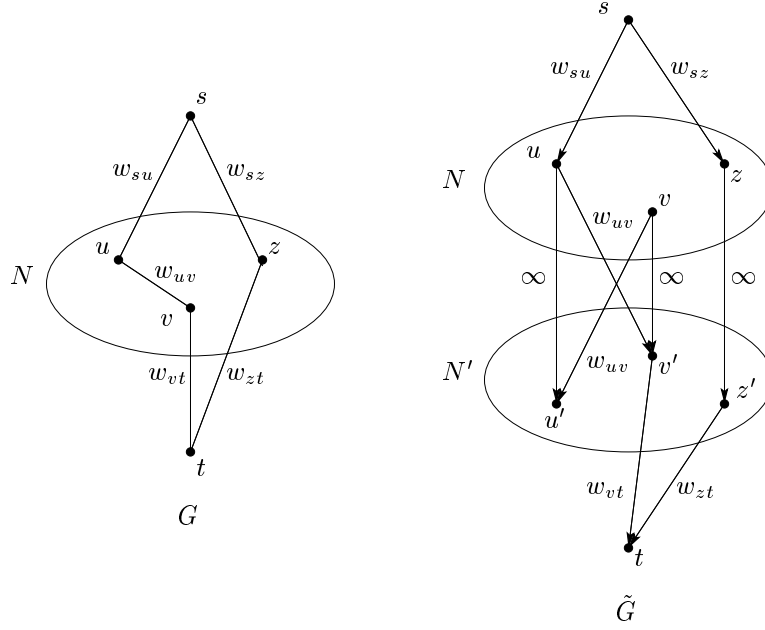
Si $B = 2$, trouver une 2- st -coupe minimum se ramène à trouver une coupe minimum séparant s et t dans le graphe induit par s , t et les sommets adjacents à s et à t . Dans ce qui suit, nous allons montrer que le BPCP reste polynomial quand $B = 3$. Pour cela, nous utilisons des idées similaires à celles développées par Itai, Perl et Shiloach [58] pour résoudre un problème proche du BPCP.

Théorème 4.10 *Le problème BPCP peut être résolu en temps polynomial si $B = 3$.*

Preuve. Nous allons montrer que le BPCP quand $B = 3$ se réduit au problème du flot maximum dans un graphe approprié. On peut d'abord noter que tout sommet u qui n'est pas adjacent à s ou à t ne peut pas appartenir à un st -chemin de longueur au plus 3 et peut donc être supprimé. On suppose donc que G ne contient pas de tels sommets. Soit $N = V \setminus \{s, t\}$.

Dans ce qui suit, nous allons construire un graphe dirigé $\tilde{G} = (\tilde{N}, \tilde{A})$. Soit N' une copie disjointe de N . On dénotera la copie de $u \in N$ dans N' par u' . Posons $\tilde{N} = \{s, t\} \cup N \cup N'$. Pour chaque arête $su \in E$ avec un poids $w(su)$, on crée un arc $(s, u) \in \tilde{A}$ de capacité $w(su)$, pour chaque arête $vt \in E$, on crée un arc $(v', t) \in \tilde{A}$ de capacité $w(vt)$, et pour chaque arête $uv \in E$ avec $u, v \notin \{s, t\}$, on crée un arc (u, v') et un arc (v, u') avec chacun une capacité de $w(uv)$. Pour chaque sommet $u \in N$, on crée un arc $(u, u') \in \tilde{A}$ de capacité infinie (voir Figure 4.2). Notons qu'il y a une correspondance biunivoque entre les st -chemins de longueur au plus 3 dans G et les chemins dirigés de longueur 3 de s à t dans $\tilde{G}$.

Maintenant, nous allons montrer qu'il y a une correspondance biunivoque entre les 3- st -coupes minimales dans G et les coupes minimales de capacité finie séparant s et t

FIG. 4.2 – Construction de $\tilde{G}$

dans $\tilde{G}$ qui préserve le poids. Une fois ce fait établi, il s'ensuit que l'on peut résoudre le BPCP pour $B = 3$ en résolvant un problème de flot maximum dans $\tilde{G}$.

Soit C une 3- st -coupe minimale de G . On dit qu'une arête e est *coupée* si, ou bien $e \in C$, ou bien $e \notin E$. Si $uv \in C$ avec $u, v \notin \{s, t\}$, par la minimalité de C , on a soit su et vt coupées, soit sv et ut coupées, mais pas les deux. Soit $\tilde{C} \subseteq \tilde{A}$ un ensemble d'arcs construit de la manière suivante : si su ou vt appartient à C , ajouter l'arc (s, u) ou (v', t) à $\tilde{C}$. Si $uv \in C$ avec $u, v \notin \{s, t\}$ et su et vt coupées, alors ajouter (v, u') à $\tilde{C}$, sinon ajouter (u, v') à $\tilde{C}$. Alors, $\tilde{C}$ est une coupe minimale dans $\tilde{G}$, séparant s de t de capacité $w(C)$.

Supposons maintenant que $\tilde{C}$ est une coupe minimale de capacité finie dans $\tilde{G}$ séparant s et t . Alors $\tilde{C}$ ne contient aucun arc (u, u') . Par la minimalité de $\tilde{C}$, un arc (u, v') appartient à $\tilde{C}$ seulement si les deux arcs (s, u) et (v', t) sont des arcs de $\tilde{A} \setminus \tilde{C}$. Ceci implique que si $(u, v') \in \tilde{C}$, alors $(v, u') \notin \tilde{C}$. Soit C l'ensemble d'arêtes contenant chaque arête su telle que $(s, u) \in \tilde{C}$, chaque arête vt telle que $(v', t) \in \tilde{C}$ et chaque arête uv telle qu'un des arcs (u, v') et (v, u') est dans $\tilde{C}$. Il n'est pas difficile de voir que C est une 3- st -coupe minimale dans G de poids $w(\tilde{C})$, et notre théorème est prouvé. $\square$

Malheureusement, McCormick [75] a montré que le BPCP est NP-difficile pour $B \geq 12$. C'est pourquoi nous avons utilisé une application directe de la méthode primale-duale [86] pour obtenir un algorithme d'approximation pour le BPCP. Nous utilisons cet

algorithme comme heuristique pour séparer les inégalités (4.1). Cet algorithme, décrit par l'Algorithme 4.1, est comme suit. Il considère la relaxation linéaire du BPCP et son dual. Il construit d'abord une B - st -coupe C (c'est-à-dire une solution réalisable du BPCP) et une solution duale $y = (y_P, P \in \mathcal{P}(B))$ où $\mathcal{P}(B)$ est l'ensemble des st -chemins de longueur $\leq B$, satisfaisant les conditions d'écarts complémentaires primaux. Ces conditions sont pour tout $e \in C$, $\sum_{P:e \in P} y_P = c(e)$. Ensuite, l'algorithme essaie d'enlever les arêtes qui ne sont pas nécessaires dans C afin d'obtenir une solution de poids plus faible.

Algorithme 4.1 Algorithme Primal-Dual pour BPCP

Données : un graphe $G = (V, E)$, deux sommets $s, t \in V$, une fonction poids w et un entier B .

$l \leftarrow 0$; $y \leftarrow 0$; $C \leftarrow \emptyset$;

tant que C n'est pas une B - st -coupe **faire**

$l \leftarrow l + 1$;

Trouver un chemin $P \in \mathcal{P}(B)$ tel que $P \cap C = \emptyset$;

Augmenter y_P jusqu'à ce qu'une arête $e_l \in P$ satisfasse $\sum_{Q:e \in Q} y_Q = w_{e_l}$;

$C \leftarrow C \cup \{e_l\}$;

$C' \leftarrow C$;

pour $j \leftarrow l$ à 1 **faire**

si $C' \setminus \{e_j\}$ est toujours une B - st -coupe **alors**

$C' \leftarrow C' \setminus \{e_j\}$;

Retourner C' ;

Il est facile de voir que cet algorithme retourne une B - st -coupe et tourne en $O(|E|^2)$. De plus, de [86] on peut facilement montrer que cet algorithme est un algorithme de B -approximation. Si $\bar{x}$ est une solution fractionnaire, on peut utiliser cet algorithme pour séparer les inégalités (4.1) quand $K \geq 5$ de la manière suivante. Pour une arête $e = st$, on calcule une $(K - 1)$ - st -coupe C' de $G - e$. Si $\bar{x}(C') < \bar{x}(e)$, alors on a une contrainte de cycle violée par $\bar{x}$. La partition associée à cette inégalité peut être déterminée par un parcours en largeur du graphe $(V, E \setminus (\{e\} \cup C'))$ à partir de s ou de t .

4.2.3 Contraintes de sous-ensemble

Fortz et al. [35] ont introduit les inégalités dites *contraintes de sous-ensemble* (subset inequalities) pour la version 2-sommet connexe du problème. Le résultat suivant étend ces inégalités au cas 2-arête connexe.

Proposition 4.11 Soit $\tilde{E}$ un ensemble d'arêtes telles que le graphe $G' = (V, E \setminus \tilde{E})$

ne contient pas de solution du 2ECSBR. Alors l'inégalité

$$x(\tilde{E}) \geq 1 \quad (4.2)$$

est valide pour $\mathcal{P}(G, K)$.

La proposition suivante donne des conditions suffisantes pour que les contraintes de sous-ensemble (4.2) définissent des facettes de $\mathcal{P}(G, K)$.

Proposition 4.12 *Soient $G = (V, E)$ un graphe complet, $K \geq 3$ une constante et $\tilde{E}$ un ensemble d'arêtes tel que le graphe $G - \tilde{E}$ ne contienne pas de solution du 2ECSBR. Si*

- 1) *pour tout $e \in \tilde{E}$, $G - (\tilde{E} \setminus \{e\})$ contient une solution du 2ECSBR, et*
- 2) *pour tout $f \in E \setminus \tilde{E}$, il existe une arête $e \in \tilde{E}$ et $F \subseteq E \setminus (\tilde{E} \setminus \{e\})$ tel que $f \notin F$ et les deux ensembles F et $F \cup \{f\}$ définissent des solutions réalisables du 2ECSBR,*

alors la contrainte de sous-ensemble $x(\tilde{E}) \geq 1$ définit une facette de $\mathcal{P}(G, K)$.

Preuve. Soit $bx \geq \beta$ une contrainte définissant une facette de $\mathcal{P}(G, K)$ telle que la face F_a induite par $ax = x(\tilde{E}) \geq 1$ soit contenue dans la face F_b induite par $bx \geq \beta$. Par la condition 2), pour tout $f \in E \setminus \tilde{E}$, il existe $F \subseteq E$, $f \notin F$ tel que les deux vecteurs d'incidence de F et de $F \cup \{f\}$ appartiennent à la face F_a et donc à F_b . On a donc $bx^F = bx^{F \cup \{f\}}$ et par conséquent $b(f) = 0$. Considérons maintenant une arête $e \in \tilde{E}$. Par la condition 1), il existe un sous-ensemble d'arêtes F dont le vecteur d'incidence appartient à la face F_a et donc à F_b et tel que $F \cap \tilde{E} = \{e\}$. Comme $b(f) = 0$ pour tout $f \in E \setminus \tilde{E}$, $bx^F = b(e) = \beta$.

Nous avons alors $b = \beta a$. Le graphe G étant un graphe complet sur plus de 4 sommets, $\mathcal{P}(G, K)$ est de pleine dimension. Ceci implique que $|\tilde{E}| \geq 2$. Comme le graphe complet définit une solution du 2ECSBR, on a $bx^E > \beta$ et donc $\beta > 0$. Ainsi $x(\tilde{E}) \geq 1$ et $bx \geq \beta$ définissent la même facette de $\mathcal{P}(G, K)$. $\square$

Remarque 4.13 Etant donné une partition $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ avec $p \geq K$ et $|V_0| = |V_p| = 1$, s'il existe un $i \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $|V_i| = |V_{i+1}| = 1$, alors la contrainte $x(T_\pi) \geq 1$ est une contrainte de sous-ensemble. De plus, cette inégalité domine la contrainte de cycle associée à la partition π et à l'arête entre V_0 et V_p .

Preuve. Soit e et f les deux arêtes entre V_0 et V_p , et entre V_i et V_{i+1} respectivement. Supposons qu'il existe une solution $F \subset \mathcal{F}(G)$ telle que $F \cap T_\pi = \emptyset$. Comme $|F \cap \delta(\bigcup_{j=0}^i V_j)| \geq 2$, il s'ensuit que $e, f \in F$. Cependant, le plus petit cycle de F contenant e (f) est de longueur $\geq p+1 \geq K+1$, une contradiction. L'inégalité $x(T_\pi) \geq 1$ est donc une contrainte de sous-ensemble valide pour $\mathcal{P}(G, K)$. De plus, comme $T_\pi = T_\pi^e$, il est clair que $x(T_\pi) \geq 1$ domine la contrainte de cycle $x(T_\pi^e) \geq x(e)$ associée à la partition π et e . $\square$

Afin de séparer les contraintes de sous-ensemble, on calcule pour chaque arête $e = st$ une $(K-1)$ - st -coupe minimum C_e . Si $\bar{x}(C_e) < 1$, alors on détermine une partition $\pi = (V_0, \dots, V_K)$ avec $V_0 = \{s\}$ à l'aide d'un parcours en largeur du graphe $(V, E \setminus (C_e \cup \{e\}))$ à partir du sommet s . Notons que $t \in V_K$. Si $|V_K| \geq 2$, alors on considère la partition $\pi' = (V'_0, \dots, V'_K)$ où $V'_j = V_j$ pour $j = 0, \dots, K-2$, $V'_{K-1} = V_{K-1} \cup (V_K \setminus \{t\})$ et $V'_K = \{t\}$. S'il existe un $i \in \{0, \dots, K-1\}$ tel que $|V'_i| = |V'_{i+1}| = 1$ alors, par la remarque 4.13, il s'ensuit que $x(T_{\pi'}) \geq 1$ est une contrainte de sous-ensemble violée par $\bar{x}$.

4.2.4 Contraintes métriques

Les contraintes métriques qui font l'objet de ce paragraphe, ont été introduites par Fortz et al. [37] pour la version 2-sommet connexe du problème. Comme les résultats dans [37] ne dépendent que du fait que chaque arête doive appartenir à un cycle admissible, les contraintes métriques sont également valides pour $\mathcal{P}(G, K)$. On a donc les résultats suivants.

Proposition 4.14 *Considérons une arête $e = ij \in E$ et un ensemble de potentiels sur les sommets $(\alpha_k)_{k \in V}$ satisfaisant*

$$\alpha_i - \alpha_j > K - 1.$$

Alors l'inégalité

$$\sum_{f \in E \setminus \{e\}} \gamma(f)x(f) \geq x(e) \tag{4.3}$$

est valide pour $\mathcal{P}(G, K)$ où

$$\gamma(f) = \min \left(1, \max \left(0, \frac{|\alpha_l - \alpha_k| - 1}{\alpha_i - \alpha_j + 1 - K} \right) \right) \tag{4.4}$$

pour tout $f = kl \in E \setminus \{e\}$.

Les inégalités (4.3) sont appelées *contraintes métriques*. La proposition suivante montre que les contraintes de cycle définissant des facettes de $\mathcal{P}(G, K)$ forment un sous-ensemble des contraintes métriques.

Proposition 4.15 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $K \geq 3$. Soit $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V telle que $p \geq K$. Soit $e = ij \in [V_0, V_p]$. Si $p = K$ alors la contrainte de cycle $x(T_\pi^e) \geq x(e)$ est une contrainte métrique. Si $p > K$, alors la contrainte de cycle est dominée par une contrainte métrique.*

Preuve. Si $p = K$, il suffit de montrer qu'il existe des potentiels sur les sommets $(\alpha_k)_{k \in V}$, de telle manière qu'on ait $\gamma(f) = 1$ pour tout $f \in T_\pi^e$ et $\gamma(f) = 0$ pour tout $f \in E \setminus (T_\pi^e \cup \{e\})$. Soit $\alpha_k = -q$ si $k \in V_q$. Alors $\alpha_i = 0$ et $\alpha_j = -K$. D'où (4.4) s'écrit

$$\gamma(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |q - r| > 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tout $f \in E \setminus \{e\}$, $f \in [V_q, V_r]$, $q, r \in \{0, \dots, K\}$. Et le résultat s'ensuit.

Si $p > K$, la même définition de $(\alpha_k)_{k \in V}$ conduit à $\alpha_i = 0$, $\alpha_j = -p$ et

$$\gamma(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } |q - r| > p - K + 1, \\ \frac{|q-r|-1}{p-K+1} & \text{si } 1 < |q - r| \leq p - K + 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tout $f \in E \setminus \{e\}$, $f \in [V_q, V_r]$, $q, r \in \{0, \dots, p\}$. Ainsi, le coefficient d'une arête $f \in E \setminus \{e\}$ est le même dans la contrainte métrique et dans la contrainte de cycle si $|q - r| > p - K + 1$ ou $|q - r| \leq 1$. Et il est plus petit dans la contrainte métrique si $1 < |q - r| \leq p - K + 1$. Il s'ensuit alors que la contrainte métrique domine la contrainte de cycle. $\square$

Afin de séparer les contraintes métriques, nous utilisons l'heuristique développée par Fortz et al. [37] pour le cas 2-sommet connexe. Comme les contraintes métriques sont indépendantes du type de connexité (arête ou sommet connexité), cet algorithme est également valide pour notre problème.

4.2.5 Contraintes cyclomatiques

Dans [36], Fortz et Labbé ont introduit une famille de contraintes pour la version 2-sommet connexe du problème appelées contraintes cyclomatiques. Ces inégalités ne

sont pas valides pour $\mathcal{P}(G, K)$. Elles peuvent, par contre, être facilement adaptées à la 2-arête connexité. Pour cela, nous donnons d'abord un résultat établi dans [36].

Théorème 4.16 *Soit $G = (V, E)$ un graphe 2-arête connexe sur $n = |V|$ sommets et $m = |E|$ arêtes. S'il existe une couverture des arêtes du graphe par des cycles contenant chacun au plus K sommets, alors il existe une telle couverture utilisant au plus $\mu = m - n + 1$ cycles indépendants.*

Théorème 4.17 *Soient $G = (V, E)$ un graphe, $K \geq 3$ une constante et $V_0, \dots, V_p$ une partition de V avec $p \geq 2$. Alors l'inégalité*

$$x(\delta(V_0, \dots, V_p)) \geq M(p, K) = \left\lceil \frac{Kp}{K-1} \right\rceil \quad (4.5)$$

est valide pour $\mathcal{P}(G, K)$.

Preuve. Soit F une solution réalisable du 2ECSBR et dénotons par $\hat{G}$ le graphe sur $p+1$ sommets et $\hat{m}$ arêtes, obtenu en contractant les ensembles $V_0, \dots, V_p$. Nous allons montrer que $\hat{m} \geq M(p, K)$.

Il est facile de voir que $\hat{G}$ est 2-arête connexe et que chaque arête de $\hat{G}$ appartient à un cycle utilisant au plus K arêtes. Ainsi, par le théorème 4.16 appliqué à $\hat{G}$, il existe une couverture de $\hat{G}$ par au plus $\hat{m} - p$ cycles admissibles indépendants. Comme les cycles couvrent le graphe, la somme des nombres d'arêtes utilisées dans chaque cycle est plus grande ou égale à $\hat{m}$. De plus, comme chaque cycle utilise au plus K arêtes, on a

$$\hat{m} \leq (\hat{m} - p)K,$$

et par l'intégralité de $\hat{m}$,

$$\hat{m} \geq \left\lceil \frac{Kp}{K-1} \right\rceil,$$

ce qui conclut la preuve. □

Théorème 4.18 *Soient $G = (V, E)$ un graphe complet, $K \geq 3$ une constante et $V_0, \dots, V_p$, $p \geq 2$, une partition de V . L'inégalité (4.5) définit une facette de $\mathcal{P}(G, K)$ si et seulement si*

- 1) $p \geq K$,
- 2) $|V_i| \neq 2$ pour $i = 0, \dots, p$,
- 3) soit $|V_i| \neq 3$ pour $i = 0, \dots, p$, soit $(p+1) \bmod (K-1) \geq 2$.

Preuve. Si $p < K$, alors $M(p, K) = p + 1$ et la contrainte cyclomatique peut s'écrire comme la somme des contraintes de coupe $x(\delta(V_i)) \geq 2$ pour $i = 0, \dots, p$. Elle ne peut donc définir une facette de $\mathcal{P}(G, K)$.

Si $V_i = \{u, v\}$ pour un $i \in \{0, \dots, p\}$, alors $E(V_i)$ n'est composé que d'une seule arête $e = uv$. La contrainte cyclomatique définie par la partition obtenue en remplaçant V_i par les deux sous-ensembles $\{u\}$ et $\{v\}$ peut être écrite de la manière suivante :

$$x(\delta(V_0, \dots, V_p)) + x(e) \geq M(p + 1, K).$$

En ajoutant la contrainte triviale $-x(e) \geq -1$, on obtient

$$x(\delta(V_0, \dots, V_p)) \geq M(p + 1, K) - 1.$$

Comme $M(p + 1, K) \geq M(p, K) + 1$, cette dernière inégalité domine (4.5) et donc cette dernière ne peut définir une facette de $\mathcal{P}(G, K)$.

Supposons maintenant que $V_i = \{u, v, w\}$ pour un $i \in \{0, \dots, p\}$ et $(p + 1) \bmod (K - 1) \leq 1$. La contrainte cyclomatique définie par la partition obtenue en remplaçant V_i par les trois sous-ensembles $\{u\}$, $\{v\}$ et $\{w\}$ donne

$$x(\delta(V_0, \dots, V_p)) + x(E(V_i)) \geq M(p + 2, K) = \left\lceil \frac{K(p + 2)}{K - 1} \right\rceil.$$

Comme $(p + 1) \bmod (K - 1) \leq 1$, $K - 1$ divise soit p , soit $p + 1$. Par des calculs élémentaires, il s'ensuit que

$$\left\lceil \frac{K(p + 2)}{K - 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{Kp}{K - 1} \right\rceil + 3,$$

et donc

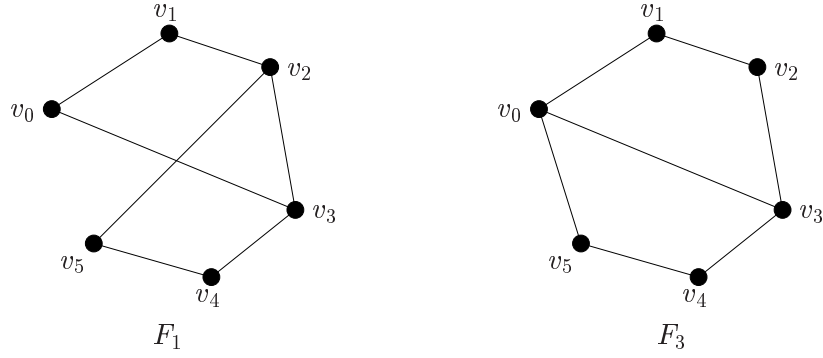
$$x(\delta(V_0, \dots, V_p)) + x(E(V_i)) \geq M(p, K) + 3.$$

En ajoutant les contraintes triviales $-x(e) \geq -1$ pour tout $e \in E(V_i)$, on obtient (4.5), ce qui implique que celle-ci ne peut pas définir une facette de $\mathcal{P}(G, K)$.

Supposons maintenant que les conditions 1), 2) et 3) sont satisfaites pour une inégalité $ax = x(\delta(V_0, \dots, V_p)) \geq M(p, K)$. Soit $bx \geq \beta$ une contrainte définissant une facette de $\mathcal{P}(G, K)$ telle que la face F_a induite par $ax \geq M(p, K)$ soit contenue dans la face F_b induite par $bx \geq \beta$.

Nous allons tout d'abord montrer que $b(e) = \gamma$ pour tout $e \in \delta(V_0, \dots, V_p)$ et un certain $\gamma \in \mathbb{R}$. Pour cela, nous distinguons deux cas. Supposons d'abord que $p \geq 2(K - 1)$. Pour $i \in \{0, \dots, p\}$, soit $v_i \in V_i$. Considérons les deux ensembles d'arêtes suivants :

$$\begin{aligned} F_1 &= (\bigcup_{i=0}^p E(V_i)) \cup (\bigcup_{i=0}^{p-1} \{v_i v_{i+1}\}) \\ &\quad \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l-1} \{v_{(i-1)(K-1)} v_{i(K-1)}\} \right) \cup \{v_{p-K+1} v_p\}, \\ F_2 &= (\bigcup_{i=0}^p E(V_i)) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{K-3} \{v_i v_{i+1}\} \right) \cup \{v_{K-2} v_K\} \cup (\bigcup_{i=K-1}^{p-1} \{v_i v_{i+1}\}) \\ &\quad \cup \{v_0 v_K\} \cup \left(\bigcup_{i=2}^{l-1} \{v_{(i-1)(K-1)} v_{i(K-1)}\} \right) \cup \{v_{p-K+1} v_p\}, \end{aligned}$$

FIG. 4.4 – F_1 et F_3 pour $p = 5$ et $K = 4$

Considérons maintenant les arêtes $v_i v_k$ et $v_j v_l$ dans $\delta(V_0, \dots, V_p)$ telles que v_i et v_j appartiennent au même ensemble de la partition (v_i et v_j peuvent correspondre au même sommet). Comme $p \geq 2(K-1) \geq 4$, il existe deux sommets v_m et v_n appartenant à deux éléments différents de la partition qui n'appartiennent pas aux mêmes sous-ensembles que v_i, v_j, v_k et v_l . Par (4.6), il s'ensuit que $b(v_i v_k) = b(v_m v_n) = b(v_j v_l)$. On peut en conclure que $b(e) = \gamma$ pour tout $e \in \delta(V_0, \dots, V_p)$ et un certain réel γ .

Maintenant, si $p < 2(K-1)$, alors $l = \lceil \frac{p}{K-1} \rceil = 2$, et F_1 devient

$$F_1 = \left(\bigcup_{i=0}^p E(V_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{p-1} \{v_i v_{i+1}\} \right) \cup \{v_0 v_{K-1}\} \cup \{v_{p-K+1} v_p\}.$$

En remplaçant l'arête $v_{p-K+1} v_p$ par l'arête $v_0 v_p$, on obtient l'ensemble

$$F_3 = \left(\bigcup_{i=0}^p E(V_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{p-1} \{v_i v_{i+1}\} \right) \cup \{v_0 v_{K-1}\} \cup \{v_0 v_p\}.$$

Les ensembles F_1 et F_3 sont illustrés par la Figure 4.4.

Les ensembles F_1 et F_3 sont des solutions du 2ECSBR dont les vecteurs d'incidence appartiennent à la face F_b et donc $b(v_0 v_p) = b(v_0 v_{p-K+1})$. Comme les sommets v_i , $i = 0, \dots, p$, sont choisis arbitrairement et comme la numérotation des éléments de la partition est elle aussi arbitraire, il s'ensuit que pour tout triplet de sommets v_i, v_j et v_k appartenant à différents ensembles de la partition, on a

$$b(v_i v_j) = b(v_i v_k). \quad (4.7)$$

Si v_i, v_j, v_k et v_l sont quatre sommets appartenant à des éléments différents de la partition, on obtient facilement grâce à (4.7), $b(v_i v_j) = b(v_i v_k) = b(v_k v_l)$. Enfin, considérons deux arêtes $v_i v_k$ et $v_j v_l$ de $\delta(V_0, \dots, V_p)$ telles que v_i et v_j appartiennent à un

même ensemble de la partition avec $v_i \neq v_j$. Comme $p \geq K \geq 3$, il existe un sommet v_m n'appartenant pas au même ensemble que v_i , v_j et v_k . Par (4.7), il s'ensuit que $b(v_i v_k) = b(v_k v_m) = b(v_i v_m) = b(v_j v_l)$, et donc $b(e) = \gamma$ pour tout $e \in \delta(V_0, \dots, V_p)$ et un $\gamma \in \mathbb{R}$.

Pour conclure la preuve, notons que les conditions du théorème impliquent que pour toute arête $e \in E(V_i)$, $i \in \{0, \dots, p\}$ et $|V_i| \geq 4$, $F_1 \setminus \{e\}$ est une solution réalisable du 2ECSBR, et donc $b(e) = 0$.

Supposons maintenant qu'un des ensembles de la partition contient exactement trois sommets. Comme la numérotation des ensembles de la partition est arbitraire, on peut supposer, s.p.d.g., que $V_p = \{v_p, v_{p+1}, v_{p+2}\}$, et soit $e = v_p v_{p+2}$. Considérons l'ensemble d'arêtes

$$F_4 = \left(\bigcup_{i=0}^{p-1} E(V_i) \right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{p+1} \{v_i v_{i+1}\} \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{l-1} \{v_{(i-1)(K-1)} v_{i(K-1)}\} \right) \cup \{v_{p-K+3} v_{p+2}\},$$

où $l = \lceil \frac{p}{K-1} \rceil$. Il n'est pas difficile de vérifier que les vecteurs d'incidence de F_4 et $F_4 \cup \{e\}$ appartiennent tout les deux à la face F_a car $(p+1) \bmod (K-1) \geq 2$. On a donc $x^{F_4}, x^{F_4 \cup \{e\}} \in F_a$ et par conséquent $b(e) = 0$.

Nous avons montré que $b = \gamma a$ pour un réel γ . Comme E induit une solution du 2ECSBR et $bx^E > \beta$, on a $\gamma > 0$. Donc $x(\delta(V_0, \dots, V_p)) \geq M(p, K)$ et $bx \geq \beta$ définissent la même facette. $\square$

Pour séparer les contraintes cyclomatiques, nous avons développé une heuristique basée sur l'algorithme de Barahona [5] (voir aussi [3]) pour séparer les contraintes de partition (2.7). Un premier algorithme de séparation pour la classe des inégalités de partition a été développé par Cunningham [19] et requiert le calcul de $|E|$ coupes minimums. Barahona [5] a montré que le problème peut se ramener au calcul de $|V|$ coupes minimums. Ces deux algorithmes renvoient la contrainte de partition la plus violée.

Considérons les contraintes suivantes obtenues à partir des contraintes cyclomatiques en supprimant la condition d'intégrité sur le membre de droite

$$x(\delta(V_0, \dots, V_p)) \geq \frac{Kp}{K-1}. \quad (4.8)$$

Il est clair que les inégalités (4.8) sont du type (2.7) (il suffit de poser $x' = \frac{K-1}{K}x$). De plus, si (4.8) est violée, alors (4.5) l'est aussi. Cependant, il peut arriver que toutes les

inégalités du type (4.8) soient satisfaites alors que des contraintes cyclomatiques sont violées. Afin de renforcer les inégalités (4.8), on considère les inégalités

$$x(\delta(V_0, \dots, V_p)) \geq \frac{Kp}{K-1} + \epsilon \quad (4.9)$$

en choisissant $\epsilon = \frac{p}{100n}$. Ainsi $\epsilon \leq 0.01$, et le membre de droite de l'inégalité est linéaire en p . En conséquence, les inégalités (4.9) peuvent être séparées en temps polynomial en utilisant, par exemple, l'algorithme de Barahona. Ici les inégalités (4.9) peuvent être transformées en des inégalités de type (2.7) en posant $x' = \frac{100nK+K-1}{100n(K-1)}x$. Comme il l'est signalé dans la prochaine section, la valeur de ϵ considérée ici donne les meilleurs résultats pratiques.

Une seconde heuristique, plus rapide, que nous avons développée pour séparer les contraintes (4.5) fonctionne de la manière suivante. Soit $\bar{x}$ la solution que l'on veut couper. On contracte les arêtes ayant une grande valeur dans $\bar{x}$ (en particulier les arêtes e telles que $\bar{x}(e) = 1$) jusqu'à ce qu'on ait soit un graphe sur $p+1$ sommets, avec $p \geq K$ et dont le poids est $< \lceil \frac{Kp}{K-1} \rceil$, soit un graphe sur moins de $K+1$ sommets. Notons que, selon le théorème 4.18, les inégalités cyclomatiques définissent des facettes seulement si $p \geq K$. Si on est dans le premier cas, alors une contrainte cyclomatique violée par $\bar{x}$ est trouvée. La partition associée à cette inégalité est donnée par le graphe résultant où chaque sommet correspond à un élément de la partition. Cette heuristique est de complexité $O(n^3)$.

4.2.6 Contraintes de cycle-partition

Nous présentons ici une dernière classe d'inégalités valide pour $\mathcal{P}(G, K)$.

Théorème 4.19 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V avec $p \geq K$. Alors l'inégalité*

$$\left(p + 1 - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil \right) x(T_\pi) + x(C_\pi) \geq 2p \quad (4.10)$$

est valide pour $\mathcal{P}(G, K)$.

Preuve. Soit F un ensemble d'arêtes induisant une solution du 2ECSBR. Si $F \cap T_\pi = \emptyset$, comme $p \geq K$, F doit contenir au moins $2p$ arêtes de C_π et donc le vecteur d'incidence de F satisfait (4.10). Supposons donc que $F \cap T_\pi \neq \emptyset$. Noter que la contrainte

cyclomatique (4.5) peut être réécrite de la manière suivante

$$x(T_\pi) + x(C_\pi) \geq p + \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil. \quad (4.11)$$

En utilisant (4.11) et le fait que $x^F(T_\pi) \geq 1$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (p+1 - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil) x^F(T_\pi) + x^F(C_\pi) &= (p - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil) x^F(T_\pi) + x^F(T_\pi) + x^F(C_\pi) \\ &\geq p - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil + p + \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil \\ &= 2p, \end{aligned}$$

et donc l'inégalité est valide. $\square$

Les inégalités (4.10) sont appelées *contraintes de cycle-partition*. Les lemmes suivants montrent que les seules inégalités de cycle-partition qui peuvent être utiles sont celles pour lesquelles $p = K$.

Lemme 4.20 *Soit F une solution du 2ECSBR. Si $|F \cap T_\pi| \geq 2$ alors x^F , le vecteur d'incidence de F , ne peut pas satisfaire (4.10) à l'égalité.*

Preuve. Si $|F \cap T_\pi| \geq 2$, alors $x^F(T_\pi) \geq 2$. En combinant cette inégalité avec (4.11), on obtient

$$\begin{aligned} (p+1 - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil) x^F(T_\pi) + x^F(C_\pi) &= (p - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil) x^F(T_\pi) + x^F(T_\pi) + x^F(C_\pi) \\ &\geq 2(p - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil) + p + \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil \\ &= 3p - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil \\ &> 2p, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que $p \geq K \geq 3$. $\square$

Lemme 4.21 *Si $p > K$, alors (4.10) ne peut pas définir une facette de $\mathcal{P}(G, K)$.*

Preuve. Supposons que $p > K$, et considérons une arête $f \in [V_1, V_p]$. Si (4.10) définit une facette de $\mathcal{P}(G, K)$, comme elle est différente d'une contrainte triviale, il doit exister une solution F contenant f dont le vecteur d'incidence vérifie (4.10) à l'égalité. Par le lemme 4.20, il s'ensuit que $F \cap T_\pi = \{f\}$. Supposons tout d'abord que $F \cap [V_i, V_{i+1}] = \emptyset$ pour un $i \in \{1, \dots, p-1\}$. Pour que F soit 2-arête connexe, on doit donc avoir $|F \cap [V_j, V_{j+1}]| \geq 2$ pour $j \in \{1, \dots, p-1\} \setminus \{i\}$ et $|\delta(V_0) \cap C_\pi \cap F| \geq 2$. Ceci implique que

$$\begin{aligned} (p+1 - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil) x^F(T_\pi) + x^F(C_\pi) &\geq (p+1 - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil) + 2 + 2(p-2) \\ &= 3p - 1 - \left\lceil \frac{p}{K-1} \right\rceil \\ &> 2p, \end{aligned}$$

une contradiction.

Par conséquent, $F \cap [V_i, V_{i+1}] \neq \emptyset$, pour $i = 1, \dots, p-1$. De plus, du raisonnement précédent, on peut déduire que pour un $i \in \{1, \dots, p-1\}$, F contient exactement une arête g de $[V_i, V_{i+1}]$. Or le plus petit cycle dans F contenant g doit passer par les éléments $V_1, \dots, V_p, V_1$ et donc il est de longueur au moins $p > K$, une contradiction.

□

En conséquence, on peut restreindre notre attention aux partitions $\pi = (V_0, \dots, V_K)$ et aux contraintes de cycle-partition correspondantes. Celles-ci s'écrivent sous la forme

$$(K-1)x(T_\pi) + x(C_\pi) \geq 2K. \quad (4.12)$$

Dans ce qui suit, nous présentons des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces inégalités définissent des facettes de $\mathcal{P}(G, K)$.

Théorème 4.22 *Soient $G = (V, E)$ un graphe complet, $K \geq 3$ et $\pi = (V_0, \dots, V_K)$ une partition de V . Alors la contrainte de cycle-partition (4.12) définit une facette de $\mathcal{P}(G, K)$ si et seulement si*

- 1) $|V_i| + |V_{i+1}| + |V_j| + |V_{j+1}| \geq 5$ pour tous $i, j \in \{0, \dots, K\}$, $i \neq j$, où $V_{K+1} = V_0$,
- 2) $|V_i| \neq 2$ pour $i = 0, \dots, K$.

Preuve. Supposons que la première condition n'est pas vérifiée. Il existe alors deux arêtes $f, g \in C_\pi$ telles que $\{f, g\}$ induise une coupe contenant deux arêtes du graphe $G - T_\pi$. Tous les cycles utilisant f dans $G - T_\pi$ utilisent également g et sont inclus dans C_π . Ils sont donc de longueur au moins $K+1$. Il s'ensuit que $G - T_\pi$ ne contient aucune solution du 2ECSBR et $x(T_\pi) \geq 1$ est une contrainte de sous-ensemble. Par le lemme 4.20, toute solution de F dont le vecteur d'incidence appartient à la face définie par (4.12) contient au plus une arête de T_π , et donc $x^F(T_\pi) = 1$. Mais ceci implique que la face définie par (4.12) est incluse dans la face définie par $x(T_\pi) \geq 1$. Et en conséquence (4.12) ne peut pas définir une facette de $\mathcal{P}(G, K)$.

Si la seconde condition n'est pas vérifiée, il existe un $i \in \{0, \dots, K\}$ tel que $V_i = \{u, v\}$. On peut supposer, s.p.d.g., que $i = 0$ et soit $ax \geq \alpha$ la contrainte (4.12). Considérons tout d'abord le cas où $K \geq 4$. Si $ax \geq \alpha$ définit une facette, il doit exister une solution $F \in \mathcal{F}(G)$ contenant une arête de $[V_1, V_3]$ tel que $ax^F = \alpha$. S'il existe un $i \in \{0, 3, 4, \dots, K\}$ tel que $[V_i, V_{i+1}] \cap F = \emptyset$, alors par les inégalités (2.3) et le lemme 4.20, il s'ensuit que $|[V_j, V_{j+1}] \cap F| \geq 2$ pour tout $j \in \{0, 3, 4, \dots, K\} \setminus \{i\}$, et $|\delta(V_2) \cap C_\pi \cap F| \geq 2$. Ainsi $ax^F \geq K-1+2K-2$. Comme $K > 3$, on a $ax^F > 2K$, une contradiction.

On a donc $|[V_i, V_{i+1}] \cap F| \geq 1$ pour tout $i \in \{0, 3, 4, \dots, K\}$. D'une manière similaire, on peut montrer que $|[V_i, V_{i+1}] \cap F| = 1$ pour tout $i \in \{0, 3, 4, \dots, K\}$. Soient $f_0 \in F \cap [V_0, V_1]$ et $f_K \in F \cap [V_K, V_0]$. Comme le plus petit cycle de F contenant f_0 et contenant également f_K , doit passer par les ensembles $V_1, V_3, \dots, V_K, V_0$ et doit être aussi de longueur $\leq K$, les arêtes f_K et f_0 doivent être incidentes à un même sommet de V_0 , disons u . Ceci implique que $|F \cap \delta(u)| \leq 1$, ce qui contredit le fait que F induise un sous-graphe couvrant 2-arête connexe.

Supposons maintenant que $K = 3$. Comme $ax \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, il existe une solution $F \in \mathcal{F}(G)$ ne contenant pas l'arête uv telle que $ax^F = \alpha$. Considérons dans un premier temps le cas où $F \cap T_\pi = \emptyset$. Tout cycle de F de longueur 3 contenant des arêtes de C_π passe exactement par deux éléments de la partition. De plus les contraintes de coupe impliquent que pour $W = \{u\}$ ($W = \{v\}$, $W = V_2$) au moins une des assertions suivantes est vérifiée : $|F \cap [W, V_1]| \geq 2$ et $|F \cap [W, V_3]| \geq 2$. On a donc $|F \cap C_\pi| \geq 6$. Si $|F \cap C_\pi| = 6$, il n'est pas difficile de voir qu'il existe un ensemble de sommets W' tel que $\delta(W') \cap F = \emptyset$, ce qui est impossible. D'où $|F \cap C_\pi| > 6$, mais ceci implique que $ax^F > \alpha$, une contradiction. Par conséquent $F \cap T_\pi \neq \emptyset$ et par le lemme 4.20, on a $|F \cap T_\pi| = 1$. On peut montrer de la même manière que dans ce cas, $|F \cap C_\pi| \geq 5$, ce qui implique de nouveau $ax^F > \alpha$, une contradiction.

Supposons maintenant que les conditions 1) et 2) sont satisfaites pour une inégalité $ax = (K - 1)x(T_\pi) + x(C_\pi) \geq 2K$. Soit $bx \geq \beta$ une contrainte définissant une facette de $\mathcal{P}(G, K)$ telle que la face F_a induite par $ax \geq 2K$ soit incluse dans la face F_b induite par $bx \geq \beta$. Nous allons montrer qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $b = \gamma a$.

Pour cela, nous allons d'abord montrer que $b(e) = b(e')$ pour tout $e, e' \in C_\pi$. Considérons un ensemble $[V_j, V_{j+1}]$ avec $|[V_j, V_{j+1}]| \geq 3$. Comme les deux conditions sont satisfaites, il existe au plus un $i \in \{0, \dots, K\}$ tel que $|[V_i, V_{i+1}]| = 1$. On peut donc supposer, s.p.d.g., que $|[V_i, V_{i+1}]| \geq 3$ pour $i = 1, \dots, K$. Remarquons que l'on peut avoir $|V_0| = |V_1| = 1$ et donc dans ce cas, $j \neq 0$. Soient f_i^1, f_i^2 deux arêtes fixées de $[V_i, V_{i+1}]$ pour $i = 1, \dots, K$ et $f_0^1 \in [V_0, V_1]$. Comme G est complet, on peut supposer que f_i^1 et f_i^2 (f_i^1 et f_{i+1}^1) sont adjacentes pour $i = 1, \dots, K$. Soit $\bar{E} = \bigcup_{i=0}^K E(V_i)$. Par la condition 2), on peut supposer que $|V_{j+1}| \geq 3$. On peut également supposer, s.p.d.g., que f_j^1 et f_j^2 sont incidentes à un sommet w de V_j . Considérons les ensembles d'arêtes

$$\begin{aligned} E_1 &= \{f_1^1, f_1^2, f_2^1, f_2^2, \dots, f_K^1, f_K^2\} \cup \bar{E}, \\ E_2 &= (E_1 \setminus \{f_j^1\}) \cup \{f\}, \end{aligned}$$

avec $f \in [w, V_{j+1}] \setminus \{f_j^1, f_j^2\}$. Comme les deux graphes $G(E_1)$ et $G(E_2)$ sont 2-arête connexes et chaque arête de E_1 (E_2) appartient à un cycle de longueur 3, les ensembles E_1 et E_2 sont des solutions réalisables. De plus, leurs vecteurs d'incidence appartiennent à la face définie par $ax = 2K$. On a donc $bx^{E_1} = bx^{E_2}$ et en conséquence, $b(f_j^1) = b(f)$.

Ainsi $b(e) = b(e')$ pour tout $e, e' \in [w, V_{j+1}]$. Si $|V_j| \geq 2$, par symétrie, on obtient également $b(e) = b(e')$ pour tout $e, e' \in [V_j, w']$, $w' \in V_{j+1}$. Il s'ensuit que $b(e) = b(e')$ pour tout $e, e' \in [V_j, V_{j+1}]$.

Maintenant, soient $i \in \{1, \dots, K\}$ et g une arête de $[V_i, V_{i+2}]$ adjacente aux arêtes f_{i-1}^1 et f_{i+2}^1 . Notons que les arêtes $g, f_{i+2}^1, \dots, f_{i+K}^1$ forment un cycle de longueur K . Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} E_3 &= \{f_0^1, f_1^1, \dots, f_K^1, g\} \cup \bar{E}, \\ E_4 &= (E_3 \setminus \{f_{i+1}^1\}) \cup \{f_i^2\}. \end{aligned}$$

Il est clair que E_3 et E_4 sont des solutions réalisables et que leurs vecteurs d'incidence vérifient la contrainte $ax \geq 2K$ à l'égalité. On a donc $bx^{E_3} = bx^{E_4}$ et $b(f_{i+1}^1) = b(f_i^2)$. Ceci implique que $b(e) = b(e')$ pour tout $e \in [V_i, V_{i+1}]$, $e' \in [V_{i+1}, V_{i+2}]$, $i \in \{1, \dots, K\}$. Il s'ensuit que

$$b(e) = \gamma \text{ pour tout } e \in C_\pi. \quad (4.13)$$

Comme x^{E_1} et x^{E_3} appartiennent à la face induite par $ax = 2K$, $bx^{E_1} = bx^{E_3}$. D'où $\sum_{i=1}^K b(f_i^2) = b(g)$, et par (4.13), on a $b(g) = (K-1)\gamma$.

Comme G est complet, pour toute arête $h \in T_\pi$, il existe un cycle C_h de longueur $K+1$ passant par tous les ensembles de la partition et ayant h comme corde. Notons que $C_h \cap E(V_i) = \emptyset$ pour $i = 0, \dots, K$. Soit

$$E_h = C_h \cup \{h\} \cup \bar{E}, \text{ pour tout } h \in T_\pi.$$

L'ensemble E_h est une solution réalisable et on a $ax^{E_h} = 2K$ pour tout $h \in T_\pi$. Si h et h' sont deux arêtes de T_π , on a $ax^{E_h} = ax^{E_{h'}} = 2K$ et donc $bx^{E_h} = bx^{E_{h'}}$. Comme $bx^{C_h} = bx^{C_{h'}}$, il s'ensuit que $b(h) = b(h')$. Ainsi on a $b(e) = (K-1)\gamma$ pour tout $e \in T_\pi$.

Il reste maintenant à montrer que $b(e) = 0$ pour tout $e \in E(V_i)$, $i = 0, \dots, K$. Soit $i \in \{0, \dots, K\}$ tel que $|V_i| \neq 1$. Par la condition 2), on a alors $|V_i| \geq 3$. Soient $e = uv \in E(V_i)$ et $w \in V_i \setminus \{u, v\}$. On peut supposer, s.p.d.g., que f_{i-1}^1 et f_i^1 sont incidentes au sommet w , f_{i-1}^2 au sommet u et f_i^2 au sommet v . Soit $E'_1 = E_1 \setminus \{e\}$. Il n'est pas difficile de voir que $E'_1 \in \mathcal{F}(G)$. Comme $bx^{E'_1} = bx^{E_1}$, on a $b(e) = 0$.

En résumant tous ces résultats, nous obtenons

$$b(e) = \begin{cases} \gamma & \text{pour tout } e \in C_\pi, \\ (K-1)\gamma & \text{pour tout } e \in T_\pi, \\ 0 & \text{pour tout } e \in \bar{E}. \end{cases}$$

On a donc $b = \gamma a$. Comme pour toute arête $f \in E$, $E \setminus \{f\} \in \mathcal{F}(G)$, on a $\gamma > 0$ ce qui complète la preuve. $\square$

Afin de séparer les contraintes de cycle-partition, nous avons développé une heuristique similaire à celle utilisée pour la séparation des contraintes cyclomatiques. Celle-ci se déroule en deux phases. D'abord, on contracte les arêtes de grande valeur jusqu'à ce qu'on obtienne un graphe sur $K + 1$ sommets. Chaque sommet de ce graphe correspond à un élément de la partition induisant la contrainte. Dans une seconde phase, on ordonne les éléments de la partition afin d'obtenir une partition produisant le plus petit membre de gauche dans (4.12). Pour cela, il est utile d'avoir une partition qui maximise le poids de C_π . Une manière pour ce faire peut consister à chercher un cycle hamiltonnien de poids maximum. Vu que ce problème est NP-difficile, on a utilisé une procédure gloutonne plus simple qui fonctionne comme suit. On fixe un sommet v_0 , qui correspondra à V_0 , et on détermine un sommet v_1 tel que $\bar{x}([v_0, v_1])$ soit maximum. Le sommet v_1 correspondra à V_1 . Ensuite, un sommet v_2 avec $\bar{x}([v_1, v_2])$ maximum est calculé et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne une partition ordonnée $V_0, \dots, V_K$. Ceci est répété $K + 1$ fois en changeant v_0 . On considère alors la partition donnant le plus petit membre de gauche dans (4.12). Si celui-ci a une valeur strictement plus petite que $2K$, on aura alors trouvé une contrainte de cycle-partition violée. Cette heuristique est donnée dans l'Algorithme 4.2.

4.3 Algorithme de coupes et branchements

Dans cette section, nous présentons un algorithme de coupes et branchements pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés. Le but est d'appliquer les résultats théoriques présentés dans les sections précédentes et de décrire quelques choix stratégiques qui ont été pris pour résoudre le 2ECSBR.

Pour commencer l'optimisation, on considère le programme linéaire donné par les contraintes de coupe associées aux sommets du graphe, la contrainte cyclomatique induite par la partition triviale du graphe (où chaque sommet du graphe correspond à un élément de la partition) et par les contraintes triviales. En d'autres termes, on considère le programme linéaire suivant

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \sum_{e \in E} c(e)x(e) \\
 \text{s.t.} \quad & x(\delta(v)) \geq 2, \quad \text{pour tout } v \in V, \\
 & x(E) \geq \left\lceil \frac{nK}{K-1} \right\rceil, \\
 & 0 \leq x(e) \leq 1, \quad \text{pour tout } e \in E.
 \end{aligned}$$

Une tâche importante dans un algorithme de coupes et branchements est de déterminer si une solution optimale de la relaxation du 2ECSBR est réalisable. Une solution

Algorithme 4.2 Heuristique pour la séparation des contraintes de cycle-partition

Données : une solution $\bar{x}$, son graphe support $G_{\bar{x}} = (V_{\bar{x}}, E_{\bar{x}})$ et un entier K .

```

 $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E}) \leftarrow G_{\bar{x}};$ 
tant que  $|\tilde{V}| > K + 1$  faire
   $maxedg \leftarrow \emptyset; maxval \leftarrow 0.0;$ 
  pour tout  $e \in \tilde{E}$  faire
    si  $\bar{x}(e) > maxval$  alors
       $maxval \leftarrow \bar{x}(e);$ 
       $maxedg = e;$ 
  Soit  $maxedg = st;$ 
   $\tilde{G} \leftarrow \tilde{G} / \{s, t\};$ 
 $\pi^* \leftarrow 0, value^* \leftarrow 0;$ 
pour tout  $u \in \tilde{V}$  faire
   $V' \leftarrow \tilde{V} \setminus \{u\};$ 
   $\pi \leftarrow 0; \pi_0 \leftarrow u;$ 
   $l \leftarrow 0; value = 0;$ 
  tant que  $V' \neq \emptyset$  faire
    Soit  $v_{max} \in V'$  tel que  $\bar{x}([\pi_l, v_{max}]) = \max\{\bar{x}([\pi_l, v]), v \in V'\};$ 
     $value \leftarrow value + \bar{x}([\pi_l, v_{max}]);$ 
     $l \leftarrow l + 1; \pi_l \leftarrow v_{max};$ 
     $V' \leftarrow V' \setminus \{v_{max}\};$ 
   $value \leftarrow value + \bar{x}([\pi_l, \pi_0]);$ 
  si  $value > value^*$  alors
     $value^* \leftarrow value; \pi^* \leftarrow \pi;$ 
pour tout  $i, j \in \{0, \dots, K\}$  tels que  $i + 1 < j$  et  $j - i \neq K$  faire
   $value^* \leftarrow value^* + \bar{x}([\pi_i, \pi_j]);$ 
si  $value < 2K$  alors
  {On a trouvé une contrainte de cycle-partition violée}
  {La partition est donné par les sommets de  $\tilde{G}$  dans l'ordre donné dans  $\pi$ }
sinon
  {Aucune contrainte de cycle-partition n'a été trouvé}

```

optimale $\bar{x}$ de la relaxation est réalisable pour le 2ECSBR si elle est entière et vérifie les contraintes de coupe et telle que chaque arête de $G_{\bar{x}}$ soit contenue dans un cycle admissible de $G_{\bar{x}}$. Vérifier si une solution entière $\bar{x}$ est réalisable pour le 2ECSBR peut être effectué en temps polynomial. On vérifie d'abord que chaque arête e avec $\bar{x}(e) = 1$ appartient bien à un cycle admissible de $G_{\bar{x}}$ en calculant un plus court chemin entre les extrémités de e . Ensuite, avec un parcours en largeur, on vérifie si $G_{\bar{x}}$ est connexe. Si c'est le cas, comme chaque arête appartient à un cycle, les contraintes de coupe sont également satisfaites.

Un autre point important dans l'efficacité d'un algorithme de coupes et branchements est le calcul d'une bonne borne supérieure. Pour cela, on essaie de transformer chaque solution de la relaxation obtenue dans l'algorithme de coupes et branchements en une solution réalisable en arrondissant à 1 toute valeur fractionnaire. On supprime ensuite les arêtes qui n'appartiennent pas à un cycle admissible. Dans une dernière étape, on essaie de ramener la solution F résultante en une solution de moindre poids en supprimant répétitivement les arêtes e de plus grand coût de telle manière que $F \setminus \{e\}$ reste réalisable pour le 2ECSBR.

Si une solution $\bar{x}$, optimale pour la relaxation linéaire du 2ECSBR, n'est pas réalisable, l'algorithme de coupes et branchements génère de nouvelles inégalités valides pour $\mathcal{P}(G, K)$ et violées par $\bar{x}$. La séparation des inégalités valides est effectuée dans l'ordre suivant :

- les contraintes de coupe,
- les contraintes métriques,
- les contraintes de cycle et les contraintes de sous-ensemble,
- les contraintes cyclomatiques,
- les contraintes de cycle-partition.

On peut remarquer que toutes ces inégalités sont globales (c'est-à-dire valides dans tout l'arbre de branchements) et plusieurs contraintes peuvent être ajoutées à chaque itération. De plus, nous passons à la classe d'inégalités suivante seulement si nous n'avons pas pu générer d'inégalités violées dans la classe courante.

Pour séparer les différentes inégalités, nous utilisons les algorithmes décrits dans la section 4.2. Tous nos algorithmes sont appliqués sur le graphe $G_{\bar{x}} = (V, E_{\bar{x}})$ où $\bar{x}$ est la solution courante de la relaxation linéaire du 2ECSBR.

La séparation exacte des contraintes de coupe, pour une solution $\bar{x}$, peut être effectuée en utilisant l'algorithme de Gomory-Hu [42]. Cet algorithme produit un vecteur poids ω et ce que l'on appelle l'arbre de Gomory-Hu avec la propriété que pour toute paire

de sommets s et t de V , une coupe minimum par rapport à ω entre s et t dans l'arbre est également une coupe minimum par rapport à $\bar{x}$ entre s et t dans $G_{\bar{x}}$. Pour générer cet arbre, nous utilisons l'algorithme de Gusfield [55] qui requiert le calcul de $|V| - 1$ flots maximums. Le calcul de chaque flot maximum est effectué à l'aide de l'efficace algorithme de Goldberg et Tarjan [41] qui tourne en $O(mn \log \frac{n^2}{m})$. L'algorithme exact permettant de séparer les contraintes de coupe est donc implémenté pour tourner en $O(mn^2 \log \frac{n^2}{m})$.

La séparation des contraintes de cycle et des contraintes de sous-ensemble sont effectuées simultanément. On calcule tout d'abord pour une arête $e = st$, une $(K - 1)$ - st -coupe (minimum) C_e en utilisant soit l'algorithme exact pour $K \leq 4$, soit l'algorithme primal-dual pour $K \geq 5$. Si $\bar{x}(C_e) < 1$, on détermine une partition $\pi = (V_0, \dots, V_K)$ par un parcours en largeur à partir de s du graphe induit par $E_{\bar{x}} \setminus (C_e \cup \{e\})$. Si $|V_K| \geq 2$, on considère la partition $\pi' = (V'_0, \dots, V'_K)$ où $V'_j = V_j$ pour $j = 0, \dots, K-2$, $V'_{K-1} = V_{K-1} \cup (V_K \setminus \{t\})$ et $V'_K = \{t\}$. L'idée cachée derrière ceci est d'obtenir une contrainte de cycle qui, par le théorème 4.8, peut définir une facette. S'il existe un $i \in \{0, \dots, K-1\}$ tel que $|V'_i| = |V'_{i+1}| = 1$, alors par la remarque 4.13, $x(T_{\pi'}) \geq 1$ est une contrainte de sous-ensemble violée. Notons que cette inégalité domine la contrainte de cycle $x(T_{\pi'}^e) \geq x(e)$. Si ceci n'est pas le cas et si nous avons $\bar{x}(T_{\pi'}^e) < \bar{x}(e)$, alors la contrainte de cycle associée à π' et e est violée. De plus, cette contrainte définit une facette de $\mathcal{P}(G, K)$. On effectue cette procédure uniquement pour les arêtes e avec $\bar{x}(e) \geq 0.5$. Si $\bar{x}(e)$ est faible, il y a peu de chance d'obtenir une contrainte de cycle violée associée à e . Cet algorithme tourne en $O(n^3)$ si $K \leq 4$ et en $O(n^4)$ si $K \geq 5$.

Pour la séparation des contraintes cyclomatiques, nous utilisons d'abord l'heuristique basée sur la contraction d'arêtes. Si aucune contrainte violée n'est trouvée, nous essayons alors de générer des contraintes en utilisant la procédure basée sur l'algorithme de Barahona [5] pour les contraintes de partition. Ces deux algorithmes produisent une partition $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ avec $p \geq K$. Pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$ tel que $|V_i| = 2$ ($|V_i| = 3$ et $(p+1) \bmod (K-1) \leq 1$), on considère la partition obtenue à partir de π en remplaçant V_i par autant d'éléments dans la nouvelle partition qu'il y a de sommets dans V_i . Par le théorème 4.18, la contrainte cyclomatique donnée par cette dernière partition domine celle produite par π .

En résolvant des instances du 2ECSBR, nous avons remarqué que la séparation des contraintes de coupe utilisant l'algorithme exact de Gusfield nécessite beaucoup de temps. Pour cela, nous avons adopté la stratégie d'utiliser cet algorithme seulement si aucune autre contrainte de n'importe quel type n'a pu être trouvée en utilisant les algorithmes présentés précédemment.

Pour stocker les contraintes générées, nous avons créé un pool dont la taille augmente dynamiquement. Toute contrainte générée est ajoutée au pool. Les contraintes du pool sont dynamiques, ceci signifie qu'elles peuvent être enlevées de la relaxation linéaire courante si elles ne sont plus actives. On sépare en premier lieu les inégalités du pool. Si toutes ces inégalités sont satisfaites par la solution courante de la relaxation linéaire du 2ECSBR, alors nous séparons les classes d'inégalités dans l'ordre donné précédemment.

4.4 Résultats expérimentaux

L'algorithme de coupes et branchements décrit dans la section précédente a été implémenté en C++, et utilise BCP [70] pour gérer l'arbre de branchements et CPLEX 7.1 comme solveur linéaire. Il a été testé sur un Pentium IV cadencé à 1.7 GHz avec 1 Go de RAM et tournant sous Linux. On a fixé le temps maximum de calcul à 5 heures pour chaque instance.

Le paquetage BCP est un ensemble de méthodes permettant d'implémenter un algorithme de coupes et branchements ainsi que la génération de colonnes. A des fins de portabilité, d'efficacité et de facilité d'utilisation, ce paquetage a été développé dans le langage de programmation C++ en respectant les concepts de l'approche orientée objet. Ainsi, BCP se présente sous la forme d'un ensemble de classes et de méthodes. Celles-ci gèrent, à l'aide de quatre modules, l'arbre de branchement, la résolution de programmes linéaires, et la génération de coupes et de colonnes. De plus, BCP gère lui-même l'interface entre l'algorithme de coupes et branchements, et le solveur linéaire (i.e. CPLEX). Par les techniques de l'héritage et de la surcharge de méthodes provenant de la conception orientée objet, le travail de l'utilisateur consiste à réécrire les algorithmes spécifiques à son problème (séparation des contraintes, test de réalisabilité, ...). Celui-ci garde cependant un contrôle sur l'ensemble de l'algorithme de coupes et branchements par l'intermédiaire de paramètres lui permettant de faire facilement différents choix de stratégies.

Les résultats présentés ci-après concernent des instances réelles ainsi que des instances générées aléatoirement. Les instances consistent en des graphes simples complets avec des coûts sur les arêtes correspondant à la distance Euclidienne arrondie à l'entier supérieur. Les tests ont été effectués pour des bornes $K = 3, 4, 5, 6, 7, 10, 13, 16$. En pratique, les bornes ne dépassent généralement pas 5. Les instances réelles proviennent du réseau de l'opérateur de télécommunications belge Belgacom (52 sommets) et de sous-ensembles de ces sommets. Les instances aléatoires sont générées sur 10 à 50 sommets, et cinq instances de chaque taille sont testées. De plus, afin de tester

l'efficacité des contraintes de cycle et des contraintes de cycle-partition, nous avons résolu des instances sans générer ces deux types de contraintes. Les données des instances aléatoires générées pour tester le problème sont accessibles à la page Internet <http://www.poms.ucl.ac.be/staff/bf/en/2ecnbm/data.html>.

Dans les différents tableaux, les entrées sont :

$ V $	: Nombre de sommets du problème.
K	: Borne sur les cycles.
C_u	: Nombre de contraintes de coupe générées.
C_y	: Nombre de contraintes de cycle générées.
M_e	: Nombre de contraintes métriques générées.
S_u	: Nombre de contraintes de sous-ensemble générées.
C_c	: Nombre de contraintes cyclomatiques générées.
C_p	: Nombre de contraintes de cycle-partition générées.
N_o	: Nombre de nœuds dans l'arbre de branchements.
o/p	: Nombre de problèmes résolus à l'optimum sur le nombre d'instances testées (uniquement pour les instances aléatoires).
$Gap1$	: Ecart relatif entre la meilleure borne supérieure (UB) et la borne inférieure obtenue à la racine de l'arbre de branchement sans ajout de contraintes de cycle et de contraintes de cycle-partition.
$Gap2$	: Ecart relatif entre UB et la borne inférieure obtenue à la racine de l'arbre de branchement.
G_t	: Ecart relatif entre UB et la meilleure borne inférieure trouvée.
CPU	: Temps total.

Le tableau 4.1 rapporte les résultats obtenus pour les instances réelles alors que le tableau 4.2 présente les résultats pour les problèmes générés aléatoirement.

On peut remarquer que pour 20 sommets ou moins, tous les problèmes ont été résolus à l'optimum. De plus, pour $K = 3$, toutes les instances ont été résolues dans le temps imparti. En comparant ces résultats avec ceux de [36], il apparait que la version arête-connexe est plus facile à résoudre que celle sommet-connexe quand $K = 3$. Cependant, pour $4 \leq K \leq 7$ et des instances avec plus de 30 sommets, le cas 2-arête connexe semble plus difficile à résoudre. En fait, seules quelques instances de ce type ont pu être résolues en moins de 5 heures. Pour les instances réelles de 52 sommets et $4 \leq K \leq 7$, on obtient un gap final moyen de 5.26%. Pour les instances aléatoires sur 50 sommets, ce gap moyen est de 6.93%. Une augmentation similaire peut être observée sur les instances sur 30 sommets. Ainsi, il semblerait que les instances réelles soient plus faciles à résoudre que les instances aléatoires.

$ V $	K	Cu	Cy	Me	Su	Cc	Cp	No	Gap2	Gt	CPU
12	3	2	4	6	2	1	1	1	0.00	0.00	0 : 00 : 00
17	3	13	43	41	15	11	6	7	0.51	0.00	0 : 00 : 01
30	3	30	91	50	18	49	17	41	0.58	0.00	0 : 00 : 10
52	3	101	681	426	84	895	124	3015	1.33	0.00	0 : 42 : 36
12	4	4	24	24	16	5	0	5	0.52	0.00	0 : 00 : 00
17	4	21	119	88	28	11	0	45	1.76	0.00	0 : 00 : 02
30	4	111	6676	3437	514	293	81	8723	3.67	0.00	0 : 55 : 07
52	4	141	6028	2325	251	796	117	4653	5.30	3.67	5 : 00 : 00
12	5	14	24	24	37	5	0	9	1.77	0.00	0 : 00 : 00
17	5	28	97	42	103	16	2	29	2.21	0.00	0 : 00 : 01
30	5	159	20487	5157	5597	525	140	32327	4.63	0.86	5 : 00 : 00
52	5	134	6151	1302	1144	619	49	4451	7.17	5.27	5 : 00 : 00
12	6	7	5	8	15	7	0	7	0.72	0.00	0 : 00 : 00
17	6	9	7	11	26	6	2	1	0.00	0.00	0 : 00 : 00
30	6	143	17670	3156	11446	331	65	25811	5.17	1.36	5 : 00 : 00
52	6	121	6712	791	1840	349	12	3035	7.32	5.69	5 : 00 : 00
12	7	22	23	43	142	9	0	29	1.84	0.00	0 : 00 : 00
17	7	30	102	78	228	12	0	39	2.81	0.00	0 : 00 : 02
30	7	108	3627	419	4333	93	0	2545	3.14	0.00	0 : 17 : 42
52	7	146	7745	644	4121	268	0	3113	8.08	6.39	5 : 00 : 00
12	10	4	0	20	0	6	0	11	0.83	0.00	0 : 00 : 00
17	10	2	0	0	0	2	0	1	0.00	0.00	0 : 00 : 00
30	10	81	606	209	1620	22	0	293	1.41	0.00	0 : 00 : 57
52	10	126	6058	211	11138	111	1	3701	6.49	4.99	5 : 00 : 00
17	13	2	0	0	0	3	1	1	0.00	0.00	0 : 00 : 00
30	13	62	227	143	1452	7	0	127	0.92	0.00	0 : 00 : 20
52	13	161	6364	228	26030	62	0	3229	6.66	3.60	5 : 00 : 00
17	16	2	0	0	0	3	0	1	0.00	0.00	0 : 00 : 00
30	16	89	490	964	4848	20	0	535	2.03	0.00	0 : 01 : 10
52	16	155	3724	183	20931	67	0	1747	2.44	1.14	5 : 00 : 00

TAB. 4.1 – Résultats des instances réelles

$ V $	K	Cu	Cy	Me	Su	Cc	Cp	No	o/p	Gap1	Gap2	Gt	CPU
10	3	3.8	9.0	9.8	6.0	4.2	2.8	3.0	5/5	1.32	0.44	0.00	0 : 00 : 00
20	3	13.0	27.4	19.8	11.0	9.0	7.0	3.4	5/5	1.39	0.15	0.00	0 : 00 : 00
30	3	28.2	98.2	59.8	20.6	33.4	14.8	36.6	5/5	1.80	0.83	0.00	0 : 00 : 08
40	3	53.4	311.0	175.8	40.0	192.4	53.6	1175.8	5/5	3.06	1.31	0.00	0 : 05 : 55
50	3	80.6	776.0	468.4	101.2	710.0	204.6	8053.8	5/5	3.01	1.88	0.00	1 : 28 : 13
10	4	6.6	16.2	18.0	12.2	5.8	2.6	9.4	5/5	1.71	1.26	0.00	0 : 00 : 00
20	4	40.8	1066.0	507.8	120.8	56.0	31.2	551.0	5/5	4.78	3.37	0.00	0 : 01 : 07
30	4	105.0	16707.6	7316.2	914.6	397.8	172.4	22925.4	1/5	7.19	5.72	1.14	4 : 49 : 59
40	4	126.2	10328.8	4098.6	616.2	568.2	168.0	13345.0	0/5	8.55	6.35	2.40	5 : 00 : 00
50	4	123.6	6585.6	2364.2	350.6	668.4	109.0	6466.6	0/5	10.43	7.87	5.06	5 : 00 : 00
10	5	5.0	6.6	9.0	17.2	3.6	0.4	6.2	5/5	1.16	0.89	0.00	0 : 00 : 00
20	5	49.4	2478.6	732.0	1101.8	77.8	28.8	2891.8	5/5	6.37	4.39	0.00	0 : 05 : 49
30	5	108.2	17383.6	3512.8	3949.6	368.6	75.6	18396.2	1/5	7.27	6.09	1.57	4 : 24 : 57
40	5	131.6	11380.0	2111.8	2156.2	457.2	65.4	9775.4	0/5	9.45	7.94	4.71	5 : 00 : 00
50	5	123.2	7240.8	1139.2	1206.8	474.8	55.8	4050.2	0/5	10.38	9.78	7.01	5 : 00 : 00
10	6	9.8	2.8	19.6	51.0	6.2	0.6	9.0	5/5	2.74	2.70	0.00	0 : 00 : 00
20	6	58.0	2413.6	507.2	2105.0	60.8	17.0	2472.6	5/5	5.33	4.46	0.00	0 : 06 : 33
30	6	110.0	17946.4	2536.2	9337.0	232.8	20.6	14776.6	1/5	7.48	6.88	2.37	4 : 43 : 21
40	6	127.0	12085.2	1317.0	4560.8	281.2	35.8	7021.0	0/5	9.99	9.15	5.85	5 : 00 : 00
50	6	121.8	7495.8	741.2	2395.8	270.6	19.8	2711.8	0/5	10.91	10.53	8.19	5 : 00 : 00
10	7	6.2	0.4	14.2	37.6	4.0	0.2	9.0	5/5	1.36	1.25	0.00	0 : 00 : 00
20	7	45.8	910.8	166.0	1049.0	34.2	8.4	625.4	5/5	3.73	3.38	0.00	0 : 01 : 04
30	7	119.6	16455.2	1953.2	16711.6	203.4	6.0	16300.6	0/5	6.19	5.64	1.69	5 : 00 : 00
40	7	137.0	13231.8	1035.8	8448.8	239.2	20.4	6652.6	0/5	7.67	7.61	4.24	5 : 00 : 00
50	7	127.6	8159.6	530.8	4238.0	206.8	12.2	2712.6	0/5	9.77	9.49	7.45	5 : 00 : 00
10	10	2.8	0.0	0.0	0.0	1.4	0.0	1.0	5/5	0.00	0.00	0.00	0 : 00 : 00
20	10	40.2	480.8	117.6	1944.4	25.2	1.4	601.0	5/5	2.30	2.50	0.00	0 : 00 : 45
30	10	122.2	9110.8	753.8	28861.8	113.4	0.8	7852.6	4/5	3.79	3.81	0.14	2 : 57 : 21
40	10	154.2	12217.8	673.8	21737.4	152.2	0.8	6181.8	1/5	4.16	6.24	3.11	4 : 41 : 58
50	10	152.8	10722.8	400.0	16278.2	120.0	1.6	3177.8	0/5	6.45	6.35	4.46	5 : 00 : 00
20	13	25.6	86.8	183.6	812.8	14.0	0.2	130.2	5/5	1.72	1.72	0.00	0 : 00 : 06
30	13	80.6	1427.6	220.6	7718.4	38.0	0.4	769.4	5/5	2.50	2.24	0.00	0 : 05 : 36
40	13	155.2	7688.4	515.6	32764.8	143.6	0.8	5373.4	2/5	4.63	4.61	2.19	4 : 00 : 09
50	13	175.0	10648.2	328.0	30746.6	105.4	0.4	3961.8	0/5	4.59	4.55	2.81	5 : 00 : 00
20	16	18.8	1.8	67.0	121.4	8.4	0.2	13.0	5/5	0.61	0.60	0.00	0 : 00 : 01
30	16	88.2	885.4	306.6	7535.8	56.0	0.4	610.2	5/5	2.57	2.41	0.00	0 : 03 : 52
40	16	141.8	3743.8	335.2	24970.8	100.4	0.2	2433.8	4/5	3.51	3.66	1.26	1 : 32 : 27
50	16	184.4	8520.6	266.8	43858.0	92.0	0.4	3611.0	0/5	3.23	3.24	1.57	5 : 00 : 00

TAB. 4.2 – Résultats des instances aléatoires

$ V $	K	Cu	Cy	Me	Su	Cc	Cp	No	Gap2	Gt	CPU
30	3	32	0	134	22	66	0	93	0.93	0.00	0 : 00 : 20
52	3	103	0	1187	104	1220	0	6505	1.99	0.00	1 : 28 : 12
30	4	119	0	9687	983	435	0	16183	5.66	0.00	1 : 45 : 07
53	4	146	0	5109	572	816	0	8555	7.31	5.48	5 : 00 : 00
30	5	152	0	14900	8797	670	0	37329	5.13	0.80	5 : 00 : 00
52	5	144	0	4156	2923	649	0	5975	9.02	6.73	5 : 00 : 00
30	6	171	0	8361	17601	287	0	33919	5.89	1.50	5 : 00 : 00
52	6	150	0	3163	5844	383	0	4385	7.93	6.13	5 : 00 : 00

TAB. 4.3 – *Résultats des instances réelles sans les contraintes (4.1) et les contraintes (4.10)*

Dans chacun des deux tableaux, un nombre significatif de contraintes de cycle et de contraintes de cycle-partition a été généré pour la plupart des instances avec 30 sommets et plus, quand $K \leq 6$. Afin d'évaluer l'impact de ces inégalités sur les performances de notre algorithme, nous avons résolu certaines instances réelles avec 30 et 52 sommets et $K = 3, 4, 5, 6$ sans l'utilisation de ces contraintes. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 4.3. On remarque que les instances avec $K = 3, 4$, qui sont résolues à l'optimum en utilisant les contraintes de cycle et les contraintes de cycle-partition, sont également résolues à l'optimum sans l'utilisation de ces inégalités, mais le temps de calcul et la taille de l'arbre de branchement ont plus que doublé. Pour les autres instances, comme cela apparaît des tableaux 4.1 et 4.3, l'utilisation de ces inégalités a permis de réduire le gap total d'environ 18%. Cette amélioration peut également être observée pour les instances aléatoires en comparant l'écart relatif entre la meilleure solution trouvée et les bornes inférieures obtenues à la racine de l'arbre de branchement avec (**Gap2**) et sans (**Gap1**) l'utilisation de ces inégalités. On peut remarquer que cette erreur relative augmente de 24% si les contraintes de cycle et les contraintes de cycle-partition ne sont pas rajoutées. Cependant, pour les instances avec $K \geq 7$, le gain est moins significatif. Ces inégalités semblent donc jouer un rôle central dans la résolution du 2ECSBR avec de petites bornes. Pour de grandes bornes, les contraintes de sous-ensemble semblent plus efficaces. En fait, on peut remarquer pour ces problèmes que le nombre de contraintes de sous-ensemble générées est, de manière significative, plus grand que celui du nombre de contraintes de cycle. Ainsi, notre heuristique pour séparer ces inégalités semble assez efficace.

Enfin, on peut noter que les problèmes quand $K \geq 10$ sont plus faciles à résoudre. La plupart des instances sur 30 sommets et quelques unes sur 40 sommets ont été résolues à l'optimum. Ceci est dû au fait que pour des grandes valeurs de K , le 2ECSBR est très proche du problème du sous-graphe 2-arête connexe qui peut être résolu efficacement (pour la taille des graphes considérés dans ces expérimentations) en n'utilisant que les

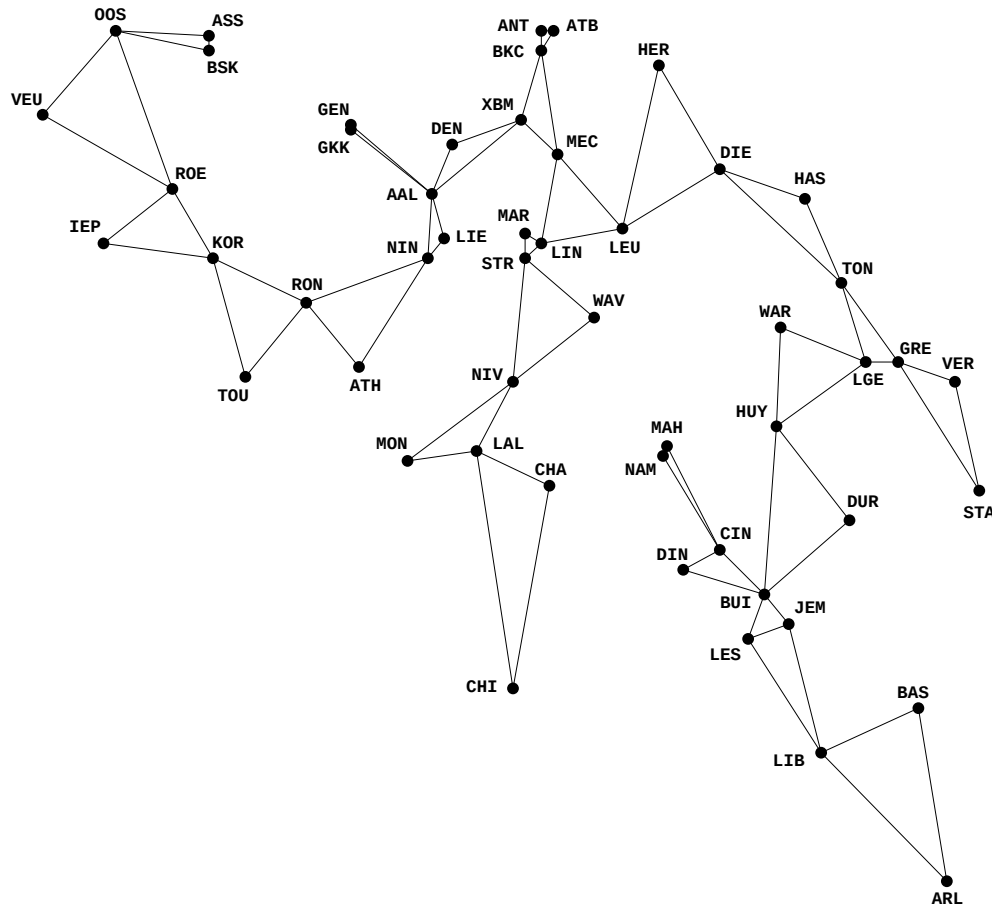


FIG. 4.5 –

contraintes de coupe.

Afin d'illustrer nos résultats, nous allons donner quelques solutions obtenues à l'aide de notre algorithme de coupes et branchements.

Comme nous l'avons déjà mentionné, les instances avec une borne $K = 3$ semblent plus faciles à résoudre. En effet, nous avons obtenu une solution optimale pour la plus grande instance réelle de 52 sommets dont on dispose, quand $K = 3$. La solution est donnée par la figure 4.5.

La figure 4.6 donne les solutions optimales obtenues pour l'instance réelle de 30 sommets avec des bornes égales à 4, 7, 10 et 16. Quant à la figure 4.7, elle montre les meilleures solutions trouvées au bout de 5 heures (et donc, sans garantie d'optimalité) pour cette même instance quand $K = 5, 6$.

Remarquons d'abord que la structure des solutions pour des bornes égales à 10 et

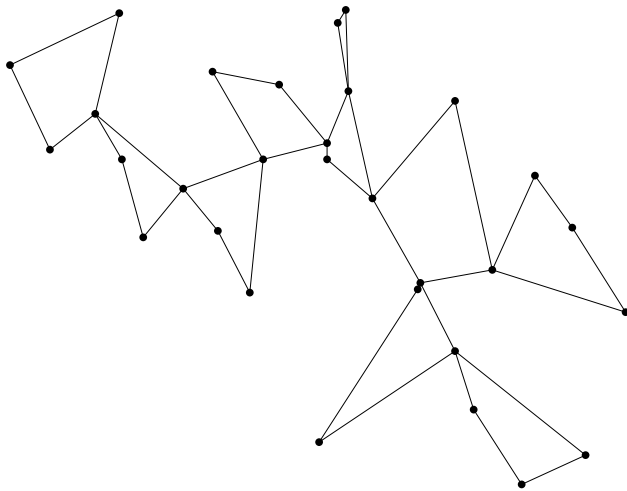
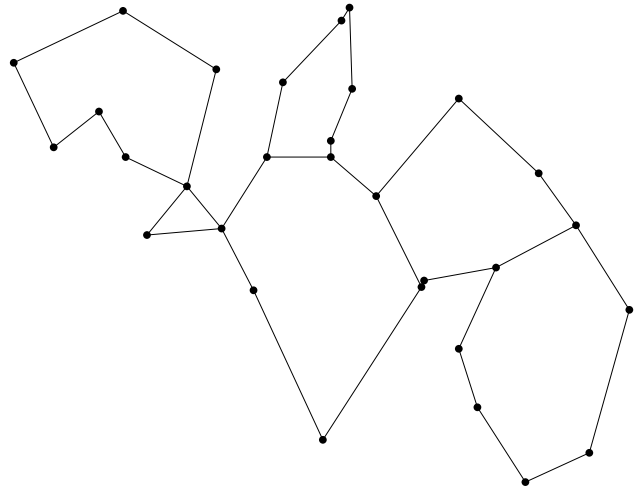
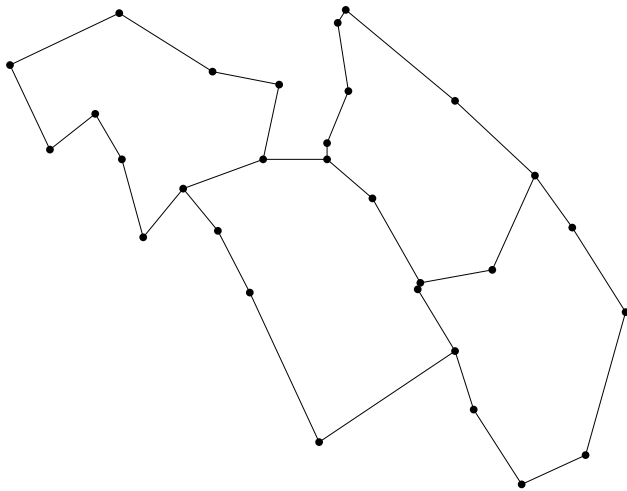
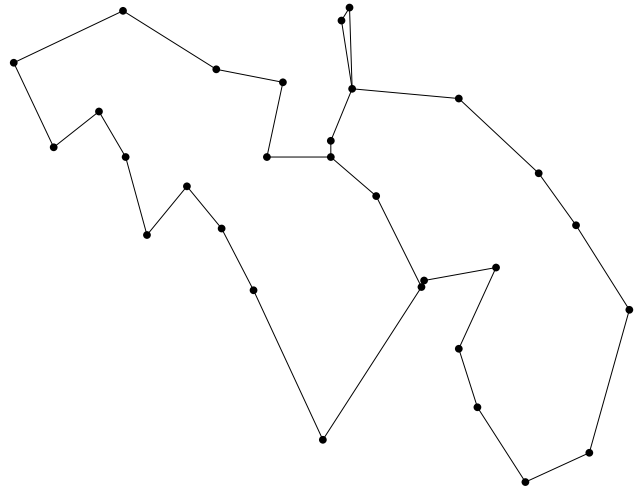
 $K = 4$  $K = 7$  $K = 10$  $K = 16$

FIG. 4.6 –

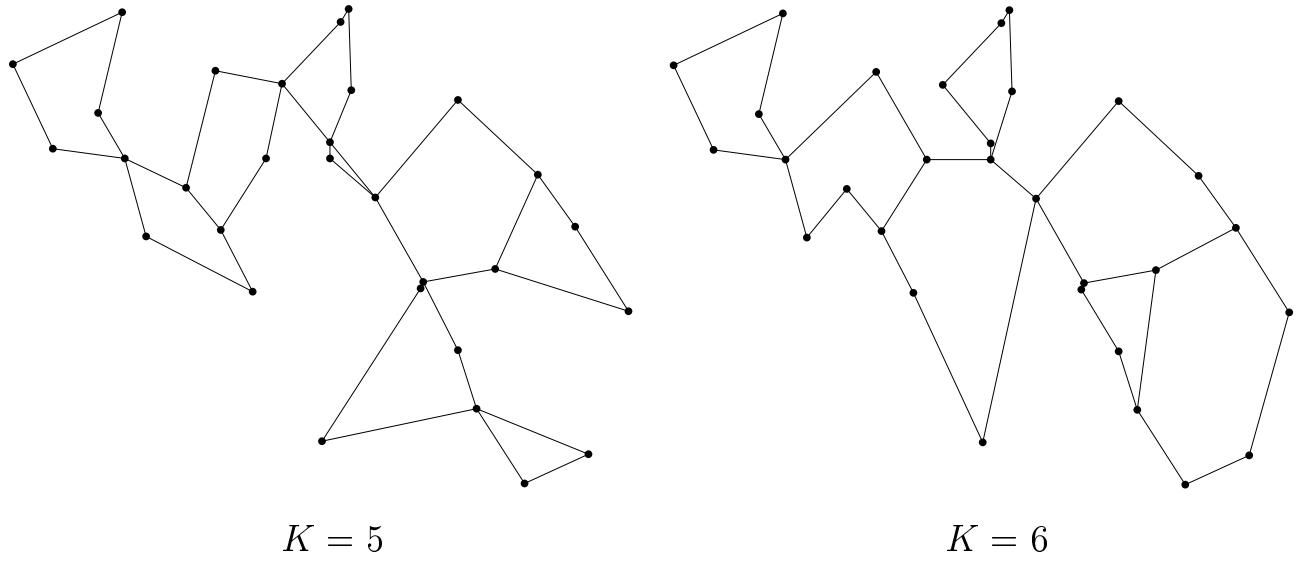


FIG. 4.7 –

16 sont très proches. On peut également noter que ces deux solutions ne contiennent que très peu de cycles. Leur structure ressemble donc à celle d'une solution optimale du problème du sous-graphe 2-arête connexe (TECSP). Ceci peut être expliqué par le fait que si K est suffisamment grand ($K \geq |V|$), alors le 2ECSBR n'est rien d'autre que le TECSP.

Maintenant, en observant les solutions correspondant aux bornes 4 et 7, on peut remarquer que la structure diffère beaucoup plus. En particulier, le nombre de cycles ainsi que le nombre de sommets d'articulation (sommets qui déconnectent le graphe lorsqu'on le supprime) diminuent de manière significative quand la borne passe de 4 à 7. Ceci peut venir du fait qu'une petite borne semble plus contraignante au niveau de la topologie d'un réseau qu'une borne, par exemple, supérieure à 7.

Considérons maintenant les solutions de la figure 4.7. Celles-ci concernent la même instance (avec 30 sommets) avec respectivement $K = 5$ et $K = 6$. On peut voir que la solution, quand K passe de 4 à 5, de 5 à 6 ou de 6 à 7, ne subit pas de grosses modifications. Ceci est naturel puisque la taille du cycle n'augmente que d'une unité. Puisque les solutions pour $K = 4$ et 7 sont optimales, on peut éventuellement en conclure que les solutions pour $K = 5$ et 6, qui sont obtenues au bout de 5 heures de calcul, sont très proches de l'optimum. Cette observation est confortée par le gap final (écart relatif entre la meilleure solution trouvée et la borne inférieure) reporté dans le tableau 4.1. On peut ainsi affirmer que l'algorithme de coupes et branchements que

nous avons implémenté reste une bonne heuristique lorsque nous atteignons la limite de temps de 5 heures pour des instances de cette taille. Par contre, le changement est beaucoup plus net quand la borne passe de 4 à 7. Ce type de transformation dans les solutions est beaucoup moins visible quand l'écart entre les bornes est presque le même mais la borne plus importante, comme par exemple quand K passe de 10 à 16 (voir figure 4.7).

Enfin, on peut s'apercevoir que, dans les solutions concernant des bornes assez petites (3 et 4), il existe, entre certaines paires de sommets, des chemins relativement longs. L'idée serait, dans ce cas, d'imposer une borne sur la longueur des chemins. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons discuté du problème du sous-graphe 2-arête connexe où chaque arête doit appartenir à un cycle de cardinalité bornée. Afin de formuler ce problème sous la forme d'un programme linéaire en nombres entiers, nous avons introduit la classe des contraintes de cycle. Intervenant directement dans la formulation du problème, cette classe d'inégalités a fait l'objet d'une étude approfondie. En effet, nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces contraintes définissent des facettes du polytope associé. Nous avons également discuté du problème de séparation de ces inégalités. Nous avons montré que ce problème peut se résoudre en temps polynomial lorsque la borne sur les cycles ne dépasse pas 4. Nous avons également discuté et introduit d'autres classes de contraintes valides. Pour certaines d'entre elles, nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles définissent des facettes. Pour développer un algorithme de coupes et branchements pour le problème, nous avons élaboré, pour ces classes d'inégalités, des algorithmes de séparation. Nos expérimentations ont montré que le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés semble difficile à résoudre pour des bornes comprises entre 4 et 7. On a également pu estimer l'effet des contraintes de cycle et des contraintes de cycle-partition dans notre algorithme.

Il serait intéressant maintenant d'étendre les résultats de ce chapitre à des problèmes de conception de réseaux plus généraux. En effet, la contrainte sur les cycles bornés devrait être considérée pour le problème du sous-graphe k -arête connexe ou le problème plus général de conception de réseaux où chaque sommet v est muni d'un type de connexité $r(v)$ et le problème est de déterminer un sous-graphe de coût minimum tel

qu'entre chaque paire de sommets s, t , il existe au moins $\min(r(s), r(t))$ chaînes arête-disjointes.

Chapitre 5

Le problème des deux chemins arête-disjoints de longueur bornée

Dans ce chapitre, nous allons étudier le problème des chemins arête-disjoints de longueur bornée entre des paires de terminaux dans un graphe non orienté. Nous allons nous intéresser en particulier au cas où le graphe comporte une seule paire de terminaux. Après l'introduction de ce problème et de quelques problèmes liés étudiés dans la littérature, nous donnerons une formulation de ce problème sous forme d'un programme linéaire en nombres entiers. Nous étudierons le polytope associé à ce problème et nous donnerons une description complète minimale de ce polytope quand la longueur est au plus 3. Nous discuterons enfin de quelques extensions de ces résultats au problème général. Ce travail, réalisé en collaboration avec David Huygens, a fait l'objet de l'article [57].

5.1 Introduction

Soient $G = (V, E)$ un graphe, s et t deux sommets de V et L un entier. On appelle *L - st -chemin* un chemin entre s et t de longueur au plus L . Si on associe à chaque arête $e \in E$ un coût $c(e)$, le *problème des deux chemins arête-disjoints de longueur bornée (THPP)* consiste à trouver deux L - st -chemins arête-disjoints de coût minimum. Soit

$$P(G, L) = \text{conv}\{x^F \in \mathbb{R}^m \mid (V, F) \text{ définit une solution du THPP}\},$$

le polytope associé à ce problème.

Une *st-coupe* est une coupe $\delta(W)$ telle que $s \in W$ et $t \in V \setminus W$. Il est clair que les contraintes suivantes sont valides pour $P(G, L)$.

$$0 \leq x(e) \leq 1 \quad \text{pour tout } e \in E, \quad (5.1)$$

$$x(\delta(W)) \geq 2 \quad \text{pour toute } st\text{-coupe } \delta(W). \quad (5.2)$$

Les inégalités (5.2) sont appelées *contraintes de st-coupe*.

Dans [21], Dahl considère le problème consistant à trouver un chemin de coût minimum entre deux sommets donnés du graphe de longueur au plus L . Il décrit une classe d'inégalités valides pour le polytope associé à ce problème de la manière suivante. Soit $V_0, \dots, V_{L+1}$ une partition de V en $L+2$ éléments non vides telle que $s \in V_0$ et $t \in V_{L+1}$. Soit T l'ensemble des arêtes $e = uv \in E$ telles que $u \in V_i$, $v \in V_j$ et $|i - j| > 1$. Alors l'inégalité

$$x(T) \geq 1 \quad (5.3)$$

est valide pour le polytope des L -*st*-chemins. On peut facilement étendre cette contrainte à notre problème. En effet, chacun des deux L -*st*-chemins doit utiliser une arête de T . Comme ces deux chemins sont arête-disjoints, la contrainte

$$x(T) \geq 2 \quad (5.4)$$

est valide pour le polyèdre associé au THPP. L'ensemble T est appelé une L -*st-coupe* et les inégalités du type (5.4) sont appelées *contraintes de L-st-coupe*. On peut noter qu'il y a un ordre dans l'ensemble des éléments de la partition. Ainsi, si on intervertit le rôle d'un ensemble V_i avec celui d'un ensemble V_j , alors, on obtient une nouvelle contrainte du type (5.4). On pose

$$Q(G, L) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x \text{ vérifie (5.1), (5.2), (5.4)}\}.$$

Malgré les intéressantes applications de ce problème, le THPP n'a encore, à notre connaissance, jamais été étudié. En revanche, plusieurs problèmes qui lui sont liés ont été dernièrement abordés. Dans [21], Dahl étudie le polytope des chemins de longueur bornée. Il montre que celui-ci est entièrement décrit par les inégalités (5.1)-(5.3) lorsque la borne sur les chemins ne dépasse pas 3.

Dans [23], Dahl et Johannessen considèrent le problème de conception de réseaux suivant. Etant donnés un graphe $G = (V, E)$, un ensemble de demandes $D \subset V^2$ et un coût sur les arêtes, trouver un sous-graphe de G de coût minimum tel qu'entre chaque paire de sommets dans D , il existe au moins un chemin n'utilisant qu'une ou deux arêtes. Ils montrent que ce problème est NP-difficile. Ils donnent une formulation

de ce problème en un programme linéaire en nombres entiers et décrivent des classes d'inégalités valides pour le polytope associé au problème. Ils décrivent également un algorithme de coupes pour ce problème et présentent quelques résultats numériques.

Le problème de trouver un arbre couvrant de poids minimum d'un graphe G tel que chaque nœud soit à une distance d'au plus H (en termes d'arêtes) d'une racine donnée, a été largement étudié [20, 43, 44, 48]. Ce problème est NP-difficile même pour $H = 2$ [20]. Gouveia [43] donne une formulation du problème en termes de multiflots. Il discute également d'une relaxation Lagrangienne améliorant la borne obtenue à partir d'un programme linéaire. Gouveia [48] et Gouveia et Requejo [44] considèrent la version Steiner du problème et discutent de certaines approches basées sur la relaxation Lagrangienne. Dans [20], Dahl étudie le problème lorsque $H = 2$ d'un point de vue polyédral. Il donne une description complète du polytope associé lorsque le graphe est une roue. Gouveia et Jansen discutent dans [45] d'un problème plus général. Dans leur modèle, deux types de liens peuvent être utilisés pour relier deux terminaux, chacun de ces types ayant une probabilité de panne différente. Le problème consiste à déterminer un arbre couvrant du graphe de poids minimum tel qu'un chemin entre un sommet racine, fixé, de l'arbre et tout autre nœud du réseau, ne dépasse pas une longueur H , et ait une probabilité de tomber en panne inférieure ou égale à un certain seuil. Ils formulent le problème comme un problème de multiflots et ils utilisent une relaxation Lagrangienne combinée avec un algorithme de sous-gradient pour obtenir des bornes inférieures. Dans [46, 47], Gouveia et Magnanti considèrent le problème où l'on cherche un arbre couvrant de poids minimum dont le diamètre n'excède pas une certaine valeur (le diamètre d'un graphe est la plus grande distance entre deux sommets du graphe). Ils présentent des formulations de multiflots et discutent de certains résultats expérimentaux.

Dans le cadre de ce problème, Dahl et Gouveia [22] étudient le sous-problème de trouver entre deux sommets donnés, un chemin de poids minimum ayant au plus K arêtes. Ils décrivent plusieurs classes d'inégalités valides et montrent que certaines de ces inégalités suffisent pour caractériser le polyèdre des solutions quand $K \leq 3$. Ils discutent également de l'application de ces résultats au problème qui consiste à trouver un arbre couvrant minimum dont la distance entre chaque nœud et la racine est bornée. Dans [15], Coullard, Gamble et Liu étudient la structure du polytope associé aux st -chemins de longueur L dans le cas où les chemins peuvent passer plus d'une fois par un même nœud. Ils présentent une formulation étendue du problème et utilisent la projection pour décrire le polyèdre associé. Ils discutent également de certaines classes d'inégalités définissant des facettes du polyèdre.

Itai, Perl et Shiloach [58] étudient la complexité de plusieurs variantes du problème

consistant à trouver le nombre maximum de L - st -chemins disjoints entre deux sommets s et t . Ils montrent que ces problèmes sont NP-complets quand $L \geq 5$ et polynomiaux pour certaines variantes quand $L \leq 4$. En particulier, ils décrivent un algorithme polynomial pour le cas où les chemins doivent être sommet-disjoints (resp. arête-disjoints) et $K \leq 4$ (resp. $K \leq 3$). Dans [9], Bley donne des algorithmes pour le calcul de chemins arête et sommet-disjoints de longueur bornée. Il montre en particulier que le problème de décision consistant à déterminer s'il existe un nombre donné de chemins arête-disjoints de longueur égale à 3 entre deux sommets est polynomial. Ce dernier résultat répond à une question restée ouverte dans [58].

Dans la suite de ce chapitre, nous allons étudier le polytope $P(G, L)$. Nous donnons tout d'abord une formulation du problème lorsque $L \leq 3$ et nous décrivons le polytope $P(G, L)$ dans ce cas. Nous présentons ensuite quelques propriétés structurales des facettes de $P(G, L)$. Ces propriétés seront utilisées par la suite pour démontrer le résultat principal. Enfin, nous discutons de certaines extensions de ces résultats au problème général quand le graphe comporte plusieurs paires de demandes. Nous donnons, dans la suite de ce paragraphe, quelques notations concernant les chemins.

Etant donnés deux sommets $u, v \in V$, uv représente une arête quelconque de $[u, v]$. Si $||[u, v]| = 1$ alors on écrit aussi $[u, v] = \{uv\}$. Un chemin P de G est une séquence de sommets $(u_1, \dots, u_q)$ telle que $u_i u_{i+1}$ soit une arête pour $i = 1, \dots, q-1$ et aucun sommet ne soit rencontré plus d'une fois dans P . Si deux chemins arête-disjoints P et P' passent par les mêmes sommets consécutifs u_i, u_{i+1} alors cela signifie que P et P' utilisent des arêtes différentes entre u_i et u_{i+1} . Si $P = (u_1, \dots, u_{q+1})$, alors on dira que P est de longueur q (q étant le nombre d'arêtes de P).

Soient s et t deux sommets de V . Une st -coupe est une coupe définie par un ensemble de sommets W tel que $s \in W$ et $t \in V \setminus W$.

5.2 Formulation pour $L = 2$ et 3

Dans cette section, nous allons montrer que les contraintes de st -coupe et les contraintes de L - st -coupe avec les contraintes triviales et les contraintes d'intégrité donnent une formulation du problème comme un programme linéaire en nombres entiers lorsque $L \leq 3$. Pour cela, nous donnons d'abord le lemme suivant.

Lemme 5.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe avec $E \neq \emptyset$ et s et t deux sommets de V . Supposons que chaque arête de E appartient à un 3- st -chemin (resp. 2- st -chemin) et*

qu'il n'existe pas dans G deux 3- st -chemins (resp. 2- st -chemins) arête-disjoints. Alors, il existe une arête appartenant à tous les 3- st -chemins (resp. 2- st -chemins).

Preuve. Nous montrons le résultat pour $L = 3$. La preuve pour $L = 2$ peut être déduite de celle pour $L = 3$.

Supposons tout d'abord que $st \in E$. S'il existe un autre 3- st -chemin dans G n'utilisant pas st , ces deux chemins seraient arête-disjoints, ce qui contredit notre hypothèse. Donc st appartient à tous les 3- st -chemins de G .

Supposons maintenant que $st \notin E$. Considérons le graphe $G' = G \setminus \{s, t\}$. Si G' contient deux arêtes $e = uv$ et $e' = u'v'$ qui ne sont pas adjacentes, puisque chaque arête appartient à un 3- st -chemin, il s'ensuit que le 3- st -chemin dans G contenant e est composé soit des arêtes su, uv, vt , soit des arêtes sv, vu, ut . De la même manière, le 3- st -chemin contenant e' est composé soit des arêtes $su', u'v', v't$, soit des arêtes $sv', v'u', u't$. Or ces deux chemins sont arête-disjoints, une contradiction. Le graphe G' ne contient donc pas deux arêtes qui ne sont pas adjacentes. Les arêtes de G' , s'il y en a, forment donc soit une étoile, soit un triangle.

Supposons tout d'abord que les arêtes de G' forment un triangle avec les nœuds u, v et w . S'il y a un chemin de longueur 2 entre s et t dans G , il doit passer par un sommet de G' , disons u' . Supposons que u' appartienne au triangle (si le sommet n'appartient pas au triangle, le raisonnement est le même) et, s.p.d.g., $u' = u$. D'un autre côté, vw doit appartenir à un 3- st -chemin de G . On peut facilement voir dans ce cas que le 3- st -chemin de G contenant l'arête vw et le chemin su, ut sont arête-disjoints, ce qui est impossible. Il n'y a donc pas de chemin de longueur 2 entre s et t dans G . Considérons maintenant l'arête uv . On peut supposer, s.p.d.g., que le 3- st -chemin auquel elle appartient est su, uv, vt . L'arête vw doit alors appartenir au chemin sw, wv, vt , sinon, on créerait un chemin arête-disjoint du premier (celui contenant uv). Aussi le 3- st -chemin contenant uw doit utiliser soit wt , soit ut . Mais dans ces deux cas, on a deux 3- st -chemins arête-disjoints, une contradiction.

Supposons maintenant que G' ne contient pas d'arêtes. Ceci signifie que tous les 3- st -chemins de G sont de longueur 2. Comme ils ne peuvent pas être arête-disjoints, ils doivent tous avoir le même sommet central u . De plus, les ensembles $[s, u]$ et $[u, t]$ ne peuvent pas être formés tous les deux de plus d'une arête. Sinon, on aurait deux 3- st -chemins arête-disjoints. Donc une des arêtes su et ut appartient à tous les 3- st -chemins.

Supposons finalement que les arêtes de G' induisent une étoile et soient u le sommet central de cette étoile (si l'étoile n'est induite que par une seule arête ou par un ensemble d'arêtes parallèles, alors on choisit comme nœud central l'une des deux extrémités) et $u_1, \dots, u_p$ les sommets adjacents à u .

S'il existe un chemin entre s et t de longueur 2, alors, on peut supposer, s.p.d.g., qu'il

passer par le sommet u . Supposons que le 3- st -chemin contenant l'arête uu_1 est de la forme (s, u, u_1, t) (le cas où le chemin est de la forme (s, u_1, u, t) peut être traité par symétrie). L'arête su ne peut donc pas avoir d'arête parallèle. Si, de plus $p \geq 2$ alors tous les 3- st -chemins contenant les arêtes uu_i , $i = 1, \dots, p$, doivent passer par les sommets s, u, u_i et t dans cet ordre. L'arête su appartient donc à tous les 3- st -chemins. Considérons maintenant le cas où tous les 3- st -chemins sont de longueur exactement 3. Si $p \geq 2$, par un raisonnement analogue, on peut montrer qu'il existe une arête appartenant à tous les 3- st -chemins. Supposons donc que $p = 1$. Si l'arête uu_1 n'a pas d'arête parallèle alors elle appartient clairement à tous les 3- st -chemins. Supposons donc que uu_1 possède au moins une arête parallèle. Dans ce cas, soit su , soit u_1t n'a pas d'arête parallèle, sinon, on aurait deux 3- st -chemins arête-disjoints. L'arête parmi $\{su, u_1t\}$ n'ayant pas d'arête parallèle appartient donc à tous les 3- st -chemins de G . $\square$

Théorème 5.2 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et L égal à 2 ou 3. Alors le THPP est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant :*

$$\text{Min}\{cx \mid x \in Q(G, L), x \in \{0, 1\}^m\}.$$

Preuve. Pour prouver le théorème, il suffit de montrer que toute solution entière x de $Q(G, L)$ induit une solution du THPP. Pour cela, supposons que x ne représente pas une solution du THPP et qu'il vérifie les contraintes (5.1) et (5.2). Nous allons montrer qu'il existe nécessairement une contrainte du type (5.4) violée par x . Soit G_x le graphe induit par x . Comme x n'est pas une solution du problème, G_x ne contient pas deux 3- st -chemins arête-disjoints.

Supposons tout d'abord que G_x ne contient aucun 3- st -chemin. Considérons la partition $V_0, \dots, V_{L+1}$ avec $V_0 = \{s\}$, V_i l'ensemble des nœuds à distance i de s dans G_x pour $i = 1, \dots, L$ et $V_{L+1} = V \setminus \left(\bigcup_{i=0}^L V_i\right)$. Comme il n'existe pas de 3- st -chemin dans G_x , il est clair que $t \in V_{L+1}$. De plus, comme les contraintes de st -coupe sont vérifiées par x , il existe au moins un chemin entre s et t . Les ensembles V_i , $i = 1, \dots, L+1$ existent tous. Enfin, aucune arête de G_x ne peut être une corde de la partition $V_0, \dots, V_{L+1}$. En effet, s'il existe une telle arête $e = v_i v_j \in [V_i, V_j]$ avec $|i - j| > 1$ et $i < j$, alors v_j serait à une distance d'au plus $i + 1$ de s , une contradiction. La contrainte (5.4) correspondant à cette partition est donc violée par x .

Supposons maintenant que G_x contienne un 3- st -chemin. Le sous-graphe G'_x de G_x induit par les arêtes appartenant à un 3- st -chemin dans G_x est donc connexe. De plus, comme x n'est pas une solution du THPP, G'_x ne contient pas deux 3- st -chemins arête-disjoints. Comme $L \leq 3$, par le lemme 5.1, il existe une arête e_0 dans G'_x appartenant à tous les 3- st -chemins. Soit $\tilde{G}_x$ le graphe obtenu à partir de G_x en supprimant l'arête e_0 . Le graphe $\tilde{G}_x$ ne contient donc pas de 3- st -chemin. Noter que $\tilde{G}_x$ est connexe.

Considérons de nouveau la partition $V_0, \dots, V_{L+1}$ introduite ci-dessus. Remarquons que e_0 est la seule corde de la partition. Si T est l'ensemble de ces cordes, on a $x(T) \leq 1$ et donc l'inégalité du type (5.4) associée à cette partition est violée par x . $\square$

Les inégalités (5.1), (5.2) et (5.4) avec les contraintes d'intégrité ne suffisent malheureusement pas pour formuler le problème quand $L \geq 4$. En effet, prenons par exemple le graphe de la figure 5.1 avec $L = 4$. On peut facilement remarquer que le vecteur d'incidence associé à ce graphe vérifie toutes ces contraintes. Cependant, il ne contient pas deux 4- st -chemins arête-disjoints.



FIG. 5.1 –

5.3 Polytope du THPP quand $L = 2, 3$

Ayant donné dans la section précédente une formulation du problème THPP lorsque $L = 2, 3$, une question qui se pose naturellement est la suivante. La relaxation linéaire de ce problème reste-t-elle entière? Le théorème suivant montre que la réponse à cette question est par l'affirmative.

Théorème 5.3 $P(G, L) = Q(G, L)$ si $L = 2, 3$.

La preuve de ce théorème est donnée dans la section 5.5. Dans ce qui suit, nous discutons de la dimension de $P(G, L)$ et nous donnons quelques propriétés de sa structure faciale.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une arête $e \in E$ est dite L - st -essentielle si e appartient à une st -coupe de cardinalité 2 où à une L - st -coupe de cardinalité 2. On peut donc remarquer qu'une arête L - st -essentielle appartient à toutes les solutions du THPP. Soit E^* l'ensemble des arêtes L - st -essentielles. Le théorème suivant caractérise la dimension de $P(G, L)$.

Théorème 5.4 Si $L = 2, 3$, alors $\dim(P(G, L)) = |E| - |E^*|$.

Preuve. Soit $\delta(W)$ une coupe (resp. T une L -st-coupe) de cardinalité 2. Comme l'inégalité $x(\delta(W)) \geq 2$ (resp. $x(T) \geq 2$) doit être satisfaite par toutes les solutions du THPP, on a $x(e) = 1$ pour tout $e \in \delta(W)$ (resp. $e \in T$). Ceci implique que $\dim(P(G, L)) \leq |E| - |E^*|$.

Maintenant, si une arête e n'est pas L -st-essentielle, alors l'ensemble d'arêtes $E \setminus \{e\}$ induit une solution du THPP. Considérons les solutions du THPP données par les ensembles d'arêtes E et $E \setminus \{e\}$ pour tout $e \in E \setminus E^*$. On peut facilement voir que ces solutions sont affinement indépendantes. En conséquence, $\dim(P(G, L)) \geq |E| - |E^*|$. $\square$

Corollaire 5.5 *Si $G = (V, E)$ est complet, $|V| \geq 4$ et $L = 2, 3$, alors $P(G, L)$ est de pleine dimension.*

On pose

$$T(G) = \{F \subseteq E \mid (V, F) \text{ est une solution du THPP}\}.$$

Théorème 5.6 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et e une arête de E . Soit $G' = (V, E')$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e . Si $\dim(P(G, L)) = \dim(P(G', L)) + 1$, alors une description du polytope $P(G', L)$ peut être obtenue à partir de celle de $P(G, L)$ en supprimant les variables associées à l'arête e .*

Preuve. Soient $d' = \dim(P(G', L))$ et $a'x \geq \alpha$ une facette de $P(G', L)$. Alors il existe d' solutions $T_1, \dots, T_{d'}$ de $T(G')$ dont les vecteurs d'incidence sont affinement indépendants et vérifient $a'x \geq \alpha$ à l'égalité. Noter que ces solutions appartiennent également à $T(G)$. Soit

$$\sigma = \min\{\alpha - a'(T) \mid T \in T(G) \text{ et } e \in T\}.$$

Soient $d = \dim(P(G, L)) = d' + 1$ et $a \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\begin{aligned} a(f) &= a'(f), & \text{si } f \in E \setminus \{e\}, \\ a(f) &= \sigma, & \text{si } f = e. \end{aligned}$$

Il est clair que la contrainte $ax \geq \alpha$ est valide pour $P(G, L)$. Soit T_0 la solution de $T(G)$ qui réalise σ . Notons que x^{T_0} satisfait $ax \geq \alpha$ à l'égalité. De plus, les solutions $T_0, T_1, \dots, T_{d'}$ constituent une famille de d solutions de $T(G)$ dont les vecteurs d'incidence vérifient tous $ax \geq \alpha$ à l'égalité. Comme ces vecteurs d'incidences sont affinement indépendants, il en résulte que $ax \geq \alpha$ définit une facette de $P(G, L)$. Comme la contrainte $a'x \geq \alpha$ peut être obtenue à partir de $ax \geq \alpha$ en annulant le coefficient de e , le résultat s'ensuit. $\square$

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons que $G = (V, E)$ est un graphe complet sur au moins 4 sommets et par conséquent, par le corollaire 5.5, $P(G, L)$ est de pleine dimension. En effet, une instance du THPP sur un graphe incomplet peut être ramenée à un problème sur un graphe complet en associant aux arêtes manquantes un coût suffisamment grand. De plus, par le théorème 5.6, si $G' = (V', E')$ est un sous-graphe de G dont le polytope est de pleine dimension, alors une description linéaire de $P(G', L)$ peut être obtenue à partir de celle de $P(G, L)$ en mettant les variables associées aux arêtes manquantes à 0.

Etant donnée une contrainte $ax \geq \alpha$ définissant une facette de $P(G, L)$, on pose

$$\tau_a = \{F \in T(G) \mid ax^F = \alpha\}.$$

Dans ce qui suit, nous considérons $a(e)$ comme un poids sur l'arête e . Ainsi, chaque solution $S \in \tau_a$ aura un poids $a(S)$ égal à α , et chaque ensemble de $T(G)$ un poids $\geq \alpha$.

Le lemme suivant, donné sans preuve, établit des propriétés de la contrainte $ax \geq \alpha$ quand elle définit une facette différente d'une contrainte triviale ou d'une contrainte de coupe.

Lemme 5.7 1) Soit $ax \geq \alpha$ une inégalité définissant une facette de $P(G, L)$ différente d'une inégalité triviale. Alors pour chaque arête $e \in E$, il existe un sous-ensemble d'arêtes dans τ_a contenant e et un autre ne contenant pas e .

2) Soit $ax \geq \alpha$ une inégalité définissant une facette de $P(G, L)$ différente d'une contrainte de st-coupe. Alors, pour chaque st-coupe $\delta(W)$, il existe un ensemble d'arêtes dans τ_a contenant au moins trois arêtes de $\delta(W)$.

Lemme 5.8 Soit $ax \geq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P(G, L)$ différente d'une contrainte triviale. Alors $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$ et $\alpha > 0$.

Preuve. Supposons qu'il existe une arête $e \in E$ avec $a(e) < 0$. Comme $ax \geq \alpha$ est différente de l'inégalité $x(e) \leq 1$, par le lemme 5.7 1), il doit exister dans τ_a un sous-ensemble d'arêtes S ne contenant pas e . Comme $S' = S \cup \{e\}$ appartient à $T(G)$, on obtient $\alpha \leq ax^{S'} = ax^S + a(e) < ax^S = \alpha$, une contradiction. On a donc $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$.

Puisque $ax \geq \alpha$ définit une facette de $P(G, L)$, il doit exister au moins une arête f avec $a(f) > 0$. Comme $ax \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, par le lemme 5.7 1), il existe un ensemble d'arêtes $\bar{S}$ dans τ_a contenant f . Ceci implique que $\alpha = ax^{\bar{S}} \geq a(f) > 0$. $\square$

Le lemme 5.7 sera fréquemment utilisé dans la suite du chapitre. Nous l'utiliserons parfois sans lui faire référence explicitement. Le lemme suivant montre que toutes les arêtes parallèles entre deux sommets dans G ont le même coefficient dans chaque inégalité non triviale définissant une facette de $P(G, L)$ pour $L \leq 3$.

Lemme 5.9 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $L \leq 3$. Soit $ax \geq \alpha$ une contrainte non triviale définissant une facette de $P(G, L)$. Soit $[u, v] = \{e_1, \dots, e_p\}$ un ensemble d'arêtes parallèles entre u et v dans G . Alors $a(e_i) = a(e_j)$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$.*

Preuve. Nous allons montrer le résultat pour $L = 3$. La preuve pour $L = 2$ est similaire.

Nous montrons tout d'abord que toutes les arêtes de $[u, v]$ ont le même coefficient sauf éventuellement une qui possède un coefficient plus petit. En effet, supposons qu'il existe trois arêtes $e_1, e_2, e_3 \in [u, v]$ telles que $a(e_1) > a(e_2) \geq a(e_3)$ et soit S une solution de τ_a contenant e_1 . On suppose que S est minimal, et en conséquence, au moins une des arêtes e_2 et e_3 n'est pas dans S . Alors, on peut remplacer dans S l'arête e_1 par une des arêtes e_2 et e_3 et on obtient une solution de $T(G)$ de poids plus petit, une contradiction.

Supposons maintenant qu'il existe deux arêtes $e_1, e_2 \in [u, v]$ telles que $a(e_1) > a(e_2)$. Par la remarque précédente, on a $a(e) = a(e_1)$ pour tout $e \in [u, v] \setminus \{e_1, e_2\}$.

Assertion 1 1) Soit S une solution minimale de τ_a . Si S contient e_1 alors S doit contenir e_2 .

2) Si une solution de τ_a ne contient pas e_2 , alors elle ne contient aucune arête de $[u, v]$.

Preuve. 1) Si $e_1 \in S$ et $e_2 \notin S$ alors, $S' = (S \setminus \{e_1\}) \cup \{e_2\}$ appartient à $T(G)$. Comme $ax^{S'} < \alpha$, on a une contradiction.

2) Supposons qu'il existe une solution de τ_a contenant e_i , $i \in \{1, \dots, p\} \setminus \{2\}$ et pas e_2 . Comme $a(e_i) > a(e_2)$, en remplaçant e_i par e_2 , on obtient une solution de $T(G)$ de poids $< \alpha$, une contradiction. ♦

Comme $ax \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, par le lemme 5.7 1), il existe un ensemble d'arêtes S_1 dans τ_a contenant e_1 . Comme $a(e_1) > 0$, S_1 peut être choisi minimal et donc S_1 consiste en deux 3-*st*-chemins arête-disjoints. Soit L_1 le 3-*st*-chemin de S_1 contenant e_1 . Par l'assertion 1 1), il s'ensuit que e_2 doit appartenir au second 3-*st*-chemin, L_2 , de S_1 . Notons que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. On peut remarquer que L_1 et L_2

passent respectivement par les arêtes e_1 et e_2 dans le même sens en partant de s . En effet, si ce n'est pas le cas, on a un chemin de la forme (s, u, v, t) et l'autre de la forme (s, v, u, t) . Or dans ce cas, les arêtes e_1 et e_2 peuvent être supprimées et on a une solution admissible de poids strictement inférieur à α , une contradiction. Supposons donc, s.p.d.g., que u est la première extrémité de e_1 et e_2 traversée par L_1 et L_2 .

Soient L_1^s et L_1^t (resp. L_2^s et L_2^t) les sous-chemins de L_1 (resp. L_2) entre s et u et entre v et t . Il est clair que $|L_i^s \cup L_i^t| \leq 2$, pour $i = 1, 2$. Notons que nous avons soit $L_1^s = \emptyset = L_2^s$, soit $L_1^s \neq \emptyset \neq L_2^s$. De plus, si on est dans le dernier cas, on a $|L_1^t| \leq 1$ et $|L_2^t| \leq 1$. Notons également que, par symétrie, ces propriétés restent vraies si on échange s et t . Ceci implique que chaque st -chemin consistant en une combinaison de sous-chemins de la forme $L_i^s \cup \{e_j\} \cup L_k^t$ est de longueur au plus 3 pour tous $i, j, k \in \{1, 2\}$. En d'autres termes, on a

$$|L_i^s \cup L_k^t| \leq 2, \text{ pour } i, k \in \{1, 2\}.$$

Par le lemme 5.7 1), il doit également exister un ensemble d'arêtes S_2 dans τ_a qui ne contient pas e_2 . Par l'assertion 1 2) on a $[u, v] \cap S_2 = \emptyset$. Soient P_1 et P_2 deux 3- st -chemins arête-disjoints dans S_2 . On a alors l'assertion suivante.

Assertion 2 Au moins un des ensembles $P_1 \cap L_1$ et $P_2 \cap L_2$ ($P_2 \cap L_1$ et $P_1 \cap L_2$) n'est pas vide.

Preuve. Supposons, au contraire, que $P_1 \cap L_1 = \emptyset = P_2 \cap L_2$. Comme $P_2 \cup L_2 \in T(G)$, il s'ensuit que $a(P_2) \geq a(L_1)$. Soit $L'_1 = (L_1 \setminus \{e_1\}) \cup \{e_2\}$. Comme $e_2 \notin S_2$ et donc $e_2 \notin P_1$, on a $P_1 \cap L'_1 = \emptyset$. Ainsi $P_1 \cup L'_1 \in T(G)$ et donc $a(L'_1) \geq a(P_2)$. Par conséquent, $a(L'_1) \geq a(L_1)$ et donc $a(e_2) \geq a(e_1)$, une contradiction. ♦

Par l'assertion 2, on peut supposer, s.p.d.g., que $P_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. De même, toujours par l'assertion 2, au moins un des ensembles $P_1 \cap L_1$ et $P_2 \cap L_2$ n'est pas vide. Dans ce qui suit, on suppose que $P_2 \cap L_2 \neq \emptyset$. Le cas où $P_1 \cap L_1 \neq \emptyset$ peut être traité de manière analogue. Comme $e_2 \notin S_2$ et $P_1 \cap L_2 \neq \emptyset \neq P_2 \cap L_2$, il s'ensuit que $|L_2| = 3$.

Si $|L_2^s| = 2$, alors $v = t$ et L_2 est de la forme (s, w, u, t) avec $w \neq s, t, u$. Soit e_0 l'arête utilisée par L_2 entre u et w . Comme $P_1 \cap L_2 \neq \emptyset \neq P_2 \cap L_2$, un des 3- st -chemins de S_2 , disons P_1 , doit utiliser e_0 . De plus, comme $[u, v] \cap S_2 = \emptyset$, le chemin P_1 est de la forme (s, u, w, t) . Soit $\{f\} = P_1 \cap [w, t]$. Comme $(S_1 \setminus \{e_0, e_1\}) \cup \{f\}$ et $(S_2 \setminus \{e_0, f\}) \cup \{e_2\}$ appartiennent à $T(G)$, on a $a(f) \geq a(e_0) + a(e_1)$ et $a(e_2) \geq a(e_0) + a(f)$ respectivement. Or ceci implique que $a(e_2) \geq a(e_1)$, une contradiction.

Par conséquent, $|L_2^s| = 1$ et par symétrie, on a $|L_2^t| = 1$. Ainsi L_1 et L_2 sont tous les deux de la forme (s, u, v, t) . Comme $P_1 \cap L_2 \neq \emptyset \neq P_2 \cap L_2$ et $S_2 \cap [u, v] = \emptyset$, on peut supposer,

s.p.d.g., que $P_1 \cap [s, u] \neq \emptyset$ et $P_2 \cap [v, t] \neq \emptyset$. Ceci implique que $P_1 \cap L_1 = \emptyset = P_2 \cap L_1$. Maintenant, en remplaçant e_1 et L_1^t par le sous-chemin P_1^{ut} de P_1 entre u et t , on obtient une solution de $T(G)$. On obtient alors $a(P_1^{ut}) \geq a(e_1) + a(L_1^t)$. De manière similaire, si on remplace P_1^{ut} par e_2 et L_1^t dans S_2 , on obtient $a(e_2) + a(L_1^t) \geq a(P_1^{ut})$. Il en résulte que $a(e_2) \geq a(e_1)$, ce qui est impossible et le lemme est montré. $\square$

5.4 Propriétés structurales

Dans cette section, nous allons donner quelques propriétés structurales des contraintes différentes des contraintes triviales et des contraintes de st -coupe définissant des facettes de $P(G, L)$. Ces propriétés seront utiles pour démontrer le résultat principal dans la section suivante.

Soient $L = 2, 3$ et $ax \geq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P(G, L)$ différente d'une contrainte triviale et d'une contrainte de st -coupe. Nous avons les lemmes suivants. Le premier est un lemme technique qui sera fréquemment utilisé dans cette section.

Lemme 5.10 *Soient S_1 et S_2 deux ensembles d'arêtes de τ_a . Soient P_1 et P'_1 deux L -st-chemins arête-disjoints de S_1 . Supposons qu'il existe un L -st-chemin P_2 dans S_2 tel que $P_2 \cap P'_1 = \emptyset$. Alors, pour tout L -st-chemin P n'intersectant pas S_2 , on a $a(P) \geq a(P_1)$.*

Preuve. Soit S'_1 (resp. S'_2) l'ensemble d'arêtes obtenu à partir de S_1 (resp. S_2) en remplaçant P_1 par P_2 (resp. P_2 par P). Comme $P_2 \cap P'_1 = \emptyset$ et $P \cap P_2 = \emptyset$, les ensembles S'_1, S'_2 appartiennent à $T(G)$. Il s'ensuit que $a(P_2) \geq a(P_1)$ et $a(P) \geq a(P_2)$. On a donc $a(P) \geq a(P_1)$. $\square$

Lemme 5.11 *Il n'existe pas de L -st-chemin de poids nul.*

Preuve. Nous allons montrer le résultat pour $L = 3$. La preuve pour $L = 2$ peut être faite d'une manière analogue.

Supposons le contraire. Soit P_0 un plus court 3-st-chemin tel que $a(e) = 0$ pour tout $e \in P_0$. Dans ce qui suit, on suppose que $|P_0| = 3$. Les cas où $|P_0|$ est égal à 2 ou 1 peuvent être traités de la même manière.

Supposons que $P_0 = (s, u_1, u_2, t)$. Par le lemme 5.9, il s'ensuit que $a(e) = 0$ pour tout $e \in [s, u_1] \cup [u_1, u_2] \cup [u_2, t]$. Puisque $|P_0| = 3$, on a $a(e) > 0$ pour toute arête e formant

une corde de P_0 . Comme $ax \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, par le lemme 5.7 1), il doit exister un ensemble d'arêtes S dans τ_a ne contenant pas l'arête u_2t . Soient P_1 et P_2 deux 3- st -chemins arête-disjoints de S .

Assertion 1 Soient T une solution de τ_a et T_1 et T_2 deux 3- st -chemins arête-disjoints de T . Alors un des deux chemins T_1 et T_2 est nul si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- 1) $u_2t \notin T$,
- 2) $su_1 \notin T$,
- 3) $u_1u_2 \notin T$ et $[u_2, t]$ n'est pas réduit à une seule arête.

Preuve. Supposons que 1) est vérifiée et soient T_1 et T_2 deux 3- st -chemins de T contenant chacun au moins une arête avec une valeur strictement positive. Alors T_1 et T_2 doivent tous les deux intersecter P_0 . Sinon, si par exemple $T_1 \cap P_0 = \emptyset$, l'ensemble formé des deux chemins T_1 et P_0 serait une solution de poids strictement plus petit que α , une contradiction. Comme $u_2t \notin T$, un des deux chemins T_1 et T_2 , disons T_1 doit utiliser l'arête u_1u_2 . Puisque T_1 doit utiliser au moins une arête ayant une valeur strictement positive dans a , T_1 doit donc être de la forme (s, u_2, u_1, t) . Etant donné que $|P_0| = 3$, on doit avoir $a(u_1t) > 0$. En remplaçant les arêtes u_1u_2 et u_1t par l'arête u_2t , on obtient une solution de $T(G)$. Comme $a(u_2t) = 0$, il en résulte que $a(u_1t) = 0$, une contradiction.

Par symétrie, on montre l'assertion lorsque la condition 2) est vérifiée.

Supposons maintenant que $u_1u_2 \notin T$. On montre comme pour le cas précédent que T_1 et T_2 doivent intersecter P_0 . Puisque $u_1u_2 \notin T$, on peut supposer, s.p.d.g., que $su_1 \in T_1$ et $u_2t \in T_2$. On a alors le sous-chemin $T_1^{u_1t}$ de T_1 entre u_1 et t qui possède un poids strictement positif. Comme $|[u_2, t]| \geq 2$, il existe une arête $e \in [u_2, t]$ qui n'appartient pas à T_2 . On peut alors remplacer $T_1^{u_1t}$ par les arêtes u_1u_2 et e . Comme $a(e) = a(u_1u_2) = 0$, on a $a(T_1^{u_1t}) = 0$, une contradiction. $\blacklozenge$

Par l'assertion 1, il s'ensuit qu'au moins un des deux chemins P_1 et P_2 , disons P_1 , ne contient que des arêtes avec des coefficients nuls. Ceci implique que $P_1 \cap P_0 \neq \emptyset$. Sinon, $P_1 \cup P_0$ formerait une solution admissible et on aurait $\alpha = 0$, ce qui contredit le lemme 5.8. De plus, par le même argument, au moins un des ensembles $[s, u_1]$, $[u_1, u_2]$ et $[u_2, t]$ ne doit contenir qu'une seule arête, sinon, on aurait deux chemins arête-disjoints de longueur 3 entre s et t dont les arêtes ont des coefficients nuls.

Assertion 2 1) $|[u_2, t]| \geq 2$.

2) $||[s, u_1]|| \geq 2$.

Preuve. Nous montrons 1), 2) peut être obtenu par symétrie. Supposons que $||[u_2, t]|| = 1$. Dans ce cas, P_1 ne peut utiliser que l'arête su_1 de P_0 . En effet, si P_1 utilise l'arête u_1u_2 , comme $u_2t \notin S$, P_1 doit également utiliser l'arête su_2 qui est de coefficient strictement positif dans a . Mais ceci contredit le fait que $a(P_1) = 0$. Le chemin P_1 est donc de la forme (s, u_1, v, t) avec $v \neq u_2$. On a alors $||[s, u_1]|| = 1$. Sinon, on aurait deux 3- st -chemins arête-disjoints de poids nuls entraînant $\alpha = 0$, une contradiction. En considérant une solution de τ_a ne contenant pas l'arête su_1 et en suivant un raisonnement analogue, on montre qu'il existe un sommet $w \neq u_1$ et un chemin $P'_1 = (s, w, u_2, t)$ de poids nul. Comme P_1 et P'_1 sont arête-disjoints ceci entraîne une nouvelle fois $\alpha = 0$, ce qui est impossible. $\blacklozenge$

Par l'assertion 2, il s'ensuit que $||[u_1, u_2]|| = 1$. Le chemin P_1 doit utiliser l'arête u_1u_2 . En effet, si ce n'est pas le cas, P_1 utilise uniquement l'arête su_1 et passe par un sommet $z \neq u_2$. Or, comme $||[s, u_1]|| \geq 2$, on voit facilement qu'on a deux 3- st -chemins arête-disjoints de poids nuls. Et ceci implique $\alpha = 0$, ce qui est impossible. Le chemin P_1 est donc de la forme (s, u_1, u_2, t) . Considérons maintenant une solution S' de τ_a ne contenant pas l'arête u_1u_2 . Soit P''_1 et P''_2 deux 3- st -chemins arête-disjoints de S' . Comme par l'assertion 2 on a $||[u_2, t]|| \geq 2$, il résulte de l'assertion 1 qu'un des deux chemins P''_1 et P''_2 , disons P''_1 , doit être de poids nul. De plus, on montre également que P''_1 doit utiliser au moins une arête de P_0 . Comme $u_1u_2 \notin S'$, on peut supposer s.p.d.g. que $su_1 \in P''_1$ et donc $P''_1 = (s, u_1, v', t)$ avec $v' \neq u_2$. Comme $||[s, u_1]|| \geq 2$, on voit facilement que l'on a deux 3- st -chemins arête-disjoints de poids nul. Mais ceci entraîne une nouvelle fois $\alpha = 0$. Par le lemme 5.8, ceci est impossible et le lemme est prouvé. $\square$

Dénotons par U (resp. U') l'ensemble des nœuds u tels que $a(e) = 0$ pour tout $e \in [s, u]$ (resp. $a(e) = 0$ pour tout $e \in [u, t]$). Soit $W = V \setminus (\{s, t\} \cup U \cup U')$. On a la remarque suivante.

Remarque 5.12 1) $a(e) = 0$ pour tout $e \in [s, U] \cup [U', t]$.
 2) $a(e) > 0$ pour tout $e \in [s, U'] \cup [U, t]$.
 3) Si $L = 3$ alors $a(e) > 0$ pour tout $e \in [U, U']$.
 4) Si $W \neq \emptyset$, alors $a(e) > 0$ pour tout $e \in [s, W] \cup [W, t]$.

Preuve. Ces assertions se déduisent du fait que par le lemme 5.9, pour toute paire de sommets $u, v \in V$ telle que $||[u, v]|| \geq 2$, on ait $a(e) = a(e')$ pour tous $e, e' \in [u, v]$, et par le lemme 5.11, il n'existe pas de L - st -chemin de poids nul. $\square$

Lemme 5.13 $U \neq \emptyset \neq U'$.

Preuve. Nous allons montrer le lemme pour U . La preuve pour U' peut être obtenue par symétrie.

Comme $ax \geq \alpha$ est différente de la contrainte de st -coupe correspondant au sommet s , par le lemme 5.7 2), il existe $F \in \tau_a$ tel que F contienne au moins trois arêtes de $\delta(s)$. Comme seulement deux de ces arêtes peuvent être utilisées par deux L - st -chemins arête-disjoints, il doit exister une arête $e \in F \cap \delta(s)$ telle que $T \setminus \{e\} \in T(G)$. Si le sommet u est l'extrémité de e différente de s , par le lemme 5.9 on a $a(e) = 0$ pour tout $e \in [s, u]$ et $u \in U$. $\square$

Lemme 5.14 Soient $S \in \tau_a$ et P_1 un L - st -chemin de S passant par un nœud u de $V \setminus \{s, t\}$. Soit $\tilde{P}_1$ le sous-chemin de P_1 entre s (resp. t) et u . Soit P un chemin entre s (resp. t) et u tel que $a(P) = 0$ et $|P| \leq |\tilde{P}_1|$. Si $a(\tilde{P}_1) > 0$, alors $P \cap P_2 \neq \emptyset$ pour tout 3- st -chemin P_2 de S avec $P_2 \cap P_1 = \emptyset$.

Preuve. Si $P \cap P_2 = \emptyset$, comme $|P| \leq |\tilde{P}_1|$, l'ensemble $(S \setminus \tilde{P}_1) \cup P$ est une solution de $T(G)$ et, par conséquent, $a(\tilde{P}_1) \leq a(P)$. Comme $a(P) = 0$ et $a(\tilde{P}_1) > 0$, ceci est impossible. $\square$

Le lemme suivant montre que les arêtes ayant leurs deux extrémités dans U (U') ont des valeurs nulles dans a .

Lemme 5.15 $a(e) = 0$, pour tout $e \in E(U) \cup E(U')$.

Preuve. Supposons que $L = 2$. Soit e une arête de $E(U) \cup E(U')$. Par le lemme 5.7 1), il existe un ensemble d'arêtes F dans τ_a contenant e . L'arête e ne pouvant pas appartenir à un 2- st -chemin, $F \setminus \{e\} \in T(G)$ et on a donc $a(e) = 0$.

Considérons maintenant le cas où $L = 3$. Supposons, au contraire, qu'il existe une arête dans $E(U)$ (le cas pour U' est similaire) ayant une valeur strictement positive dans a . Soient u_1 et u_2 les extrémités de cette arête. Par le lemme 5.9, il s'ensuit que $a(e) > 0$ pour tout $e \in [u_1, u_2]$ et en particulier $a(u_1 u_2) > 0$. Par le lemme 5.7 1), il existe un ensemble d'arêtes $S_1 \in \tau_a$ contenant l'arête $u_1 u_2$. Soient P_1 et P'_1 deux 3- st -chemins arête-disjoints de S_1 . Comme $a(u_1 u_2) > 0$, l'arête $u_1 u_2$ doit appartenir à l'un de ces deux chemins, disons P_1 . On peut alors supposer, s.p.d.g., que $P_1 = (s, u_1, u_2, t)$. Comme $a(su_1) + a(u_1 u_2) > 0$, par le lemme 5.14, P'_1 doit contenir les arêtes de $[s, u_2]$ (chacune de ces arêtes forme un chemin de poids nul entre s et u_2). Or, ceci n'est

possible que si $||[s, u_2]|| = 1$. Par conséquent, on suppose dans la suite de la preuve que $[s, u_2] = \{su_2\}$ et $su_2 \in P'_1$. On suppose également que le chemin P'_1 est de longueur 3 et passe alors par les sommets s, u_2, z et t avec $z \neq s, t, u_1, u_2$. Si le chemin P'_1 est de longueur exactement 2, la preuve est similaire. Noter que $z \notin U$. En effet, si z appartient à U , la solution $S'_1 = (S_1 \setminus \{su_1, u_1u_2, u_2z\}) \cup \{e\}$ avec $e \in [s, z]$ appartient à $T(G)$. Comme $a(e) = 0$, on a $a(su_1) + a(u_1u_2) + a(u_2z) \leq 0$ et donc $a(u_1u_2) = 0$, une contradiction. Ainsi $z \in U' \cup W$.

Assertion 1 $a(e) > 0$ pour tout $e \in [U \setminus \{u_1, u_2\}, u_2]$.

Preuve. S'il existe une arête e dans $[u, u_2]$ avec $u \in U \setminus \{u_1, u_2\}$ telle que $a(e) = 0$, alors l'ensemble d'arêtes $(S \setminus \{su_1, u_1u_2\}) \cup (\{e\} \cup [s, u])$ appartient à $T(G)$ et a un poids strictement plus petit que α , ce qui est impossible. $\blacklozenge$

Considérons maintenant un ensemble d'arêtes $S_2 \in \tau_a$ ne contenant pas l'arête su_2 . Soit P_2 et P'_2 deux 3-*st*-chemins arête-disjoints de S_2 .

Assertion 2 $[u_2, t] \cap S_2 = \emptyset$.

Preuve. Supposons que $u_2t \in S_2$. Comme par la remarque 5.12 2), $a(u_2t) > 0$, un des deux chemins P_2 et P'_2 , disons P_2 , contient u_2t . Le chemin P_2 est donc de la forme (s, w, u_2, t) avec $w \in V \setminus \{s, t, u_2\}$. Si $w \notin U$, il en résulte que $a([s, w] \cap P_2) > 0$. Sinon, par l'assertion 1, on a $a(wu_2) > 0$. Ainsi, on a dans tous les cas $a(P_2^{su_2}) > 0$ où $P_2^{su_2}$ est le sous-chemin de P_2 entre s et u_2 . Maintenant, en remplaçant dans S_2 le sous-chemin de $P_2^{su_2}$ par l'arête su_2 , on obtient une solution de poids $< \alpha$, ce qui est impossible. $\blacklozenge$

Par l'assertion 2, il s'ensuit que $S_2 \cap [u_2, t] = \emptyset$. Comme de plus $su_2 \notin S_2$, aucun 3-*st*-chemin de S_2 ne peut passer par u_2 . Soit $P = (s, u_2, t)$ un chemin de longueur 2. Noter que $P \cap S_2 = \emptyset$. De plus, comme aucune des deux arêtes su_2 et u_2z ne peut être utilisée dans S_2 , au plus un des deux chemins P_2 et P'_2 peut intersecter P'_1 . Supposons, s.p.d.g., que $P_2 \cap P'_1 = \emptyset$. Par le lemme 5.10, il s'ensuit que $a(P) \geq a(P_1)$. Or ceci implique que $a(u_1u_2) = 0$, une contradiction. $\square$

Lemme 5.16 1) Si $L = 2$, alors $W = \emptyset$.

2) Si $L = 3$, alors $W \neq \emptyset$.

Preuve. 1) Supposons qu'il existe $w \in W$. On a par la remarque 5.12 4), $a(e) > 0$ pour tout $e \in [s, w] \cup [w, t]$. Nous allons montrer que $|[s, w] \cap F| = |[w, t] \cap F|$ pour tout $F \in \tau_a$. Supposons, au contraire qu'il existe $F \in \tau_a$ tel que $|[s, w] \cap F| \neq |[w, t] \cap F|$. S.p.d.g., on peut supposer que $|[s, w] \cap F| > |[w, t] \cap F|$. Comme il ne peut y avoir qu'au plus $|[w, t] \cap F|$ 2-*st*-chemins arête-disjoints passant par le sommet w . Il existe au moins une arête $e \in [s, w] \cap F$ telle que $F \setminus \{e\} \in T(G)$. Mais ceci implique $a(e) = 0$, une contradiction. Il en résulte alors que les vecteurs d'incidence associés aux ensembles d'arêtes de τ_a vérifient tous l'équation $x([s, w]) - x([w, t]) = 0$. Or, par le lemme 5.8, cette équation ne peut pas être un multiple positif de $ax = \alpha$, une contradiction.

2) Supposons que $W = \emptyset$. Soit $U_s = U \cup \{s\}$. Comme $ax \geq \alpha$ est différente de la contrainte de *st*-coupe associée à $\delta(U_s)$, il existe un ensemble d'arêtes $F_1 \in \tau_a$ qui utilise au moins trois arêtes de $\delta(U_s)$. Soit P_1 et P'_1 deux 3-*st*-chemins arête-disjoints de F_1 . Comme $W = \emptyset$, par la remarque 5.12 2) et 3), on a $a(e) > 0$ pour tout $e \in \delta(U_s)$. Ceci implique que chaque arête de $F_1 \cap \delta(U_s)$ doit appartenir à un des deux chemins P_1 et P'_1 . Un de ces deux chemins, disons P_1 , doit ainsi utiliser au moins deux arêtes de $\delta(U_s)$. Comme tout *st*-chemin intersecte toute *st*-coupe un nombre impair de fois, P_1 contient exactement trois arêtes de $\delta(U_s)$. En conséquence, le chemin P_1 doit être de la forme (s, w, u, t) avec $u \in U$ et $w \in U'$. On peut alors supprimer l'arête wu et ajouter, si c'est nécessaire, une arête de $[s, u]$ et une autre de $[w, t]$ tout en gardant une solution de $T(G)$. Comme $a(e) = 0$ pour tout $e \in [s, u] \cup [w, t]$, on obtient une solution de poids $< \alpha$, ce qui est impossible. $\square$

Lemme 5.17 *Si $L = 2$ alors $a(e) = 0$ pour tout $e \in [U, U']$.*

Preuve. Soit $e \in [U, U']$. Il existe une solution $S \in \tau_a$ contenant e . Comme e ne peut pas appartenir à un 2-*st*-chemin, $S \setminus \{e\}$ appartient à $T(G)$ et donc $a(e) = 0$. $\square$

Dans la suite de la section, on suppose que $L = 3$.

Lemme 5.18 1) *S'il existe deux nœuds $w \in W$ et $u_1 \in U$ tels que $a(wu_1) = 0$, alors $a(e) = 0$ pour tout $e \in [U, w]$.*

2) *S'il existe deux nœuds $w \in W$ et $u'_1 \in U'$ tels que $a(wu'_1) = 0$, alors $a(e) = 0$ pour tout $e \in [U', w]$.*

Preuve. On montre le résultat pour U , la preuve pour U' est similaire. Si $|U| = 1$, la preuve est immédiate. Supposons donc que $|U| \geq 2$ et qu'au contraire, il existe un nœud $u_2 \in U$ tel que $a(u_2w) > 0$. Par le lemme 5.9, on a $a(e) > 0$ pour tout $e \in [u_2, w]$. Soit

S_1 un ensemble de τ_a contenant u_2w . Soient P_1 et P'_1 deux 3- st -chemins arête-disjoints de S_1 . Comme $a(u_2w) > 0$, u_2w doit appartenir à l'un des chemins P_1 et P'_1 , disons P_1 .

Assertion 1 $P_1 = (s, u_2, w, t)$.

Preuve. Supposons que $P_1 \neq (s, u_2, w, t)$. Comme $u_2w \in P_1$, on a $P_1 = (s, w, u_2, t)$. Par la remarque 5.12 4), on a $a(e) > 0$ pour tout $e \in [s, w]$, et donc le sous-chemin de P_1 entre s et u_2 possède un poids strictement positif. Noter également que par le lemme 5.15, $a(e) = 0$ pour tout $e \in [u_1u_2]$. Etant donné que les arêtes de $[s, u_2]$ forment des chemins entre s et u_2 de poids nul, il s'ensuit par le lemme 5.14 que P'_1 doit utiliser toutes les arêtes de $[s, u_2]$. De même, comme tous les 2- su_2 -chemins passant par le sommet u_1 sont de poids nul, par le lemme 5.14, P'_1 doit intersecter tous ces chemins. Il en résulte que $||[s, u_2]| = |[u_1, u_2]| = 1$ et P'_1 est de la forme (s, u_2, u_1, t) . En ajoutant une arête de $[s, u_1]$ et en supprimant le sous-chemin de P_1 entre s et u_2 , on obtient une solution de poids $< \alpha$, ce qui est impossible. ♦

Par l'assertion 1, on a $P_1 = (s, u_2, w, t)$. Comme le sous-chemin de P_1 entre s et w est de poids > 0 , par le lemme 5.14, P'_1 doit intersecter tous les 2- sw -chemins de poids nul passant par le sommet u_1 . Il en résulte qu'au moins un des ensembles $[s, u_1]$ et $[u_1, w]$ est réduit à une seule arête. S'il existe un sommet $u \in U \setminus \{u_1, u_2\}$ tel que $a(e) = 0$ pour tout $e \in [u, w]$, par le lemme 5.14, P'_1 doit également intersecter les 2- sw -chemins passant par u . Mais comme $|P'_1| \leq 3$, ceci n'est pas possible. Par conséquent $a(e) > 0$ pour tout $e \in [U \setminus \{u_1\}, w]$.

Assertion 2 $P'_1 \cap [u_1, w] = \emptyset$.

Preuve. Supposons au contraire que P'_1 utilise une arête de $[u_1, w]$. Si $P'_1 = (s, w, u_1, t)$, on peut remarquer que le sous-chemin de P'_1 entre les sommets s et u_1 est de poids > 0 . Comme chaque arête de $[s, u_1]$ forme un chemin de poids nul, on déduit par le lemme 5.14, que P_1 doit utiliser les arêtes de $[s, u_1]$. Or ceci contredit l'assertion 1. D'où P'_1 passe par les sommets s, u_1, w, t et utilise une arête, disons f , parallèle à wt .

Supposons que $[s, u_1] = \{su_1\}$ et considérons un ensemble S_2 de τ_a tel que $su_1 \notin S_2$. On peut supposer, s.p.d.g., que S_2 est minimal. Soit P_2 et P'_2 deux 3- st -chemins arête-disjoints de S_2 . Si S_2 utilise une arête $e \in [u_1, z]$ avec $z \in U' \cup W$, alors e doit appartenir à un des deux chemins P_2 et P'_2 , disons P_2 , de S_2 . Comme $su_1 \notin S_2$, $P_2 = (s, z, u_1, t)$. Puisque $a(f) > 0$ pour tout $f \in [s, z]$ et $a(su_1) = 0$, en supprimant le sous-chemin de P_2 entre s et u_1 et en ajoutant l'arête su_1 , on obtient une solution de $T(G)$ de poids $< \alpha$, une contradiction. Ainsi on a $[u_1, U' \cup W] \cap S_2 = \emptyset$ et en particulier, $[u_1, w] \cap S_2 = \emptyset$.

Supposons maintenant que S_2 contient une arête e de $[w, t]$. Comme $a(e) > 0$, l'arête e doit appartenir à un 3-*st*-chemin, disons P_2 , de S_2 . On peut remarquer que le sous-chemin $\tilde{P}_2$ de P_2 entre s et w a un poids strictement positif. D'autre part, $\tilde{P}_2$ peut être remplacé par un chemin de longueur 2 passant par les sommets s , u_1 et w . Celui-ci ayant un poids nul dans a , on obtient une contradiction. En conséquence, $S_2 \cap [w, t] = \emptyset$ et $P'_1 \cap S_2 = \emptyset$. Il s'ensuit qu'il existe dans S_2 un chemin, disons P_2 qui n'a aucune arête commune avec P'_1 . En remplaçant dans S_1 , le chemin P_1 par le chemin P_2 , on garde une solution de $T(G)$ et on obtient $a(P_2) \geq a(P_1)$. Et dans S_2 , on peut remplacer le chemin P_2 par le chemin P'_1 tout en gardant une solution de $T(G)$, ce qui donne $a(P'_1) \geq a(P_2) \geq a(P_1)$. Or ceci implique que $a(u_2w) = 0$, une contradiction.

Supposons maintenant que $|[s, u_1]| \geq 2$. On a alors $[u_1, w] = \{u_1w\}$. Considérons un ensemble $\bar{S}_2$ de τ_a ne contenant pas u_1w . On peut supposer, s.p.d.g., que $\bar{S}_2$ est minimal et soient $\bar{P}_2$ et $\bar{P}'_2$ deux 3-*st*-chemins arête-disjoints de $\bar{S}_2$. S'il existe une arête e de $[w, t]$ appartenant à S'_2 , alors le chemin la contenant, disons $\bar{P}_2$, ne peut pas passer par le sommet u_1 . Aussi, le sous-chemin P de $\bar{P}_2$ entre s et w possède alors un poids strictement positif. Comme le second chemin $\bar{P}'_2$ ne peut pas utiliser toutes les arêtes de $[s, u_1]$, on peut ainsi remplacer P par un *sw*-chemin de poids nul et de longueur 2 passant par u_1 . Mais ceci implique que $a(P) = 0$, une contradiction. Il en résulte donc que $[w, t] \cap \bar{S}_2 = \emptyset$. Comme $|\bar{S}_2 \cap P'_1| \leq 1$, il existe, dans $\bar{S}_2$, au moins un chemin, disons $\bar{P}_2$, n'ayant aucune arête en commun avec P'_1 . L'ensemble $P'_1 \cup \bar{P}_2$ induit une solution de $T(G)$, entraînant $a(\bar{P}_2) \geq a(P_1)$. En remplaçant dans $\bar{S}_2$ le chemin $\bar{P}_2$ par le chemin P'_1 (ceci est possible car $|[s, u_1]| \geq 2$), on obtient $a(P'_1) \geq a(\bar{P}_2)$. Or ceci conduit à $a(u_2w) = 0$, une contradiction. ♦

Par l'assertion 2, on a $P'_1 \cap [u_1, w] = \emptyset$ et donc $P'_1 \cap [s, u_1] \neq \emptyset$. De plus, comme P'_1 doit intersecter tous les 2-*sw*-chemins passant par le sommet u_1 , on doit avoir $|[s, u_1]| = 1$. Si P'_1 utilise une arête $e \in [u_1, t]$, alors on peut supprimer u_2w et rajouter une arête de $[u_1, w]$ et une arête de $[u_1, u_2]$ tout en gardant une solution admissible. Mais on a ainsi $a(u_2w) = 0$, une contradiction. De la même manière, on peut montrer que P'_1 ne peut pas passer par un autre sommet de U . Le chemin P'_1 doit donc passer par un sommet $v \in U' \cup W$.

Considérons maintenant un ensemble minimal S_2 de τ_a ne contenant pas l'arête su_1 . Soit P_2 et P'_2 deux 3-*st*-chemins arête-disjoints de S_2 . Supposons qu'il existe une arête u_1z , $z \in U' \cup W$ appartenant à S_2 . Comme $su_1 \notin S_2$, le 3-*st*-chemin contenant u_1z , disons P_2 , doit être de la forme (s, z, u_1, t) . Noter que par la remarque 5.12 2) et 4), le sous-chemin P_2^{s, u_1} de P_2 entre s et u_1 est strictement positif. Comme l'arête su_1 forme un chemin nul entre s et u_1 , par le lemme 5.14, on doit avoir $su_1 \in P'_2$. Comme $su_1 \notin S_2$, on a une contradiction. Par conséquent $[u_1, z] \cap S_2 = \emptyset$ pour tout $z \in U' \cup W$.

et en particulier pour les sommets w et v . De la même manière, on peut montrer que $[w, t] \cap S_2 = \emptyset$. Il s'ensuit que $|P'_1 \cap S_2| \leq 1$. Ainsi, Il doit exister un 3- st -chemin dans S_2 , disons P_2 , tel que $P'_1 \cap P_2 = \emptyset$. Considérons maintenant un chemin P de la forme (s, u_1, w, t) . Notons que $P \cap S_2 = \emptyset$. Par le lemme 5.10, il s'ensuit que $a(P) \geq a(P_1)$. Mais ceci implique que $a(u_2w) = 0$, une contradiction. $\square$

Lemme 5.19 *Pour tout $e, e' \in [U, t]$ (resp. $e, e' \in [s, U']$), $a(e) = a(e')$.*

Preuve. Nous allons montrer le lemme pour U , la preuve pour U' est similaire. Si $|U| = 1$, le résultat est une conséquence du lemme 5.9. Supposons donc que $|U| \geq 2$. Soient $e_1 \in [U, t]$ telle que $a(e_1) = \min\{a(e), e \in [U, t]\}$, et soit $e_2 \in [U, t]$ telle que $a(e) = \max\{a(e), e \in [U, t]\}$. Soient u_1 et u_2 les extrémités différentes de t de e_1 et e_2 respectivement. Supposons que $a(e_1) < a(e_2)$. Par le lemme 5.9, il s'ensuit que $a(e) < a(e')$ pour tout $e \in [u_1, t]$ et $e' \in [u_2, t]$.

Assertion 1 1) Soit $S \in \tau_a$. Si $S \cap [u_2, t] \neq \emptyset$ alors $[u_1, t] \subseteq S$.

2) $|[u_1, t]| = 1$.

Preuve. 1) Soient $e'_2 \in S \cap [u_2, t]$, et T_1, T_2 deux 3- st -chemins arête-disjoints de S . Comme par la remarque 5.12 2), $a(e'_2) > 0$, on peut supposer que $e'_2 \in T_2$. Supposons qu'il existe une arête $e'_1 \in [u_1, t]$ qui n'est pas dans S . On a alors $[s, u_1] \cap T_2 = \emptyset$. En effet, si ce n'est pas le cas, l'ensemble d'arêtes obtenu en supprimant e'_2 et en ajoutant e'_1 appartient à $T(G)$ et on a une solution de poids $< \alpha$, une contradiction. Maintenant, s'il existe une arête $e \in [s, u_1]$ n'appartenant pas à T_1 , on peut toujours remplacer e'_2 par les arêtes e et e'_1 et obtenir une solution ayant un poids $< \alpha$, ce qui est impossible. Ainsi $[s, u_1] \subseteq T_1$ et par conséquent, $[s, u_1] = \{su_1\}$ et $[s, u_2] \cap T_1 = \emptyset$. Si une arête $e' \in [u_1, u_2]$ appartient au chemin T_1 alors, comme $su_1 \in T_1$, T_1 doit utiliser une arête f de $[u_2, t] \setminus \{e'_2\}$. Notons que par le lemme 5.9, on a $a(f) = a(e'_2) > a(g)$ pour tout $g \in [u_1, t]$. Or, dans ce cas, on peut supprimer f et ajouter e'_1 tout en gardant une solution de $T(G)$. Ceci implique que $a(e'_1) \geq a(f)$, une contradiction. Il en résulte donc que $[u_1, u_2] \cap T_1 = \emptyset$. Considérons maintenant l'ensemble $S' = (S \setminus \{e'_2\}) \cup \{g, g', e'_1\}$ avec $g \in [s, u_2]$ et $g' \in [u_1, u_2]$. Comme $a(g) = a(g') = 0$, on a $a(e'_1) \geq a(e'_2)$, une contradiction.

2) Soit $e \in [u_2, t]$. Comme $ax \geq \alpha$ est différente d'une contrainte triviale, il existe un ensemble d'arêtes $\bar{S} \in \tau_a$ que l'on peut supposer minimal, contenant e . Soit $\bar{T}_1$ et $\bar{T}_2$ deux 3- st -chemins arête-disjoints de $\bar{S}$ et supposons, s.p.d.g., que $e \in \bar{T}_2$. Par 1), $[u_1, t] \subseteq \bar{S}$. De plus, comme $e \in \bar{T}_2$, $\bar{T}_2 \cap [u_1, t] = \emptyset$ et on a $[u_1, t] \subseteq \bar{T}_1$. Or, $\bar{T}_1$ ne peut intersecter $[u_1, t]$ qu'en une unique arête et donc $|[u_1, t]| = 1$. $\blacklozenge$

Posons $[u_1, t] = \{u_1t\}$. Soient $g \in [u_2, t]$ et S_1 une solution de τ_a contenant u_2t . Par l'assertion 1 2), S_1 contient également u_1t . Soit $f_1 \in [s, u_1]$ et $f_2 \in [s, u_2]$. Comme $a(f_1) = a(f_2) = 0$ et $\{f_1, f_2, u_1t, g\}$ forme une solution de $T(G)$, on peut supposer que $S_1 = \{f_1, f_2, u_1t, g\}$.

Considérons maintenant une solution $S_2 \in \tau_a$ qui ne contient pas l'arête u_1t . On peut supposer que S_2 est minimale et donc qu'elle est composée exactement de deux 3-*st*-chemins arête-disjoints. Comme $u_1t \notin S_2$, par l'assertion 1 1), il s'ensuit que $[u_2, t] \cap S_2 = \emptyset$ et par conséquent $[u_1, u_2] \cap S_2 = \emptyset$. Supposons qu'il existe une arête $e \in [s, u_1] \cap S_2$. Par la minimalité de S_2 , le 3-*st*-chemin, disons T , contenant e dans S_2 doit être de la forme (s, u_1, z, t) avec $z \in V \setminus \{s, t, u_1, u_2\}$. Soit T' le sous-chemin de T entre u_1 et t . Comme les ensembles d'arêtes $(S_2 \setminus T') \cup \{u_1t\}$ et $(S_1 \setminus \{g\}) \cup (\{f\} \cup T')$ avec $f \in [u_1, u_2]$ appartiennent tous les deux à $T(G)$ et par le lemme 5.15 $a(f) = 0$, on a $a(u_1t) \geq a(T') \geq a(g)$. Or ceci contredit notre hypothèse et donc $[s, u_1] \cap S_2 = \emptyset$.

Soient $P_1 = \{f_2, g\}$ et $P'_1 = \{f_1, u_1t\}$ les deux chemins de S_1 . Soit $P = P'_1$ et P_2 un 3-*st*-chemin quelconque de S_2 . Notons que $P_2 \cap P'_1 = \emptyset$ et $P \cap S_2 = \emptyset$. Par le lemme 5.10, il s'ensuit que $a(P) \geq a(P_1)$. Or ceci implique que $a(u_1t) \geq a(g)$, une contradiction. $\square$

Lemme 5.20 *Soit S une solution minimale de τ_a .*

- 1) Si $U = \{u\}$ et $S \cap [s, u] = \emptyset$, alors $\delta(u) \cap S = \emptyset$.
- 2) Si $U' = \{u'\}$ et $S \cap [u', t] = \emptyset$, alors $\delta(u') \cap S = \emptyset$.

Preuve. Nous montrons le résultat pour U . La preuve pour U' est similaire. Supposons qu'il existe une arête $e \in [u, t]$ qui appartient à S . Comme $a(e) > 0$, un des 3-*st*-chemins de S , disons P , doit contenir e . Comme $[s, u] \cap S = \emptyset$, le chemin P doit passer par un sommet $z \in V \setminus \{s, t, u\}$ et avoir la forme (s, z, u, t) . Notons que $z \notin U$ et par conséquent $a(P_{su}) > 0$ où P_{su} est le sous-chemin de P entre s et u . En remplaçant P_{su} par une arête de $[s, u]$, on a toujours une solution du THPP, et il s'ensuit que $a(P_{su}) = 0$, une contradiction. Il en résulte que $[u, t] \cap S = \emptyset$. Par la minimalité de S , aucune autre arête de $\delta(u)$ ne peut alors appartenir à S . $\square$

Lemme 5.21 $a(e) = a(e')$ pour tout $e \in [s, U']$ et $e' \in [U, t]$.

Preuve. Supposons le contraire. Par le lemme 5.19, on peut supposer, s.p.d.g., que

$$a(e) > a(e') \text{ pour tout } e \in [U, t] \text{ et } e' \in [s, U']. \quad (5.5)$$

Soient $u_1 \in U$ et $f \in [u_1, t]$. Considérons une solution S_1 de τ_a contenant f . On peut supposer, s.p.d.g., que S_1 est minimale. Soient P_1 et P'_1 deux 3-*st*-chemins arête-disjoints de S_1 et supposons que $f \in P_1$.

Assertion 1 $|U'| = 1$.

Preuve. Supposons que $|U'| \geq 2$. On peut remarquer que P_1 ne peut pas passer par un nœud u' de U' . Sinon, P_1 serait de la forme (s, u', u_1, t) . Comme le sous-chemin de P_1 entre s et u_1 et le sous-chemin de P_1 entre u' et t sont de poids > 0 , par le lemme 5.14, P'_1 devrait utiliser toutes les arêtes de $[s, u_1]$ et de $[t, u']$. D'où $P'_1 = (s, u_1, u', t)$. En supprimant les arêtes de $S_1 \cap [u_1, u']$, on aurait toujours une solution de $T(G)$. Il en résulterait que $a([u_1, u']) = 0$, ce qui contredirait la remarque 5.12 3). Par conséquent, Comme S_1 est minimale et P_1 ne peut pas passer par un sommet de U' , S_1 ne peut utiliser au plus qu'une seule arête de $[s, U']$. Supposons que S_1 utilise une arête $e \in [s, u'_1]$ avec $u'_1 \in U'$. Notons que, dans ce cas, $e \in P'_1$. Comme $|U'| \geq 2$, il existe une arête $e' \in [s, u'_2]$, $u'_2 \in U'$, n'appartenant pas à S_1 . S'il existe une arête $f' \in [u'_2, t]$ qui n'appartient pas à S_1 , en remplaçant l'arête f par les arêtes e' et f' , on obtient une solution de $T(G)$. Comme $a(f') = 0$, on obtient $a(e') \geq a(f)$, ce qui contredit (5.5). En conséquence, on a $[u'_2, t] \subseteq S_1$ et en particulier $[u'_2, t] \subseteq P'_1$. Ceci implique que $[u'_2, t] = \{u'_2 t\}$ et $P'_1 = (s, u'_1, u'_2, t)$. En considérant la solution obtenue en remplaçant f par $\{e', g\}$ où $g \in [u'_1, t]$, on obtient $a(e') \geq a(f)$. Ceci contredit (5.5). Par conséquent, $S_1 \cap [s, U'] = \emptyset$. Aussi, comme S_1 est minimale et $f \in S_1$, S_1 ne peut pas utiliser deux arêtes de $[U', t]$. Il existe alors un nœud $u' \in U'$ tel que $([s, u'] \cup [u', t]) \cap S_1 = \emptyset$. En remplaçant dans S_1 l'arête f par $\{su', u't\}$, on obtient une solution de $T(G)$. Ceci entraîne $a(e) \geq a(u_1 t)$, ce qui contredit (5.5) et complète la preuve de l'assertion. ♦

Soit $U' = \{u'\}$. Soit P un *st*-chemin de longueur 2 passant par u' . Si $P'_1 \cap P = \emptyset$, alors, l'ensemble obtenu à partir de S_1 en supprimant P_1 et en ajoutant P reste une solution de $T(G)$. Et il en résulte que $a(u_1 t) \leq a([s, u'] \cap P)$, ce qui contredit (5.5). Par conséquent, le chemin P'_1 doit contenir au moins un des ensembles $[s, u']$ et $[u', t]$. De plus, comme S_1 est minimale et un 3-*st*-chemin ne peut pas utiliser des arêtes parallèles, on doit avoir ou bien $|[s, u']| = 1$, ou bien $|[u', t]| = 1$.

Supposons tout d'abord que $|[u', t]| = 1$ et considérons une solution minimale S_2 de τ_a ne contenant pas l'unique arête $u't$. Par le lemme 5.20, on a $\delta(u') \cap S_2 = \emptyset$. Comme $P'_1 \cap P \neq \emptyset$, P'_1 doit passer par le sommet u' et on a $|P'_1 \cap S_2| \leq 1$. Il existe alors un 3-*st*-chemin P_2 dans S_2 qui n'intersecte pas P'_1 . Comme $P \cap S_2 = \emptyset$, par le lemme 5.10, on a $a(P) \geq a(P_1)$. Mais il en résulte que $a(P \cap [s, u']) \geq a(u_1 t)$, contredisant (5.5).

Supposons maintenant que $||[u', t]|| \geq 2$. On a alors $[s, u'] = \{su'\}$ et $su' \in P'_1$. On peut remarquer que $\{su_1, u_1t, su', u't\} \in T(G)$. Comme $a(su_1) = a(u't) = 0$ et S_1 est minimale, on peut supposer, s.p.d.g., que $S_1 = \{su_1, u_1t, su', u't\}$, $P_1 = \{su_1, u_1t\}$ et $P'_1 = \{su', u't\}$. Considérons maintenant un ensemble d'arêtes minimal S'_2 de τ_a ne contenant pas su' . Comme $|P'_1 \cap S'_2| \leq 1$, il doit exister un 3-*st*-chemin P_2 dans S_2 tel que $P_2 \cap P'_1 = \emptyset$. En remplaçant dans S_1 , P_1 par P_2 , on garde une solution de $T(G)$. Ceci implique que $a(P_2) \geq a(P_1)$.

D'autre part, s'il existe $e \in [u', t]$ tel que $e \notin S'_2$ alors, on peut remplacer le chemin P_2 par celui formé des arêtes su' et e tout en gardant une solution de $T(G)$. Ceci donne $a(P_2) \leq a(su') + a(e)$. Comme $a(P_2) \geq a(P_1)$, on obtient $a(u_1t) \leq a(su')$, une contradiction. Par conséquent, $[u', t] \subseteq S'_2$. Comme $||[u', t]|| \geq 2$ et S_2 est minimal, on a $P_2 \cap [u', t] \neq \emptyset$ et, s.p.d.g., on peut supposer que $u't \in P_2$. On peut alors remplacer dans S'_2 le chemin P_2 par le chemin P'_1 . Ceci conduit à $a(P'_1) \geq a(P_2) \geq a(P_1)$ et donc $a(su') \geq a(u_1t)$. Mais ceci contredit de nouveau (5.5) et le lemme est démontré. $\square$

Le lemme 5.18 nous permet de partitionner W en quatre sous-ensembles :

$$\begin{aligned} W_1 &= \{w \in W \mid a(e) = 0 \text{ pour tout } e \in [U, w] \text{ et } a(e') > 0 \text{ pour tout } e' \in [w, U']\}, \\ W_2 &= \{w \in W \mid a(e) = 0 \text{ pour tout } e \in [U, w] \cup [w, U']\}, \\ W_3 &= \{w \in W \mid a(e) > 0 \text{ pour tout } e \in [U, w] \text{ et } a(e') = 0 \text{ pour tout } e' \in [w, U']\}, \\ Z &= W \setminus (W_1 \cup W_2 \cup W_3). \end{aligned}$$

Lemme 5.22 1) Si $U = \{u\}$, alors $a(e) = a(e')$ pour tout $e \in [u, t]$ et $e' \in [W_1 \cup W_2, t]$.

2) Si $U' = \{u'\}$, alors $a(e) = a(e')$ pour tout $e \in [s, u']$ et $e' \in [s, W_2 \cup W_3]$.

Preuve. Nous montrons le résultat pour 1), la preuve pour 2) est obtenue par symétrie.

Supposons qu'il existe deux arêtes $f_1 \in [u, t]$ et $f_2 \in [w, t]$, $w \in W_1 \cup W_2$ telles que $a(f_1) \neq a(f_2)$.

Assertion 1 Aucune solution de τ_a ne peut contenir à la fois f_1 et f_2 .

Preuve. Supposons, au contraire, qu'il existe un ensemble S dans τ_a tel que $f_1, f_2 \in S$. Comme par la remarque 5.12 2) et 4), $a(f_1) > 0$ et $a(f_2) > 0$, f_1 et f_2 doivent chacune appartenir à un 3-*st*-chemin de S . De plus, ces deux arêtes ne peuvent pas appartenir au même 3-*st*-chemin. Soient T_1 et T_2 deux 3-*st*-chemins arête-disjoints de S tels que $f_1 \in T_1$ et $f_2 \in T_2$. On a $[s, u] \cap S \neq \emptyset$, sinon, T_1 utiliserait entre s et u un sous-chemin

T_1^{su} de poids strictement positif. Comme T_1^{su} peut être remplacé par une arête nulle de $[s, u]$, on aurait $a(T_1^{su}) = 0$, une contradiction.

Supposons d'abord que $a(f_2) > a(f_1)$. S'il existe un sommet $u' \in U'$ et deux arêtes $e \in [s, u']$ et $f \in [u', t]$ qui ne sont pas utilisées par T_1 alors, en remplaçant T_2 par les arêtes e et f , on aura une solution de $T(G)$. Comme $a(f) = 0$, on a $a(e) \geq a(f_2)$. Or, par le lemme 5.21, il s'ensuit que $a(f_1) = a(e) \geq a(f_2)$, une contradiction. En conséquence, puisque T_1 ne peut pas utiliser une arête de $[U', t]$, il en résulte que $[s, U'] \subset T_1$. D'où $U' = \{u'\}$, $|[s, u']| = 1$ et $su' \in T_1$. Mais dans ce cas, l'ensemble obtenu en supprimant f_2 et en ajoutant les arêtes su et tu' est une solution de $T(G)$, et on obtient $a(f_2) = 0$, une contradiction.

Supposons maintenant que $a(f_1) > a(f_2)$. Si $[s, u] \cap T_1 = \emptyset$, le chemin T_1 doit passer par un sommet $v \in V \setminus \{s, t, u\}$ et le sous-chemin $\tilde{T}_1$ de T_1 entre s et u est de poids > 0 . Par le lemme 5.14, on a donc $[s, u] \subset T_2$ et il s'ensuit que $|[s, u]| = 1$ et T_2 est de la forme (s, u, w, t) . Si v appartient à U' , supprimer dans S l'arête f_2 et ajouter une arête de $[v, t]$ entraîne une solution de $T(G)$. Comme $a(e) = 0$ pour tout $e \in [t, v]$, ceci implique que $a(f_2) = 0$, ce qui est impossible. Ainsi, le chemin T_1 ne passe pas par un sommet de U' . Par conséquent, il existe un sommet $u' \in U'$ et deux arêtes $e \in [s, u']$ et $f \in [u', t]$ telles que $e, f \notin T_1 \cup T_2$. On peut remplacer dans ce cas, le chemin T_1 par le chemin formé des arêtes e et f et avoir une solution de $T(G)$. Comme par le lemme 5.21, $a(e) = a(f_1)$, on a $a(\tilde{T}_1) = 0$, une contradiction. En conséquence, $[s, u] \cap T_1 \neq \emptyset$ et $T_1 = (s, u, t)$. En utilisant un raisonnement similaire, on peut montrer que T_2 n'est pas de longueur 2 et n'est pas de la forme (s, v', w, t) avec $v' \neq u, s, t, w$. Il s'ensuit que $T_2 = (s, u, w, t)$ et, par conséquent $|[s, u]| \geq 2$. De plus, au moins un des deux ensembles $[u, w]$ et $[w, t]$ est réduit à une seule arête. Sinon, on pourrait remplacer f_1 par un 2- ut -chemin passant par w . Mais ceci impliquerait que $a(f_2) \geq a(f_1)$, une contradiction.

Considérons d'abord le cas où $|[w, t]| = 1$. Soit $S' \in \tau_a$ tel que $f_2 \notin S'$. Si S' contient une arête e de $[u, w]$ alors comme par la remarque 5.12 4), $a(e) > 0$, il doit exister dans S' un 3- st -chemin $T = (s, w, u, t)$. On peut remarquer dans ce cas, que l'ensemble obtenu en supprimant l'arête de $T \cap [u, t]$ et en ajoutant f_2 est une solution de $T(G)$. Et on a $a(T \cap [u, t]) \leq a(wt)$, une contradiction. Ainsi $[u, w] \cap S = \emptyset$, et il existe dans S' un 3- st -chemin T'_1 n'ayant aucune arête commune avec T_2 . En échangeant dans S_1 le chemin T_1 et le chemin T'_1 , on obtient une solution de $T(G)$ et donc $a(T'_1) \geq a(T_1)$. Noter qu'une seule arête de $[s, u]$ ne peut être utilisée par le second chemin de S' . On peut alors remplacer le chemin T'_1 par le chemin T_2 dans S' et obtenir une solution admissible. Ce qui entraîne que $a(T_2) \geq a(T'_1) \geq a(T_1)$. En conséquence, il s'ensuit que $a(f_2) \geq a(f_1)$, une contradiction.

Supposons maintenant que $|[w, t]| \geq 2$. On a alors $|[u, w]| = 1$. Considérons une solution $\bar{S}'$ de τ_a ne contenant pas uw . Comme $|[s, u]| \geq 2$, on peut facilement voir que $[w, t] \cap$

$\bar{S}' = \emptyset$. Par un raisonnement analogue au cas précédent, on démontre que $a(f_2) \geq a(f_1)$, ce qui entraîne de nouveau une contradiction, et l'assertion est prouvée. $\blacklozenge$

Supposons que $a(f_1) > a(f_2)$. Le cas où $a(f_2) > a(f_1)$ peut être traité de manière similaire.

Il existe une solution $S_1 \in \tau_a$ contenant l'arête f_1 . Soit P_1 et P'_1 deux 3-*st*-chemins arête-disjoints de S_1 . Supposons, s.p.d.g., que $f_1 \in P_1$. Par l'assertion 1, on a $[w, t] \cap S_1 = \emptyset$. Si S contient une arête $e \in [u, w]$, alors le chemin contenant e doit passer par les sommets s, w, u et t . Par le lemme 5.9, on peut supposer, s.p.d.g., que $e \in P_1$. Or en supprimant f_1 et en ajoutant f_2 , on obtient une solution de $T(G)$, et en conséquence $a(wt) \geq a(ut)$, une contradiction. Donc, on a $[u, w] \cap S_1 = \emptyset$. S'il existe une arête $e' \in [s, u]$ telle que $e' \notin P'_1$, on peut remplacer l'arête f_1 par f_2, e', uw et avoir une solution de $T(G)$. Ceci implique que $a(f_2) \geq a(f_1)$, une contradiction. Ainsi $[s, u] \subseteq P'_1$ et, par conséquent $|[s, u]| = 1$ et $P_1 = (s, v, u, t)$ avec $v \in V \setminus \{s, t, u, w\}$. Notons que le sous-chemin $\tilde{P}_1$ de P_1 entre s et u a un poids strictement positif. S'il existe deux arêtes $e \in [s, u']$ et $e' \in [u', t]$ telles que $e, e' \notin P'_1$ où $u' \in U'$, alors on peut remplacer le chemin P_1 par les arêtes e et e' et garder un ensemble de $T(G)$. Comme, par le lemme 5.21, $a(e) = a(f_1)$, on obtient $a(\tilde{P}_1) = 0$, une contradiction. Ceci implique que pour tout $u' \in U'$, le chemin P'_1 doit nécessairement utiliser les arêtes d'au moins un des ensembles $[s, u']$ et $[u', t]$. Par conséquent, $U' = \{u'\}$. De plus, comme $su \in P'_1$, on a $[s, u'] \cap P'_1 = \emptyset$, $[u', t] = \{u't\}$ et $u't \in P'_1$.

Soit S_2 un ensemble minimal d'arêtes de τ_a ne contenant pas l'arête su . L'ensemble S_2 consiste alors en deux 3-*st*-chemins arête-disjoints P_2 et P'_2 . Comme $|U| = 1$ et $|[s, u]| = 1$, par le lemme 5.20, on a $\delta(u) \cap S_2 = \emptyset$. S'il existe une arête e de $[w, t]$ dans S_2 , comme $a(e) > 0$, e doit appartenir à un 3-*st*-chemin, disons P_2 , de S_2 . Etant donné que $([s, u] \cup [u, w]) \cap S_2 = \emptyset$, le chemin P_2 doit être de la forme (s, z, w, t) avec $z \notin \{s, t, u, w\}$. Le sous-chemin de P_2 entre s et w étant de poids > 0 , par le lemme 5.14, le second chemin de S_2 doit intersecter tout 2-*sw*-chemin passant par u . Mais ceci contredit le fait que $([s, u] \cup [u, w]) \cap S_2 = \emptyset$. Il s'ensuit donc que $[w, t] \cap S_2 = \emptyset$. Comme $|P_1 \cap S_2| \leq 1$, il doit exister un 3-*st*-chemin, disons P_2 dans S_2 n'utilisant aucune arête de P_1 . Soit P un chemin de longueur 3 passant par les sommets s, u, w et t . Par le lemme 5.10, on a $a(P) \geq a(P_1)$. Ceci implique que $a(f_2) \geq a(f_1)$, une contradiction.

□

5.5 Preuve du Théorème 5.3

Dans cette section, nous allons utiliser les résultats de la section précédente pour montrer que $P(G, L) = Q(G, L)$ pour $L = 2$ et 3 . Pour ce faire, nous considérons une contrainte $ax \geq \alpha$ définissant une facette de $P(G, L)$ différente d'une contrainte triviale et d'une contrainte de st -coupe. Nous allons montrer que $ax \geq \alpha$ est nécessairement une contrainte du type (5.4).

Cas 1 : $L = 2$.

Soient U , U' et W les ensembles de sommets définis dans la section précédente. Par le lemme 5.16, on a $W = \emptyset$ et chaque 2- st -chemin utilise exactement une arête avec un coefficient non nul. Donc chaque solution de τ_a contient ainsi exactement deux arêtes avec un coefficient strictement positif. De plus, les arêtes ayant un coefficient non nul correspondent exactement aux arêtes de la contrainte (5.4) induite par la partition $\{s\}$, U , U' , $\{t\}$. Ceci implique que $ax \geq \alpha$ et la contrainte de 2- st -coupe induite par cette partition définissent la même facette.

Cas 2 : $L = 3$.

Soient U , U' , W_1 , W_2 , W_3 et Z les ensembles définis dans la section précédente. On distingue deux cas.

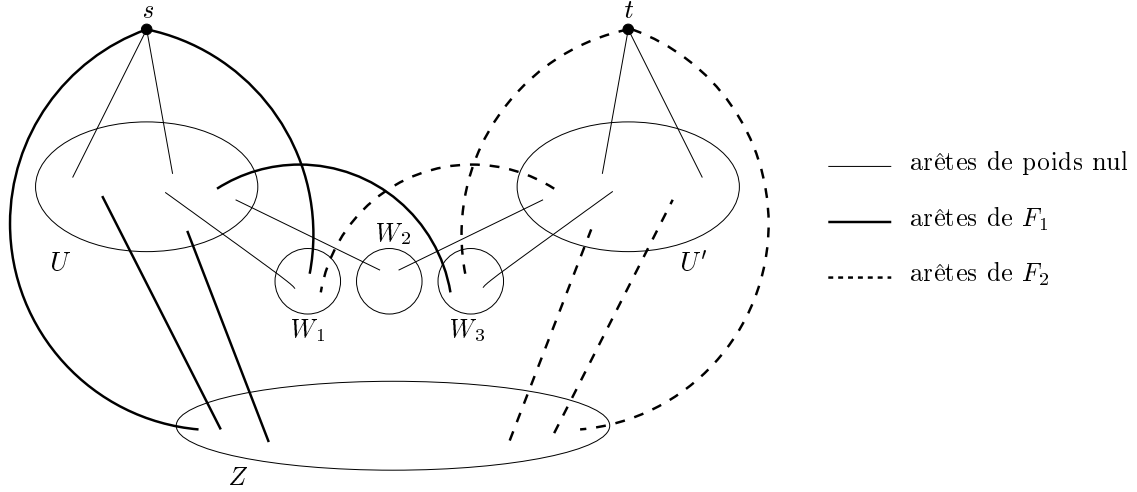
Cas 2.1 : $W_1 \cup W_3 \cup Z \neq \emptyset$.

Soit $F_1 = [\{s\} \cup U, Z] \cup [s, W_1] \cup [U, W_3]$ et $F_2 = [Z, U' \cup \{t\}] \cup [W_3, t] \cup [W_1, U']$ (voir figure 5.2). On peut remarquer que $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ et il n'existe pas de st -chemin de longueur exactement 3 n'utilisant que des arêtes de F_1 et F_2 . Nous avons le lemme suivant.

Lemme 5.23 *Pour chaque solution $S \in \tau_a$, on a $|S \cap F_1| = |S \cap F_2|$.*

Preuve. Supposons le contraire. Comme $a(e) > 0$ pour tout $e \in F_1 \cup F_2$, il existe une solution $S_1 \in \tau_a$ telle que, pour au moins un de ses 3- st -chemins, disons P_1 , on ait $|P_1 \cap F_1| \neq |P_1 \cap F_2|$. Soit P'_1 un second 3- st -chemin dans S_1 . S.p.d.g., on peut supposer que $P_1 \cap F_1 \neq \emptyset$.

Assertion 1 $P_1 \cap F_2 = \emptyset$.

FIG. 5.2 – Partition de G

Preuve. Comme $P_1 \cap F_1 \neq \emptyset$ et $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, on a $|P_1 \cap F_2| \leq 2$. Si $|P_1 \cap F_2| = 1$, comme $|P_1 \cap F_1| \neq |P_1 \cap F_2|$ et $P_1 \cap F_1 \neq \emptyset$, on a alors $|P_1 \cap F_1| = 2$. Ainsi P_1 est contenu dans $F_1 \cup F_2$, ce qui contredit la remarque ci-dessus. Si $|P_1 \cap F_2| = 2$, alors $|P_1 \cap F_1| = 1$. On a une nouvelle fois $P_1 \subseteq F_1 \cup F_2$, une contradiction. On a donc $P_1 \cap F_2 = \emptyset$ et l'assertion est prouvée. $\blacklozenge$

Assertion 2 1) $P_1 \cap [s, U] = \emptyset$.

2) $P_1 = (s, z, w, t)$ avec $z \in Z \cup W_1$ et $w \in U \cup W_1 \cup W_2$ (z et w peuvent coïncider).

3) $[s, U] \subset P_1'$.

4) $|U| = 1$ et $|[s, U]| = 1$.

Preuve. Remarquons d'abord que 4) est une conséquence directe de 3).

1) Si P_1 utilise une arête su , $u \in U$, comme $P_1 \cap F_1 \neq \emptyset$, P_1 doit être de la forme (s, u, z, t) avec $z \in Z \cup W_3$. Mais ceci implique que $P_1 \cap F_2 \neq \emptyset$, ce qui contredit l'assertion 1.

2) Supposons que P_1 utilise une arête $e \in [u, w_3]$, $u \in U$ et $w_3 \in W_3$. Comme par l'assertion 1, $P_1 \cap F_2 = \emptyset$, il s'ensuit que $P_1 = (s, w_3, u, t)$. En supprimant l'arête e et en ajoutant les arêtes su , w_3v et vt , où $v \in U'$, on obtient encore une solution de $T(G)$. Comme $a(su) = a(w_3v) = a(vt) = 0$, on a $a(e) = 0$, une contradiction. Par conséquent, $P_1 \cap [U, W_3] = \emptyset$. Par 1) et le fait que $P_1 \cap F_1 \neq \emptyset$, il s'ensuit que P_1 utilise une des arêtes de $[s, Z \cup W_1]$. Comme par l'assertion 1, $P_1 \cap F_2 = \emptyset$, il en résulte que $P_1 = (s, z, w, t)$ avec $z \in Z \cup W_1$ et $w \in U \cup W_1 \cup W_2$.

3) Supposons qu'il existe une arête $e_0 \in [s, u_0]$, $u_0 \in U$ qui n'appartient pas à P'_1 . Remarquons que le sous-chemin P_1^{sw} de P_1 entre s et w a un poids > 0 . Si $w = u_0$, comme e_0 forme un chemin nul entre s et w , par le lemme 5.14 on doit avoir $e_0 \in P'_1$, une contradiction. Si $w \in U$, toutes les arêtes de $[s, w]$ ainsi que tous les 2- sw -chemins passant par u_0 forment des chemins de poids nul entre s et w . De nouveau, par le lemme 5.14, P'_1 doit intersecter tous ces chemins. Par conséquent, $[u_0, w] \subseteq P'_1$ et $[s, w] \subseteq P'_1$. Or dans ce cas, on doit avoir $P'_1 = (s, w, u_0, t)$. En supprimant le sous-chemin de P_1^{sw} et en ajoutant l'arête e_0 , on a une solution de $T(G)$, et on obtient alors $a(P_1^{sw}) = 0$, une contradiction. Il en résulte que $w \notin U$. Aussi, comme tout chemin de longueur 2 entre s et w passant par un sommet de U possède un poids nul, encore par le lemme 5.14, P'_1 doit intersecter tous ces chemins. Etant donné que $e_0 \notin P'_1$, on en déduit que $[U, w] \subseteq P'_1$. Ceci implique que $U = \{u_0\}$ et $||[u_0, w]|| = 1$. Supposons maintenant que $P'_1 = (s, u_0, w, t)$. Notons que P'_1 utilise entre w et t une arête parallèle à celle utilisée par P_1 entre ces deux mêmes sommets. Soit f cette arête et soit $f' \in [u_0, t]$. En supprimant f et le sous-chemin de P_1^{sw} , et en ajoutant les arêtes f' et e_0 , on obtient une solution de $T(G)$. Comme, par le lemme 5.22, $a(f) = a(f')$, on a $a(P_1^{sw}) = 0$, une contradiction. En conséquence, $P'_1 = (s, w, u_0, t)$. On peut remarquer ici que le sous-chemin de P'_1 entre s et u_0 possède un poids > 0 et que e_0 forme un chemin nul entre s et u_0 . Par le lemme 5.14, il s'ensuit que $e_0 \in P_1$, ce qui contredit 1) et termine la preuve de l'assertion. $\blacklozenge$

Par l'assertion 2 4), on peut supposer que $U = \{u\}$ et $[s, U] = \{su\}$. Soit S_2 une solution de τ_a ne contenant pas su . S.p.d.g., on peut supposer que S_2 est minimale. Par le lemme 5.20, il s'ensuit que $\delta(u) \cap S_2 = \emptyset$. Soit P un st -chemin de longueur 2 passant par u . On a alors $P \cap S_2 = \emptyset$. De plus, comme P'_1 passe par le nœud u , on a aussi $|P'_1 \cap S_2| \leq 1$. En conséquence, il doit exister un 3- st -chemin P_2 dans S_2 tel que $P_2 \cap P'_1 = \emptyset$. Par le lemme 5.10, on obtient $a(P) \geq a(P_1)$. Comme par les lemmes 5.19 et 5.22, $a(g) = a(g')$ pour tout $g \in [\{u\} \cup W_1 \cup W_2, t]$, il s'ensuit que $a(P_1^{sw}) = 0$ où P_1^{sw} est le sous-chemin de P_1 entre s et w . Or par l'assertion 2 2), on a $a(P_1^{sw}) > 0$, ce qui est impossible et le lemme est prouvé. $\square$

Du lemme 5.23, on déduit que la facette définie par $ax \geq \alpha$ est contenue dans la face induite par l'équation $x(F_1) - x(F_2) = 0$. Comme par le lemme 5.8 cette équation ne peut pas être un multiple positif de $ax = \alpha$, on obtient une contradiction.

Cas 2.2 : $W_1 \cup W_3 \cup Z = \emptyset$.

Comme par le lemme 5.16, $W \neq \emptyset$, on a $W_2 \neq \emptyset$. Ainsi $\{s\}$, U , W_2 , U' , $\{t\}$ forment une partition de V . Soit T l'ensemble des arêtes de la 3- st -coupe induite par cette

partition (voir figure 5.3 où les arêtes de la 3-*st*-coupe sont représentées par les traits pleins). Notons que $a(e) > 0$ pour tout $e \in T$ et $a(e) = 0$ pour tout $e \in E \setminus T$.

Lemme 5.24 *Chaque solution de τ_a contient exactement deux arêtes de T .*

Preuve. Notons tout d'abord que, comme la contrainte (5.4) associée à T est valide pour $P(G, 3)$, chaque solution de τ_a contient au moins deux arêtes de T . Supposons maintenant qu'il existe une solution $S \in \tau_a$ contenant plus de 2 arêtes de T . Comme $a(e) > 0$ pour tout $e \in T$, il doit exister dans S un 3-*st*-chemin P contenant au moins deux arêtes de T .

Considérons le cas où $P = (s, w_2, w'_2, t)$ avec $w_2, w'_2 \in W_2$. Les autres cas possibles pour P ((s, w_2, t) avec $w_2 \in W_2$, (s, w_2, u, t) avec $w_2 \in W_2$ et $u \in U$, (s, u', w_2, t) avec $w_2 \in W_2$ et $u' \in U'$, (s, u', u, t) avec $u' \in U'$ et $u \in U$) peuvent être traités de manière similaire.

Soit P' le second 3-*st*-chemin de S . En remplaçant dans S , le chemin P' par les arêtes su, uw'_2, w_2u' et $u't$ avec $u \in U$ et $u' \in U'$, on obtient une solution de $T(G)$. Comme toutes ces arêtes ont un poids nul, on obtient $a(P') = 0$, ce qui contredit le lemme 5.11.

□

Ainsi, par le lemme 5.24, chaque solution de τ_a utilise exactement deux arêtes de T . Ceci implique que $ax \geq \alpha$ n'est rien d'autre que la contrainte de 3-*st*-coupe induite par T , ce qui termine la preuve de notre théorème.

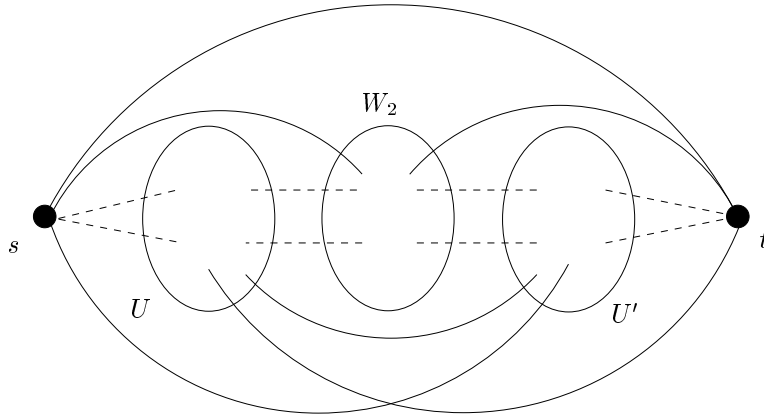


FIG. 5.3 – Configuration de *L-st*-coupe

5.6 Facettes de $P(G, L)$

Dans cette section, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que les inégalités (5.1), (5.2) et (5.4) définissent des facettes de $P(G, L)$ lorsque G est complet. Elles nous permettront de donner une description minimale du polytope lorsque $L \leq 3$. Dans la suite de la section, nous supposons que $G = (V, E)$ est un graphe complet avec $|V| \geq 4$.

Théorème 5.25 1) Pour $L \geq 2$, les inégalités $x(e) \leq 1$ définissent des facettes de $P(G, L)$ quel que soit $e \in E$.

2) Pour $L \geq 2$, les inégalités $x(e) \geq 0$ définissent des facettes de $P(G, L)$ si et seulement si soit $|V| \geq 5$, soit $|V| = 4$ et e n'appartient pas à une st -coupe de cardinalité 3 ou à une 3- st -coupe de cardinalité 3.

Preuve. 1) Comme G est complet et $|V| \geq 4$, par le corollaire 5.5 le polytope $P(G, L)$ est de pleine dimension et chaque ensemble $F_f = E \setminus \{f\}$ induit une solution du THPP pour tout $f \in E$. De plus, les ensembles E et F_f pour tout $f \in E \setminus \{e\}$ constituent une famille de $|E|$ solutions du THPP dont les vecteurs d'incidence vérifient $x(e) \leq 1$ à l'égalité et sont affinement indépendants.

2) Supposons d'abord que $|V| \geq 5$. Alors G contient au moins quatre L - st -chemins sommet-disjoints. En effet, soient $u, v, w \in V \setminus \{s, t\}$, et P_1, P_2 et P_3 , trois st -chemins de longueur 2 passant respectivement par u, v et w . Ces chemins avec le chemin formé par une des arêtes reliant s et t forment quatre chemins sommet-disjoints. Maintenant, remarquer qu'on ne peut pas couper trois de ces chemins en supprimant seulement 2 arêtes. Considérons les ensembles d'arêtes :

$$F_f = E \setminus \{e, f\} \text{ pour tout } f \in E \setminus \{e\}.$$

Par la remarque ci-dessus, ces ensembles induisent des solutions du THPP. Soit $F_e = E \setminus \{e\}$. Il est clair que F_e induit aussi une solution du THPP. De plus, les vecteurs x^{F_e} , $e \in E$ vérifient $x(e) \geq 0$ à l'égalité et sont affinement indépendants. Ce qui implique que $x(e) \geq 0$ définit une facette de $P(G, L)$.

Supposons maintenant que $|V| = 4$. Si e appartient à une st -coupe $\delta(W)$ de cardinalité 3 (resp. une 3- st -coupe T de cardinalité 3), alors $x(e) \geq 0$ est redondante par rapport aux contraintes

$$\begin{aligned} x(\delta(W)) &\geq 2, & (\text{resp. } x(T) &\geq 2,) \\ -x(f) &\geq -1, & \text{pour tout } f \in \delta(W) \setminus \{e\} \text{ (resp. } f \in T \setminus \{e\}), \end{aligned}$$

et ne peut donc pas définir une facette.

Supposons maintenant que e n'appartient ni à une st -coupe de cardinalité 3 ni à une 3- st -coupe de cardinalité 3. Considérons les ensembles

$$\begin{aligned} F_e &= E \setminus \{e\}, \\ F_{e,f} &= F_e \setminus \{f\}, \quad \text{pour tout } f \in E \setminus \{e\}, \end{aligned}$$

qui définissent $|E|$ solutions du THPP. Les vecteurs d'incidence de ces ensembles vérifient tous la contrainte $x(e) \geq 0$ à l'égalité et sont affinement indépendants. Il en résulte donc que $x(e) \geq 0$ définit une facette de $P(G, L)$. $\square$

On peut remarquer que si G est le graphe complet sur 4 sommets et s'il ne possède pas d'arête multiple, alors la seule contrainte de non-négativité pouvant définir une facette est celle qui n'est incidente ni à s , ni à t .

Théorème 5.26 1) Si $L = 2$, les seules contraintes de st -coupe qui définissent des facettes de $P(G, L)$ sont celles induites par $\{s\}$ et $V \setminus \{t\}$.
2) Si $L \geq 3$, toutes les contraintes de st -coupe définissent des facettes de $P(G, L)$.

Preuve. 1) Soient W un ensemble de sommets induisant une st -coupe et $\overline{W} = V \setminus W$. Supposons tout d'abord que $|W| \geq 2$ et $|\overline{W}| \geq 2$. Considérons la contrainte de 2- st -coupe $x(T) \geq 2$ induite par la partition

$$\begin{aligned} V_0 &= \{s\}, \\ V_1 &= W \setminus \{s\}, \\ V_2 &= \overline{W} \setminus \{t\}, \\ V_3 &= \{t\}. \end{aligned}$$

Comme $T = [V_0, V_2] \cup [V_0, V_3] \cup [V_1, V_3]$, on a $T = \delta(W) \setminus [V_1, V_2]$. De plus, comme $[V_1, V_2] \neq \emptyset$, il s'ensuit que $T \subsetneq \delta(W)$. Donc $x(T) \geq 2$ domine la contrainte $x(\delta(W)) \geq 2$ et, par conséquent, cette dernière ne peut pas définir une facette.

Supposons maintenant que $W = \{s\}$. Le cas où $\overline{W} = \{t\}$ est similaire. Dénotons par $ax \geq \alpha$ l'inégalité de st -coupe correspondant à l'ensemble W . Soit $bx \geq \beta$ une contrainte définissant une facette de $P(G, L)$ telle que

$$\{x \in P(G, L) \mid ax = \alpha\} \subseteq \{x \in P(G, L) \mid bx = \beta\}.$$

Pour montrer que $ax \geq \alpha$ définit une facette de $P(G, L)$, il suffit de montrer que $a = \rho b$ pour un certain $\rho > 0$.

Soit $e \in [s, t]$. Considérons les ensembles d'arêtes

$$F_f = \{e, f\} \cup E(\overline{W}), \text{ pour tout } f \in \Delta_e$$

où $\Delta_e = \delta(W) \setminus \{e\}$. Comme le graphe G est complet, les ensembles F_f , $f \in \Delta_e$, induisent des solutions du THPP. De plus, les vecteurs d'incidence de ces ensembles vérifient la contrainte $ax \geq \alpha$ à l'égalité. On a alors

$$0 = bx^{F_f} - bx^{F_{f'}} = b(f) - b(f'), \text{ pour tout } f, f' \in \Delta_e,$$

et donc

$$b(f) = \gamma, \text{ pour tout } f \in \Delta_e,$$

pour un certain $\gamma \in \mathbb{R}$.

Comme $|V| \geq 4$, soient $u, v \in \overline{W} \setminus \{t\}$, $g \in [s, u]$ et $g' \in [s, v]$. Considérons la solution $F_e = \{g, g'\} \cup E(\overline{W})$ de $T(G)$. On a $ax^{F_e} = \alpha$. Comme $g \in \Delta_e$, $ax^{F_g} = \alpha$ et on obtient

$$0 = bx^{F_g} - bx^{F_e} = b(g) - b(e).$$

Ainsi $b(g) = b(e)$ et on a

$$b(e) = \gamma, \text{ pour tout } e \in \delta(W).$$

Nous allons maintenant montrer que $b(f) = 0$ pour tout $f \in E(\overline{W})$.

Soit $f \in [u, v]$, $u, v \in \overline{W}$. On peut supposer, s.p.d.g., que $u \neq t$. Soient $w \in \overline{W} \setminus \{u, t\}$ (w peut coïncider avec v) et $g \in [s, w]$. Comme $g \in \Delta_e$, F_g définit une solution de $T(G)$ dont le vecteur d'incidence vérifie la contrainte $ax \geq \alpha$ à l'égalité. Comme $F_g \setminus \{f\}$ est une solution de $T(G)$, on a $b(f) = 0$.

En conséquence, on a

$$\begin{aligned} b(f) &= \gamma && \text{pour tout } f \in \delta(W), \\ b(f) &= 0 && \text{pour tout } f \in E(\overline{W}). \end{aligned}$$

Si on pose $\rho = 1/\gamma$, on a $a = \rho b$. Comme $bx \geq \beta$ ne peut pas définir de facette si $b \leq 0$, on a $\rho > 0$ ce qui termine la preuve du théorème.

2) De manière analogue au 1), on montre que lorsque $|L| \geq 3$, toutes les contraintes de st -coupe définissent des facettes de $P(G, L)$. $\square$

Théorème 5.27 *Quand $L \geq 2$, les inégalités (5.4) définissent des facettes de $P(G, L)$ si et seulement si $|V_0| = |V_{L+1}| = 1$.*

Preuve. Supposons que $|V_0| \geq 2$. Le cas où $|V_{L+1}| \geq 2$ suit par symétrie. Considérons la partition donnée par

$$\begin{aligned} \overline{V}_0 &= \{s\}, \\ \overline{V}_1 &= V_1 \cup (V_0 \setminus \{s\}), \\ \overline{V}_i &= V_i, \text{ pour } i = 2, \dots, L+1. \end{aligned}$$

Cette partition induit la contrainte de 3-*st*-coupe $x(\bar{T}) \geq 2$ où $\bar{T} = T \setminus [V_0 \setminus \{s\}, V_2]$. Comme G est complet, on a $\bar{T} \subsetneq T$ et donc la contrainte $x(T) \geq 2$ est dominée par $x(\bar{T}) \geq 2$ et ne peut, en conséquence, définir une facette de $P(G, L)$.

Supposons maintenant que $|V_0| = |V_{L+1}| = 1$, c'est-à-dire $V_0 = \{s\}$ et $V_{L+1} = \{t\}$. Dénotons l'inégalité (5.4) par $ax \geq \alpha$ et considérons une inégalité $bx \geq \beta$ définissant une facette de $P(G, L)$ telle que

$$\{x \in P(G, L) \mid ax = \alpha\} \subseteq \{x \in P(G, L) \mid bx = \beta\}.$$

Nous allons montrer que $a = \rho b$ pour un $\rho > 0$. Soit $\bar{E} = E \setminus T = \bigcup_{i=1}^L E(V_i) \cup (\bigcup_{i=0}^L [V_i, V_{i+1}])$. Soient $e \in [s, t]$ et $T_e = T \setminus \{e\}$. Comme le graphe est complet, les ensembles donnés par

$$F_f = \bar{E} \cup \{e, f\}, \text{ pour tout } f \in T_e,$$

induisent des solutions du THPP dont les vecteurs d'incidence satisfont $ax \geq \alpha$ à l'égalité. D'où

$$0 = bx^{F_f} - bx^{F_{f'}} = b(f) - b(f'), \text{ pour tout } f, f' \in T_e,$$

et donc

$$b(f) = \gamma, \text{ pour tout } f \in T_e,$$

pour un $\gamma \in \mathbb{R}$.

Soient $f \in [V_0, V_L]$, $f' \in [V_1, V_{L+1}]$ et $F_e = \bar{E} \cup \{f, f'\}$. L'ensemble F_e induit également une solution du THPP vérifiant $ax^{F_e} = \alpha$. Il s'ensuit que $0 = bx^{F_e} - bx^{F_f} = b(e) - b(f)$. On a alors

$$b(f) = \gamma, \text{ pour tout } f \in T.$$

Nous allons maintenant montrer que $b(f) = 0$ pour tout $f \in \bar{E}$. Supposons tout d'abord que $f \in [V_0, V_1]$. Soit $f' \in [s, w]$ avec $w \in V_2$. Comme G est complet, l'ensemble d'arêtes $F_{f'} \setminus \{f\}$ induit une solution du THPP vérifiant $ax^{F_{f'} \setminus \{f\}} = \alpha$. On a alors $b(f) = 0$. De manière analogue, on montre que $b(f) = 0$ pour tout $f \in \bigcup_{i=0}^L [V_i, V_{i+1}]$. Considérons maintenant une arête $f \in E(V_i)$, $i \in \{1, \dots, L\}$. Soient $v \in V_L$ et $f' \in [s, v]$. L'ensemble $F_{f'} \setminus \{f\}$ induit une solution du THPP dont le vecteur d'incidence vérifie la contrainte $ax \geq \alpha$ à l'égalité. On a donc $b(f) = 0$.

En conséquence, nous obtenons :

$$\begin{aligned} b(e) &= 0, & \text{pour tout } e \in \bar{E}, \\ b(f) &= \gamma, & \text{pour tout } e \in T. \end{aligned}$$

Comme $\alpha > 0$, on a $\gamma > 0$ et en posant $\rho = 1/\gamma$, on a $a = \rho b$. □

Soit E' l'ensemble des arêtes n'appartenant ni à une st -coupe de cardinalité 3, ni à une L - st -coupe de cardinalité 3. Des précédents théorèmes découlent les deux corollaires suivants.

Corollaire 5.28 *Pour $L = 2$, si le graphe $G = (V, E)$ est complet avec $|V| \geq 4$, alors une description complète minimale de $P(G, 2)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} x(\delta(s)) &\geq 2, \\ x(\delta(t)) &\geq 2, \\ x(T) &\geq 2, & \text{pour toute 2-}st\text{-coupe induite par } V_0 = \{s\}, V_1, V_2, V_3 = \{t\}, \\ x(e) &\leq 1, & \text{pour tout } e \in E, \\ x(e) &\geq 0, & \text{pour tout } e \in E'. \end{aligned}$$

Corollaire 5.29 *Pour $L = 3$, si le graphe $G = (V, E)$ est complet avec $|V| \geq 4$, alors une description complète minimale de $P(G, 3)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} x(\delta(W)) &\geq 2, & \text{pour tout } st\text{-coupe } \delta(W), \\ x(T) &\geq 2, & \text{pour toute 3-}st\text{-coupe induite par } V_0 = \{s\}, V_1, V_2, V_3, V_4 = \{t\}, \\ x(e) &\leq 1, & \text{pour tout } e \in E, \\ x(e) &\geq 0, & \text{pour tout } e \in E'. \end{aligned}$$

5.7 Dominant de $P(G, L)$

Dans cette section, nous allons étudier le dominant du polytope $P(G, L)$. Nous allons donner une description complète de ce polyèdre pour tout graphe $G = (V, E)$ et tout entier $L \geq 2$ tels que $P(G, L) = Q(G, L)$.

Soit $\text{Dom}(P(G, L))$ le dominant de $P(G, L)$. Soit $D(G, L)$ le polyèdre donné par

$$\begin{aligned} x(\delta(W)) &\geq 2, & \text{pour toute } st\text{-coupe } \delta(W), \\ x(\delta(W) \setminus \{e\}) &\geq 1, & \text{pour toute } st\text{-coupe } \delta(W), e \in \delta(W), \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} x(T) &\geq 2, & \text{pour toute } L\text{-}st\text{-coupe } T, \\ x(T \setminus \{e\}) &\geq 1, & \text{pour toute } L\text{-}st\text{-coupe } T, e \in T, \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$x(e) \geq 0, \quad \text{pour tout } e \in E. \tag{5.8}$$

Théorème 5.30 *Pour tout $L \geq 2$, si $P(G, L) = Q(G, L)$, alors $\text{Dom}(P(G, L)) = D(G, L)$.*

Preuve. Nous montrons tout d'abord que $\text{Dom}(P(G, L)) \subseteq D(G, L)$.

Soit $y \in \text{Dom}(P(G, L))$. Alors il existe $\bar{x} \in P(G, L)$ tel que $\bar{x} \leq y$. Ainsi, y satisfait (5.2), (5.4) et (5.8). Nous allons montrer que y satisfait également les contraintes (5.6) et (5.7).

Considérons une contrainte $x(\delta(W) \setminus \{e\}) \geq 1$ du type (5.6). Comme $\bar{x}(\delta(W)) \geq 2$ et $\bar{x}(e) \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} y(\delta(W) \setminus \{e\}) &\geq \bar{x}(\delta(W) \setminus \{e\}) \\ &= \bar{x}(\delta(W)) - \bar{x}(e) \\ &\geq 2 - \bar{x}(e) \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

De manière similaire, on obtient $y(T \setminus \{e\}) \geq 1$ pour toute L -*st*-coupe T et $e \in T$. On a donc $\text{Dom}(P(G, L)) \subseteq D(G, L)$.

Maintenant, noter que le dominant de $D(G, L)$, $\text{Dom}(D(G, L))$ est $D(G, L)$ lui-même. Ainsi, pour montrer que $D(G, L) \subseteq \text{Dom}(P(G, L))$, il suffit de montrer que tout point extrême de $D(G, L)$ appartient à $P(G, L)$. En effet, si c'est le cas, alors toute combinaison convexe de points extrêmes de $D(G, L)$ est également dans $P(G, L)$. De plus, comme $\text{Dom}(D(G, L)) = D(G, L)$, toute solution $y \in D(G, L)$ peut être vue comme la somme $x + z$, où x appartient à l'enveloppe convexe des points extrêmes de $D(G, L)$ et $z \geq 0$. Comme $x \in P(G, L)$, on a $y \in \text{Dom}(P(G, L))$.

Soit $\bar{x}$ un point extrême de $D(G, L)$. Comme $P(G, L) = Q(G, L)$ et toutes les inégalités de $Q(G, L)$ sont présentes dans $D(G, L)$ sauf les contraintes $x(e) \leq 1$, $e \in E$, afin de montrer que $\bar{x} \in P(G, L)$, il suffit de montrer que $\bar{x}$ satisfait aussi ces contraintes.

Considérons une arête $e_0 \in E$ telle que $\bar{x}(e_0) > 0$. Comme $\bar{x}$ est un point extrême de $D(G, L)$, il existe au moins une contrainte parmi (5.2), (5.4), (5.6) et (5.7) utilisant la variable $x(e_0)$ et serrée par $\bar{x}$. Si $\bar{x}(\delta(W) \setminus \{f\}) = 1$ avec $e_0 \in \delta(W) \setminus \{f\}$ pour une *st*-coupe $\delta(W)$ et $f \in \delta(W)$, alors $\bar{x}(e_0) \leq \bar{x}(\delta(W) \setminus \{f\}) = 1$. Si $\bar{x}(\delta(W)) = 2$ avec $e_0 \in \delta(W)$ pour une *st*-coupe $\delta(W)$, alors $\bar{x}(e_0) + \bar{x}(\delta(W) \setminus \{e_0\}) = 2$ et donc $\bar{x}(e_0) = 2 - \bar{x}(\delta(W) \setminus \{e_0\})$. Comme $\bar{x}$ satisfait (5.6), il s'ensuit que $\bar{x}(e_0) \leq 1$.

D'une manière analogue, on obtient que $\bar{x}(e_0) \leq 1$ si une des contraintes (5.4) et (5.7) contenant $x(e_0)$ est serrée par $\bar{x}$. $\square$

Une conséquence immédiate des théorèmes 5.3 et 5.30 est la suivante.

Corollaire 5.31 *Si $L = 2, 3$, alors $\text{Dom}(P(G, L)) = D(G, L)$.*

5.8 Généralisation

Comme nous l'avons précédemment mentionné, la formulation que nous avons donnée n'est pas valide pour $L \geq 4$. Dans [22], Dahl et Gouveia ont étudié le polytope associé aux chemins bornés en tant que sous-problème d'un problème plus général. Ce dernier consiste à trouver un arbre de poids minimum couvrant les sommets d'un graphe tel que le chemin entre un nœud racine fixé et tout autre nœud du graphe ne dépasse pas une certaine longueur. Ils introduisent une classe d'inégalités qui généralise les contraintes de L - st -coupe (5.3). On peut, de la même manière, généraliser les contraintes de L - st -coupe (5.4) pour le polytope $P(G, L)$.

Soit $V_0, \dots, V_p$ une partition avec $p \geq L + 1$, $s \in V_0$ et $t \in V_p$. Considérons l'inégalité suivante

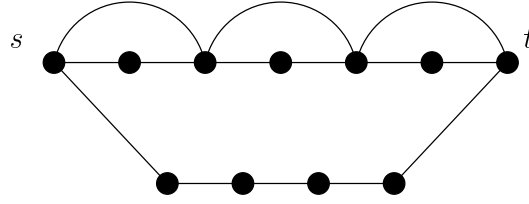
$$\sum_{e \in [V_i, V_j], i < j} \min(j - i - 1, p - L) x(e) \geq k(p - L). \quad (5.9)$$

Théorème 5.32 *L'inégalité (5.9) est valide pour le polytope $P(G, L)$.*

Preuve. Un L - st -chemin ne peut pas intersecter plus de $L + 1$ éléments de la partition. Il doit donc en sauter $p + 1 - (L + 1) = p - L$. De plus, on peut remarquer que le coefficient de chaque arête correspond au nombre d'éléments de la partition sautés par l'arête. Comme chaque chemin doit sauter $p - L$ éléments et les chemins sont arête-disjoints, la valeur du membre de gauche doit être $\geq 2(p - L)$. $\square$

Nguyen [81] a montré que le dominant du polytope associé aux L - st -chemins (cas $k = 1$, où k est le nombre de chemins arête-disjoints recherchés entre s et t) est entièrement décrit par les contraintes triviales, les contraintes de st -coupe et les contraintes (5.9). En revanche, ces contraintes ne suffisent malheureusement pas pour formuler le problème lorsque $k = 2$. En effet, considérons le graphe donné par la figure 5.4. Le vecteur d'incidence de l'ensemble d'arêtes de ce graphe vérifie toutes ces contraintes. Cependant, cette solution n'est pas admissible pour le THPP. Par contre, en appliquant des procédures de lifting, les contraintes (5.9), peuvent être étendues en la classe plus générale suivante pour $L = 4$.

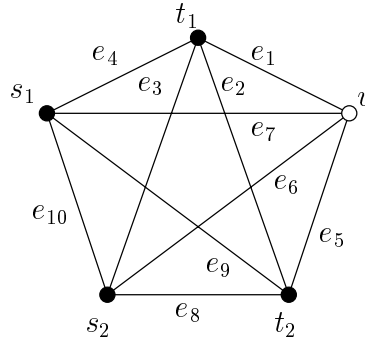
Soit $V_0, \dots, V_6, W_1, \dots, W_4$ une partition de V telle que $s \in V_0$ et $t \in V_6$. On pose

FIG. 5.4 – *Contre-exemple*

$W_0 = V_0$ et $W_5 = V_6$. Soit a le vecteur associé aux arêtes donné par

$$a(e) = \begin{cases} 1 & \text{pour tout } e \in [V_i, V_j], |i - j| = 2, i, j \in \{0, \dots, 6\}, \\ 1 & \text{pour tout } e \in [V_3, W_1] \cup [V_2, W_3] \cup [V_3, W_4] \cup [V_4, W_2], \\ 2 & \text{pour tout } e \in [V_i, V_j], |i - j| \geq 3, i, j \in \{0, \dots, 6\}, \\ 2 & \text{pour tout } e \in [W_i, W_j], |i - j| \geq 2, i, j \in \{0, \dots, 5\}, \\ 2 & \text{pour tout } e \in [V_1, W_3] \cup [V_1, W_4] \cup [V_2, W_4] \cup \\ & [V_4, W_1] \cup [V_5, W_1] \cup [V_5, W_2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La contrainte $ax \geq 4$ est valide pour $P(G, L)$. Nous conjecturons que pour $L = 4$, ces contraintes avec les contraintes (5.1), (5.2), (5.4), et les contraintes d'intégrité donnent une formulation en 0 – 1 pour le THPP.

FIG. 5.5 – *Point extrême*

Une autre généralisation naturelle du problème, est de considérer plusieurs demandes $d_i = (s_i, t_i)$. Le problème consiste maintenant à trouver un sous-graphe de coût minimum tel qu'entre chaque paire de sommets (s_i, t_i) , il existe au moins deux L - st -chemins arête-disjoints. La formulation donnée en section 5.2 peut être facilement étendue à ce problème quand $L = 2$ ou 3. Cependant, les contraintes triviales, les contraintes de $s_i t_i$ -coupe et les contraintes de L - $s_i t_i$ -coupe, ne suffisent pas pour décrire le polytope

associé. En effet, considérons le graphe donné par la figure 5.5 avec deux demandes (s_1, t_1) et (s_2, t_2) . La solution $\bar{x} = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1/2, 1/2, 1/2)$ satisfait les contraintes triviales, les contraintes de $s_i t_i$ -coupe et les contraintes de L - $s_i t_i$ -coupe pour $i = 1, 2$. De plus, $\bar{x}$ est un point extrême du polytope donné par ces inégalités. Ceci implique que ces contraintes ne décrivent pas le polytope pour ce graphe. En effet, il est facile de vérifier que cette solution viole la contrainte

$$x(e_5) + x(e_6) + x(e_7) + x(e_8) + (e_9) + x(e_{10}) \geq 2 \quad (5.10)$$

qui est valide pour le polytope associé. En fait, cette contrainte fait partie d'une classe d'inégalités plus large généralisant les contraintes de F -partition Steiner mentionnées dans le chapitre 3. Cette classe d'inégalités est définie de la manière suivante. Soit $V_0, \dots, V_p$ une partition de V telle que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe une demande $d_j = (s_j, t_j)$ avec $|\{s_j, t_j\} \cap V_i| = 1$. Soit $F \subseteq \delta(V_0)$ un ensemble d'arêtes de cardinalité impaire. Considérons l'inégalité

$$x(\delta(V_0, \dots, V_p) \setminus F) \geq p - \left\lfloor \frac{F}{2} \right\rfloor. \quad (5.11)$$

Le théorème suivant, donné sans preuve (la preuve est similaire à celle pour les contraintes de F -partition Steiner), montre que ces contraintes sont valides.

Théorème 5.33 *Les contraintes (5.11) sont valides pour $P(G, L)$.*

Il est facile de voir que la contrainte (5.10) n'est rien d'autre que la contrainte (5.11) quand $V_0 = \{u, t_1\}$, $V_1 = \{s_1\}$, $V_2 = \{s_2\}$, $V_3 = \{t_2\}$ et $F = \{e_2, e_3, e_4\}$.

Enfin, un dernier problème pouvant être intéressant à mentionner est le suivant. Soient $G = (V, E)$ un graphe, $L \geq 2$ une constante et $c(e)$ un coût associé à chaque arête $e \in E$. Soit D un ensemble de demandes $d_i = (s_i, t_i)$ pour $i = 1, \dots, q$. Considérons le problème $\mathcal{P}$ qui consiste à trouver un sous-graphe $H = (V(F), F)$ de G de coût minimum tel que pour tout $e \in F$, et pour toute demande d_i , $i \in \{1, \dots, q\}$, il existe au moins un chemin de longueur au plus L entre s_i et t_i dans $H - e$. Le théorème suivant dont la preuve est similaire à celle du théorème 5.2 donne une formulation de ce problème en un programme en nombres entiers.

Théorème 5.34 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $L \geq 2$. Alors le problème $\mathcal{P}$ est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant :*

$$\text{Min}\{cx \mid x \in Q(G, L), x \in \{0, 1\}^m\}.$$

Noter alors que le problème $\mathcal{P}$ n'est rien d'autre que le THPP quand $L \leq 3$ et $D = \{(s, t)\}$. En revanche, si $L \geq 4$, les solutions peuvent être différentes. En effet, considérons le graphe donné par la figure 5.6. Comme nous l'avons vu, ce graphe n'est pas une solution du THPP quand $L = 4$. Cependant, quand on supprime une arête quelconque du graphe, il existe toujours un chemin de longueur au plus 4 entre s et t . Ainsi, le graphe définit une solution du problème $\mathcal{P}$.



FIG. 5.6 –

Soit $\Theta(G, L)$ le polytope associé au problème $\mathcal{P}$. Comme les deux problèmes sont les mêmes quand $L \geq 3$, on a le corollaire suivant.

Théorème 5.35 *Si $D = \{(s, t)\}$ et $L \leq 3$, alors $\Theta(G, L) = P(G, L)$.*

5.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème qui consiste à trouver dans un graphe deux chemins arête-disjoints de longueur bornée entre deux sommets fixés s et t . Nous avons montré que les contraintes de L - st -coupe avec les contraintes de st -coupe et les contraintes triviales sont suffisantes pour formuler le problème en un programme en nombres entiers ainsi que pour décrire le polytope $P(G, L)$ associé au problème lorsque $L \leq 3$. Une étude plus approfondie des différentes classes d'inégalités introduites nous a permis d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces inégalités définissent des facettes. Ceci nous a conduit à des caractérisations minimales du polytope $P(G, L)$ quand $L = 2, 3$. Enfin, nous avons considéré le dominant de ce polytope. Nous avons caractérisé ce polyèdre pour tout $L \geq 2$ quand le polytope $P(G, L)$ est donné par les contraintes triviales, les contraintes de st -coupe et les contraintes de L - st -coupe.

Comme la séparation des contraintes de st -coupe des contraintes (5.4) quand $L \leq 3$ peut se faire en temps polynomial, Ceci nous a permis d'avoir un algorithme de coupes polynomial pour le THPP quand $L \leq 3$.

Nous sommes actuellement en train d'étudier un algorithme de coupes et branchement pour le THPP lorsque le réseau possède plusieurs demandes. Nous avons d'ores et déjà quelques résultats préliminaires encourageants.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié trois problèmes de conception de réseaux. Ces problèmes peuvent être vus comme des généralisations du problème classique du sous-graphe 2-arête connexe.

Dans un premier temps, nous avons étudié le problème du sous-graphe Steiner 2-arête connexe. Nous avons introduit une classe de contraintes valides pour le polytope associé au problème, appelées contraintes de F -partition Steiner généralisées. Nous avons montré que ces inégalités, avec les inégalités de coupe Steiner et les inégalités triviales décrivent le polytope dans une classe de graphes contenant les roues. En conséquence, nous avons obtenu une description du polytope dans la classe des graphes de Halin quand les terminaux ont une disposition particulière. Ce résultat généralise celui de Barahona et Mahjoub [7] quand $S = V$.

Nous nous sommes ensuite intéressés au problème du sous-graphe 2-arête connexe où chaque arête doit appartenir à un cycle borné. Après l'introduction d'une famille de contraintes appelées contraintes de cycle, nous avons donné une formulation de ce problème comme un programme linéaire en nombres entiers ne faisant intervenir que les variables naturelles du problème. Par la suite, nous avons examiné la structure faciale du polytope associé. Ceci nous a permis d'introduire plusieurs classes de facettes. Nous avons également discuté de techniques de séparation pour ces facettes. En particulier, nous avons montré que la séparation des contraintes de cycle peut se faire en temps polynomial quand la borne sur les cycles ne dépasse pas 4. Ces résultats ont conduit au développement d'un algorithme de coupes et branchements pour ce problème. Celui-ci a été utilisé pour résoudre des instances réelles et aléatoires du problème.

Enfin, dans une dernière partie, nous avons considéré le problème qui consiste à trouver, entre deux sommets d'un graphe, deux chemins arête-disjoints de coût minimum de longueur bornée. Nous avons introduit une formulation pour ce problème en un programme en nombres entiers lorsque la borne est ≤ 3 . Et nous avons montré que la relaxation linéaire de ce programme est entière. Nous avons également discuté de

conditions nécessaires et suffisantes pour que cette relaxation soit minimale. Aussi, nous avons étudié le dominant du polytope associé et discuté de certaines généralisations du problème.

Plusieurs problèmes et questions restent cependant ouverts et méritent d'être étudiés.

D'abord, dans [7], Barahona et Mahjoub ont caractérisé le polytope des sous-graphes Steiner 2-arête connexes dans les graphes de Halin quand $S = V$. Une question qui reste encore posée est la caractérisation entière de ce polytope dans les graphes de Halin lorsque $S \neq V$. Comme Winter [88] a montré que, dans ce cas, le problème est polynomial, il doit être possible de caractériser le polytope associé à l'aide de contraintes séparables en temps polynomial. Dans cette thèse, nous avons répondu partiellement à cette question.

La structure des solutions du problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés est complexe. Ceci peut expliquer en partie le fait que les plus grandes instances que nous avons pu résoudre avec une borne sur les cycles ≥ 4 ne dépasse pas les 40 sommets. Et même pour cette taille, seulement peu d'instances ont pu être résolues à l'optimum. Ceci laisse croire qu'il doit encore exister des contraintes fondamentales pour le polytope associé. Vue l'intérêt pratique du problème et afin d'améliorer la performance de l'algorithme de coupes et branchements proposé, une étude complémentaire et approfondie du polytope associé pourrait être nécessaire. En particulier, il serait intéressant d'introduire de nouvelles familles de contraintes valides. Certaines de ces contraintes sont d'ores et déjà présentées dans l'annexe A. Celles-ci n'ont été formulées de manière générale qu'après la phase expérimentale et n'ont donc pas pu être intégrées à l'algorithme de coupes et branchements présenté dans le chapitre 4. L'étude d'algorithmes d'approximation pour le problème serait également très utile. Un tel algorithme peut être combiné avec une méthode de coupes pour déterminer des solutions proches de l'optimum pour le problème.

Lors des expérimentations concernant le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés, nous avons remarqué que, pour des bornes assez petites sur les cycles, il existait des chemins relativement longs entre certaines paires de sommets. Pour assurer un routage peu coûteux même en l'absence de panne, il serait nécessaire d'avoir des chemins de longueur limitée entre les terminaux. Le problème qui en résulte est donc de déterminer un sous-graphe 2-arête connexe de coût minimum tel que chaque arête appartienne à un cycle borné, et entre chaque paire de sommets, il existe au moins un chemin ne dépassant pas une certaine longueur. Nous assurons ainsi une certaine qualité de routage dans le réseau et ce, qu'une panne se produise ou non.

Dans le chapitre 4, nous avons également discuté du problème de la coupe mini-

mum sur les chemins bornés (BPCP). Ce problème consiste à déterminer un ensemble d'arêtes de poids minimum qui coupe tous les chemins ne dépassant pas une certaine longueur, entre deux sommets donnés d'un graphe. Nous avons montré que ce problème peut être résolu en temps polynomial lorsque la borne est ≤ 3 . Il a également été montré par McCormick [75] que ce problème est NP-complet lorsque la borne est ≥ 12 . La complexité de ce problème reste encore une question ouverte lorsque la borne est comprise entre 4 et 12. De plus, nous avons montré que les problèmes de séparation des contraintes de cycle et des contraintes de L - st -coupe se ramènent au BPCP. Ces contraintes sont fondamentales pour les deux problèmes du sous-graphe 2-arête connexe avec respectivement des cycles et des chemins bornés. Il serait ainsi intéressant d'avoir des algorithmes de séparation exacts et/ou approchés pour ces contraintes, en particulier dans les cas les plus courants (quand la borne est égale à 4 ou 5). Ceci nécessiterait une investigation approfondie de l'aspect algorithmique du problème BPCP dans ces cas.

Enfin, une question naturelle qui se pose lors de la conception d'un réseau est son dimensionnement. Celui-ci consiste à déterminer les capacités à installer sur les différents liens du réseau afin que toutes les demandes puissent être acheminées entre les origines-destinations. Les problèmes étudiés dans ce mémoire ne prennent en compte que l'aspect topologique du réseau. Il serait, par conséquent, intéressant d'étudier le problème qui associe à la fois la conception d'un réseau fiable avec des contraintes de borne et son dimensionnement. A notre connaissance, Une telle étude n'a jamais été faite auparavant.

Annexe A

Autres contraintes valides pour $\mathcal{P}(G, K)$

Dans cette partie, nous considérons de nouveau le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles ne dépassant pas une certaine longueur K (2ECSBR). Dans le cadre de notre étude de ce problème, nous avons identifié d'autres contraintes valides pour le polytope associé. Ces contraintes n'ont pas été utilisées dans les expérimentations menées sur ce problème. En effet, certaines de ces contraintes n'ont été formulées d'une manière générale qu'après la phase expérimentale. Et les autres concernent des classes particulières de graphes. Dans cette annexe, nous présentons ces contraintes.

A.1 Contraintes d'éventail

Avant d'introduire ces nouvelles contraintes, nous donnons le lemme suivant qui permet d'identifier des contraintes de sous-ensemble valides.

Lemme A.1 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $K \geq 3$ un entier fixé. Soit $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V telle que $p \geq K$. Soient $e \in [V_i, V_{i+1}]$, $i \in \{0, \dots, p\}$ et $f \in [V_j, V_{j+1}]$, $j \in \{0, \dots, p\} \setminus \{i\}$ deux arêtes de E . Soit $T = T_\pi \cup ([V_i, V_{i+1}] \setminus \{e\}) \cup ([V_j, V_{j+1}] \setminus \{f\})$. Alors T induit une contrainte valide de sous-ensemble $x(T) \geq 1$.*

Preuve. Supposons que $i < j$, le cas où $i > j$ peut être prouvé par symétrie. Soit $F \subset E$ une solution réalisable du 2ECSBR telle que $F \cap T = \emptyset$. Comme la contrainte

de coupe associée à l'ensemble de sommets $\bigcup_{k=i+1}^j V_k$ doit être satisfaite par le vecteur d'incidence de F , il s'ensuit que e et f appartiennent à F . Or le plus petit cycle contenant e et f est de longueur $\geq p + 1 > K$, une contradiction. Le graphe $G' = (V, E \setminus T)$ ne contient donc pas de solution du 2ECSBR et, en conséquence, l'ensemble T induit une contrainte de sous-ensemble valide. $\square$

Théorème A.2 Soient $G = (V, E)$ un graphe et $K \geq 3$ un entier fixé. Soit $\pi = (V_0, \dots, V_K)$ une partition de V . Soient $i, j \in \{0, \dots, K\}$ avec $i + 1 < j$, et e et f deux arêtes de $[V_i, V_{i+1}]$ et $[V_j, V_{j+1}]$ respectivement. Soient

$$\begin{aligned}\Lambda &= ([V_i, V_{i+1}] \setminus \{e\}) \cup ([V_j, V_{j+1}] \setminus \{f\}) \cup (\bigcup_{k=i+1}^{j-1} [V_k, V_{k+1}]), \\ T &= T_\pi \cup \Lambda.\end{aligned}$$

Alors la contrainte

$$x(T) \geq j - i \tag{A.1}$$

est valide pour $\mathcal{P}(G, K)$.

Preuve. Soient

$$\begin{aligned}T_1 &= \{e \in [V_k, V_l], k, l \in \{i + 1, \dots, j\}, k > l + 1\}, \\ T_2 &= (T_\pi \setminus T_1) \cup \Lambda.\end{aligned}$$

Assertion 1 La contrainte

$$2x(T_1) + x(T_2) \geq j - i \tag{A.2}$$

est valide pour $\mathcal{P}(G, K)$.

Preuve. Posons

$$\overline{T} = T_\pi \cup ([V_i, V_{i+1}] \setminus \{e\}) \cup ([V_j, V_{j+1}] \setminus \{f\}).$$

Par le lemme A.1 l'ensemble $\overline{T}$ induit une contrainte de sous-ensemble $x(\overline{T}) \geq 1$. Les contraintes suivantes sont ainsi valides pour $\mathcal{P}(G, K)$:

$$\begin{aligned}x(\delta(V_k)) &\geq 2, && \text{pour } k = i + 1, \dots, j, \\ x(\overline{T}) &\geq 1, \\ -x(e) &\geq -1, \\ -x(f) &\geq -1, \\ x(g) &\geq 0, && \text{pour tout } g \in T_\pi \setminus \left(\delta\left(\bigcup_{k=i+1}^j V_k\right)\right).\end{aligned}$$

En sommant ces contraintes, on obtient

$$4x(T_1) + 2x(T_2) \geq 2(j - i) - 1.$$

En divisant cette inégalité par 2 et en arrondissant le membre de droite à l'entier supérieur, on obtient la contrainte (A.2). $\blacklozenge$

Noter que $T = T_1 \cup T_2$. Noter également que si $j = i + 2$, alors $T_1 = \emptyset$, et la contrainte (A.1) n'est rien d'autre que la contrainte (A.2) qui, par l'assertion 1, est valide pour $\mathcal{P}(G, K)$. Nous supposons donc dans la suite que $j > i + 2$.

Soit F une solution de $\mathcal{F}(G)$. Si $F \cap T_1 = \emptyset$, alors par (A.2), on a $|F \cap T_2| \geq j - i$ et donc (A.1) est vérifiée. Par conséquent, supposons qu'il existe une arête $g \in T_1$ appartenant à F . Nous allons montrer que

$$|F \cap (T \setminus \{g\})| \geq j - i - 1. \quad (\text{A.3})$$

et ainsi la contrainte (A.1) est satisfaite par x^F .

Considérons la partition $\pi_W = (W_0, \dots, W_{j-i-2})$ donnée par

$$\begin{aligned} W_0 &= \bigcup_{k=0}^{i+1} V_k \cup \bigcup_{k=j}^K V_k, \\ W_k &= V_{i+k+1} \end{aligned} \quad \text{pour } k = 1, \dots, j - i - 2.$$

Notons que, comme $j > i + 2$, $j - i - 2 \geq 1$, et par conséquent, la partition π_W est bien définie. Posons $\Delta_W = \delta(W_0, \dots, W_{j-i-2})$. La contrainte cyclomatique (4.5) associée à la partition π_W s'écrit

$$x(\Delta_W) \geq j - i - 2 + \left\lceil \frac{j - i - 2}{K - 1} \right\rceil = j - i - 1. \quad (\text{A.4})$$

Remarquons que $\Delta_W \subset T$. Si $g \notin \Delta_W$, alors $|F \cap (T \setminus \{g\})| \geq |F \cap \Delta_W|$, et par l'inégalité (A.4), (A.3) est également vérifiée. Supposons donc que $g \in \Delta_W$. Si $x^F(\Delta_W) \geq j - i$, alors (A.3) est vérifiée. On peut alors supposer que le vecteur d'incidence de F vérifie (A.4) à l'égalité. Nous avons alors l'assertion suivante.

Assertion 2 $F \cap (T \setminus \Delta_W) \neq \emptyset$.

Preuve. Si $(F \cap \Delta_W) \cap \delta(V_{i+1}) = \emptyset$, alors, comme $x^F(\delta(V_{i+1})) \geq 2$, il doit exister une arête $g' \in F$ qui appartienne à $\delta(V_{i+1}) \setminus (\Delta_W \cup \{e\})$. Comme $\delta(V_{i+1}) \setminus \{e\} \subset T$, il s'ensuit que $g' \in F \cap (T \setminus \Delta_W)$. Si $(F \cap \Delta_W) \cap \delta(V_j) = \emptyset$, on peut montrer de la même manière que $F \cap (T \setminus \Delta_W) \neq \emptyset$.

Supposons donc que $(F \cap \Delta_W) \cap \delta(V_{i+1}) \neq \emptyset$ et $(F \cap \Delta_W) \cap \delta(V_j) \neq \emptyset$. Comme les contraintes de coupe induites par les ensembles W_k , $k = 0, \dots, j - i - 2$ doivent être satisfaites par x^F et $x^F(\Delta_W) = j - i - 1$, il s'ensuit que $x^F(\delta(W_k)) = 2$ pour $k = 0, \dots, j - i - 2$. En effet, s'il existe $l \in \{0, \dots, j - i - 2\}$ tel que $x^F(\delta(W_l)) \geq 3$, en sommant les contraintes de coupe induites par W_k , $k = 0, \dots, j - i - 2$, on obtient

$$2x^F(\Delta_W) \geq 2(j - i - 1) + 1 > 2(j - i - 1).$$

Mais en divisant ceci par 2, on obtient $x^F(\Delta_W) > j - i - 1$, une contradiction.

Maintenant, comme toutes les contraintes de coupe doivent être vérifiées, il s'ensuit qu'il existe une permutation σ des indices $1, \dots, j - i - 2$ telle que $|[V_{i+1}, W_{\sigma(1)}] \cap F| = 1$, $|[V_j, W_{\sigma(j-i-2)}] \cap F| = 1$ et $|[W_{\sigma(k)}, W_{\sigma(k+1)}] \cap F| = 1$ pour $k = 1, \dots, j - i - 3$. En d'autres termes, les ensembles $W_{\sigma(1)}, \dots, W_{\sigma(j-i-2)}$ sont définis de telle manière que les arêtes de $F \cap \Delta_W$ forment un chemin de V_{i+1} à V_j (voir figure A.1). Soit π' la partition $V_0, \dots, V_{i+1}, W_{\sigma(1)}, \dots, W_{\sigma(j-i-2)}, V_j, \dots, V_K$. On peut remarquer que π' définit la même partition que π avec un ordre différent des éléments. Soit $T' = T_{\pi'} \cup ([V_i, V_{i+1}] \setminus \{e\}) \cup ([V_j, V_{j+1}] \setminus \{f\})$. Par le lemme A.1, T' induit une contrainte de sous-ensemble valide. Noter que $T' \cap \Delta_W \cap F = \emptyset$ et $T' \subset T$. Il s'ensuit qu'il existe une arête g'' de $T' \cap F$, et donc de $T \cap F$ telle que $g'' \notin \Delta_W$. ♦

Il résulte de l'assertion 2 qu'il existe une arête $\bar{g}$ appartenant à $F \cap (T \setminus \Delta_W)$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x^F(T \setminus \{g\}) &= x^F(T) - 1 \\ &\geq x^F(g'') + x^F(\Delta_W) - 1 \\ &= x^F(\Delta_W) \\ &= j - i - 1. \end{aligned}$$

D'où (A.3) est encore satisfaite. □

Les inégalités du type (A.1) seront appelées *contraintes d'éventail*. Le théorème suivant, donné sans preuve, présente quelques conditions suffisantes pour que la contrainte (A.1) définisse une facette.

Théorème A.3 *La contrainte (A.1) définit une facette de $\mathcal{P}(G, K)$ si les conditions suivantes sont vérifiées.*

- $|V_k| \geq 4$ pour tout $k \in \{0, \dots, i - 1, j + 2, \dots, K\}$,
- $|V_k| = 1$ pour tout $k \in \{i, \dots, j + 1\}$,
- $j < K$.

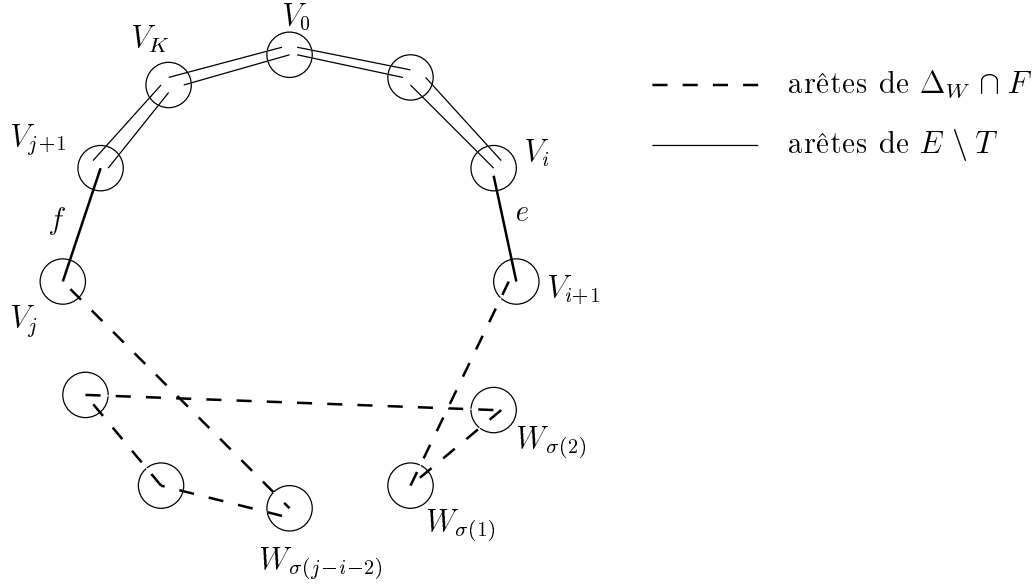


FIG. A.1 –

A.2 Contraintes de rayon

Soit $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V telle que $p \geq K + 1$ (les indices sont pris modulo $p + 1$). Pour chaque arête $e \in [V_i, V_j]$, $i, j \in \{1, \dots, p\}$ telle que $j > i + 1$, on dénote par $\text{jump}(e)$ le nombre minimum d'éléments V_i sautés par l'arête e dans le cycle formé par $V_1, \dots, V_p$. En d'autres termes,

$$\text{jump}(e) = \min(j - i - 1, p - j + i - 1).$$

A chaque arête $e \in [V_i, V_j]$, $i, j \in \{1, \dots, p\}$ et $j > i + 1$, on associe les deux entiers suivant

$$\begin{aligned} \delta_e &= \begin{cases} 1 & \text{si } \text{jump}(e) = K - 2, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \\ \delta'_e &= \begin{cases} 2 & \text{si } \text{jump}(e) = \frac{p}{2} - 1, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, la partition $\pi^i = (V_0^i, \dots, V_K^i)$ est donnée par

$$\begin{aligned} V_j^i &= V_{i+j}, & \text{pour } j = 0, \dots, K - 1, \\ V_K^i &= V \setminus \left(\bigcup_{j=0}^{K-1} V_j^i \right). \end{aligned}$$

Soit $e \in [V_j, V_l]$, $j, l \in \{1, \dots, p\}$ telle que $l \geq j + 2$. On dénote par $\text{nb}(e)$ le nombre de partitions π^i telles que $e \in T_{\pi^i}$.

Lemme A.4 Soit $e \in [V_j, V_l]$, $j, l \in \{1, \dots, p\}$ telle que $l \geq j + 2$. Alors on a

$$nb(e) = \frac{2(K-2)}{\delta'_e} - \max(0, K-3 - \text{jump}(e)) + \delta_e.$$

Preuve. Noter d'abord que $nb(e)$ correspond également, étant donné une partition π^i , au nombre de paires d'ensembles $(V_{j'}, V_{l'})$, $l' \geq j' + 2$ telles que $\text{jump}(f) = \text{jump}(e)$, $f \in [V_{j'}, V_{l'}] \cap T_{\pi^i}$. Dans la suite, on note par E_f l'ensemble des arêtes $f \in [V_{j'}, V_{l'}] \cap T_{\pi^i}$ telles que $\text{jump}(f) = \text{jump}(e)$. De telles arêtes sont forcément incidentes à un des ensembles V_k^i , $k = 0, \dots, K-1$. Remarquons que chacun des ensembles V_k^i , $k = 1, \dots, K-2$ est incident à 2 arêtes de E_f sauf dans le cas où p est pair et $\text{jump}(e) = (p/2) - 1$. Dans ce dernier cas, une seule arête de E_f est incidente aux ensembles V_k^i , $k = 1, \dots, K-2$. Posons $\mu = \frac{K-2}{\delta'_e}$. Remarquons que si $\text{jump}(e) \leq K-4$, alors certaines arêtes ont été comptées deux fois. C'est le cas, par exemple, d'une arête $f \in [V_1^i, V_3^i]$ quand $K = 5$ et $\text{jump}(e) = 1$. Ainsi, si $K-3 - \text{jump}(e) > 0$, alors on aura compté $K-3 - \text{jump}(e)$ arêtes en trop. Notons enfin que si $\text{jump}(e) = K-2$, alors $[V_0^i, V_{K-1}^i] \cap E_f \neq \emptyset$. Il résulte de ceci que

$$nb(e) = \mu - \max(0, K-3 - \text{jump}(e)) + \delta_e,$$

et le lemme est prouvé. $\square$

Nous avons le théorème suivant.

Théorème A.5 Soient $G = (V, E)$ un graphe et $K \geq 4$ un entier fixé. Soit $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V telle que $p \geq K+1$. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, soit e_i une arête fixée de $[V_i, V_{i+1}]$. Soit E_f l'ensemble des arêtes $f \in [V_i, V_j]$ telles que $i, j \in \{1, \dots, p\}$ et $j \geq i+2$. Soit $ax \geq \alpha$ la contrainte telle que

$$a(e) = \begin{cases} 0 & \text{pour tout } e \in E(V_0) \cup \bigcup_{i=1}^p (E(V_i) \cup \{e_i\}), \\ 1 & \text{pour tout } e \in [V_0, V_i] \cup ([V_i, V_{i+1}] \setminus \{e_i\}), i = 1, \dots, p, \\ & \text{et pour tout } e \in E_f \text{ telle que } \text{jump}(e) = (p/2) - 1 \text{ et } \text{jump}(e) \neq K-2, \\ 2 & \text{pour tout } e \in E_f \text{ telle que } \text{jump}(e) = K-2 \text{ et } p = 2K-2, \\ & \text{et pour tout } e \in E_f \text{ telle que } \text{jump}(e) \neq K-2 \text{ et } \text{jump}(e) \neq (p/2) - 1, \\ 3 & \text{pour tout } e \in E_f \text{ telle que } \text{jump}(e) = K-2 = (p/2) - 1, \end{cases}$$

et

$$\alpha = \left\lceil \frac{p}{K-2} \right\rceil.$$

Alors la contrainte

$$ax \geq \alpha \tag{A.5}$$

est valide pour $\mathcal{P}(G, K)$.

Preuve. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, posons

$$T^i = T_{\pi^i} \cup ([V_0^i, V_1^i] \setminus \{e_i\}) \cup ([V_{K-2}^i, V_{K-1}^i] \setminus \{e_{i+K-2}\}).$$

Par le lemme A.1, l'ensemble T^i induit une contrainte de sous-ensemble valide $x(T^i) \geq 1$. Nous avons ainsi les contraintes valides suivantes :

$$x(T^i) \geq 1 \quad \text{pour tout } i \in \{0, \dots, p\},$$

En sommant ces contraintes, on obtient

$$\sum_{i=1}^p \left(2 \sum_{e \in [V_i, V_{i+1}] \setminus \{e_i\}} x(e) + (K-2) \sum_{e \in [V_0, V_i]} x(e) \right) + \sum_{e \in E_f} \text{nb}(e)x(e) \geq p. \quad (\text{A.6})$$

Remarquer que, comme $\max(0, K-3 - \text{jump}(e)) \leq K-3$, on a

- si $\text{jump}(e) = K-2$ et $p = 2K-2$ alors $\text{nb}(e) = K-1$,
- si $\text{jump}(e) = K-2$ et $p \neq 2K-2$ alors $\text{nb}(e) = 2(K-2) + 1$,
- si $\text{jump}(e) \neq K-2$ et $\text{jump}(e) = (p/2) - 1$ alors $K-2 \leq \text{nb}(e) < 2(K-2)$,
- si $\text{jump}(e) \neq K-2$ et $\text{jump}(e) \neq (p/2) - 1$ alors $2(K-2) \leq \text{nb}(e) < 3(K-2)$.

En rajoutant à (A.6) les inégalités

$$\begin{aligned} (K-4)x(e) &\geq 0, & \text{pour tout } e \in [V_i, V_{i+1}] \setminus \{e_i\}, \\ & & i = 1, \dots, p, \\ (K-2 - (\text{nb}(e) \bmod (K-2)))x(e) &\geq 0, & \text{pour tout } e \in E_f, \end{aligned}$$

on obtient

$$(K-2)ax \geq p.$$

Maintenant, en divisant cette inégalité par $K-2$ et en arrondissant le membre de droite à l'entier supérieur, on obtient (A.5). $\square$

Les contraintes du type (A.5) seront appelées *inégalités de rayon*. Noter que si G est un graphe de la classe Γ définie dans la section 3.1, alors G induit la contrainte (A.5) suivante

$$x(\delta(w)) \geq \left\lceil \frac{p}{K-2} \right\rceil. \quad (\text{A.7})$$

A.3 Contraintes valides pour $\mathcal{P}(G, 4)$

Soit $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V . Pour $i = 1, \dots, p$, considérons les partitions π^i définies dans le paragraphe précédent. Soit

$$ev(i, K) = T_{\pi^i} \cup ([V_i, V_{i+1}] \setminus \{e_i\}) \cup ([V_{i+K-2}, V_{i+K-1}] \setminus \{e_{i+K-2}\}) \cup \left(\bigcup_{k=i+1}^{i+K-3} [V_k, V_{k+1}] \right).$$

La contrainte d'éventail associée à la partition π^i et aux arêtes e_i et e_{i+K-2} s'écrit alors

$$x(ev(i, K)) \geq K - 2.$$

Dans la suite, afin de simplifier les démonstrations, on parlera de la contrainte d'éventail $x(ev(i, K)) \geq K - 2$ sans préciser qu'elle est associée à la partition π^i et aux arêtes e_i et e_{i+K-2} .

Soit

$$V(i, j) = \{V_i, \dots, V_j\}.$$

Nous présentons maintenant une contrainte spécifique au cas où $K = 4$.

Théorème A.6 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $K = 4$. Soit $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V telle que $p \geq K + 1$ (les indices sont pris modulo $p + 1$). Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, soit e_i une arête fixée de $[V_i, V_{i+1}]$.*

Soient $C^ = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_q}\} \subset \{e_1, \dots, e_p\}$ et $F^* = \{f_{j_1}, \dots, f_{j_r}\}$ deux ensembles d'arêtes tels que $f_{j_k} \in [W, V_{j_k}]$ pour $k = 1, \dots, r$ et $\{i_1, \dots, i_q\} \cap \{j_1, \dots, j_r\} = \emptyset$. Soit $S = \{s_1, \dots, s_{q+r}\} = \{i_1, \dots, i_q\} \cup \{j_1, \dots, j_r\}$ tel que $0 \leq s_i < s_{i+1} \leq p$ pour $i = 1, \dots, q + r - 1$. On suppose, pour tout $i \in \{1, \dots, q + r\}$ (les indices sont pris modulo $q + r$), ce qui suit :*

- si $s_i, s_{i+1} \in \{i_1, \dots, i_q\}$ ou $s_i, s_{i+1} \in \{j_1, \dots, j_r\}$ alors $|V(s_i, s_{i+1})| = 3k_i + 2$ pour un certain $k_i \geq 0$,
- si $s_i \in \{i_1, \dots, i_q\}$ ou $s_{i+1} \in \{j_1, \dots, j_r\}$ alors $|V(s_i, s_{i+1})| = 3k_i + 1$ pour un certain $k_i > 0$,
- si $s_{i+1} \in \{i_1, \dots, i_q\}$ ou $s_i \in \{j_1, \dots, j_r\}$ alors $|V(s_i, s_{i+1})| = 3k_i$ pour un certain $k_i > 0$.

Posons

$$c_i = \frac{|V(s_i, s_{i+1})| - 2}{3} \quad \text{et} \quad t_i = c_i - \lfloor c_i \rfloor \quad \text{pour } i = 1, \dots, q + r,$$

$$T' = \{g \in [V_i, V_j] \mid i, j \in \{j_1, \dots, j_r\}\}.$$

Soient

$$\begin{aligned} T_1 &= \delta(V_1, \dots, V_p) \setminus (T' \cup \{e_1, \dots, e_p\}), \\ T_2 &= (T' \cup \{e_1, \dots, e_p\} \cup (\bigcup_{k=1}^p [V_0, V_k])) \setminus (C^* \cup F^*), \\ \alpha_0 &= \left\lceil \frac{q+r+\sum_{i=1}^{q+r} (8\lfloor c_i \rfloor + 4\lceil t_i \rceil)}{2} \right\rceil. \end{aligned}$$

Alors la contrainte

$$2x(T_1) + x(T_2) \geq \alpha_0 \quad (\text{A.8})$$

est valide pour $\mathcal{P}(G, 4)$.

Preuve. Soient $I = \{i_1, \dots, i_q\}$ et $J = \{j_1, \dots, j_r\}$. Posons

$$\begin{aligned} L_1 &= \{l = s_i + 3j + 3 \mid j \in \{0, \dots, k_i - 2\}, k_i \geq 2, s_i \in I \text{ et } s_{i+1} \in J\}, \\ L_2 &= \{l = s_i + 3j + 2 \mid j \in \{0, \dots, k_i - 2\}, k_i \geq 2, s_i \in J \text{ et } s_{i+1} \in I\}, \\ L_3 &= \{l = s_i + 3j + 1 \mid j \in \{0, \dots, k_i - 1\}, k_i \geq 1 \text{ et } s_i, s_{i+1} \in I\}, \\ L_4 &= \{l = s_i + 3j + 1 \mid j \in \{0, \dots, k_i - 1\}, k_i \geq 1 \text{ et } s_i, s_{i+1} \in J\}, \end{aligned}$$

Considérons les contraintes valides suivantes :

$$\begin{aligned} -x(e) &\geq -1, & \text{pour tout } e &\in F^* \cup C^*, \\ \\ x(e) &\geq 0, & \text{pour tout } e &\in [W, V_j], j \in J, \\ & & e &\in [V_i, V_j], i, j \in \{1, \dots, p\} \\ & & & \text{tels que } |\{i, j\} \cap J| = 1 \text{ et } j > i + 1, \\ & & e &\in [V_i, V_{i+1}] \setminus \{e_i\}, i \in I, \\ & & e &\in [V_i, V_{i+1}] \setminus \{e_i\}, i \in \{1, \dots, p\} \\ & & & \text{tel que } |\{i, i+1\} \cap J| = 1, \\ & & e &\in [V_{s_i+1}, V_{s_i+2}] \setminus \{e_{s_i+1}\}, i \in \{1, \dots, q+r\} \\ & & & \text{tel que } |\{s_i, s_{i+1}\} \cap I| = 1, \\ & & e &\in [V_l, V_{l+1}] \setminus \{e_l\}, l \in L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4, \\ & & e &\in [V_{l+1}, V_{l+2}] \setminus \{e_{l+1}\}, l \in L_1 \cup L_4, \\ & & e &\in [V_{l+2}, V_{l+3}] \setminus \{e_{l+2}\}, l \in L_2 \cup L_3, \\ \\ x(\delta(V_i)) &\geq 2, & \text{pour tout } i &\in J, \\ & & i &= s_i + 2 \text{ tel que } s_i \in I \text{ et } s_{i+1} \in J, \\ & & i &= s_i + 1 \text{ tel que } s_i \in J \text{ et } s_{i+1} \in I, \\ & & i &= l, l + 2, l \in L_1 \cup L_4, \\ & & i &= l + 1, l + 2, l \in L_2 \cup L_3, \\ \\ x(ev(i, 4)) &\geq 2, & \text{pour tout } i &\in I, \\ & & i &= s_i + 1 \text{ tel que } |\{s_i, s_{i+1}\} \cap I| = 1, \\ & & i &= l; l + 1, l \in L_1 \cup L_4, \\ & & i &= l + 1, l + 2, l \in L_2 \cup L_3. \end{aligned}$$

En sommant toutes ces contraintes, on obtient

$$4x(T_1) + 2x(T_2) \geq q + r + \sum_{i=1}^{q+r} (8\lfloor c_i \rfloor + 4\lceil t_i \rceil).$$

En divisant par 2 et en arrondissant le membre de droite à l'entier supérieur, on obtient l'inégalité (A.8). $\square$

Remarque A.7 Si $q + r$ est pair, alors les contraintes (A.8) sont redondantes.

Nous allons maintenant illustrer ces contraintes sur la roue $W_8 = (V, E)$. Soient $V = \{w, u_1, \dots, u_8\}$ les sommets de la roue où w représente le sommet central et $u_1, \dots, u_8$ les sommets du cycle. Soient $e_i = u_i u_{i+1}$ et $f_i = w u_i$ pour $i = 1, \dots, 8$ (voir figure A.2). Soit $\pi = (V_0, \dots, V_8)$ la partition donnée par $V_0 = \{w\}$ et $V_i = \{u_i\}$ pour $i = 1, \dots, 8$. Prenons $C^* = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et $F^* = \{f_7\}$. La contrainte (A.8) associée à π , C^* et F^* s'écrit

$$x(e_5) + x(e_6) + x(e_7) + x(e_8) + x(f_1) + x(f_2) + x(f_3) + x(f_4) + x(f_5) + x(f_6) + x(f_8) \geq 7.$$

De la même manière, en faisant pivoter la partition π autour du sommet w , on obtient sept autres contraintes (A.8) avec la même structure. On a également les contraintes (A.8) suivantes

$$\begin{aligned} x(e_1) + x(e_2) + x(e_3) + x(e_4) + x(e_5) + x(e_6) + x(e_7) + x(e_8) + x(f_5) + x(f_6) + x(f_7) &\geq 7, \\ x(e_2) + x(e_3) + x(e_4) + x(e_5) + x(e_6) + x(e_7) + x(e_8) + x(f_1) + x(f_2) + x(f_3) + x(f_8) &\geq 7, \\ x(e_2) + x(e_3) + x(e_4) + x(e_5) + x(e_6) + x(e_7) + x(f_1) + x(f_2) + x(f_3) + x(f_7) + x(f_8) &\geq 7, \\ x(e_3) + x(e_4) + x(e_5) + x(e_6) + x(e_7) + x(f_1) + x(f_2) + x(f_3) + x(f_4) + x(f_7) + x(f_8) &\geq 7, \\ x(e_3) + x(e_4) + x(e_5) + x(f_1) + x(f_2) + x(f_3) + x(f_4) + x(f_5) + x(f_6) + x(f_7) + x(f_8) &\geq 7, \end{aligned}$$

obtenues à partir de la partition π en prenant respectivement

- $C^* = \emptyset$ et $F^* = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_8\}$,
- $C^* = \{e_1\}$ et $F^* = \{f_4, f_5, f_6, f_7\}$,
- $C^* = \{e_1, e_8\}$ et $F^* = \{e_4, e_5, e_6\}$,
- $C^* = \{e_1, e_2, e_8\}$ et $F^* = \{f_5, f_6\}$,
- $C^* = \{e_1, e_2, e_6, e_7, e_8\}$ et $F^* = \emptyset$,

Maintenant, considérons la partition $V_0 = \{w\}$, $V_i = \{u_i\}$ pour $i = 1, \dots, 8$. Soit $i \in \{1, \dots, 8\}$. La contrainte déventail $x(ev(i, 4)) \geq K - 2$ associée à la partition π^i peut également s'écrire

$$x(e_{i+1}) + x(f_{i+1}) + x(f_{i+2}) \geq 2.$$

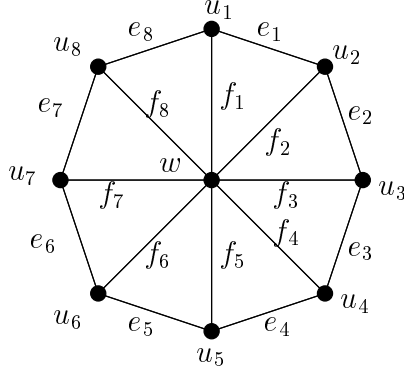


FIG. A.2 –

Par le calcul, nous avons montré que les contraintes (A.8) avec les contraintes triviales, les contraintes de coupe, les contraintes de F -partition, les contraintes cyclomatiques, la contrainte de rayon (A.7) et les contraintes d'éventail, permettent de décrire $\mathcal{P}(G, K)$ quand $G = W_8$ et $K = 4$. Ce résultat numérique ainsi que d'autres investigations, nous motivent à poser la conjecture suivante.

Conjecture A.8 *Les contraintes (A.8) avec les contraintes (2.1), (2.2), (2.3), (2.6), (4.1), (4.5), (A.1) et (A.5) suffisent pour caractériser le polytope $\mathcal{P}(G, K)$ quand G est un graphe de Γ et $K = 4$.*

Pour la suite, on suppose $K \geq 5$.

A.4 Contraintes de roue

Théorème A.9 *Soient $G = (V, E)$ un graphe et $K \geq 5$ un entier fixé. Soit $\pi = (V_0, \dots, V_p)$ une partition de V telle que*

- $p \geq K + 1$,
- $[V_i, V_j] = \emptyset$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, p\}$, $j \geq i + 2$,
- $[V_i, V_{i+1}] = \{e_i\}$ pour $i = 1, \dots, p$.

Posons

$$C(i, j) = \bigcup_{k=i}^{j-1} [V_k, V_{k+1}],$$

$$F(i, j) = \bigcup_{k=i}^j [V_0, V_k].$$

Soient

$$q = \left\lfloor \frac{p+1}{K-2} \right\rfloor,$$

$$T = \bigcup_{i=0}^{q-2} C(2+i(K-2), K-2+i(K-2)) \cup C(p-K+4, 1).$$

Si $n+1$ est un multiple de $K-2$, alors la contrainte

$$x(T) + x(\delta(V_0)) \geq p+2-q \quad (\text{A.9})$$

est valide pour $\mathcal{P}(G, K)$.

Preuve. Considérons les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} x(ev(j, K)) &\geq K-2, & \text{pour } j = 1+i(K-2) \text{ et } i = 0, \dots, q-1, \\ x(ev(j, K)) &\geq K-2, & \text{pour } j = 2+i(K-2) \text{ et } i = 0, \dots, q-2, \\ -x(e_j) &\geq -1, & \text{pour } j = 1+i(K-2) \text{ et} \\ & & \text{pour } j = (i+1)(K-2), \\ & & i = 0, \dots, q-2, \\ x(\delta(V_i)) &\geq 2, & \text{pour } i = p-K+5, \dots, p, \\ -x(e_i) &\geq -1, & \text{pour } i = p-K+5, \dots, p-1, \text{ si } K \geq 6. \end{aligned}$$

En sommant ces contraintes, on obtient :

$$2x(T) + 2x(\delta(V_0)) \geq \left\lfloor \frac{2p}{K-2} \right\rfloor (K-2) - 2 \left\lfloor \frac{p}{K-2} \right\rfloor + 2(K-4) - (K-5). \quad (\text{A.10})$$

Comme $K \geq 5$ et $n+1$ est multiple de $K-2$, on a

$$\left\lfloor \frac{2p}{K-2} \right\rfloor = 2q-1,$$

$$\left\lfloor \frac{p}{K-2} \right\rfloor = q-1.$$

Donc la contrainte (A.10) s'écrit :

$$2x(T) + 2x(\delta(V_0)) \geq -2q + 2p + 3.$$

En divisant cette contrainte par 2 et en arrondissant le membre de droite à l'entier supérieur, on obtient l'inégalité (A.9). $\square$

A.5 Conclusion

Nous avons introduit, dans cette annexe, de nouvelles classes d'inégalités valides pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des cycles bornés. Certaines d'entre elles, et plus particulièrement les contraintes d'éventail ont une structure simple et peuvent être facilement intégrées dans une méthode de coupes. Une étude faciale de ces inégalités serait nécessaire afin de déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles définissent des facettes. Il serait également utile d'étudier le problème de séparation de cette classe d'inégalités afin de pouvoir éventuellement améliorer la performance de l'algorithme de coupes et branchements présenté dans la section 4.3.

Enfin, si la conjecture A.8 s'avère vraie, des techniques de composition telles que celles utilisées dans le chapitre 3, pourraient permettre de caractériser, sous certaines conditions, le polytope du 2ECSBR dans la classe des graphes de Halin.

Annexe B

Le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des chemins bornés

Dans le chapitre 5, nous avons étudié le problème qui consiste à chercher dans un graphe donné, deux chemins arête-disjoints de coût minimum entre des paires de sommets. Un sous-graphe, solution de ce problème, peut ne pas être 2-arête connexe. Dans cette section, nous allons nous intéresser au problème où le sous-graphe solution doit couvrir tous les sommets, être 2-arête connexe et la longueur des chemins limitée à 2. Plus précisément, le problème se présente comme suit. Soient $G = (V, E)$ un graphe et $D = (d_i = \{s_i, t_i\})_{i=1, \dots, q}$ un ensemble de demandes. Soit c une fonction qui associe à chaque arête $e \in E$, un coût $c(e)$. Le problème que l'on considère est de trouver un sous-graphe couvrant 2-arête connexe de poids minimum tel que pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, il existe au moins deux chemins arête-disjoints de longueur 2 entre s_i et t_i . Ce problème sera appelé *problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des chemins bornés* (2ECSBP). Il est facile de voir qu'une formulation en 0 – 1 de ce problème est donnée par les contraintes triviales, les contraintes de coupe, les contraintes de 2- $s_i t_i$ -coupe et les contraintes d'intégrité. Dans ce qui suit, nous allons introduire quelques classes d'inégalités valides pour le polytope associé au 2ECSBP. Nous allons également décrire ce polytope lorsque le graphe est une roue et les demandes vérifient certaines conditions.

Dans la suite, on dénotera par $P(G)$ l'enveloppe convexe des solutions du 2ECSBP.

B.1 Contraintes valides

Théorème B.1 Soient $G = (V, E)$ un graphe et (s, t) une demande. Soit V_1, V_2, V_3 une partition de V telle que $s \in V_1$ et $t \in V_2$. Soit e une arête de $[V_3, V \setminus (V_3 \cup \{s, t\})]$. Posons

$$\Delta = (\delta(V_3) \setminus \{e\}) \cup [s, V_2] \cup [t, V_1].$$

Alors la contrainte

$$x(\Delta) \geq 3 \tag{B.1}$$

est valide pour le polytope $P(G)$.

Preuve. Considérons les partitions $\{s\}, (V_1 \cup V_3) \setminus \{s\}, V_2 \setminus \{t\}, \{t\}$ et $\{s\}, V_1 \setminus \{s\}, (V_2 \cup V_3) \setminus \{t\}, \{t\}$ de V . Ces partitions induisent deux 2- st -coupes dont les contraintes correspondantes sont

$$\begin{aligned} x(T_1) &\geq 2, \\ x(T_2) &\geq 2. \end{aligned}$$

où $T_1 = [s, V_2] \cup [t, V_1 \cup V_3]$ et $T_2 = [t, V_1] \cup [s, V_2 \cup V_3]$. Considérons aussi les contraintes

$$\begin{aligned} x(\delta(V_3)) &\geq 2, \\ -x(e) &\geq -1, \\ x(f) &\geq 0, \end{aligned} \quad \text{pour tout } f \in [V_3, V \setminus (V_3 \cup \{s, t\})] \setminus \{e\}.$$

En sommant les contraintes ci-dessus, on obtient

$$2x(\Delta) \geq 5.$$

En divisant cette inégalité par 2 et en arrondissant le membre de droite à l'entier supérieur, on obtient l'inégalité (B.1) $\square$

Théorème B.2 Soient $G = (V, E)$ un graphe et (s, t) une demande. Soit V_1, V_2, V_3, V_4 une partition de V telle que $s \in V_1$ et $t \in V_3$. Soient e, f et g trois arêtes de $[V_3 \setminus \{t\}, V_4]$, $[V_3 \setminus \{t\}, V_2]$ et $[s, V_3] \cup [t, V_1]$ respectivement. Posons

$$\begin{aligned} T_1 &= (\delta(V_1, V_2, V_3, V_4) \cup \{g\}) \setminus ([s, V_3] \cup [t, V_1] \cup \{e, f\}), \\ T_2 &= ([s, V_3] \cup [t, V_1]) \setminus \{g\}. \end{aligned}$$

Alors la contrainte

$$x(T_1) + 2x(T_2) \geq 4 \tag{B.2}$$

est valide pour $P(G)$.

Preuve. Considérons les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} x(\Delta_1) &\geq 3, \\ x(\Delta_2) &\geq 3, \\ x(\delta(V_1)) &\geq 2, \\ -x(g) &\geq -1, \\ x(e') &\geq 0 \quad \text{pour tout } e' \in ([V_1, V_3] \cup [V_3 \setminus \{t\}, V_2 \cup V_4]) \setminus \{e, f\}, \end{aligned}$$

où les deux premières inégalités sont les contraintes (B.1) données par la partition $V_1 \cup V_2, V_3, V_4$ et l'arête e pour la première et la partition $V_1 \cup V_4, V_2, V_3$ et l'arête f pour la seconde. En sommant ces inégalités on obtient

$$2x(T_1) + 4x(T_2) \geq 7.$$

En divisant cette inégalité par 2 et en arrondissant le membre de droite à l'entier supérieur, on obtient l'inégalité (B.2). $\square$

Nous allons maintenant introduire une classe d'inégalités valides pour $P(G)$ lorsque le graphe G est une roue. Soit W_n la roue sur $n + 1$ sommets. Nous dénotons par w le sommet universel de la roue et $u_1, \dots, u_n$ les sommets du cycle. Nous notons par e_i l'arête entre u_i et u_{i+1} , et par f_i l'arête entre w et u_i . On pose $C = \{e_1, \dots, e_n\}$. Nous avons le théorème suivant.

Théorème B.3 *Soit $W_n = (V, E)$ une roue. Soient $(w, u_{s_i}), i = 1, \dots, r$ les demandes dans W_n telles que $s_i + 1 < s_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, r$ (les indices sont pris modulo r). Posons*

$$\Phi = C \cup \left(\bigcup_{i=1}^r \{f_{s_i-1}, f_{s_i+1}\} \right)$$

et

$$\sigma = 2r + \left\lceil \frac{\sum_{i: s_i - s_{i-1} \geq 3} (s_i - s_{i-1})}{2} \right\rceil.$$

Alors la contrainte

$$x(\Phi) \geq \sigma \tag{B.3}$$

est valide pour $P(G)$.

Preuve. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, considérons les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned}
 & x(e_{s_i-1}) + x(e_{s_i}) + x(f_{s_i-1}) + x(f_{s_i}) + x(f_{s_i+1}) \geq 4, \\
 & \left. \begin{aligned} & -x(f_{s_i}) \geq -1, \\ & -x(f_{s_i-1}) \geq -1, \\ & x(\delta(u_{s_i-1})) \geq 2, \end{aligned} \right\} & \text{si } s_i - s_{i-1} = 2, \\
 & \left. \begin{aligned} & -x(f_{s_i}) \geq -1, \\ & x(\delta(u_j)) \geq 2 \quad j = s_{i-1} + 1, s_i - 1, \end{aligned} \right\} & \text{si } s_i - s_{i-1} = 3, \\
 & \left. \begin{aligned} & -x(f_{s_i}) \geq -1, \\ & x(\delta(u_j)) \geq 2 \quad j = s_{i-1} + 1, \dots, s_i - 1, \\ & -x(f_j) \geq -1, \quad j = s_{i-1} + 2, \dots, s_i - 2 \end{aligned} \right\} & \text{si } s_i - s_{i-1} \geq 4,
 \end{aligned}$$

où la première inégalité est la contrainte (B.2) donnée par les arêtes e_{s_i-2} , e_{s_i+1} et f_{s_i} et la partition

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \{u_{s_i}\}, \\
 V_2 &= \{u_{s_i+1}\}, \\
 V_3 &= V \setminus \{u_{s_i-1}, u_{s_i}, u_{s_i+1}\}, \\
 V_4 &= \{u_{s_i-1}\}.
 \end{aligned}$$

En sommant ces contraintes, on obtient

$$\begin{aligned}
 2x(\Phi) &\geq 4r + \sum_{i:s_i-s_{i-1}=3} 3 + \sum_{i:s_i-s_{i-1} \geq 4} (s_i - s_{i-1}) \\
 &= 4r + \sum_{i:s_i-s_{i-1} \geq 3} (s_i - s_{i-1}).
 \end{aligned}$$

En divisant cette inégalité par 2 et en arrondissant le membre de droite à l'entier supérieur, on obtient (B.3). $\square$

La suite de l'annexe étant dédiée aux roues, nous allons maintenant illustrer ces deux dernières classes d'inégalités sur ce type de graphe. Considérons la roue $W_8 = (V, E)$. Posons $V = \{w, u_1, \dots, u_8\}$, $e_i = u_i u_{i+1}$ et $f_i = w u_i$ pour $i = 1, \dots, 8$ (voir figures B.1 a) et b)). Soient $d_1 = (w, u_1)$ et $d_2 = (w, u_4)$ deux demandes. Considérons la partition V_1, V_2, V_3, V_4 donnée par

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \{u_1\}, \\
 V_2 &= \{u_2\}, \\
 V_3 &= \{u_3, \dots, u_7, w\}, \\
 V_4 &= \{u_8\}
 \end{aligned}$$

La contrainte (B.2) associée à la partition $V_1, \dots, V_4$, aux arêtes $e = e_7$, $f = e_2$ et $g = f_1$ et à la demande d_1 s'écrit

$$x(e_1) + x(e_8) + x(f_1) + x(f_2) + x(f_8) \geq 4.$$

Noter que cette contrainte ne contient pas de coefficient 2. Les arêtes impliquées dans cette contrainte sont représentées en traits noirs dans la figure B.1 a).

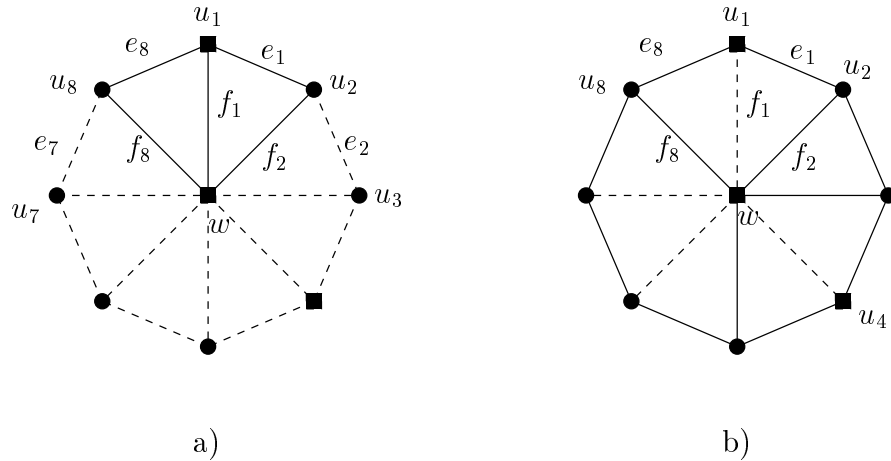


FIG. B.1 –

Considérons maintenant la partition $V'_0, \dots, V'_8$ où $V'_0 = \{w\}$ et $V'_i = \{u_i\}$ pour $i = 1, \dots, 8$. La contrainte (B.3) associée à cette partition et aux deux demandes d_1 et d_2 s'écrit

$$\sum_{i=1}^8 x(e_i) + x(f_2) + x(f_3) + x(f_5) + x(f_8) \geq 6.$$

Les arêtes impliquées dans cette contrainte sont représentées en traits noirs dans la figure B.1 b).

B.2 Le polytope $P(G)$ dans les roues

Dans la suite, nous allons étudier le polytope $P(G)$ quand le graphe G est une roue. Nous donnons une description de ce polytope lorsque G est une roue et les demandes satisfont certaines conditions. Posons

$$T(G) = \{F \subset E \mid (V, F) \text{ induit une solution du 2ECSBP}\}.$$

Remarque B.4 Soit W_n une roue. S'il existe une demande (u_i, u_j) , $i < j$ entre deux sommets du cycle de la roue telle que $|i - j| > 2$, alors $P(G) = \emptyset$.

Preuve. Considérons la $2-u_i u_j$ -coupe T induite par la partition

$$\begin{aligned} V_0 &= \{u_i\}, \\ V_1 &= \{u_{i-1}, u_{i+1}, w\}, \\ V_2 &= \{u_{i+2}, \dots, u_{j-1}\} \cup \{u_{j+1}, \dots, u_{i-2}\}, \\ V_3 &= \{u_j\}. \end{aligned}$$

Nous avons $T = \{f_j\}$. Comme toute $2-u_i u_j$ -coupe doit avoir avec toute solution du problème, au moins deux arêtes en commun, le problème ne peut avoir de solution réalisable. $\square$

Remarque B.5 Soit W_n une roue. S'il existe une demande (u_i, u_j) , $i < j$ entre deux sommets du cycle de la roue telle que $1 \leq |i - j| \leq 2$, alors les arêtes e_i , f_i , f_j et e_{j-1} appartiennent à toutes les solutions de $T(G)$. De plus, $P(G)$ n'est pas de pleine dimension.

Preuve. Considérons la partition

$$\begin{aligned} V'_0 &= \{u_i\}, \\ V'_1 &= \{u_{i-1}\}, \\ V'_2 &= V \setminus \{u_i, u_{i-1}, u_j\}, \\ V'_3 &= \{u_j\}. \end{aligned}$$

La $2-u_i u_j$ -coupe, T' , associée à cette partition est composée des arêtes e_i et f_i . Comme $x(e_i) \leq 1$, $x(f_i) \leq 1$ et la contrainte de $2-u_i u_j$ -coupe $x(T') \geq 2$ doit être satisfaite, toute solution F du 2ECSBP doit vérifier $x^F(e_i) = x^F(f_i) = 1$. Par symétrie, on peut montrer que $x^F(e_{j-1}) = x^F(f_j) = 1$. Il en résulte que chaque solution de $T(G)$ contient les arêtes e_i , f_i , f_j et e_{j-1} et le polytope $P(G)$ n'est pas, par conséquent, de pleine dimension. $\square$

Dans la suite, on suppose que $P(G) \neq \emptyset$, c'est-à-dire, D ne contient pas de demandes (u_i, u_j) telle que $|i - j| > 2$.

Théorème B.6 Soit $W_n = (V, E)$ une roue. Soit $D = \{(s, t) \mid s, t \in V\}$ un ensemble de demandes telles que si $(w, u_i) \in D$, alors les sommets $u_{i-2}, \dots, u_{i+2}$ n'appartiennent à aucune demande. Alors le polytope $P(W_n)$ est donné par les contraintes triviales, les contraintes de coupe, les contraintes de 2-st-coupe et les contraintes (B.2), (B.3).

Preuve. Soit $ax \geq \alpha$ une contrainte définissant une facette de $P(G)$. Supposons qu'elle est différente d'une contrainte triviale, d'une contrainte de coupe, d'une contrainte de 2-*st*-coupe et d'une contrainte (B.2). Nous allons montrer que $ax \geq \alpha$ définit nécessairement une contrainte (B.3). Soit τ_a l'ensemble des solutions du 2ECSBP dont le vecteur d'incidence vérifie $ax \geq \alpha$ à l'égalité.

Assertion 1 1) Soit $e \in E$. Alors il existe au moins une solution de τ_a contenant e et une autre ne contenant pas e .
 2) Soit $W \subset V$ un ensemble d'arêtes. Alors il existe au moins une solution T de τ_a telle que $|\delta(W) \cap T| \geq 3$.
 3) Soit (w, u_i) une demande entre le sommet central et un sommet du cycle. Alors il existe au moins une solution T de τ_a telle que $\{e_{i-1}, e_i, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}\} \subset T$.

Preuve. Ces trois propriétés découlent directement du fait que $ax \geq \alpha$ est différente respectivement, d'une contrainte triviale, d'une contrainte de coupe, et de la contrainte (B.2) induite par les arêtes e_{i-2} , e_{i+1} et f_i et la partition

$$\begin{aligned} V_1 &= \{u_i\}, \\ V_2 &= \{u_{i+1}\}, \\ V_3 &= V \setminus \{u_i, u_{i+1}, u_{i-1}\}, \\ V_4 &= \{u_{i-1}\}. \end{aligned}$$

◆

L'assertion suivante, donnée sans preuve, résulte du fait que $ax \geq \alpha$ n'est pas une contrainte triviale.

Assertion 2 $a(e) \geq 0$ pour tout $e \in E$, et $\alpha > 0$.

Nous allons maintenant donner une série d'assertions qui nous permettra de montrer à la fin le théorème. Mais d'abord, nous donnons la remarque suivante.

Remarque B.7 Soit $(u_i, u_j) \in D$, $i < j$ une demande. Par la remarque B.4, on a $|j - i| \leq 2$ et par la remarque B.5, toute solution F de $T(G)$ vérifie $x^F(e_i) = x^F(f_i) = x^F(e_{j-1}) = x^F(f_{j-1}) = 1$. On peut donc supposer, s.p.d.g., que $a(e_i) = a(f_i) = a(e_{j-1}) = a(f_j) = 0$.

Assertion 3 Si $(w, u_i) \in D$ pour un $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $a(f_{i_1}) = a(e_{i-1}) = a(e_i) = a(f_{i+1})$.

Preuve. Par l'assertion 1 1), il existe un ensemble d'arêtes $T_i \in \tau_a$ tel que $e_i \notin T_i$. Comme la solution doit vérifier la contrainte (B.2) associée aux arêtes e_{i-2} , e_{i+1} et f_i , et la partition

$$\begin{aligned} V_1 &= \{u_i\}, \\ V_2 &= \{u_{i+1}\}, \\ V_3 &= V \setminus \{u_i, u_{i+1}, u_{i-1}\}, \\ V_4 &= \{u_{i-1}\}. \end{aligned}$$

Cette contrainte s'écrit

$$x(e_{i-1}) + x(e_i) + x(f_{i-1}) + x(f_i) + x(f_{i+1}) \geq 4. \quad (\text{B.4})$$

Comme $e_i \notin T$, on a $e_{i-1}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1} \in T_i$. De plus, comme la coupe correspondant au sommet u_{i+1} doit contenir au moins deux arêtes, on a $e_{i+1} \in T_i$. De plus, étant donné que les sommets u_{i+1} et u_{i+2} n'appartiennent à aucune demande, ceci implique que l'ensemble $(T_i \setminus \{f_{i+1}\}) \cup \{e_i\}$ induit une solution réalisable du 2ECSBP et par conséquent

$$a(e_i) \geq a(f_{i+1}).$$

Maintenant, par l'assertion 1 1), il existe aussi une solution T'_{i+1} de τ_a ne contenant pas l'arête f_{i+1} . Par (B.4), on obtient $e_{i-1}, e_i, f_{i-1}, f_i \in T'_{i+1}$. De plus, par la contrainte de coupe correspondant au sommet u_{i+1} , on a $e_{i+1} \in T'_{i+1}$. Il s'ensuit que l'ensemble d'arêtes $(T'_{i+1} \setminus \{e_i\}) \cup \{f_{i+1}\}$ induit une solution de $T(G)$. Ceci implique que $a(f_{i+1}) \geq a(e_i)$, et on a en conséquence

$$a(e_i) = a(f_{i+1}).$$

Aussi, comme $(T'_{i+1} \setminus \{f_i\}) \cup \{f_{i+1}\}$ induit une slution du 2ECSBP, il en résulte que

$$a(f_{i+1}) \geq a(f_i).$$

Par symétrie, on a

$$\begin{aligned} a(e_{i-1}) &= a(f_{i-1}), \\ a(f_{i-1}) &\geq a(f_i). \end{aligned}$$

Considérons maintenant une solution T''_{i+1} de τ_a telle que $|\delta(u_{i+1}) \cap T''_{i+1}| \geq 3$. Par l'assertion 1 2), une telle solution existe. Il s'ensuit que $\delta(u_{i+1}) = \{e_i, e_{i+1}, f_{i+1}\} \subset T''_{i+1}$. De plus, par (B.4), on a $|\{e_{i-1}, f_{i-1}, f_i\} \cap T''_{i+1}| \geq 2$. On peut donc distinguer les quatre cas suivants : $\{e_{i-1}, f_{i-1}, f_i\} \in T''_{i+1}$, $\{f_i\} \notin T''_{i+1}$, $\{f_{i-1}\} \notin T''_{i+1}$ et $\{e_{i-1}\} \notin T''_{i+1}$. Nous traitons dans la suite, les deux premiers cas. Les deux derniers sont similaires au second cas.

- Si $\{e_{i-1}, f_{i-1}, f_i\} \in T''_{i+1}$, il s'ensuit que les ensembles $T''_{i+1} \setminus \{f_i\}$, $T''_{i+1} \setminus \{e_i\}$ et $T''_{i+1} \setminus \{f_{i+1}\}$ appartiennent à $T(G)$. Par conséquent $a(e_i) = a(f_i) = a(f_{i+1}) =$

0. Aussi par l'assertion 1 2), il doit exister une solution $T''_{i-1} \in \tau_a$ telle que $|\delta(u_{i-1}) \cap T''_{i-1}| \geq 3$. Ceci implique que $e_{i-2}, e_{i-1}, f_{i-1} \in T''_{i-1}$. Comme $a(e_i) = a(f_i) = a(f_{i+1}) = 0$, on peut supposer, s.p.d.g., que $e_i, f_i, f_{i+1} \in T''_{i-1}$. Puisque les ensembles $T''_{i-1} \setminus \{e_{i-1}\}$ et $T''_{i-1} \setminus \{f_{i-1}\}$ induisent des solutions du 2ECSBP, on a $a(e_{i-1}) = a(f_{i-1}) = 0$, et l'assertion est montrée.
- Si $\{f_i\} \notin T''_{i+1}$, par (B.4), on a $f_{i-1}, e_{i-1} \in T''_{i+1}$. Remarquons que $(T''_{i+1} \setminus \{f_{i+1}\}) \cup \{f_i\} \in T(G)$. Il en résulte donc que $a(f_i) \geq a(f_{i+1})$ et par conséquent $a(f_i) = a(f_{i+1})$. Il suffit maintenant de montrer que $a(f_i) = a(f_{i-1})$. Par l'assertion 1, il existe une solution T''_{i-1} de τ_a telle que $|\delta(u_{i-1}) \cap T''_{i-1}| \geq 3$. Ceci implique que $e_{i-2}, e_{i-1}, f_{i-1} \in T''_{i-1}$. Par (B.4), on a $|\{e_i, f_i, f_{i+1}\} \cap T''_{i-1}| \geq 2$. Si $e_i, f_i, f_{i+1} \in T''_{i-1}$, alors les ensembles $T''_{i-1} \setminus \{f_i\}$, $T''_{i-1} \setminus \{f_{i-1}\}$ et $T''_{i-1} \setminus \{e_{i-1}\}$ induisent des solutions du 2ECSBP. Il en résulte que $a(f_i) = a(f_{i-1}) = a(e_{i-1}) = 0$. Supposons maintenant que $f_i \notin T''_{i-1}$. Alors l'ensemble $(T''_{i-1} \setminus \{f_{i-1}\}) \cup \{f_i\}$ appartient à $T(G)$. Par conséquent $a(f_i) \geq a(f_{i-1})$ et donc $a(f_i) = a(f_{i-1})$. Supposons enfin que $f_{i+1} \notin T''_{i-1}$ (le cas où $e_i \notin T''_{i-1}$ est similaire). Alors $f_i, e_i \in T''_{i-1}$. Ainsi l'ensemble $(T''_{i-1} \setminus \{f_{i-1}\}) \cup \{f_{i+1}\}$ induit une solution du 2ECSBP, et il s'ensuit que $a(f_{i+1}) \geq a(f_{i-1})$. Comme $a(f_{i+1}) = a(f_i)$ et $a(f_{i-1}) \geq a(f_i)$, on obtient $a(f_{i-1}) = a(f_i)$.

◆

Assertion 4 Si $(w, u_i) \in D$, alors $a(f_i) = 0$.

Preuve. Par l'assertion 1 3), il doit exister une solution $\overline{T}_i$ de τ_a telle que $\{e_{i-1}, e_i, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}\} \subset \overline{T}_i$. Comme l'ensemble $\overline{T}_i \setminus \{f_i\}$ induit une solution de $T(G)$, il s'ensuit que $a(f_i) = 0$.

◆

Assertion 5 Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(w, u_{i-1}), (w, u_i), (w, u_{i+1}) \notin D$. Alors $a(f_i) = 0$.

Preuve. Remarquons d'abord que s'il existe un $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ tel que $(u_i, u_j) \in D$, alors, par la remarque B.7, on peut supposer que $a(f_j) = 0$.

Supposons maintenant que u_i n'appartienne à aucune demande de D . Par l'assertion 1 2), il existe un ensemble d'arêtes $T''_i \in \tau_a$ tel que $|\delta(u_i) \cap T''_i| \geq 3$. Comme $\delta(u_i) = \{e_{i-1}, e_i, f_i\}$, il s'ensuit que $e_{i-1}, e_i, f_i \in T''_i$. Nous allons montrer que l'ensemble d'arêtes $T''_i \setminus \{f_i\}$ induit une solution de $T(G)$. Dans ce cas, on aura $a(f_i) = 0$ et l'assertion sera prouvée.

On peut remarquer que, comme T_i'' induit une solution de $T(G)$, alors les contraintes de coupe sont toutes vérifiées par le vecteur d'incidence de $T_i'' \setminus \{f_i\}$ sauf éventuellement, celle associée au sommet w . En effet, ceci est clair pour les contraintes de coupes induites par les sommets $u_1, \dots, u_n$. De plus, on peut remarquer que les contraintes de coupe induites par un ensemble W tel que $|W| \neq 1 \neq |V \setminus W|$ sont redondantes par rapport aux contraintes de coupe induites par les sommets $u_1, \dots, u_n$. De plus, comme (w, u_{i-1}) et (w, u_{i+1}) ne sont pas des demandes de D , l'arête f_i ne peut pas appartenir à un 2- st -chemin pour une demande $(s, t) \in D$. Ainsi, $x^{T_i'' \setminus \{f_i\}}$ vérifie les contraintes de chemins arête-disjoints de longueur ≤ 2 entre toute paire de sommets formant une demande de D . Pour montrer que $T_i'' \setminus \{f_i\}$ induit une solution du 2ECSBP, il suffit donc de montrer que la contrainte de coupe sur w est satisfaite par $x^{T_i'' \setminus \{f_i\}}$. S'il existe une demande $(u_j, u_k) \in D$, $j, k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, alors par la remarque B.5, il s'ensuit que $f_j, f_k \in T_i''$ et la contrainte de coupe induite par w est donc vérifiée par le vecteur d'incidence de $T_i'' \setminus \{f_i\}$. Supposons maintenant qu'il n'existe pas de demande entre deux sommets du cycle. Comme $D \neq \emptyset$, il doit alors exister $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(w, u_j) \in D$. Par hypothèse, on a $j \neq i-1, i, i+1$. La contrainte de 2- wu_j -coupe donnée par la partition

$$\begin{aligned} V_0 &= \{u_j\}, \\ V_1 &= \{u_{j-1}, u_{j+1}\}, \\ V_2 &= V \setminus \{w, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}\}, \\ V_3 &= \{w\}, \end{aligned}$$

implique que $|\{f_{j-1}, f_j, f_{j+1}\} \cap T_i''| \geq 2$, et la contrainte $x(\delta(w)) \geq 2$ est donc satisfaite par $x^{T_i'' \setminus \{f_i\}}$. $\blacklozenge$

Par la remarque B.7 et les assertions 3, 4 et 5, on a

$$a(e) = \begin{cases} 0 & \text{pour } e = f_i \text{ telle que } (w, u_{i-1}), (w, u_{i+1}) \notin D, i \in \{1, \dots, n\}, \\ 0 & \text{pour tout } e \in \{e_i, e_{j-1}\}, i < j, (u_i, u_j) \in D, i, j \in \{1, \dots, n\}, \\ \beta_i & \text{pour tout } e \in \{e_{i-1}, e_i, f_{i-1}, f_{i+1}\}, (w, u_i) \in D, i \in \{1, \dots, n\}, \\ & \text{et pour un } \beta_i \geq 0. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

On peut maintenant distinguer deux cas.

Cas 1 : il existe $e \in C$ tel que $a(e) = 0$.

Nous allons montrer que $a(f) = 0$ pour tout $f \in E$.

Supposons qu'il existe $f \in C \setminus \{e\}$ telle que $a(f) > 0$. Comme $a(e) = 0$, il doit exister au moins un $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a(e_j) > 0$ et $a(e_{j-1}) = 0$. S'il existe

$k \in \{j+1, j+2\}$ tel que $(u_j, u_k) \in D$ ($k' \in \{j-1, j\}$ tel que $(u_k, u_{j+1}) \in D$), alors, par la remarque B.7, il s'ensuit que $a(e_j) = 0$, une contradiction. Si $(w, u_j) \in D$, alors par l'assertion 3, on a $a(e_j) = a(e_{j-1}) = 0$, et de nouveau une contradiction. Supposons maintenant que $(w, u_{j+1}) \in D$. Par l'assertion 1 3), il existe une solution T telle que $e_j, e_{j+1}, f_j, f_{j+1}, f_{j+2} \in T$. Comme $a(e_{j-1}) = 0$, on peut supposer, s.p.d.g., que $e_{j-1} \in T$. Mais dans ce cas, on a $T \setminus \{e_j\} \in T(G)$, ce qui implique que $a(e_j) = 0$, et on a encore une contradiction. En conséquence, l'arête e_j ne peut pas faire partie d'un 2-*st*-chemin pour une demande donnée. Considérons maintenant une solution T' de τ_a telle que $|\delta(u_{j+1}) \cap T'| \geq 3$. Par l'assertion 1 2), une telle solution existe. Il s'ensuit que $e_j, e_{j+1}, f_{j+1} \in T'$. Remarquons que $a(f_j) = 0$. En effet, si $(w, u_{j-1}) \in D$ alors par l'assertion 3, on a $a(f_j) = a(e_{j-1}) = 0$ et sinon, comme $(w, u_{j+1}) \notin D$, par l'assertion 5, on a $a(f_j) = 0$. Par conséquent, on peut supposer que $f_j \in T'$. De même, comme $a(e_{j-1}) = 0$, on peut également supposer que $e_{j-1} \in T'$. Or, dans ce cas, l'ensemble $T' \setminus \{e_j\}$ appartient à $T(G)$. Ceci implique que $a(e_j) = 0$, une contradiction.

En conséquence, on a $a(e) = 0$ pour tout $e \in C$. Par (B.5), on peut donc déduire que $a(e) = 0$ pour tout $e \in E$.

Cas 2 : $a(e) > 0$ pour tout $e \in C$.

De la remarque B.7, on déduit qu'il n'existe pas de demandes entre deux sommets du cycle C . Nous allons montrer que $a(e) = \gamma$ pour tout $e \in C$ et un $\gamma > 0$.

Supposons, au contraire, qu'il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $a(e_{i-1}) < a(e_i)$. Le résultat dans le cas où $a(e_{i-1}) > a(e_i)$ peut être obtenu par symétrie. Si $(w, u_j) \in D$, alors par l'assertion 3, on a $a(e_i) = a(e_{i-1})$, une contradiction. Supposons maintenant que $(w, u_{i+1}) \in D$. Par l'assertion 1 3), il existe une solution T telle que $e_i, e_{i+1}, f_i, f_{i+1}, f_{i+2} \in T$. Mais dans ce cas, on a $(T \setminus \{e_i\}) \cup \{e_{i-1}\} \in T(G)$, ce qui implique que $a(e_i) \leq a(e_{i-1})$, une contradiction. En conséquence, l'arête e_i ne peut pas faire partie d'un 2-*st*-chemin pour une demande $(s, t) \in D$. Considérons maintenant une solution T' de τ_a telle que $|\delta(u_{i+1}) \cap T'| \geq 3$. Par l'assertion 1 2), une telle solution existe. Il s'ensuit donc que $e_i, e_{i+1}, f_{i+1} \in T'$. Remarquons que $a(f_i) < a(e_i)$. En effet, si $(w, u_{i-1}) \in D$ alors par l'assertion 3, on a $a(f_i) = a(e_{i-1}) < a(e_i)$, et sinon, comme $(w, u_{i+1}) \notin D$, par l'assertion 5, on a $a(f_i) = 0 < a(e_i)$. Si $e_{i-1} \in T'$, alors la solution obtenue en remplaçant l'arête e_i par l'arête f_i est admissible. Mais ceci entraîne $a(f_i) \geq a(e_i)$, une contradiction. On a donc $e_{i-1} \notin T'$. Comme les contraintes de coupe sur les sommets u_{i-1} et u_i doivent être satisfaites, on a $e_{i-2}, f_{i-1}, f_i \in T'$. Mais alors l'ensemble $(T' \setminus \{e_i\}) \cup \{e_{i-1}\}$ induit une solution réalisable du 2ECSBP et par conséquent $a(e_{i-1}) \geq a(e_i)$, une contradiction.

En conséquence, on a $a(e) = \gamma$ pour tout $e \in C$. Ainsi, par (B.5), on a $\beta_i = \gamma$ pour

tout $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(w, u_i) \in D$. On obtient alors

$$a(e) = \begin{cases} \gamma & \text{pour toute } e \in C, \\ \gamma & \text{pour tout } e \in \{e_{i-1}, e_{i+1}\}, (w, u_i) \in D, i \in \{1, \dots, n\}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour un $\gamma > 0$. Il s'ensuit que $ax \geq \alpha$ définit une contrainte du type (B.3). $\square$

B.3 Conclusion

Nous avons introduit dans cette section des classes de contraintes valides pour le problème du sous-graphe 2-arête connexe avec des chemins bornés. Ces contraintes nous ont permis de décrire le polytope associé à ce problème quand le graphe est une roue et les demandes vérifient certaines conditions. Cependant, la contrainte B.3 devrait pouvoir se généraliser afin de prendre en compte toute disposition de demandes. Ceci peut conduire à une caractérisation complète du polyèdre lorsque le graphe est une roue. Ainsi, par des techniques de composition telle que celles vues dans le chapitre 3, il serait possible de caractériser aussi ce polytope dans la classe des graphes de Halin.

Bibliographie

- [1] D. Applegate, R. Bixby, V. Chvátal, and W. Cook. Implementing the Dantzig-Fulkerson-Johnson algorithm for large traveling salesman problems. *Mathematical Programming*, 97(1-2):91–153, July 2003.
- [2] M. Baïou. On the dominant of the Steiner 2-edge connected subgraph polytope. *Discrete Applied Mathematics*, 112:3–10, September 2001.
- [3] M. Baïou, F. Barahona, and A.R. Mahjoub. Separation of partition inequalities. *Mathematics of Operations Research*, 25(2):243–254, May 2000.
- [4] M. Baïou and A.R. Mahjoub. Steiner 2-edge connected subgraph polytopes on series-parallel graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 10(3):505–514, August 1997.
- [5] F. Barahona. Separating from the dominant of the spanning tree polytope. *Op. Research Letters*, 12:201–203, 1992.
- [6] F. Barahona, M. Grötschel, M. Jünger, and G. Reinelt. An application of combinatorial optimization to statistical physics and circuit layout design. *Operations Research*, 36(3):493–513, 1988.
- [7] F. Barahona and A.R. Mahjoub. On two-connected subgraph polytopes. *Discrete Mathematics*, 147:19–34, 1995.
- [8] D.J. Bertsimas and M.X. Goemans. Survivable networks, linear programming relaxations and the parsimonious property. *Mathematical Programming*, 60(2):145–166, 1993.
- [9] A. Bley. On the complexity of vertex-disjoint length-restricted path problems. Technical Report Preprint SC 98-20, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1998.
- [10] J. Cheriyan, A. Sebö, and Z. Szigeti. An improved approximation algorithm for minimum size 2-edge connected spanning subgraphs. *Lecture Notes in Computer Science*, 1412:126–136, 1998.

- [11] J. Cheriyan, A. Sebö, and Z. Szigeti. Improving on the 1.5-approximation of a smallest 2-edge connected spanning subgraph. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 14(2):170–180, 2001.
- [12] S. Chopra. The k -edge connected spanning subgraph polyhedron. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 7:245–259, 1994.
- [13] N. Christofides and C.A. Whitlock. Network synthesis with connectivity constraints: a survey. *Operational Research*, 81:705–723, 1981. J.P. Brans (ed.).
- [14] G. Cornuéjols, J. Fonlupt, and D. Naddef. The traveling salesman problem on a graph and some related integer polyhedra. *Mathematical programming*, 33:1–27, 1985.
- [15] C. R. Coullard, A. B. Gamble, and J. Liu. The k -walk polyhedron. In D.-Z. Du and J. Sun, editors, *Advances in Optimization and Approximation*, pages 9–29. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1994.
- [16] R. Coullard, A. Rais, R.L. Rardin, and D.K. Wagner. The 2-connected-Steiner subgraph polytope for series-parallel graphs. Technical report, School of Industrial Engineering, Purdue University, 1992.
- [17] R. Coullard, A. Rais, R.L. Rardin, and D.K. Wagner. Linear-time algorithm for the 2-connected Steiner subgraph problem on special classes of graphs. *Networks*, 23:195–206, 1993.
- [18] R. Coullard, A. Rais, R.L. Rardin, and D.K. Wagner. The dominant of the 2-connected steiner subgraph polytope for W_4 -free graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 66:33–43, 1996.
- [19] W.H. Cunningham. Optimal attack and reinforcement of a network. *Journal of ACM*, 32:549–561, 1985.
- [20] G. Dahl. The 2-hop spanning tree problem. *Operation Research Letter*, 23(1-2):21–26, 1998.
- [21] G. Dahl. Notes on polyhedra associated with hop-constrained paths. *Operations Research Letters*, 25(2):97–100, 1999.
- [22] G. Dahl and L. Gouveia. On formulations of the hop-constrained minimum spanning tree problem. Preprint, 2001.
- [23] G. Dahl and B. Johannessen. The 2-path network design problem. Technical Report Report 292, Universtetet i Oslo, Institutt for informatikk, 2000.
- [24] G. B. Dantzig, D. R. Fulkerson, and S. M. Johnson. Solutions of a large-scale travelling salesman problem. *Operations Research*, 2:393–410, 1954.
- [25] M. Didi Biha. *Graphes k -arête connexes et polyèdres*. PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale, 1998.
- [26] M. Didi Biha and A.R. Mahjoub. k -edge connected polyhedra on series-parallel graphs. *Operations Research Letters*, 19:71–78, 1996.

- [27] M. Didi Biha and A.R. Mahjoub. Steiner k -edge connected subgraph polytope. *Journal of Combinatorial Optimization*, 4:131–144, 2000.
- [28] E.W. Dijkstra. A note on two problems in connection with graphs. *Numerische Mathematik* 1, pages 269–271, 1957.
- [29] J. Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0, 1 vertices. *Journal of Research National Bureau of Standards*, 69B:125–130, 1965.
- [30] K.P. Eswaran and R.E. Tarjan. Augmentation problems. *SIAM Journal on Computing*, 5(4):653–665, December 1976.
- [31] J. Fonlupt and A.R. Mahjoub. Critical extreme points of the 2-edge connected spanning subgraph polytope. *Lecture Notes in Computer Science*, 1610:166–183, 1999.
- [32] L.R. Ford and D.R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8:399–404, 1956.
- [33] B. Fortz. *Design of Survivable Networks with Bounded Rings*, volume 2 of *Network Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [34] B. Fortz and M. Labbé. Structural results for two-connected networks with rings of bounded cardinality. Technical Report IS-MG 99/28, Université Libre de Bruxelles, 1999.
- [35] B. Fortz and M. Labbé. Polyhedral results for two-connected networks with bounded rings. *Mathematical Programming*, 93(1):27–54, 2002.
- [36] B. Fortz and M. Labbé. Two-connected networks with rings of bounded cardinality. IAG Working Paper 68/02, Université Catholique de Louvain, 2002. To appear in *Computational Optimization and Applications*.
- [37] B. Fortz, M. Labbé, and F. Maffioli. Solving the two-connected network with bounded meshes problem. *Operations Research*, 48(6):866–877, November-December 2000.
- [38] B. Fortz, A.R. Mahjoub, S.T. McCormick, and P. Pesneau. Two-edge connected subgraphs with bounded rings: polyhedral results and branch-and-cut. Soumis à *Mathematical Programming*.
- [39] G.N. Frederickson and J. Jájá. On the relationship between the biconnectivity augmentation and traveling salesman problems. *Theoretical Computer Science*, 19:189–201, 1982.
- [40] M.X. Goemans, A.V. Goldberg, S. Plotkin, D.B. Shmoys, É. Tardos, and D.P. Williamson. Improved approximation algorithms for network design problem. In *Proceedings of the 5th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 223–232, 1994.
- [41] A.V. Goldberg and R.E. Tarjan. A new approach to the maximum-flow problem. *Journal of the ACM*, 35(4):921–940, October 1988.

- [42] R.E. Gomory and T.C. Hu. Multi-terminal network flows. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 9(4):551–570, December 1961.
- [43] L. Gouveia. Multicommodity flow models for spanning trees with hop constraints. *European Journal of Operational Research*, 95(1):178–190, 1996.
- [44] L. Gouveia. Using variable redefinition for computing lower bounds for minimum spanning and steiner trees with hop constraints. *INFORMS J. Comput.*, 10(2):180–188, 1998.
- [45] L. Gouveia and E. Janssen. Designing reliable tree networks with two cable technologies. *European Journal of Operational Research*, 105(3):552–568, 1998.
- [46] L. Gouveia and T.L. Magnanti. Modelling and solving the diameter-constrained minimum spanning tree problem. Preprint, 2000.
- [47] L. Gouveia and T.L. Magnanti. Network flow models for designing diameter-constrained minimum-spanning and Steiner trees. *Networks*, 41(3):159–173, 2003.
- [48] L. Gouveia and C. Requejo. A new Lagrangean relaxation approach for the hop-constrained minimum spanning tree problem. *European Journal of Operational Research*, 132(3):539–552, 2001.
- [49] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 1(2):169–197, 1981.
- [50] M. Grötschel and C. Monma. Integer polyhedra arising from certain network design problems with connectivity constraints. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 3(4):502–523, 1990.
- [51] M. Grötschel, C. Monma, and M. Stoer. Polyhedral approaches to network survivability. In F. Hwang F. Roberts and C. Monma, editors, *Reliability of computer and Communication Networks*, volume 5 of *Series Discrete Mathematics and Computer Science*, pages 121–141. AMS/ACM, 1991.
- [52] M. Grötschel, C. Monma, and M. Stoer. Computational results with a cutting plane algorithm for designing communication networks with low-connectivity constraints. *Operations Research*, 40(2):309–330, 1992.
- [53] M. Grötschel, C. Monma, and M. Stoer. Facets for polyhedra arising in the design of communication networks with low-connectivity constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 2(3):474–504, August 1992.
- [54] M. Grötschel, C.L. Monma, and M. Stoer. *Network Models*, volume 7 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, chapter 10 : Design of Survivable Networks, pages 617–672. Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 1995. M.O. Ball, T.L. Magnanti, C.L. Monma, G.L. Nemhauser (Eds.).
- [55] D. Gusfield. Very simple methods for all pairs network flow analysis. *SIAM Journal on Computing*, 19(1):143–155, February 1990.

- [56] J. Hao and J. B. Orlin. A faster algorithm for finding the minimum cut in a graph. In *Proc. of 3rd ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms*, pages 165–174, 1992.
- [57] D. Huygens, A.R. Mahjoub, and P. Pesneau. Two edge-disjoint hop-constrained paths and polyhedra. Soumis (en version révisée) à SIAM Journal on Discrete Mathematics.
- [58] A. Itai, Y. Perl, and Y. Shiloach. The complexity of finding maximum disjoint paths with length constraints. *Networks*, 12:277–286, 1982.
- [59] K. Jain. A factor 2 approximation algorithm for the generalized Steiner network problem. *Combinatorica*, 21:39–60, 2001.
- [60] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4):373–396, 1984.
- [61] H. Kerivin. *Réseaux fiables et polyèdres*. PhD thesis, Université de Clermont Ferrand II, France, 2000.
- [62] H. Kerivin and A.R. Mahjoub. Separation of partition inequalities for the $(1, 2)$ -survivable network design problem. *Op. Research Letters*, 30:265–268, 2002.
- [63] H. Kerivin and A.R. Mahjoub. On survivable network polyhedra. To appear in *Discrete Mathematics*, 2003.
- [64] H. Kerivin, A.R. Mahjoub, and C. Nocq. $(1, 2)$ -survivable networks: Facets and branch-and-cut. to appear in *The Sharpest Cut*, MPS-SIAM Series in Optimization, 2002.
- [65] Khachiyan, L. G. A polynomial algorithm for linear programming. *Soviet Math. Doklady*, 20:191–194, 1979. (Russian original in *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 244:1093–1096).
- [66] S. Khuller and B. Raghavachari. Improved approximation algorithms for uniform connectivity problems. *Journal of Algorithms*, 21(2):434–450, September 1996.
- [67] S. Khuller and U. Vishkin. Biconnectivity approximations and graph carvings. In N. Alon, editor, *Proceedings of the 24th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pages 759–770, Victoria, B.C., Canada, May 1992. ACM Press.
- [68] C-W. Ko and C.L. Monma. Heuristic methods for designing highly survivable communication networks. Technical report, Bellcore, 1989.
- [69] J. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem. In *Proc. Am. Math. Soc.*, pages 48–50, February 1956.
- [70] L. Ladányi, T.K. Ralphs, and L.E. Trotter. *Computational Combinatorial Optimization: Optimal or Provably Near-Optimal Solutions*, volume 2241/2001 of *Lecture Notes in Computer Science*, chapter Branch, Cut, and Price: Sequential and Parallel, pages 223–260. Springer-Verlag Heidelberg, January 2001. M. Jünger, D. Naddef (Eds.).

- [71] E.L. Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, chapter 4, 6.3 and 7.11. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1976.
- [72] A.R. Mahjoub. Two-edge connected spanning subgraphs and polyhedra. *Mathematical Programming*, 64:199–208, 1994.
- [73] A.R. Mahjoub and P. Pesneau. On the Steiner 2-edge connected subgraph polytope. Soumis (en version révisée) à Discrete Mathematics.
- [74] J-F. Maurras and V.H. Nguyen. On the linear description of the 3-cycle polytope. *European Journal of Operational Research*, 137:310–325, 2002.
- [75] S.T. McCormick, 2001. Communication personnelle.
- [76] K. Menger. Zur allgemeinen kurventheorie. *Fundamenta Mathematicae*, 10:96–115, 1927.
- [77] C. Monma, B. Munson, and W. Pulleyblank. Minimum-weight two-connected spanning networks. *Math. Programming*, 46:153–171, 1990.
- [78] C.L. Monma and D. Shallcross. Methods for designing telecommunication networks with certain two-connected survivability constraints. *Operational Research*, 37:531–541, 1989.
- [79] V.H. Nguyen. *Polyèdres de cycles: description, composition et lifting de facettes*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille 2, 2000.
- [80] V.H. Nguyen, 2003. Communication personnelle.
- [81] V.H. Nguyen. Description linéaire pour le polyèdre des k -chemins. Preprint, 2003.
- [82] R. C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell Systems Technical Journal*, pages 1389–1401, November 1957.
- [83] M. Stoer. *Design of survivable Networks*, volume 1531 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [84] J.W. Suurballe. Disjoint paths in a network. *Networks*, 4:125–145, 1974.
- [85] J.W. Suurballe and R.E. Tarjan. A quick method for finding shortest pairs of disjoint paths. *Networks*, 14:325–336, 1984.
- [86] D.P. Williamson. Lecture notes on approximation algorithms. Technical report, IBM Research Division, 1999.
- [87] D.P. Williamson, M.X. Goemans, M. Mihail, and V.V. Vazirani. A primal-dual approximation algorithm for generalized Steiner network problems. *Combinatorica*, 15:435–454, 1995.
- [88] P. Winter. Generalized Steiner problem in Halin graphs. In *Proceedings of the 12th International Symposium on Mathematical Programming*. MIT, 1985.
- [89] P. Winter. Generalized Steiner problem in outerplanar networks. *BIT*, 25(3):485–496, 1985.
- [90] P. Winter. Generalized Steiner problem in series-parallel networks. *Journal of Algorithms*, 7:549–566, 1986.

- [91] P. Winter. Steiner problem in networks: A survey. *Networks*, 17:129–167, 1987.