N° d'Ordre :1883
EDSPIC : 420

Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II

École Doctorale
Sciences Pour l'Ingénieur de Clermont-Ferrand

THÈSE

présentée par

Lise SLAMA

pour obtenir le grade de

Docteur d'université
Spécialité : Informatique

Conception de réseaux fiables : Séparation et Polyèdres

A.R.	Mahjoub	Directeur de thèse
A.	Quilliot	Président du jury
H.	Hifi	Rapporteur
I.	Kacem	Rapporteur
M.	Didi Biha	Examinateur
D.	Cornaz	Examinateur

LIMOS

Cette thèse a été préparée au :
Laboratoire d'Informatique de Modélisation et d'Optimisation des Système
Complexe scientifique des Cézeaux,
63177 AUBIERE cedex,
FRANCE.

Résumé

Soient $G = (V,E)$ un graphe et $r \in \mathbb{N}^{|V|}$ un vecteur de types de connexité associés aux sommets. Un sous-graphe est dit arête-fiable si entre chaque paire de sommets u,v de V, il existe au moins $\min\{r(u),r(v)\}$ chaînes arête-disjointes. Si les arêtes sont munies de poids, le problème de conception de réseaux fiables consiste à déterminer un sous-graphe arête-fiable de G de poids minimum. Ce problème a des applications dans les domaines des télécommunications et des transports. Dans cette thèse, nous étudions une approche polyèdrale pour ce problème.

Tout d'abord, nous décrivons certaines facettes pour le polyèdre associé, lorsque les types de connexités sont tous égaux à k, où k est un entier impair $\geqslant 3$.

Nous nous intéressons ensuite aux contraintes dites de partition. Nous montrons que dans un graphe décomposable par des 1- et 2-sommets d'articulations, les contraintes de partition peuvent être séparées en temps polynomial si elles le peuvent dans les pièces du graphe. Comme conséquence, nous obtenons un algorithme de séparation de dces contraintes dans les graphes série-parallèles.

Nous étudions également le polyèdre des solutions du problème du sous-graphe $(1,k)$-connexe, où k est un entier $\geqslant 2$, qui correspond au problème quand $r \in \{1,k\}^{|V|}$. Nous donnons la description exacte du polyèdre pour une classe particulière de graphes et nous introduisons une nouvelle classe de contraintes valides. Enfin nous considérons le problème du sous-graphe (1,2,3)-arête connexe et nous développons un algorithme de coupes et branchements.

Mots clés : Réseaux fiables, polytope, facette, contrainte de partition, problème de séparation, algorithme de coupes et branchements.

Survivable network problem : Separation and Polyhedra

Lise SLAMA

Abstract

Let $G = (V,E)$ be a graph and $r \in \mathbb{N}^{|V|}$ a vector of connectivity types. A subgraph is said to be survivable if between every pair of nodes u,v of V, there are at least $\min\{r(u),r(v)\}$ edge-disjoint paths. If each edge has a weight, the survivable network design problem is to determine a minimum-weight survivable subgraph of G. This problem has applications to the design of reliable communication and transportation networks.

We first describe some facets for the polytope associated to this problem when $r(v) = k$, for all $v \in V$, and k is an odd integer $\geqslant 3$.

Then we focus on the so-called partition inequalities. We show that we can separate the inequalities in polynomial time in the graphs that decompose by 1- and 2-sums if we can do so in the pieces.

After that, we study the problem when $r(v) \in \{1,k\}$ for all $v \in V$, with k an integer, $k \geqslant 2$. We characterize the polytope associated with the solutions of this problem in a special class of graphs. We also introduce a new class of valid inequalities called the top inequalities. We show that the inequalities may define facets.

Finally, we study the problem when $r(v) \in \{1,2,3\}$ for all $v \in V$, and we develop a branch-and-cut algorithm for the problem in this case.

Key words : Survivable network, polytope, facet, partition inequality, separation problem, branch-and-cut algorithm.

Table des matières

Introduction **15**

1 Notions préliminaires **17**

1.1 Optimisation Combinatoire 17

1.2 Notions de complexité 18

1.3 Approche polyédrale et méthode de coupes et branchements 19

1.3.1 Définitions 20

1.3.2 Approche polyédrale 22

1.3.3 Méthode de coupes et branchements 23

1.4 Notations et définitions de la théorie des graphes 25

2 Le problème de conception de réseaux fiables **29**

2.1 État de l'art 29

2.1.1 Modèles 30

2.1.2 Cas particuliers 34

2.1.3 Heuristiques et algorithmes d'approximation 36

2.2 Approche polyédrale 38

2.2.1 Formulation du problème SNDP 38

2.2.2 Polyèdre associé 39

2.2.3 Contraintes valides 40

2.2.4 Lifting 49

2.3 Conclusion 53

3 Le problème du sous-graphe k-arête connexe **55**

3.1 Introduction 56

3.2 Propriétés des containtes de SP-partition 57
3.2.1 Graphes outerplanaires 57
3.2.2 Graphes série-parallèles 63
3.2.3 Graphes quelconques 65
3.3 Conclusion 69

4 Séparation des contraintes de partition 71
4.1 Introduction 72
4.1.1 État de l'art 72
4.1.2 Décomposition de graphe 73
4.1.3 2-réduction de graphes 75
4.2 Séparation des contraintes de partition dans les graphes {1,2}-décomposables 76
4.2.1 Notations 76
4.2.2 Contraintes de partition et décomposition de graphes 77
4.2.3 Algorithme de séparation 87
4.2.4 Complexité 89
4.3 Applications 89
4.3.1 Décomposition simpliciale 89
4.3.2 Séparation des contraintes de SP-partition 91
4.3.3 Séparation des contraintes de partition et de F-partition 91
4.3.4 Heuristiques pour des graphes généraux 92
4.4 Conclusion 93

5 Polytope des sous-graphes $(1,k)$-arête connexes 95
5.1 Introduction 96
5.2 Les graphes série-parallèles sans toupie 98
5.3 Propriétés structurales du polytope CPP(G,r) 99
5.4 Décomposition par des sommets d'articulation 111
5.5 CPP(G,r) dans les graphes série-parallèle sans toupie 114
5.6 Nouvelles facettes pour le polytope SNDP(G,r) 135
5.7 Conclusion 137

6 Le problème du sous-graphe (1,2,3)-arête connexe 139
6.1 Introduction . . . 139
6.2 Inégalités valides . . . 140
6.2.1 Inégalité de partition . . . 140
6.2.2 Inégalité de SP-partition . . . 140
6.2.3 Inégalité de r-recouvrement généralisée . . . 141
6.2.4 Inégalité de F-partition . . . 141
6.3 Inégalités de toupie . . . 141
6.4 Inégalités de toupie liftées . . . 145
6.5 Inégalités de chaînes impaires . . . 146
6.6 Conclusion . . . 150

7 Algorithme de coupes et branchements 151
7.1 Algorithme de résolution . . . 152
7.1.1 Algorithme de coupes et branchements . . . 152
7.1.2 Séparation des contraintes de coupe . . . 152
7.1.3 Séparation des contraintes de F-partition . . . 154
7.1.4 Séparation des contraintes de SP-partition . . . 158
7.1.5 Séparation des contraintes de partition . . . 159
7.2 Résultats expérimentaux . . . 165
7.2.1 Matériel et logiciels . . . 165
7.2.2 Description des instances traitées . . . 165
7.2.3 Le problème du sous-graphe 3-arête connexe dans les graphes série-parallèles . . . 165
7.2.4 Le problème du sous-graphe (1,2,3)-arête connexe . . . 168
7.3 Conclusion . . . 183

Conclusion 185

Bibliographie 192

Introduction

Avec l'avènement des technologies de communication, on veut pouvoir garantir la fiabilité des réseaux tout en minimisant les coûts engendrés. Nous formalisons ce problème de la manière suivante. Un ensemble de nœuds V représente des emplacements particuliers qui doivent être connectés dans un réseau dans le but d'assurer les services désirés. Un ensemble d'arêtes E représente les paires de nœuds entre lesquels il est possible de construire un lien direct. Soit $G = (V,E)$ un graphe non orienté qui représente les liens possibles. Chaque arête $e \in E$ a un coût fixé positif pour la construction du lien. Le coût d'établissement d'un réseau consistant en un ensemble $F \subseteq E$ est la somme des coûts des arêtes de F. Le problème consiste à trouver le réseau de coût minimum vérifiant les conditions de fiabilité.

La fiabilité d'un réseau se modélise en termes de connexité. On définit un *type de connexité* $r \in \mathbb{N}$ que l'on associe à chaque sommet. On dit que le réseau $H = (V,F)$ satisfait les conditions de fiabilité si, pour chaque paire $s,t \in V$ de sommets disjoints, H contient au moins $min(r(s),r(t))$ chemins, entre s et t, n'ayant pas d'arête en commun. Le problème consiste donc à trouver le réseau $H = (V,F)$ de coût minimum qui satisfait les conditions de fiabilité relatives à r. Soient $G = (V,E)$ un graphe et $r \in \mathbb{N}^{|V|}$ un vecteur de types de connexité associés aux sommets. Un sous-graphe est dit arête-fiable si entre chaque paire de sommets u,v de V, il existe au moins $\min\{r(u),r(v)\}$ chaînes arête-disjointes. Si les arêtes sont munies de poids, le problème de conception de réseaux fiables consiste à déterminer un sous-graphe arête-fiable de G de poids minimum. Ce problème a des applications dans les domaines des télécommunications et des transports. Dans cette thèse, nous étudions une approche polyédrale pour ce problème.

De nombreuses études ont déjà été menées pour le problème du sous-graphe 2-

connexe, c'est-à-dire avec quand le type de connexité est égal à 2 pour tous les sommets. Cependant, pour certains réseaux, on exige un niveau plus élevé de fiabilité avec, par exemple, une connexité au moins égale à 3. Un des objectifs de ma thèse est d'étendre des résultats polyédraux connus dans le cas où $r(v) = 2$ pour tout sommet $v \in V$, au cas où les types de connexité peuvent être différents.

Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques notions de base et quelques notations utiles tout au long de cette thèse. Le chapitre 2 présente le problème de conception de réseaux fiables, avec d'une part, un état de l'art sur les différentes modélisations et méthodes de résolution existantes, puis d'autre part, la modélisation de ce problème en programme linéaire en nombres entiers et une présentation des inégalités valides pour cette modélisation. Le chapitre 3 se focalise sur un cas particulier du problème, lorsque les types de connexités sont tous égaux à k, où k est un entier impair $\geqslant 3$. On y montre des propriétés de facette des contraintes dites de SP-partition. Puis on s'intéresse dans le chapitre 4 au problème de séparation des contraintes dites de partition. Le chapitre 5 porte sur le problème du sous-graphe $(1,k)$-connexe, où k est un entier $\geqslant 2$. Nous donnons la description complète du polytope des solutions du problème dans une classe particulière de graphes. Enfin, dans les chapitres 6 et 7, nous considérons le problème du sous-graphe (1,2,3)-arête connexe. Nous présentons des contraintes valides et développons un algorithme de coupes et branchements pour le problème. Nous présentons également une étude expérimentale sur le problème.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons quelques notions préliminaires d'optimisation combinatoire, de la théorie de la complexité et de l'approche polyédrale. Nous présentons en particulier la méthode de coupes et branchements sur laquelle se base une grande partie de ce travail. Nous donnons également certaines définitions et notations qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.

1.1 Optimisation Combinatoire

L'*Optimisation Combinatoire* est une des branches de l'informatique et des mathématiques appliquées. Elle concerne les problèmes pouvant se formuler de la façon suivante : soient S un ensemble fini et $f : S \mapsto \mathbb{R}$, le problème est de déterminer $\hat{s} \in S$ tel que

$$f(\hat{s}) = \min_{s \in S}\{f(s)\}.$$

Le mot *combinatoire* évoque, outre le caractère fini de l'ensemble de l'étude, le cardinal très grand de cet ensemble ou plutôt l'existence d'une structure qui à partir d'un nombre limité d'éléments, peut engendrer une quantité astronomique de situations à comparer. L'ensemble de solutions peut avoir un nombre exponentiel, par rapport à la taille des données, d'éléments.

Plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire ont été largement étudiés dans la littérature. C'est le cas du problème du sac à dos, du problème du voyageur de commerce,

du problème d'affectation , et de bien d'autres encore. L'optimisation combinatoire se base sur des outils variés allant de la théorie de la complexité, à la programmation linéaire en nombre entier, en passant par la théorie des graphes et la programmation linéaire.

1.2 Notions de complexité

La théorie de la complexité est basée sur les travaux d'Edmonds [29], de Cook [20] et de Karp [57]. Elle permet de classer un problème donné parmi les problèmes faciles ou difficiles. Dans cette section, nous présentons les concepts de complexité de base; nous renvoyons au livre de Garey et Johnson [41] pour une étude plus approfondie.

Un *problème* est une question générale possédant des paramètres variables. Un problème est décrit en donnant une description générale de tous les paramètres et une énumération des propriétés que la solution doit satisfaire. Une *instance* d'un problème est obtenue en spécifiant la valeur de chaque paramètre du problème. Un *algorithme* est un ensemble d'opérations de calcul élémentaire organisées dans le but de résoudre un problème précis. Pour chaque instance de problème, l'algorithme retourne une solution après un nombre fini d'opérations. La *taille d'un problème* reflète le nombre de données nécessaires pour décrire une instance.

Un algorithme est dit *polynomial* si le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre une instance de taille n est borné par une fonction polynomiale en n. On dit qu'un problème appartient à la *classe* P s'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. Les problèmes de la classe P sont dits *faciles*.

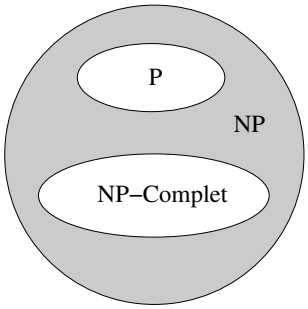

FIG. 1.1 – *Relations entre P, NP et NP-Complet*

Un *problème de décision* est un problème ayant deux réponses possibles : *oui* ou *non*. Soient $\mathcal{P}$ un problème de décision et $\mathcal{I}$ les instances de ce problème pour lesquelles la réponse est oui. $\mathcal{P}$ appartient à la *classe NP* s'il existe un algorithme polynomial qui permet, étant donnée une instance quelconque du problème appartenant à $\mathcal{I}$ et une solution de cette instance, de vérifier que la réponse est oui. Intuitivement, les problèmes dans NP sont les problèmes qui peuvent être résolus en énumérant l'ensemble des solutions possibles et en les testant avec un algorithme polynomial. On les appelle NP, pour Nondeterministic Polynomial, car s'il l'on sait faire le bon "choix" dans l'énumération, alors l'algorithme devient polynomial. Or le "choix" ne relève pas ici d'une procédure déterministe. Il est clair que la classe P est contenue dans la classe NP (voir figure 1.1). Par contre, on n'a pas prouvé que NP n'était pas inclus dans P. La conjecture selon laquelle $P \neq NP$ est néanmoins considérée comme hautement probable.

Nous distinguons également dans la classe NP, la classe des problèmes NP-complets. La NP-complétude s'appuie sur la notion de réduction polynomiale. Un problème de décision P_1 se réduit polynomialement en un problème de décision P_2 s'il existe une fonction polynomiale f telle que, pour toute instance I de P_1, la réponse est oui si et seulement si la réponse de $f(I)$ pour P_2 est oui. Nous noterons alors $P_1 \alpha P_2$. Un problème $\mathcal{P}$ est *NP-complet*, s'il appartient à la classe NP et s'il existe un problème Q connu comme étant NP-complet tels que $Q \alpha P$. Cook a été le premier à montrer la NP-complétude d'un problème, celui de la 3-satisfiabilité [20].

A tout problème d'optimisation combinatoire peut être associé un problème de décision. Enfin tout problème d'optimisation combinatoire dont le problème de décision associé est NP-complet est dit *NP-difficile*. Les problèmes d'optimisation combinatoire sont généralement NP-difficiles. L'approche polyédrale et les méthodes de coupes en général, se sont avérées efficaces pour ces problèmes. Nous présentons ces techniques dans le paragraphe suivant.

1.3 Approche polyédrale et méthode de coupes et branchements

Un grand nombre de problèmes issus de cas réels peuvent être formulés sous la forme de problèmes d'optimisation combinatoire. A première vue, leur résolution semble facile

puisque l'on peut énumérer les solutions possibles et choisir la meilleure. Cependant, le nombre de ces solutions possibles peut être exponentiel et la méthode énumérative n'est plus possible. D'où la nécessité de développer des techniques permettant de résoudre ces problèmes plus efficacement. Une des méthodes les plus puissantes est la méthode dite *polyédrale* qui a été introduite par Edmonds en 1965 [30] pour le problème du couplage. Nous allons à présent présenter brièvement cette approche. Pour plus de détails, voir par exemple [74, 67].

1.3.1 Définitions

Nous allons tout d'abord rappeler quelques définitions et propriétés liées à la théorie des polyèdres.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le symbole $\mathbb{R}^n$ représente l'ensemble des vecteurs ayant n composantes réelles. L'ensemble des nombres réels positifs ou nuls sera noté $\mathbb{R}_+$.

Étant donné un ensemble de points $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$, un point $x \in \mathbb{R}^n$ est dit *combinaison linéaire* de $x^1, \ldots, x^m$ s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i.$$

Si de plus

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

$$\text{(resp. } \lambda_i \in \mathbb{R}_+ \text{ pour i=1,...,m et } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1),$$

alors x est dit *combinaison affine* (resp. *combinaison convexe*) de ces points.

Étant donné un ensemble S de points $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$, l'*enveloppe convexe* de $x^1, \ldots, x^m$ est

$$conv(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ combinaison convexe de } x^1, \ldots, x^m\}.$$

La figure 1.2 illustre cette notion.

Des points $x^1, \ldots, x^m \in \mathbb{R}^n$ sont dits *linéairement indépendants* (resp. *affinement indépendants*) si le système

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i = 0$$

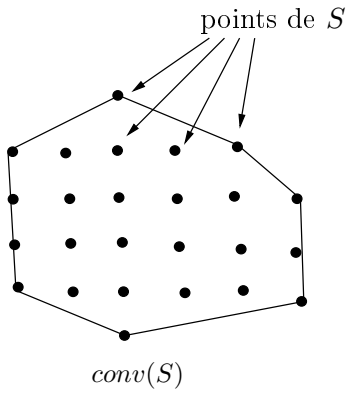

FIG. 1.2 – *Enveloppe convexe*

$$(\text{resp. } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 0)$$

admet une solution unique $\lambda_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, m$.

Un *polyèdre* P est l'ensemble des solutions d'un système linéaire $Ax \leqslant b$ c'est-à-dire $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leqslant b\}$, où A est une matrice à m lignes et n colonnes, et b un vecteur à m composantes. Un *polytope* est un polyèdre borné.

Un polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit de *dimension* p si le nombre maximum de points de P affinement indépendants est $p+1$. Nous noterons alors $dim(P) = p$. Un polyèdre P de $\mathbb{R}^n$ est *de pleine dimension* si $dim(P) = n$.

Si a et x sont deux vecteurs colonnes à n composantes, on note par $a^T x$, le produit scalaire de a et x. Une contrainte $a^T x \leqslant \alpha$ est dite *valide* pour un polyèdre P de $\mathbb{R}^n$ si elle est vérifiée pour toute solution de P. Soit $x^* \in \mathbb{R}^n$. L'inégalité $a^T x \leqslant \alpha$ est dite *serrée* pour x^* si $a^T x^* = \alpha$. Une contrainte est dite *violée* par x^* si x^* ne la satisfait pas (voir figure 1.3).

Étant donnés un polyèdre P et une contrainte $a^T x \leqslant \alpha$ valide pour P, le sous-ensemble $F = \{x \in P \mid a^T x = \alpha\}$ est appelé *face* de P *définie* par $a^T x \leqslant \alpha$. De plus nous avons $dim(F) \leqslant dim(P)$. Une face F est dite *propre* si $F \neq P$ et $F \neq \emptyset$. Une face propre F est une *facette* de P si $dim(F) = dim(P) - 1$.

Un *point extrême* d'un polyèdre P est une face de P de dimension 0. Il est facile de voir qu'un point $x \in \mathbb{R}^n$ est un point extrême d'un polyèdre P, s'il ne peut pas être écrit comme combinaison convexe d'autres points de P.

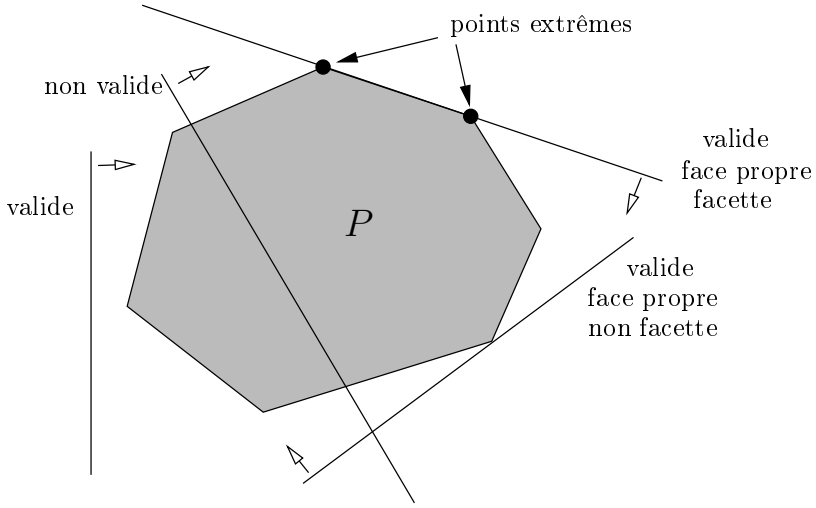

FIG. 1.3 – *Contraintes valides, faces et facettes*

1.3.2 Approche polyédrale

Soient $\mathcal{P}$ un problème d'optimisation combinatoire, $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de $\mathcal{P}$, E l'ensemble de base de $\mathcal{P}$ et c la fonction poids associée aux variables du problème. Le problème $\mathcal{P}$ s'écrit donc $max\{cx \mid x \in \mathcal{S}\}$.

Si F est un sous-ensemble de E, le vecteur $x^F \in \mathbb{R}^E$ (ayant $|E|$ composantes associées aux éléments de E) tel que

$$x^F(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in F, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est appelé *vecteur d'incidence* de F. Le polyèdre

$$P(\mathcal{S}) = conv\{x^S \mid S \in \mathcal{S}\}$$

est appelé *polyèdre des solutions* de $\mathcal{P}$ (ou *polyèdre associé* à $\mathcal{P}$).

Le problème $\mathcal{P}$ est donc équivalent au programme linéaire $max\{cx \mid x \in P(\mathcal{S})\}$. $P(\mathcal{S})$ peut être caractérisé par un ensemble de contraintes linéaires où chaque contrainte définit une facette. Si on peut décrire entièrement le polyèdre $P(\mathcal{S})$ par un système d'inégalités linéaires, le problème $\mathcal{P}$ se ramène donc à la résolution d'un programme linéaire.

L'*approche polyédrale* consiste à ramener la résolution du problème à la résolution d'un (ou d'une séquence) de programmes linéaires. Cette transformation nécessite, par conséquent, une étude approfondie du polyèdre associé au problème. Néanmoins, la caractérisation complète de ce polyèdre est généralement difficile à établir (voire impossible si le problème est NP-difficile). De plus, le nombre de contraintes nécessaires pour décrire le polyèdre, est souvent exponentiel. Cependant, en utilisant une méthode de coupes et branchements (Branch-and-Cut method), une description partielle peut être suffisante pour résoudre le problème à l'optimum. Cette méthode combine la méthode de coupe (Cutting planes method) et la méthode de *séparation et évaluation* (Branch & Bound method).

1.3.3 Méthode de coupes et branchements

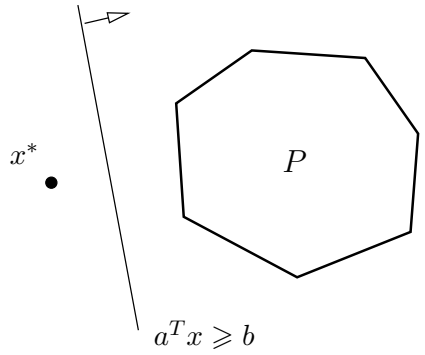

FIG. 1.4 – *Hyperplan séparant x^* et P*

La méthode de coupes et branchements pour un problème d'optimisation combinatoire est basée sur le problème dit *de séparation*. Soit P un polyèdre dans $\mathbb{R}^n$. Le *problème de séparation* associé à P consiste à vérifier pour un point $x^* \in \mathbb{R}^n$ si x^* appartient à P, et dans le cas contraire, à trouver une contrainte $a^T x \leqslant b$ valide pour P et violée par x^*. Dans ce deuxième cas, l'hyperplan $a^T x = b$ sépare P et x^* (voir la figure 1.4).

Une des grandes avancées de l'optimisation combinatoire est le parallèle entre séparation et optimisation. Grötschel, Lovász et Schrijver [52] ont montré qu'un problème d'optimisation sur un polyèdre P est polynomial si et seulement si le problème de séparation associé à P peut être résolu en temps polynomial.

Considérons un problème d'optimisation combinatoire $\mathcal{P}$ de la forme $max\{cx \mid Ax \leqslant b, x \text{ entier}\}$ et soit P le polyèdre associé à $\mathcal{P}$. Supposons que l'on dispose d'un système $\bar{A}x \leqslant \bar{b}$ de contraintes valides pour $\mathcal{P}$ et qui contient comme sous-système les contraintes de base du problème. La méthode de coupes et branchements commence par résoudre un programme linéaire

$$P_1 = max\{cx \mid \bar{A}_1 x \leqslant \bar{b}_1\}$$

où $\bar{A}_1 x \leqslant \bar{b}_1$ est un sous-système de $\bar{A}x \leqslant \bar{b}$ contenant un nombre raisonnable de contraintes. Si la solution optimale, disons x_1 de P_1, est entière et et si x_1 est une solution de $Ax \leqslant b$, alors elle est optimale pour $\mathcal{P}$. Sinon, on résout le problème de séparation associé à $\bar{A}x \leqslant \bar{b}$ et x_1. Si l'on trouve une contrainte $a_1 x \leqslant \alpha_1$ violée par x_1, elle est ajoutée au système $\bar{A}_1 x \leqslant \bar{b}_1$ et nous obtenons un nouveau programme linéaire

$$P_2 = max\{cx \mid \bar{A}_1 x \leqslant \bar{b}_1,\ a_1 x \leqslant \alpha_1\}.$$

On résout P_2. Si la solution optimale x_2 de P_2 est entière et si x_2 est une solution de $Ax \leqslant b$, alors elle est optimale pour $\mathcal{P}$. Sinon, comme pour x_1 on résout le problème de séparation associé à $\bar{A}x \leqslant \bar{b}$ et x_2. Si $a_2 x \leqslant \alpha_2$ est une contrainte violée par x_2, elle est ajoutée au système $\bar{A}_2 x \leqslant \bar{b}_2$ et ainsi de suite. En continuant ce processus appelé *phase de coupe*, nous pouvons trouver soit une solution optimale pour $\mathcal{P}$, soit une solution x^* qui soit fractionnaire et pour laquelle nous ne pouvons pas générer de contrainte violée. Dans ce cas, nous commençons une phase dite de *branchement* qui consiste à construire un *arbre de Branch & Bound*. Nous choisissons une variable fractionnaire x_i^*. Nous résolvons deux nouveaux programmes linéaires (nouveaux sommets de l'arbre) en ajoutant soit la contrainte $x_i = 0$, soit $x_i = 1$ au programme linéaire obtenu à la fin de la phase de coupe. Pour chacun de ces nouveaux sommets, nous appliquons une procédure de coupes. Si une solution optimale de $\mathcal{P}$ n'a pas été trouvée, nous sélectionnons une feuille de l'arbre, c'est-à-dire un sous-problème dont la phase de coupe a abouti à une solution fractionnaire, et nous recommençons une phase de branchement. La figure 1.5 illustre la phase de branchement.

Cette approche est maintenant largement utilisée pour les problèmes d'optimisation combinatoire difficiles. La méthode de coupes et branchements peut être utilisée lorsque le nombre de variables du problème n'est pas très grand (polynomial). Par contre, si le problème comporte un nombre exponentiel de variables, la méthode de génération de colonnes et branchement est plus appropriée pour approcher le problème.

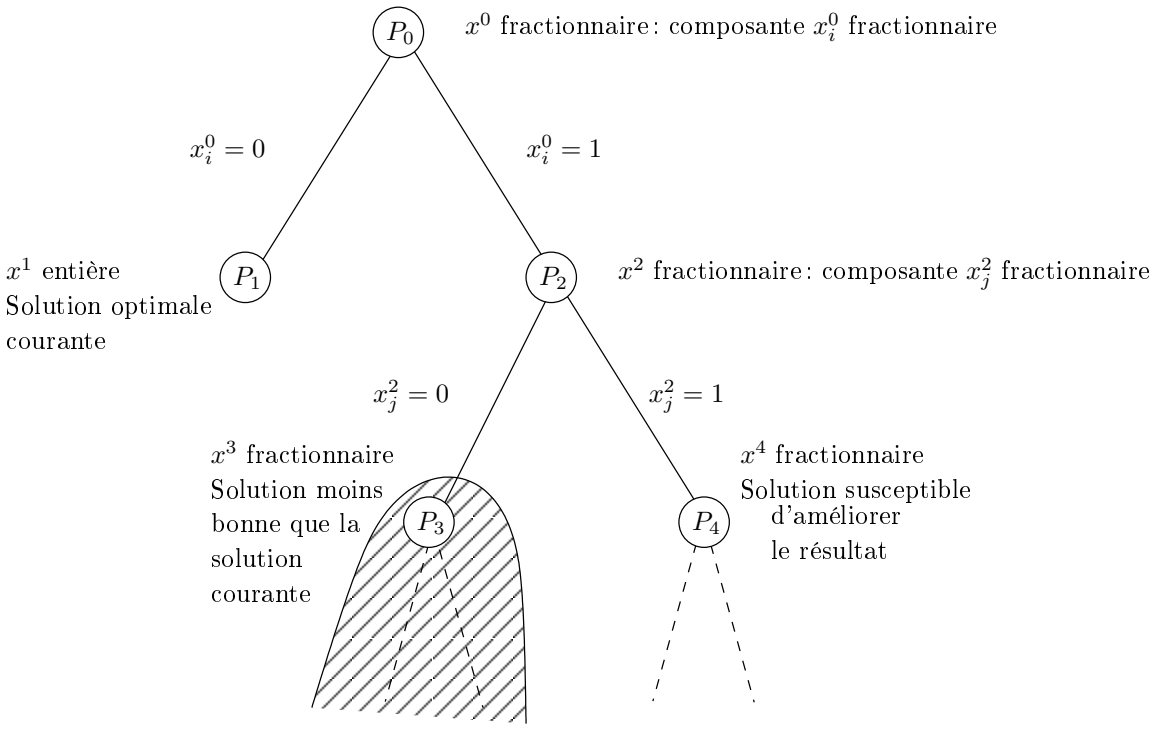

FIG. 1.5 – *Phase de branchement*

1.4 Notations et définitions de la théorie des graphes

Un *graphe non orienté* est noté $G = (V,E)$ où V est l'ensemble des *sommets* et E l'ensemble des *arêtes*. Si e est une arête reliant deux sommets u et v, alors u et v seront appelés les *extrémités* de e, et nous écrirons $e = uv$. Si u est une extrémité de e, alors u (resp. e) est dit *incident* à e (resp. u). De même, deux sommets u et v reliés par une arête sont dits *adjacents*.

Soit $G = (V,E)$ un graphe non orienté. Si $F \subseteq E$ est un sous-ensemble d'arêtes, alors $V(F)$ représente l'ensemble des extrémités des arêtes de F. Si $W \subseteq V$ est un sous-ensemble de sommets, alors $E(W)$ dénote l'ensemble des arêtes ayant leurs deux extrémités dans W. De plus, $H = (W,E(W))$ est dit sous-graphe de G *induit* par W et sera noté par $G[W]$. On dit qui G est complet s'il y a une arête entre chaque paire de sommets. K_n représente le graphe complet, simple (sans boucle ni arête multiple) sur n sommets.

Soient u et v deux sommets de V. Une *chaîne* P entre u et v est une séquence alternée

de sommets et d'arêtes $(v_0,e_1,v_1,e_2,v_2,\ldots,v_{k-1},e_k,v_k)$ où $v_0 = u$, $v_k = v$, $e_i = v_{i-1}v_i$ pour $i = 1,\ldots,k$ et $v_0,\ldots,v_k$ sont des sommets distincts de V. S'il n'y a pas de confusion possible, on peut également noter P par sa séquence d'arêtes $(e_1,\ldots,e_p)$ ou sa séquence de sommets $(v_1,\ldots,v_{p+1})$. Deux chaînes entre u et v sont dites *arête-disjointes* (resp. *sommet-disjointes*) s'il n'existe pas d'arête (resp. de sommet différent de u et v) apparaissant dans les deux chaînes.

Un graphe G est *connexe* si, pour toute paire de sommets u, v de V, il existe au moins une chaîne entre u et v.

Un *arbre* d'un graphe $G = (V,E)$ est un sous-graphe connexe et sans cycle.

Si $F \subset E$, on notera par $G\backslash F$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant les arêtes de F. Si F est réduit à une seule arête e, nous écrirons $G\backslash e$ au lieu de $G\backslash\{e\}$.

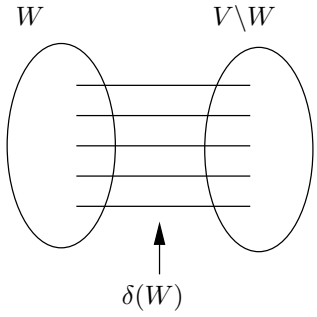

FIG. 1.6 – *Une coupe* $\delta(W)$

Soit $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$, un sous-ensemble de sommets de V. L'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans W et l'autre dans $V\backslash W$ est appelé *coupe* et noté $\delta(W)$ (voir figure 1.6). $V\backslash W$ est aussi noté $\overline{W}$. La coupe est symétrique, c'est-à-dire que $\delta(W) = \delta(\overline{W})$. Si W est réduit à un seul sommet v, nous écrirons $\delta(v)$ au lieu de $\delta(\{v\})$.

Étant donnés W et W' deux sous-ensembles disjoints de V, alors $[W,W']$ représente l'ensemble des arêtes de G qui ont une extrémité dans W et l'autre dans W'. On note $x[W,W']$ la valeur de ses arêtes. Lorsque W et W' sont réduits à un seul sommet, on écrira $[u,u']$ à la place de $[\{u\},\{u'\}]$.

Si $V_1,\ldots,V_p$, $(p \geqslant 2)$ est une partition de V, alors $\delta(V_1,\ldots,V_p)$ représente l'ensemble des arêtes ayant leurs extrémités dans des éléments différents de la partition (*i.e* l'ensemble des arêtes $e = uv$ telles que $u \in V_i$, $v \in V_j$ et $i \neq j$). Cet ensemble d'arêtes est appelé *multicoupe*.

Étant donné un graphe $G = (V,E)$, $H = (V,F)$ est dit *graphe support de* G si pour chaque arête $e = (u,v)$ de G il existe exactement une arête entre u et v dans H. Étant donnée une arête $e = uv \in E$, l'opération de contraction de l'arête e consiste à supprimer e, à identifier les sommets u et v tout en conservant les arêtes adjacentes à u et v. On note G/e le graphe obtenu à partir de G en contractant e. Étant donné un sommet $W \subseteq V$, contracter W consiste à supprimer les arêtes de $E(W)$, à identifier tous les sommets de W tout en conservant les arêtes voisines des sommets de W. Pour une partition donnée $\pi = (V_1,...,V_p)$, $p \geqslant 2$ on note $E_\pi = \delta(V_1,...,V_p)$. On appelle p, la *cardinalité* de π. On désigne aussi par $G_\pi = (V_\pi,E_\pi)$ le graphe obtenu à partir de G en contractant chaque élément V_i, $i = 1,...,p$. Si U et W sont deux sous-ensembles disjoints de sommets, on note par $[U,W]$ l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans U et l'autre dans W. Étant donnée une solution $\overline{x} \in \mathbb{R}^E$, l'inégalité $ax \geqslant \alpha$ est dite *serrée* pour $\overline{x}$ si $a\overline{x} = \alpha$.

Chapitre 2

Le problème de conception de réseaux fiables

Dans ce chapitre, nous présentons le contexte dans lequel le problème de conception de réseaux fiables s'inscrit. Nous revenons sur les modèles établis pour ce problème ainsi que sur les méthodes de résolution existantes. Puis nous nous focalisons sur les approches polyédrales. Nous donnons d'abord une formulation du problème en terme de programme linéaire en nombres entiers. Puis nous nous intéressons au polyèdre des solutions. Nous discutons en particulier de certaines classes de contraintes valides pour ce polyèdre.

2.1 État de l'art

Le développement de l'industrie des télécommunications est confronté à la question de la robustesse des réseaux. Il s'agit de savoir construire et maintenir des réseaux de telle manière que ceux-ci tolèrent un certain nombre de pannes ou d'utilisations imprévues, et continuent à fonctionner et à assurer les transmissions de données. Pour rendre un réseau robuste, on peut jouer sur différents paramètres tels que la topologie du réseau, les débits, les capacités de transmission. Trouver un réseau robuste en manipulant à la fois tous ces paramètres est très complexe. Cette question se décline en de nombreux problèmes qui vont de la conception de la topologie du réseau, au problème de la prédiction du trafic, en passant par celui du dimensionnement.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la robustesse de la topologie du réseau, c'est-à-dire à la manière selon laquelle les nœuds sont reliés entre eux. C'est ce que l'on appelle la fiabilité du réseau. Celle-ci peut être caractérisée selon plusieurs paramètres tels que le degré des nœuds (c'est-à-dire le nombre de nœuds auxquels un nœud est relié), la distance entre chaque paire de nœuds, la connexité (c'est-à-dire l'existence d'un ou plusieurs chemins entre deux nœuds). Dans ce travail, la fiabilité sera modélisée par des conditions de connexité qui garantissent l'existence de chemins alternatifs en cas de panne.

On s'intéresse à la phase qui précède la construction d'un réseau et qui consiste à établir sa topologie. Cette étape est utile quel que soit le réseau considéré et, pour les réseaux de télécommunication, quelle que soit la couche considérée (SDH/SONET, ATM, WDM, IP). En effet, il est toujours préférable d'essayer de se prémunir contre les pannes matérielles futures. Cette étape est donc un préalable dans l'optimisation d'un réseau, quel qu'il soit.

La construction d'un réseau de topologie fiable, donc plutôt dense, est confrontée au coût financier que cette construction suppose. En effet, l'industrie des télécommunication utilise des matériaux qui restent onéreux. C'est le cas, par exemple, de la fibre optique qui a par ailleurs des qualités physiques remarquables. En effet, elle offre un débit d'informations nettement supérieur à celui des câbles coaxiaux et supporte un réseau « large bande » par lequel peuvent transiter aussi bien la télévision, le téléphone, la visioconférence ou les données informatiques. Le problème que l'on traite dans cette thèse est de déterminer un réseau fiable qui soit de coût minimum.

2.1.1 Modèles

Le problème de conception de réseau fiable a été l'objet d'une attention particulière avec principalement deux modèles considérés. Le premier, formulé par Steiglitz et al. [75] et nommé par la suite le *problème Steiner généralisé* par Winter [81], s'énonce comme suit.

Problème 2.1. *Soient $G = (V,E)$ un graphe, $S \subseteq V$ et $c : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction coût qui associe à chaque arête e de E un coût $c(e)$. Étant donnée une matrice carrée de taille $|S|$, $R = (r_{s,t})$, définissant certaines conditions de connexité entre les sommets, trouver un sous-graphe de G de coût minimum, couvrant S de telle manière que pour chaque paire de sommets s,t de S, il existe au moins $r_{s,t}$ chaînes arête-disjointes (ou sommet-disjointes) entre s et t.*

Ce modèle a été largement étudié [17, 18, 37, 66] et a été généralisé par le modèle introduit par Grötschel et Monma [49], dans lequel les conditions de fiabilité sont représentées à l'aide de deux matrices $R = (r_{s,t})$ et $K = (k_{s,t})$. On demande pour chaque paire de sommets s,t, après la suppression de $k_{s,t}$ sommet(s), qu'il existe encore $r_{s,t}$ chaîne(s) arête-disjointe(s) (ou sommet-disjointe(s)) entre s et t . Ce modèle nécessite de connaître beaucoup de données qui ne sont pas toutes associées à des réalités physiques mesurables. Un autre modèle plus réaliste, a été introduit par Grötschel et al. [48, 50, 77], et a été largement étudié par la suite. Ce modèle est basé sur la spécification de types de nœuds qui correspondent à des conditions de fiabilité particulières. Kerivin et Mahjoub ont étudié ce modèle avec une approche polyédrale [59, 60]. Nous précisons dans ce qui suit en quoi ce modèle est adapté pour modéliser des problèmes réels.

Un réseau de télécommunication générique se décompose en *un réseau d'accés* et en *un réseau coeur*. Le réseau d'accès est composé de plusieurs points de présence (POP pour *Point Of Presence*) gérés par des opérateurs concurrents. Les utilisateurs sont connectés entre eux à travers les POP de leurs opérateurs respectifs. Pour ce faire, les POP sont connectés entre eux par le réseau cœur. Celui-ci résulte de l'interconnexion de systèmes autonomes gérés par différentes autorités comme les universités, les opérateurs ou certaines entreprises. On peut, de plus, distinguer au sein du réseau cœur plusieurs ensembles de nœuds. Cette distinction entre différents ensembles de sommets induit une structure hiérarchique dans laquelle les noeuds sont plus ou moins importants selon leur fonction, le plus bas niveau étant celui d'un nœud qui doit seulement être connecté au réseau alors que le plus haut niveau est celui des nœuds les plus importants du réseau cœur.

Considérons un graphe $G = (V,E)$ non-orienté, où chaque arête $e \in E$ a un coût

$c(e) \in \mathbb{R}_+$. On associe aux sommets $u \in V$ un vecteur d'entiers $r = (r(u), u \in V)$, appelé *type de connexité*. On dit alors qu'un sous-graphe vérifie les conditions de fiabilité si, pour toute paire de sommets s,t, il existe au moins

$$r(s,t) = min(r(s),r(t))$$

chaîne(s) arête(s)-disjointe(s) (ou sommet(s)-disjointe(s)) reliant s et t, pour toute paire s,t de V. *Le problème de conception de réseau fiable* peut alors se formuler de la manière suivante.

Problème 2.2. *Étant donnés un graphe $G = (V,E)$, un vecteur de types de connexité associés aux sommets $r = (r(u), u \in V)$, et une fonction coût $c : E \mapsto \mathbb{R}$, déterminer un sous-graphe vérifiant les conditions de fiabilité relatives à r, qui soit de coût minimum.*

On notera ce problème *SNDP* (pour Survivable Network Design Problem). Ce problème regroupe en fait deux problèmes selon que l'on considère des chaînes arêtes-disjointes (le problème est appelé *ESNDP*) ou sommet-disjointes (le problème est appelé *NSNDP*). Nous ne considèrerons dans cette thèse que le cas où l'on ne demande qu'une fiabilité sur les arêtes. Lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on notera le problème simplement SNDP.

On peut remarquer que la modélisation du problème de conception de réseau fiable à l'aide du vecteur de types de connexité associés aux sommets est un cas particulier de la modélisation du problème Steiner, dans le cas où on aurait $r_{s,t} = min(r(s),r(t))$ pour toutes les paires s,t de sommets de V. Cette modélisation est, comme on l'a déjà vu, bien adaptée pour les réseaux de télécommunication. De plus, elle peut aussi être utilisée pour d'autres applications ayant également une structure hiérarchique, telles que les réseaux de distribution, les réseaux sans fil.

Notons par r_{max} la connexité maximale, c'est-à-dire

$$r_{max} = max\{r(u) \mid u \in V\}.$$

Si $r_{max} \leqslant 2$, nous parlerons alors de *conditions de connexité faibles*. Ce modèle est un compromis réaliste entre la volonté d'obtenir une topologie fiable et le coût financier induit par les constructions supplémentaires. Dans ce cas, on peut distinguer trois sortes de nœuds : les nœuds spécifiques, qui doivent être protégés d'éventuelles pannes, pour lesquels le type de connexité est 2; les nœuds ordinaires qui doivent

simplement être reliés au réseau, pour lesquels le type de connexité est 1; et les nœuds optionnels, que l'on considère ou non selon la modélisation, et pour lesquels le type de connexité est 0. Néanmoins, cette manière d'assurer la fiabilité d'un réseau, si elle a été beaucoup utilisée, est pourtant remise en cause aujourd'hui pour les nouvelles générations de réseaux (pour les transmissions de vidéo-conférences, etc) qui nécessitent des protections plus compliquées et plus adaptées. Ces motivations pratiques, ainsi que l'intérêt théorique nous amènent à nous intéresser au modèle avec des *conditions de connexité fortes*, c'est-à-dire avec $r_{max} \geqslant 3$.

L'utilisation des types de connexité donne une modélisation qui englobe de nombreux problèmes d'optimisation combinatoire étudiés ces dernières décennies. Ainsi lorsque $r(u) = k$ pour tout sommet $u \in V$, et lorsque l'on considère une fiabilité sur les arêtes, on se ramène au *problème du sous-graphe k-arête connexe*. Lorsque $k = 2$, le problème est une relaxation du *problème du voyageur de commerce* qui consiste à trouver un cycle hamiltonien (c'est-à-dire qui passe par tous les sommets du graphe) de coût minimum. Le problème du voyageur de commerce a été très étudié. C'est un problème NP-difficile. Enfin, le *problème de l'arbre Steiner* est un autre exemple de problème contenu dans cette modélisation. Il est défini par un vecteur $r \in \{0,1\}^V$ et un coût sur les arêtes strictement positif. Ce problème est aussi NP-difficile.

Une conséquence de ce qui précède est le théorème suivant.

Théorème 2.3. *[41] SNDP est NP-difficile*

Pour compléter la description des modèles du problème de conception de réseaux fiables, citons aussi quelques problèmes qui considèrent de plus des contraintes de bornes. Ces problèmes tiennent compte des stratégies de routage. Ainsi, l'une de celles-ci, appelée *routage local*, consiste en cas de panne, à rerouter le trafic entre les extrémités de cette liaison. Une solution pour limiter la longueur de la déviation induite par la panne est d'imposer que chacun des liens du réseau appartienne à un cycle borné. Fortz [34], Fortz et Labbé [35] et Fortz et al. [36] se sont intéressés au polyèdre de ce problème et ont développé un algorithme de coupes et branchements. Une autre stratégie est celle du *routage bout en bout*. Dans ce cas, si une panne a lieu sur un lien, le trafic doit être réacheminé entre ses noeuds d'origine et de destination. Afin de limiter la longueur de la déviation, on demande qu'il y ait au moins deux chemins arêtes-disjoints (ou nœuds-disjoints) ayant une longueur bornée, pour chaque paire de sommets. Cela correspond par exemple aux réseaux ATM et à l'Internet. Huyghen et

al. [55] ont étudié la complexité et ont réalisé une étude polyédrale sur ce problème.

2.1.2 Cas particuliers

Même si SNDP est un problème NP-difficile, certains cas particuliers sont résolus en temps polynomial. Ces cas se caractérisent soit par leur type de connexité, soit par leur fonction coût, soit par une classe de graphes.

Ainsi dans le cas où $r(v) = 1$ pour tout $v \in V$, SNDP est résolu en temps polynomial. Ce problème n'est en fait rien d'autre que le problème de l'arbre couvrant de poids minimum qui se résout à l'aide d'un algorithme glouton [6]. Si de plus on a certains sommets de type 0, on obtient alors le problème de l'arbre Steiner qui est connu pour être NP-difficile. Néanmoins, Lawler [65] a donné deux algorithmes de résolution du problème de l'arbre Steiner. Un des algorithmes est polynomial en nombre de terminaux et exponentiel en nombre de sommets Steiner et vice versa pour l'autre. Par conséquent, si $r \in \{0,1\}^V$ et si le nombre de sommets Steiner est limité ou si le nombre de terminaux est limité, alors on peut résoudre SNDP en temps polynomial.

Un autre cas particulier bien connu est le cas où tous les sommets ont un type égal à 0 excépté deux sommets u_1 et u_2 qui sont de type 1. Ce problème est en fait le problème du plus court chemin entre u_1 et u_2, pour lequel il existe plusieurs algorithmes polynomiaux, à condition qu'il n'existe pas de cycle de coût négatif. De plus, si on ajoute la contrainte qui limite le nombre de nœuds à un entier positif L, alors une approche par la programmation dynamique permet de résoudre le problème [6].

Il existe d'autres cas polynomiaux qui sont caractérisés par une fonction coût particulière. Considérons le cas où le coût est égal à 1 pour toutes les arêtes. Le problème revient donc à trouver un sous-graphe vérifiant les conditions de fiabilité avec un nombre d'arêtes minimum. Lorsque l'on considère la fiabilité sur les arêtes, le problème peut être résolu en temps polynomial dès que $r(v) \geqslant 1$ pour tout $v \in V$, et lorsque les arêtes parallèles sont autorisées [76]. Lorsque le coût appartient à $\{0,1\}$ le problème est connu comme étant le *problème d'augmentation* qui s'énonce de la manière suivante. On cherche à ajouter à un graphe un minimum d'arêtes pour que les conditions de

fiabilité soient satisfaites. Pour cela on considère que les arêtes du graphe de départ ont un coût égal à 0 et que les arêtes que l'on peut éventuellement ajouter ont un coût égal à 1. Frank [37] a résolu ce problème. Lorsque les conditions de fiabilité portent sur les sommets, des algorithmes polynomiaux ont été donnés ([32, 54]) pour obtenir un graphe 2-sommet-connexe lorsque les arêtes parallèles sont interdites. Hsu et Kao [54] ont donné un algorithme en temps polynomial lorsque $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$ et avec des conditions de fiabilité qui portent à la fois pour certaines paires de sommets, sur les arêtes et pour d'autres, sur les sommets.

Enfin, certain vecteurs de types de connexité donnent des problèmes qui peuvent également être résolus en temps polynomial pour certaines classes de graphes. Avant de présenter ces résultats, définissons quelques classes de graphes. Un graphe H est dit un *mineur* d'un graphe G, ou on dit encore que G *est contractible à* H, si H peut être obtenu par une succession de suppressions et contractions d'arêtes à partir de G. On dit qu'un graphe G est *série-parallèle* si G n'est pas contractible à K_4, le graphe complet sur 4 sommets. Un graphe est *outerplanaire* s'il est planaire et si l'on peut disposer ses sommets de telle manière qu'ils appartiennent tous à la face extérieure. Un graphe est dit *graphe de Halin* s'il est constitué d'un cycle et d'un arbre qui n'a pas de sommet de degré 2 et tel que ses feuilles sont exactement les sommets du cycle.

Si $r \in \{0,1\}^V$, SNDP peut être résolu en temps polynomial pour les graphes série-parallèles comme Takamizawa l'a montré [78]. Pour les graphes série-parallèles, outerplanaires et les graphes de Halin, Winter [81] a donné un algorithme en temps polynomial pour résoudre SNDP lorsque $r \in \{0,2\}^V$, à la fois lorsque l'on considère des conditions de fiabilité sur les arêtes ou sur les sommets. Pour les graphes de Halin, Winter [81] a aussi donné un algorithme polynomial qui résout SNDP quand $r \in \{0,3\}^V$, avec des conditions de fiabilité sur les arêtes comme sur les sommets. Si le graphe ne contient pas W_4, la roue sur 5 sommets, comme mineur, Coullard et al. [21] ont mis au point un algorithme de complexité linéaire pour SNDP lorsque $r \in \{0,2\}^V$ et pour des conditions de fiabilité sur les sommets. Lorsque les conditions de connexité sont sur les arêtes, Kerivin et Mahjoub [60] ont montré que lorsque $r(u)$ est impair pour tout u, alors SNDP peut être résolu en temps polynomial sur les graphes série-parallèles. Sur cette classe de graphe également, Didi Biha et Mahjoub [27] ont montré que lorsque $r(v) = k$ pour tout k où k est un entier positif, SNDP pouvait se résoudre de manière polynomiale. Enfin, Didi Biha et al. [26] ont montré que la résolution était aussi polyno-

miale pour SNDP quand $r \in \{1,2\}^V$ et pour une sous-classe des graphes série-parallèles qui contient strictement les graphes outerplanaires.

2.1.3 Heuristiques et algorithmes d'approximation

Le problème de conception de réseaux fiables étant NP-difficile, une quantité considérable de la recherche a été conduite dans la conception d'heuristiques et d'algorithmes d'approximation (un algorithme d'approximation se distingue d'une heuristique par le fait qu'il offre en plus un rapport d'approximation que l'on peut prouver).

Pour concevoir des heuristiques efficaces, la connaissance des propriétés structurales de la solution est souvent très utile en raison des améliorations possibles de la formulation du problème. Lorsque la fonction coût satisfait les inégalités triangulaires ($c(e_1) \leqslant c(e_2)+c(e_3)$) pour tout ensemble de trois arêtes (e_1,e_2,e_3) définissant un triangle), Frederickson et Jájá [38] ont prouvé qu'un graphe 2-arête connexe (i.e. tel qu'il existe deux chaînes arête-disjointes entre chaque paire de sommets) peut être transformé en un graphe 2-sommet connexe (i.e. tel qu'il existe deux chaînes sommet-disjointes entre chaque paire de sommets) sans aucune augmentation du coût. Ce résultat conduit à une équivalence entre les conditions de fiabilité sur les nœuds et celles sur les arêtes lorsque les types de connectivité sont uniformes et égaux à 2. Pour le même genre de fonctions coût, Monma et al. [70] ont obtenu une description structurale des solutions optimales du problème du sous-graphe 2-sommet connexe. Ce travail a ensuite été généralisé au problème du sous-graphe k-sommet connexe par Bienstock et al. [17]. Enfin, il a été également prouvé que la solution optimale du problème du sous-graphe k-sommet connexe et celle du problème du sous-graphe k-arête connexe peuvent avoir des coûts différents.

La première heuristique de recherche d'un réseau fiable est établie par Steiglitz et al. [75]. Ils considéraient le problème Steiner généralisé. Leur méthode est basée sur un algorithme de type glouton aléatoire, qui détermine une solution initiale, et sur une approche de recherche locale. Pour le problème SNDP lorsque $r \in \{1,2\}^V$, Monma et Shallcross [71] utilisent une approche similaire d'amélioration d'une solution initiale, mais en tenant compte des propriétés structurales des solutions du problème du sous-graphe 2-sommet connexe et de celles du problème du sous-graphe 2-arête connexe. Plus tard, leurs heuristiques furent modifiées par Clarke et Anandalingam [19] qui améliorèrent la partie de génération d'une solution initiale.

Durant les vingt dernières années, la recherche de nouvelles heuristiques pour la conception de réseaux fiables s'est intensifiée. Williamson et al. ([44, 49, 40]) établissent un algorithme d'approximation basé sur la méthode primal-dual qui a un facteur d'approximation égal à $2r_{max}$. Puis Goemans et al. [43] améliorent cet algorithme pour obtenir un facteur d'approximation égal à $2\mathcal{H}(r_{max})$, où $\mathcal{H}(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Jain [56] a proposé un algorithme d'approximation de facteur 2 basé sur une résolution de la relaxation linéaire du problème après laquelle on arrondit itérativement les variables de la solution. Notons que ces algorithmes ont été conçus initialement pour résoudre un problème plus général. Ce problème consiste à trouver un sous-graphe de coût minimum tel que chaque coupe $\delta(S)$, pour un sous-ensemble de sommets $S \subset V$, contient au moins $f(S)$ arêtes où f est une fonction de 2^V dans $\mathbb{N}$ vérifiant $f(V) = 0$, f est symétrique (i.e $f(S) = f(V \backslash S)$ pour tout $S \subseteq V$), et $f(A \cup B) \leqslant max\{f(A), f(B)\}$ pour tout $A, B \subseteq V$.

D'autres algorithmes s'attachent à trouver une solution au problème de conception de réseaux fiables tel qu'on l'a formulé précédemment. C'est le cas de l'algorithme d'approximation de Balakrishnan et al. [7] qui résout ENSDP quand le vecteur type de connexité appartient à $\{0,1,2\}^V$ de facteur d'approximation $\frac{3}{2}$. Ravi et Williamson [72] ont présenté un algorithme d'approximation avec un facteur $2\mathcal{H}(k)$ pour le problème du sous-graphe k-sommet connexe, $k \in \mathbb{N}_+$. Ils ont également donné un algorithme d'approximation de facteur 3 pour le problème Steiner généralisé lorsque $R \in \{0,1,2\}^{V \times V}$. Khuller et Raghavachari [62] ont donné un algorithme d'approximation de facteur 3 pour le problème du sous-graphe k-sommet connexe lorsque la fonction poids vérifie l'inégalité triangulaire. Par ailleurs, Khuller et Vishkin [63] ont donné un algorithme d'approximation de facteur 2, basé sur un algorithme d'intersection de matroïdes, pour résoudre le problème du sous-graphe k-arête connexe.

Lorsque les graphes considérés contiennent des arêtes parallèles, Goemans et Bertsimas [42] ont donné un algorithme d'approximation de facteur $min\{2\mathcal{H}(r_{max}), 2q\}$ pour SNDP dans le cas ou $r \in \mathbb{N}^{|V|}$ et où q représente le nombre de types de connexité différents. Cet algorithme est issu d'une analyse de l'algorithme de résolution du problème de l'arbre Steiner. Par une approche primal-dual, Aggarwal et al. [5] ont obtenu un algorithme de facteur $2log_2 r_{max}$ pour SNDP avec un type de connexité quelconque. Goemans et Williamson [5] utilisent des algorithmes primal-dual pour obtenir un algorithme de facteur d'approximation égal à $2\mathcal{H}(r_{max})$ pour le problème Steiner généralisé

lorque $R \in \mathbb{N}^{V \times V}$. Enfin, Aggarwal et Garg [4] ont amélioré ce résultat pour obtenir un algorithme avec le facteur $2log_2|V|$.

2.2 Approche polyédrale

Nous allons donner dans un premier temps une formulation du problème en termes de programme linéaire en nombres entiers. Puis nous nous intéressons au polyèdre des solutions du problème. Nous discutons de certaines classes de contraintes valides pour ce polyèdre. Nous présenterons par la suite d'autres familles de contraintes mises en évidence dans ce travail.

2.2.1 Formulation du problème SNDP

Soient $G = (V,E)$ un graphe et $r \in \mathbb{N}^V$ un vecteur qui associe à chaque sommet v du graphe un entier $r(v)$ représentant le type de connexité du sommet. Soient :

$$\begin{aligned} r(W) &= max\{r(v) : v \in W\} \\ r(s,t) &= min(r(s),r(t)) \\ con(W) &= max\{r(s,t) : s \in W, t \in \overline{W}\} \\ &= min(r(W),r(\overline{W})) \end{aligned}$$

On appelle $con(W)$ la *connexité* de l'ensemble W.

Menger [69] a montré que dans un graphe, il existe k-chaîne arête-disjointes entre deux sommets s et t si et seulement si toute coupe séparant s et t contient au moins k arêtes. Ainsi demander qu'il y ait au moins $r(s,t)$ chaînes arête-disjointes entre s et t revient à demander que la coupe minimum séparant s et t contienne au moins $r(s,t)$ arêtes. Par conséquent, si on considère un ensemble de sommets $W \subset V$, les conditions de fiabilité sur les paires de sommets (u,v) telles que $u \in W$ et $v \in V \backslash W$, impliquent que le nombre d'arête(s) de la coupe $\delta(W)$ doit être supérieur ou égal à $max\{r(s,t) : s \in W, t \in V \backslash W\} = con(W)$.

Par conséquent, SNDP est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant.

$$Min \sum_{e \in E} c(e)x(e)$$

s.c.

$$x(\delta(W)) \geqslant con(W) \qquad \text{pour tout } W \subset V, W \neq \emptyset \tag{2.1}$$
$$x(e) \geqslant 0 \qquad \text{pour tout } e \in E \tag{2.2}$$
$$x(e) \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } e \in E \tag{2.3}$$
$$x(e) \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } e \in E \tag{2.4}$$

2.2.2 Polyèdre associé

Soit

$$\text{SNDP}(G,r) = conv\{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x \text{ satisfait (2.1),(2.2),(2.3),(2.4)}\}.$$

le polyèdre associé au problème SNDP. Dans la suite nous allons discuter de ce polyèdre.

2.2.2.1 Dimension de SNDP(G,r)

Une arête $e \in E$ sera dite *essentielle* si SNDP($G\backslash e$,r)=$\emptyset$. Autrement dit, e est essentielle si sa suppression de G implique qu'au moins une des conditions de fiabilité ne peut plus être satisfaite. On note ES(G,r) l'ensemble des arêtes essentielles.
Si $e \in E$ est une arête essentielle, alors nous avons $x(e) = 1$ pour tout vecteur d'incidence d'un sous-graphe solution de SNDP. Ainsi

$$\text{SNDP}(G,r) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x(e) = 1, \text{ pour tout } e \in ES(G,r)$$

En se basant sur cette remarque, Grôtschel et Monma [49] ont montré que la dimension du polytope SNDP(G,r) est $|E| - |ES(G,r)|$.

Théorème 2.4. *[49] Soient $G = (V,E)$ un graphe et r un vecteur de connexité tel que SNDP(G,r)$\neq \emptyset$. Alors*

$$dim(SNDP(G,r) = |E| - |ES\ (G,r)|$$

Afin d'étudier les contraintes valides pour le polytope SNDP(G,r), nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.5. *Soient $G = (V,E)$ un graphe et (P) une propriété d'hérédité sur les sous-ensembles de E tels que si $F_1 \subseteq E$ vérifie (P) et si $F_1 \subseteq F_2 \subseteq E$, alors F_2 vérifie (P). Soit le polyèdre*

$$Q = conv\{x^F \mid F \subseteq E \text{ vérifie } (P)\}.$$

Supposons que la contrainte

$$\sum_{e \in E} a(e)x(e) \geqslant b$$

définisse une facette $\mathcal{F}$ de Q différente d'une facette triviale. Alors $a(e) \geqslant 0$ pour tout e de E telle que $E \backslash \{e\}$ vérifie (P).

Preuve. Soit e_0 une arête de E telle que $E \backslash e_0$ vérifie (P). Puisque la contrainte définit une facette non triviale, il existe $F \subseteq E$ tel que $e_0 \notin F$ et $x^F \in \mathcal{F}$. Donc $\sum_{e \in E} a(e)x^F(e) = \sum_{e \in E \backslash \{e_0\}} a(e)x(e) = b$. Soit $F' = F \cup \{e_0\}$. F' vérifie (P), et donc on a $\sum_{e \in E} a(e)x^{F'}(e) \geqslant b$. Or $\sum_{e \in E} a(e)x^{F'}(e) = \sum_{e \in E \backslash \{e_0\}} a(e)x(e) + a(e_0) = b + a(e_0)$. D'où $a(e_0) \geqslant 0$. □

2.2.3 Contraintes valides

2.2.3.1 Inégalités triviales

Le théorème suivant, qui a été démontré par Grôtschel et Monma [49], donne les cas pour lesquels les inégalités triviales définissent des facettes du polytope SNDP(G,r).

Théorème 2.6. *Soient $G = (V,E)$ un graphe et r un vecteur de types de connexité associés aux sommets V. On suppose que SNDP$(G,r) \neq \emptyset$. Alors, on a les propriétés suivantes*

1) *$x(e) \leqslant 1$ définit une facette de SNDP(G,r) si et seulement si $e \in E \backslash ES(G,r)$.*
2) *$x(e) \geqslant 0$ définit une facette de SNDP(G,r) si et seulement si $e \in E \backslash ES(G,r)$ et $ES(G,r) = ES(G - e,r)$.*

□

2.2.3.2 Inégalités de coupe

Rappelons d'abord que les inégalités de coupe s'écrivent de la manière suivante.

$$x(\delta(W)) \geqslant con(W) \qquad \forall\, W \subset V,\, W \neq \emptyset.$$

Dans le cas particulier où tous les nœuds ont un même type de connexité, disons k où $k \in \mathbb{N}$ et le graphe est $(k+1)$-arête connexe, on connaît des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une contrainte de coupe définisse une facette.

Théorème 2.7. *[77] Soit $G = (V,E)$ un graphe $(k+1)$-arête connexe avec $r(v) = k$ pour tout sommet $v \in V$. Soit $W \subset V$, $W \neq V$ et $W \neq \emptyset$. On définit, pour $W_i \subset W$, le déficit $def_G(W_i)$ de la manière suivante*

$$def_G(W_i) = max\{0, k - |\delta_{G[W]}(W_i)|\}.$$

De même on définit pour $U_i \subset V\backslash W$, le déficit $def_G(U_i)$ de la manière suivante

$$def_G(U_i) = max\{0, k - |\delta_{G[V\backslash W]}(U_i)|\}.$$

L'inégalité de coupe définit une facette pour le polytope SNDP(G,r) si et seulement si

1) *$G[W]$ et $G[V\backslash W]$ sont connexes et*
2) *pour toute arête $e \in E(W) \cup E(V\backslash W)$, pour tous ensembles $W_1, \ldots, W_p$ $(p \geqslant 0)$ deux à deux disjoints de W avec $\emptyset \neq W_i \neq W$, pour $i = 1, \ldots, p$, et pour tous ensembles $U_1, \ldots, U_q$ $(q \geqslant 0)$ deux à deux disjoints de $V\backslash W$ avec $\emptyset \neq U_i \neq V\backslash W$, pour $i = 1, \ldots, q$, l'inégalité suivante est vérifiée:*

$$\sum_{i=1}^{p} def_G(W_i) + \sum_{i=1}^{q} def_G(U_i) - |[\cup_{i=1}^{p} W_i, \cup_{i=1}^{q} U_i]| \leqslant k$$

□

Corollaire 2.8. *Soit $G = (V,E)$ un graphe $(k+1)$-arête connexe avec $r(v) = k$ pour tout sommet $v \in V$. Soit $W \neq V$ un ensemble non vide de V.*

- *Si $G[W]$ et $G[V\backslash W]$ sont au plus $\lceil k/2 \rceil$-arête connexes, alors la contrainte $x(\delta(W)) \geqslant k$ ne définit pas de facette.*
- *Si $G[W]$ et $G[V\backslash W]$ sont k-arête connexes, alors la contrainte $x(\delta(W)) \geqslant k$ définit une facette.* □

D'autres résultats sur les contraintes de coupe sont établis dans la littérature pour d'autres cas particuliers du problème comme le cas où $r \in \{0,1,2\}^V$. On appelle une arête e un *pont* si $G\backslash e$ a plus de composantes connexes que G. Soit $G = (V,E)$ un graphe et soit $W \subset V$. On pose

$\lambda(G,W) :=$ la cardinalité minimum des sous-ensembles F de E tels que deux nœuds de W soient déconnectés dans $G\backslash F$.

Si $|W| < 2$, on définit

$\lambda(G,W) := \infty$. Enfin, on définit $\lambda_i(G)$ égale à $\lambda(G,V_i)$ où $V_i = \{v \in V | r(v) \geqslant i\}$, $i = 0,1,\ldots,r_{max}$.

Dans le cas où $r \in \{0,1,2\}^V$, Stoer [77] a montré le théorème suivant.

Théorème 2.9. *[77] Soient un graphe $G = (V,E)$, un vecteur de type de connexité $r \in \{0,1,2\}^V$, et $W \subset V$, tel que $\emptyset \neq W \neq V$. On suppose que G est 2-sommet connexe et que $\lambda_2(G) \geqslant 3$.*

1) *Si $con(W) = 2$, alors $x(\delta(W) \geqslant 2$ définit une facette de SNDP(G,r) si et seulement si*
   - 1.1) *$G[W]$ et $G[V\backslash W]$ sont connexes;*
   - 1.2) *$\lambda_1(G[W]) \geqslant 2$ et $\lambda_1(G[V\backslash W]) \geqslant 2$;*
   - 1.3) *si e est un pont de $G[W]$, f est un pont de $G[V\backslash W]$, U, U'sont les ensembles de sommets des deux composants de $G[W] - e$ et $\overline{U}$, $\overline{U}'$ sont les ensembles de sommets des deux composants de $G[V\backslash W] - f$, et si $r(U) = r(\overline{U}) = 2$, alors $|[U,\overline{U}]| \geqslant 1$.*
2) *Si $con(W) = 1$, alors $x(\delta(W) \geqslant 1$ définit une facette de SNDP(G,r) si et seulement si*
   - 2.1) *$G[W]$ et $G[V\backslash W]$ sont connexes;*
   - 2.2) *$\lambda_1(G[W]) \geqslant 2$ et $\lambda_1(G[V\backslash W]) \geqslant 2$;*
   - 2.3) *$\lambda_2(G[W]) \geqslant 3$ et $\lambda_2(G[V\backslash W]) \geqslant 3$;*
3) *Si $con(W) = 0$, alors $x(\delta(W) \geqslant 0$ ne définit pas de facette.*

□

2.2.3.3 Inégalités de partition

Soit $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ une partition de V. On définit

$$I_1 = \{i : con(V_i) = 1,\ i = 1, \ldots, p\}$$
$$I_2 = \{i : con(V_i) \geqslant 2,\ i = 1, \ldots, p\}$$

Grôtschel et al [47, 48] ont montré que l'inégalité

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geqslant \begin{cases} p - 1 & \text{si } I_2 = \emptyset, \\ \left\lceil \frac{1}{2} \sum_{i \in I_2} con(V_i) \right\rceil + |I_1| & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.5}$$

est valide pour SNDP(G,r). Les inégalités de type (4.1) sont appelées *inégalités de partition*. Dans le cas général, le problème de séparation des contraintes de partition est NP-difficile. En effet, considérons le problème suivant.

Problème 2.10. *Étant donnés un graphe $G = (V,E)$, et trois sommets v_1, v_2, $v_3 \in V$, déterminer un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq E$ tel que v_1, v_2 et v_3 appartiennent à des composantes différentes de $G \backslash F$ et F soit de cardinalité maximum.*

Ce problème s'appelle le *problème du 3-way cut*. Dahlaus et al. [23] ont montré que le problème 2.10 est NP-difficile. Or Stoer [77] a montré que toute instance du problème 2.10 se ramène à une instance du problème de séparation des contraintes de partition. Plus particulièrement, le problème se ramène à une instance où les trois sommets spéciaux, pour le problème du 3-way cut, sont de type de connexité 1, et les autres de type 0. Donc le problème de séparation des inégalités de partition est NP-difficile.

2.2.3.4 Inégalités de SP-partition

Les inégalités de SP-partition ont d'abord été introduites par Chopra [16] pour les graphes outerplanaires sous le nom de contraintes de OP-partition (OP pour outerplanaire). Chopra considérait le problème SNDP lorsque $r(v) = k$, pour tout sommet v, où k est un entier supérieur à 2, et lorsque de plus chaque arête du graphe pouvait être utilisée plusieurs fois. Il montre que ces contraintes sont valides pour ce problème lorsque k est impair. Il montre aussi qu'avec les contraintes de non négativité, elles

caractérisent le polytope du problème quand le graphe est outerplanaire. Didi Biha et Mahjoub étendent dans [27] les résultats de Chopra au cas où les arêtes ne sont utilisées au plus qu'une fois et où le graphe est série-parallèle. Ils montrent également que, dans cette classe de graphes, SNDP(G,r) est complètement décrit par les contraintes de coupe et les contraintes triviales lorsque k est pair. Enfin, ils montrent que lorsque k est impair et G est série-parallèle, kECSP(G) est complètement décrit par les contraintes triviales, les contraintes de coupe et les contraintes de SP-partition.

Étant donnée une partition $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$, on définit p_i comme étant le nombre d'ensembles de la partition ayant une connexité i. Autrement dit, $p_i = |\{j \mid con(V_j) = i, j = 1,\ldots,p\}|$. On définit également $r_\pi = max(con(V_i) \mid V_i \in \pi)$. Alors l'inégalité

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{r_\pi} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil p_i - 1 & \text{si } r_\pi \text{ est impair,} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{r_\pi} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil p_i & \text{si } r_\pi \text{ est pair.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Dans [58], Kerivin montre que ces inégalités sont valides pour SNDP(G,r) lorsque le graphe est série-parallèle et que le vecteur de type de connexité r appartient à $\mathbb{N}^V$. Ce résultat se généralise au cas où G est quelconque et la partition induit un graphe série-parallèle. De plus, il a montré que lorsque tous les types de connexité sont impairs, le problème de séparation des inégalités de partition est polynomial lorsque la partition est composée de singletons.

La séparation des contraintes de SP-partition dans le cas général est NP-difficile. En effet, dans la classe des graphes serie-parallèle, de la même manière que pour les contraintes de partition [77], toute instance du problème 2.10 se ramène à une instance particulière du problème de séparation des contraintes de SP-partition. Le problème est donc NP-difficile pour la classe des graphes série-parallèles et donc NP-difficile également pour le cas général.

Néanmoins, Kerivin [58] a montré que le problème de séparation devenait polynomial lorsque les types de connexité des sommets appartenaient à $\{k,k+1\}$ avec k impair. Il rélève également les propriétés suivantes.

Remarque 2.11. [58] Si $con(V_i)$ est pair pour tout $i = 1,\ldots,p$, alors les inégalités (2.6) sont dominées par la contrainte de coupe (2.1).

Remarque 2.12. [58] Soient $G = (V,E)$ un graphe quelconque et $(V_1,\ldots,V_p)$ une partition qui induit un graphe série-parallèle. Nous avons

- si $r_\pi \leqslant 2$, alors la contrainte de partition (4.1) coïncide avec la contrainte de SP-partition (2.6),
- si $r_\pi > 2$, alors la contrainte de partition (4.1) est dominée par la contrainte de SP-partition (2.6).

2.2.3.5 Inégalités de r-recouvrement

Les contraintes de r-recouvrement sont définies pour le problème de r-recouvrement qui est une relaxation du problème de SNDP. Étant donnés un graphe $G = (V,E)$ et des types de connexité $r(v)$ associés aux sommets $v \in V$, un *r-recouvrement* est un sous-ensemble d'arêtes F de E tel que $|F \cap \delta(v)| \geqslant r(v)$ pour tout $v \in V$. Si les arêtes sont soumises à un système de poids, alors le *problème de r-recouvrement* consiste à déterminer un r-recouvrement de poids minimum. Edmonds [30] a montré que ce problème est polynomial. Il a également montré que le polytope associé à ce problème est totalement caractérisé par les contraintes suivantes.

$$x(\delta(v)) \geqslant r(v) \qquad \text{pour tout } e \in E \tag{2.7}$$

$$x(E(H)) + x(\delta(H)\backslash T) \geqslant \left\lceil 1/2(\sum_{v\in H} r(v) - |T|) \right\rceil \quad \begin{array}{l}\text{pour tout } H \subseteq V,\\ T \subseteq \delta(H) \text{ tels que}\\ \sum_{v\in V} r(v) - |T| \text{ est impair}\end{array} \tag{2.8}$$

$$x(e) \geqslant 0 \qquad \text{pour tout } e \in E \tag{2.9}$$

$$x(e) \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } e \in E \tag{2.10}$$

L'inégalité (2.8) est appelée inégalité de r-recouvrement. Elle est valide pour SNDP. Grötschel, Monma et Stoer [51] ont généralisé cette inégalité de la manière suivante.

Soient H un sous-ensemble de sommets de V, $H \neq V$ et $T \subseteq \delta(H)$ un sous-ensemble d'arêtes. Pour chaque arête $e = uv$ notons $T_e = u,v$. Les ensembles T_e sont appelés les

dents. On suppose que si e et f sont deux arêtes parallèles, alors la distinction est faite entre T_e et T_f. Étant donnée une partition $(H_1,\ldots,H_p)$, $p \geqslant 3$, de H qui vérifie

- $r(H_i) \geqslant 1$, pour tout $i = 1,\ldots,p$,
- pas plus de $con(H_i) - 1$ dents intersectent H_i, pour tout $i = 1,\ldots,p$,
- au moins 3 H_i sont intersectés par des dents,
- $\sum_{i\in I_2} con(H_i) - |T|$ est impaire, où $I_2 = \{i \mid con(H_i) \geqslant 2;\ i = 1,\ldots,p\}$.

Posons $I_1 = \{i \mid con(H_i) = 1;\ i = 1,\ldots,p\}$ et $q_i = |\{H_j \in (H_1,\ldots,H_p) \mid con(H_j) = i\}|$. L'inégalité

$$x(\delta(H_1,H_2,\ldots,H_p)) + x(\delta(H)\backslash T) \geqslant \left\lceil \frac{\sum_{i\in I_2} con(H_i) - |T|}{2} \right\rceil + |I_1| \qquad (2.11)$$

est appelée *inégalité de r-recouvrement généralisée*. Comme $\sum_{i=1}^{r_\pi} con(V_i) = \sum_{i=1}^{r_\pi} ip_i$, on peut réécrire cette inégalité de la manière suivante.

$$x(\delta(H_1,H_2,\ldots,H_p)) + x(\delta(H)\backslash T) \geqslant \left\lceil \frac{\sum_{i=2}^{r_\pi} iq_i - |T|}{2} \right\rceil + |I_1|$$

Cette inégalité est valide pour SNDP. Par contre, étant donnée sa structure, il est difficile d'utiliser ces inégalités dans un algorithme de coupes et branchements. De plus, Grötschel, Monma, Stoer ([51] [77]) ont montré que le problème de séparation de ces inégalités est NP-difficile.

Théorème 2.13. *L'inégalité (2.11) définit une facette de SNDP(G,r) si*

1) $G[H]$ est connexe,
2) $G[H_i]$ est connexe et $\lambda_1(G[H_i]) \geqslant 2$ pour tout $i = 1,\ldots,p$,
3) s'il existe une coupe C de $G[H_i]$ de taille q telle que $G[H_i] - C$ se décompose en deux composantes (W_1,E_1) et (W_2,E_2) avec $con(W_1) \leqslant con(W_2)$, alors, si on note t le nombre de dents incidentes à W_1, il n'est pas permis d'avoir $t \geqslant q+2$ et il n'est pas non plus permis d'avoir $t \leqslant q \leqslant \lfloor con(W_1)/2 \rfloor$.

Remarque 2.14. Une inégalité de r-recouvrement généralisée de la forme de (2.11) ne définit pas de facette pour SNDP(G,r) s'il existe un ensemble de nœuds H_i, un nœud $v \in V\backslash H$ tel que $[\{v\}, H_i]$ contient une dent et une arête qui n'est pas une dent.
C'est le cas lorsque G est complet et qu'il existe un ensemble H_i, avec $t \geqslant 0$ dents incidentes qui contient plus de t nœuds.

2.2.3.6 Inégalités de F-partition

Ces inégalités ont été introduites par Mahjoub [68]. Il s'agit d'un cas particulier des inégalités de r-recouvrement généralisées.

Barahona et Mahjoub [10] ont montré que ces inégalités, avec les inégalités triviales, et celles de coupes, suffisent à caractériser le polytope SNDP(G,r) quand G est un graphe de Halin et que les types de sommets sont tous égaux à 2. Didi Biha a également étudié ces inégalités en les appliquant au problème SNDP(G,r) lorsque r est uniforme et égal à k, avec k un entier supérieur à 3. Les contraintes de F-partition pour ce problème sont toujours valides mais sont dominées par les contraintes de coupes dans certains cas. Kerivin [58] a généralisé ces contraintes pour SNDP(G,r) lorsque $r(v) \in \{1,\ldots,k\}$ avec k un entier strictement positif.

Soit $G = (V,E)$ un graphe et $r \in \{1,\ldots,k\}^N$, k un entier strictement positif, un vecteur de type de sommet. Soit $\pi = (V_0,V_1,\ldots,V_p)$ une partition de V. Soient $F \subseteq \delta(V_0)$ et $q_i = |\{j \mid con(V_j) = i,\ j = 1,\ldots,p\}|$ quel que soit $i \in 1,\ldots,p$. Soit $S_1 = \{i \mid con(V_i)$ impair, $i = 1,\ldots,p\}$. La contrainte

$$x(\delta(V_0,V_1,\ldots,V_p)\backslash F) \geqslant \sum_{j=1}^{\lceil \frac{r_\pi}{2} \rceil} j(q_{2j} + q_{2j-1}) - \left\lfloor \frac{|S_1| + |F|}{2} \right\rfloor \tag{2.12}$$

est appelée *contrainte de F-partition.*

Lemme 2.15. *La contrainte de F-partition (2.12) est valide pour le problème SNDP.*

Preuve: Soit $x \in$ SNDP(G,r). x vérifie les inégalités suivantes.

$$\begin{aligned} x(V_i) &\geqslant con(V_i) && \forall i = 1,\ldots p, \\ x(e) &\geqslant 0 && \forall e \in \delta(V_0)\backslash F, \\ -x(e) &\leqslant -1 && \forall e \in F. \end{aligned}$$

En sommant les inégalités, on obtient

$$\begin{aligned}
2x(\delta(V_0,V_1,\ldots,V_p)\backslash F) &\geqslant \sum_{j=1}^{k} con(V_j) - |F| \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2jp_{2j} + \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} (2j-1)p_{2j-1} - |F| \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2jp_{2j} + \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2jp_{2j+1} - \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} p_{2j+1} - |F| \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2jp_{2j} + \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} 2jp_{2j+1} - |S_1| - |F| \\
x(\delta(V_0,V_1,\ldots,V_p)\backslash F) &\geqslant \sum_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} j(p_{2j} + p_{2j+1}) - \frac{|S_1| + |F|}{2}
\end{aligned}$$

En arrondissant le membre de droite au plus petit entier inférieur, on obtient bien l'inégalité (2.12). □

Notons que si l'on ne connaît pas la complexité du problème de séparation dans le cas général, on sait par contre que dans le cas où les V_i, $i = 0,\ldots,p$, sont des singletons, le problème de séparation est polynomial.

Remarque 2.16. Notons que si les notations sont différentes de celles utilisées pour les contraintes de r-recouvrement généralisé, ce sont pourtant les mêmes cardinalités que l'on considère. Autrement dit, $q_i = p_i$, pour tout $i = 1,...,r_\pi$.

Remarque 2.17. Lorsque les types de connexité sont supérieurs ou égaux à 2, les contraintes de r-recouvrement généralisé et les contraintes de F-partitions sont équivalentes.

Preuve. Notons α le membre de droite de l'inégalité de r-recouvrement généralisé, c'est-à-dire $\alpha = \left\lceil \frac{\sum_{i\in I_2} con(H_i) - |T|}{2} \right\rceil + |I_1|$. On a l'égalité suivante.

$$\begin{aligned}
\alpha &= \left\lceil \frac{\sum_{i\in I_2} iq_i - |T|}{2} \right\rceil + q_1 \\
&= \left\lceil \frac{\sum_{\substack{i\geqslant 2 \\ i \text{ pair}}} iq_i + \sum_{\substack{i\geqslant 3 \\ i \text{ impair}}} (i+1)q_i - \sum_{\substack{i\geqslant 3 \\ i \text{ impair}}} q_i - |T|}{2} \right\rceil + q_1
\end{aligned}$$

Comme $\frac{iq_i}{2}$, pour i pair, et $\frac{(i+1)q_i}{2}$, pour i impair, sont entiers, on peut sortir ces termes de la partie entière supérieure. Ainsi

$$\alpha| = q_1 + \sum_{\substack{i \geqslant 2 \\ i \text{ pair}}} \frac{i}{2} q_i + \sum_{\substack{i \geqslant 3 \\ i \text{ impair}}} \frac{i+1}{2} q_i + \left\lceil \frac{-\sum_{\substack{i \geqslant 3 \\ i \text{ impair}}} q_i - |T|}{2} \right\rceil$$

En utilisant les indices $i' = i/2$ pour la première somme et $i' = \frac{i+1}{2}$ pour la seconde, on obtient

$$\begin{aligned}
\alpha &= q_1 + q_2 + + \sum_{i' \geqslant 2} i' q_{2i'} + \sum_{i' \geqslant 2} i' q_{2i'-1} + \left\lceil \frac{-\sum_{\substack{i \geqslant 3 \\ i \text{ impair}}} q_i - |T|}{2} \right\rceil \\
&= \sum_{i' \geqslant 2} i' (q_{2i'} + q_{2i'-1}) - \left\lfloor \frac{\sum_{\substack{i \geqslant 3 \\ i \text{ impair}}} q_i + |T|}{2} \right\rfloor \\
&= \sum_{i' \geqslant 2} i' (q_{2i'} + q_{2i'-1}) - \left\lfloor \frac{|S_1| - q_1 + |T|}{2} \right\rfloor
\end{aligned}$$

On voit donc que dans le cas où tous les types de connexité sont supérieurs ou égaux à 2, c'est-à-dire lorsque $q_1 = 0$, l'inégalité de F-partition est la même que l'inégalité de r-recouvrement généralisé. □

2.2.4 Lifting

Connaissant une contrainte valide sur un graphe, lifter cette contrainte consiste à en déduire une contrainte valide sur un graphe obtenu en ajoutant des arêtes et/ou des sommets. Stoer [77] a montré les propriétés de lifting présentées ci-dessous, celles-ci sont très utiles pour l'étude du polytope SNDP(G,r).

2.2.4.1 Lifter dans un graphe avec une arête dupliquée

Soient $G = (V,E)$ un graphe et r un vecteur de types de connexité tels que SNDP(G,r)$\neq \emptyset$. Soit

$$ax \quad \geqslant \quad b \tag{2.13}$$

une contrainte valide sur G. D'après le lemme 2.5, $a(e) \geqslant 0$ pour toute arête $e \in E$. Considérons e_0 une arête de E. Soient e'_0 une duplication de e_0 et $\overline{G}$ le graphe obtenu à partir de G en ajoutant e'_0.

Lemme 2.18. *Si (2.13) est une contrainte valide sur G, alors*

$$\overline{a}x = ax + a(e_0)x(e'_0) \quad \geqslant \quad b \tag{2.14}$$

est valide sur $\overline{G}$.

Preuve. Soit T une solution sur $\overline{G}$. Si $e'_0 \notin T$, alors T est également une solution sur G et (2.14) est vérifiée. On suppose maintenant que $e'_0 \in T$. On distingue deux cas.
Cas 1: $e'_0 \in T$, $e_0 \notin T$. Soit $T_1 = T \backslash \{e'_0\} \cup \{e_0\}$. T_1 est aussi une solution, donc $ax^{T_1} \geqslant b$. On a

$$\overline{a}x^T = \overline{a}x^{T_1 \backslash \{e_0\}} + \overline{a}(e'_0).$$

Or $\overline{a}x^{T_1 \backslash \{e_0\}} = ax^{T_1 \backslash \{e_0\}}$ et $\overline{a}(e'_0) = a(e_0)$. Ainsi

$$\overline{a}x^T = ax^{T_1} \geqslant b.$$

Cas 2: $e'_0 \in T$, $e_0 \in T$. Alors il y a deux cas à considérer. Soit il existe parmi les arêtes $e_0, \ldots, e_p$ reliant les extrémités de e_0 une arête n'appartenant pas à T. On se ramène alors au cas précédent. Soit toutes les arêtes reliant les extrémités de e_0 sont dans T. Dans ce cas, il existe une solution $T^i = T \backslash e_i$, pour une certaine arête $e_i \in \{e_0, \ldots, e_p\}$. En effet, s'il n'existe pas de telle solution alors toutes les arêtes $\{e'_0, e_0, \ldots, e_p\}$ sont essentielles. Or G ne les contient pas toutes ce qui signifie que SNDP(G,r)= $\emptyset$, une contradiction.
Soit $T_1^i = T^i \backslash \{e'_0\} \cup \{e_i\}$. Comme T_1^i est une solution, on a

$$\begin{aligned} \overline{a}x^{T^i} &= \overline{a}x^{T_1^i \backslash \{e_0\}} + \overline{a}(e'_0) \\ &= ax^{T_1^i} \geqslant b. \end{aligned}$$

Par ailleurs $a(e) \geqslant 0$ pour tout $e \in E$, en particulier $a(e_i) \geqslant 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \overline{a}x^T &= \overline{a}x^{T^i} + \overline{a}(e_i) \\ &\geqslant \overline{a}x^{T^i} \\ &\geqslant b. \end{aligned}$$

□

Lemme 2.19. *Si (2.13) définit une facette différente des facettes triviales sur G, alors (2.14) définit une facette sur $\overline{G}$.*

Preuve. On sait que (2.14) est valide par le lemme précédent. Montrons qu'elle est de dimension $n+1$ où n est la dimension du polyèdre dans G. Notons $\mathcal{F}_1$ l'ensemble des solutions de SNDP(G,r) vérifiant $ax = b$ et $\mathcal{F}_2$ celui des solutions de SNDP(G,r) vérifiant $ax + a(e_0)x(e'_0) = b$. Soient $x_1,\ldots,x_n$, n vecteurs affinement indépendants appartenant à la facette $\mathcal{F}_1$. Soient $x'_1,\ldots,x'_n$ définis pour $i = 1,\ldots,n$ par

$$x'_i(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = e'_0, \\ x(e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce sont n vecteurs affinement indépendants appartenant à $\mathcal{F}_2$. De plus, il existe parmi les vecteurs $x_1,\ldots,x_n$, au moins un, disons x_i, pour qui $x_i(e_0) = 1$, car $\mathcal{F}_1$ n'est pas une facette triviale. Soit x'_{n+1} défini par:

$$x'_{n+1}(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = e_0, \\ 1 & \text{si } e = e'_0, \\ x_i(e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est un point de $\mathcal{F}_2$. De plus, $x'_1,\ldots,x'_n,x'_{n+1}$ forment $n+1$ vecteurs affinement indépendants. Donc $\mathcal{F}_2$ est une facette. □

Soit f une nouvelle arête ne duplicant aucune arête de G. Soit $\widehat{G}$ le graphe obtenu à partir de G en ajoutant f.

Lemme 2.20. *Si (2.13) est valide sur G, alors la contrainte*

$$a\hat{x} + a(C_f)\hat{x}(f) \quad \geqslant \quad b \tag{2.15}$$

où C_f est un plus court chemin entre les extrémités de f dans G, est valide sur $\widehat{G}$.

Preuve. Soit $\hat{x}$ une solution sur $\widehat{G}$. Soit x la restriction de $\hat{x}$ sur G. On distingue deux cas.
Cas 1: $\hat{x}(f) = 0$. Alors x est une solution de SNDP(G,r) qui vérifie la contrainte (2.13). Donc

$$a\hat{x} + a(C)\hat{x}(f) = ax \geqslant b,$$

c'est-à-dire que (2.15) est vérifiée.
Cas 2: $\hat{x}(f) = 1$. La solution x induit un graphe dans lequel il manque, au plus, un chemin entre les extrémités de f pour qu'elle appartienne à SNDP(G,r). Soit G_C le

graphe obtenu à partir de G en duplicant les arêtes d'un plus court chemin C entre les extrémités de f. Soit x_C défini par:

$$x_C(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } e \text{ est la duplication d'une arête de } C, \\ x(e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que x_C est une solution de SNDP(G,r). Il vérifie $a_C x_C \geqslant b$, où a_C est défini par :

$$a_C(e) = \begin{cases} a(g) & \text{si } e \text{ est la duplication d'une arête } g, \\ a(e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $ax_C = a\hat{x} + a(C)$, on en déduit que $\hat{x}$ vérifie (2.15). □

Le lemme suivant s'obtient comme conséquence directe des résultats précédents.

Lemme 2.21. *Si (2.13) définit une facette différente des facettes triviales sur G, et s'il existe T_0 une solution dans $\widehat{G}$ qui vérifie (2.15) à l'égalité et telle que $x^{T_O}(f) = 1$, alors (2.15) définit une facette sur $\widehat{G}$.* □

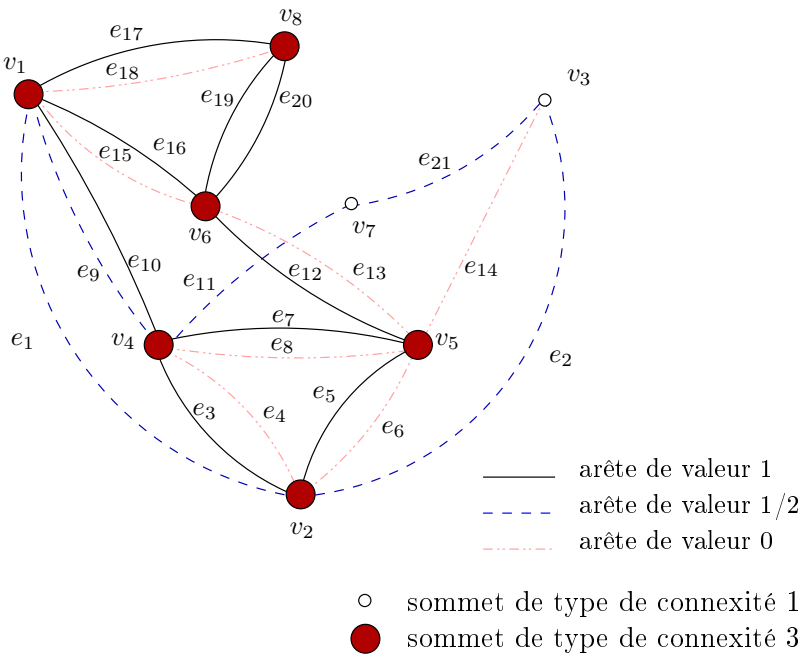

FIG. 2.1 – *Une solution fractionnaire*

La figure 2.1 montre un graphe pour lequel le polytope décrit par les contraintes de coupe et les contraintes triviales présente des points extrêmes fractionnaires qui sont

coupés par des inégalités de SP-partitions liftées. Le graphe de la figure 2.1 contient un sous-graphe série-parallèle formé de toutes les arêtes privées de e_1 et de e_2. Soit x la solution associée au graphe défini dans figure 2.1. La solution x est un point extrême du polytope défini par les contraintes de coupe et les contraintes triviales. En effet, x est solution du système suivant.

$$\begin{cases} x(e_3) = x(e_5) = x(e_7) = x(e_{10}) = x(e_{17}) = x(e_{19}) = x(e_{20}) = 1 \\ x(e_4) = x(e_6) = x(e_8) = x(e_{12}) = x(e_{14}) = x(e_{15}) = x(e_{18}) = 0 \\ x(\delta(\{v_1,v_8,v_6\})) = 3 \\ x(\delta(v_2)) = 3 \\ x(\delta(v_5)) = 3 \\ x(\delta(v_3)) = 1 \\ x(\delta(v_7)) = 1 \end{cases}$$

En sommant les valeurs des arêtes, on obtient $x(E) = 11{,}5$. On note π la partition $(\{v_i\},\ i = 1,\ldots,8)$. La contrainte de partition s'écrit

$$x(\delta(\pi)) \geqslant \lceil p_2 + 3/2p_3 \rceil + p_1 = \lceil 3/2 * 6 \rceil + 2 = 11.$$

Comme $x(\delta(\pi)) = 11{,}5$, elle est vérifiée par x. La contrainte de SP-partition appliquée à la partition $\pi' = (\{v_1,v_2,v_3\},\{v_4\},\ldots,\{v_8\})$ s'écrit

$$x(\delta(\pi')) \geqslant p'_1 + 2p'_3 - 1 = 1 + 2 * 5 - 1 = 10.$$

Elle est également vérifiée par x. Enfin, considérons la contrainte de SP-partition liftée

$$x(\delta(\pi)) + a(C_{e_1})x(e_1) + a(C_{e_2})x(e_2) \geqslant p_1 + 2p_3 - 1$$

Pour la solution x de la figure 2.1, le premier membre de la contrainte vaut 12,5, et le second membre vaut 2 + 2*6 -1 = 13. La contrainte est donc violée. Cet exemple montre donc l'intérêt des contraintes liftées.

2.3 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les différents modèles utilisés pour fomaliser le problème de conception de réseauxfiables. Nous utilisons dans la suite le modèle

SNDP basé sur les types de connexité associés aux sommets et sur le fait que l'on considère une connexité sur les arêtes et non sur les sommets. Nous avons vu les cas où le problème pouvait se résoudre en temps polynomial ainsi que les heuristiques existantes. Nous avons également donné la formulation de SNDP en programme linéaire en nombre entier. Puis nous avons présenté des familles de contraintes valides pour le problème. Nous avons en même temps discuté de certaines propriétés polyédrales de ces contraintes.

Ce chapitre termine la partie d'introduction et de bibliographie. Nous abordons maintenant les travaux spécifiques de ma thèse avec, pour commencer, un travail sur le problème du sous-graphe k-arête connexe.

Chapitre 3

Le problème du sous-graphe k-arête connexe

Un graphe $G = (V,E)$ est dit *k-arête connexe* si entre chaque paire de sommets, il existe au moins k chaînes arête-disjointes. Si G est muni d'un coût associé aux arêtes, le problème du sous-graphe k-arête connexe consiste à trouver un sous-graphe k-arête connexe de coût minimum, couvrant les sommets de G. Ce problème correspond au cas de SNDP pour lequel $r(v) = k$, pour tout sommet $v \in V$. Nous considérons dans ce chapitre ce problème, noté kECSP, lorsque k est impair et $k \geqslant 3$.
Soit $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$, $p \geqslant 2$, une partition de V. La contrainte de SP-partition dans ce cas se formule de la façon suivante.

$$x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) \geqslant \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil p - 1 \tag{3.1}$$

Ce chapitre porte sur l'étude des propriétés de facette des contraintes de SP-partition pour kECSP. Il est basé sur un travail réalisé avec Diarrassouba et qui a donné lieu à un rapport de recherche [24].
Dans un premier temps, nous rappelons certains résultats à propos du polytope associé. Ensuite, nous étudions les contraintes de SP-partition. En nous appuyant sur des résultats de Chopra [16], de Didi Biha [25], et de Didi Biha et Mahjoub [27], nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que les contraintes (3.1) définissent des facettes dans les graphes outerplanaires. Nous montrons ensuite que si le graphe est série-parallèle et que la partition π induit un graphe série-parallèle non outerplanaire, alors la contrainte de SP-partition induite par π n'est pas une facette. Enfin nous donnons quelques éléments de réflexion pour le cas où le graphe est quelconque.

3.1 Introduction

Le problème kECSP a été étudié pour certaines classes de graphes, en particulier pour la classe des graphes *outerplanaires*, c'est-à-dire les graphes non contractibles ni à K_4 ni à $K_{3,2}$, et dans celle des graphes *série-parallèles*, c'est-à-dire les graphes non contractibles à K_4. Notons que la classe des graphes outerplanaires est une sous-classe de la classe des graphes série-parallèles. On peut définir de manière équivalente un graphe outerplanaire comme étant un graphe planaire tel qu'on peut disposer tous ses sommets sur la face extérieure.

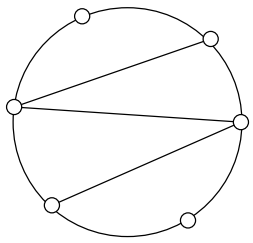

FIG. 3.1 – *Exemple de graphe outerplanaire*

Le problème kECSP est équivalent au programme linéaire en nombres entiers suivant.

$$Min \sum_{e \in E} c(e)x(e)$$

s.c

$$x(\delta(W)) \geqslant k \qquad \text{pour tout } W \subset V, W \neq \emptyset \tag{3.2}$$

$$x(e) \geqslant 0 \qquad \text{pour tout } e \in E \tag{3.3}$$

$$x(e) \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } e \in E \tag{3.4}$$

$$x(e) \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } e \in E \tag{3.5}$$

Soit kECSP(G) $=conv\{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x$ satisfait (3.2),(3.3),(3.4),(3.5)$\}$. Didi Biha et Mahjoub [27] ont montré le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Si $G = (V,E)$ est un graphe série-parallèle k-arête connexe et k est pair (resp. impair), alors kECSP(G) est complètement caractérisé par les inégalités (3.2), (3.3) et (3.4) (resp. (3.1), (3.3), (3.4)).*

3.2 Propriétés des containtes de SP-partition

3.2.1 Graphes outerplanaires

Nous allons donner dans la suite quelques propriétés de facette des containtes de SP-partition pour le kECSP, avec k impair, lorsque le graphe est outerplanaire et 2-sommet connexe.

Ici $G = (V,E)$ désignera un graphe outerplanaire, 2-sommet connexe qui peut avoir des arêtes multiples. On supposera que $V = \{v_1,...,v_n\}$, $n \geqslant 2$. Sous ces conditions, les sommets de G peuvent être disposés sur un cycle élémentaire. On peut aussi supposer, sans perte de généralité, que les sommets $v_1,...,v_n$ sont indicés de telle manière que deux sommets consécutifs sur le cycle aient des indices consécutifs, modulo n. Dans un premier temps, nous nous intéressons à une partition particulière π_0 constituée d'ensembles contenant exactement un sommet c'est-à-dire $\pi_0 = (\{v_1\},...,\{v_n\})$. Puis nous généralisons les résultats obtenus pour des partitions quelconques.
Considérons l'inégalité de SP-partition suivante induite par π_0.

$$\sum_{e \in E} x(e) \geqslant \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil n - 1. \tag{3.6}$$

Didi Biha et Mahjoub [27] ont montré le lemme suivant.

Lemme 3.2. *[27] Soit x une solution de $P(G,k)$. Si $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ est une partition dont la contrainte de SP-partition correspondante est serrée pour x, alors*

$$x([V_i,V_j]) \leqslant \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil, \text{ pour tout } i,j \in \{1, \ldots, p\}. \tag{3.7}$$

De plus, si x vérifie (3.7) à l'égalité pour i et j avec $i < j$, alors la partition $\pi' = (V'_1,...,V'_p)$ telle que

$$\begin{aligned} V'_t &= V_t && \text{pour } t = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, j-1, \\ V'_i &= V_i \cup V_j, && \\ V'_t &= V_{t+1} && \text{pour } t = j, \ldots, p, \end{aligned}$$

est aussi serrée pour x.

Nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour que (3.6) définisse une facette. Avant cela, nous faisons les remarques suivantes. Comme G est un graphe outerplanaire, donc série-parallèle, et 2-sommet connexe, il existe un sommet t adjacent à exactement 2 sommets t_1 et t_2. Si $x \in k\text{ECSP}(G)$ alors on a $x([t,t_1]) \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$ ou $x([t,t_2]) \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Supposons par exemple que l'on ait $x([t,t_1]) \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Alors, si de plus x vérifie la contrainte (3.6) à l'égalité, d'après le lemme 3.2 on a $x([t,t_1]) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$.

Lemme 3.3. *Si la contrainte (3.6) définit une facette de kECSP(G) différente des facettes induites par les contraintes triviales, alors on a* $|[v_i,v_{i+1}]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, $i = 1,\ldots,n$ *(modulo n).*

Preuve. Supposons le contraire c'est-à-dire que (3.6) définit une facette différente de celles définies par les inégalités triviales et qu'il existe $i \in \{1,\ldots,p\}$ tel que $|[v_i,v_{i+1}]| < \lceil \frac{k}{2} \rceil$ (i est pris modulo n). Soient $e_i^* \in [v_i,v_{i+1}]$ et $\mathcal{F}_0$ la face de $k\text{ECSP}(G)$ induite par (3.6). Comme la contrainte (3.6) est différente de la contrainte $x(e_i^*) \leqslant 1$, il existe $x \in \mathcal{F}_0$ tel que $x(e_i^*) = 0$. Nous distinguons deux cas.

Cas 1. v_i ou v_{i+1} est adjacent à exactement 2 sommets. Sans perte de généralité, on peut supposer que v_i est adjacent à v_{i-1} et v_{i+1} uniquement. Dans ce cas, on a $x([v_i,v_{i+1}]) \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2$ et $x([v_{i-1},v_i]) \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$, ce qui contredit le lemme 3.2.

Cas 2. v_i et v_{i+1} sont adjacents chacun à au moins 3 sommets. Comme G est outerplanaire, donc série-parallèle, et 2-sommet connexe, il existe un sommet t adjacent à exactement 2 sommets t_1 et t_2. D'après la remarque ci-dessus, un des voisins de t, disons t_1, est tel que $x([t,t_1]) = \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Soit π_0' la partition obtenue de π_0 en considérant les sommets t et t_1 dans un même ensemble. Il est clair que $G_{\pi_0'}$ est outerplanaire et 2-sommet connexe et que, d'après le lemme 3.2, la contrainte de SP-partition induite par π_0' est serrée pour x. On répète cette opération jusqu'à ce qu'au moins un des sommets v_i ou v_{i+1} soit adjacent à exactement 2 sommets dans le graphe induit par la nouvelle partition. Soit $\pi_0'' = (V_1,\ldots,V_{t-1},V_t,V_{t+1},\ldots,V_q)$, $q \geqslant 3$, la partition ainsi obtenue. On peut supposer sans perte de généralité que $V_t = \{v_i\}$ et que V_t est adjacent à exactement 2 éléments de π_0'', V_{t-1} et V_{t+1}. On peut aussi supposer que $v_{i+1} \in V_{t+1}$. Du fait de la structure outerplanaire, le nombre d'arêtes entre les ensemble V_t et V_{t+1} est égal à celui entre v_t et v_{t+1}. En effet, sinon des cordes s'intersecteraient. On a donc $|[V_t,V_{t+1}]| \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$. De plus, on a $e_i^* \in [V_t,V_{t+1}]$. D'après le lemme 3.2, la contrainte de SP-partition induite par π_0'' est serrée pour x. Comme $|[V_t,V_{t+1}]| \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil - 1$ et que $x(e_i^*) = 0$, on a $x([V_t,V_{t+1}]) \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil - 2$ et $x([V_t,V_{t-1}]) \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$, une contradiction. □

D'autre part, Didi Biha [25] a donné le résultat suivant.

Théorème 3.4. *[25] Soient $G = (V,E)$ un graphe quelconque, $k \geqslant 1$ un entier impair et $(V_1,\ldots,V_p)$, $p \geqslant 2$, une partition de V. Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

1) $G[V_i]$ est $(k+1)$-arête connexe, pour $i = 1,\ldots,p$,
2) $|[V_i,V_{i+1}]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, pour $i = 1,\ldots,p$ (modulo p),
3) G_π est outerplanaire.

Alors la contrainte de SP-partition correspondante définit une facette de kECSP(G).

D'après le lemme 3.3 et le théorème 3.4, nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.5. *Soit $G = (V,E)$ un graphe outerplanaire, 2-sommet connexe avec $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$, $n \geqslant 2$. L'inégalité (3.6) définit une facette différente des facettes triviales si et seulement si $|[v_i,v_{i+1}]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, pour $i = 1,\ldots,n$ (modulo n).*

Dans ce qui suit, nous allons étendre les résultats précédents à des partitions quelconques. Soient $G = (V,E)$ un graphe outerplanaire 2-sommet connexe et $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$, $p \geqslant 2$, une partition de V telle que $G[V_i]$ est connexe, pour $i = 1,\ldots,p$. Notons que comme G est outerplanaire et 2-sommet connexe, π induit un graphe également outerplanaire et 2-sommet connexe. Le lemme suivant nous donne la dimension du polyèdre kECSP(G). La preuve est donnée dans [25].

Lemme 3.6. *[25] Si $G = (V,E)$ est $(k+1)$-arête connexe, alors kECSP(G) est de pleine dimension.*

Dans toute la suite, on supposera que G est $(k+1)$-arête connexe.

Lemme 3.7. *Si*

1) $|[V_i,V_{i+1}]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, $i = 1,\ldots,p$ (modulo p),
2) $G[V_i]$ est $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$-arête connexe, $i = 1,\ldots,p$,

alors (3.1) définit une facette.

Preuve. Soient $G_\pi = (V_\pi,E_\pi)$ le graphe induit par π et $v_1,\ldots,v_p$ les sommets tels que v_i est le sommet obtenu par la contraction de V_i pour $i = 1,\ldots,p$. Soit $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}_\pi$) la face induite par la contrainte (3.1) dans G (resp. (3.6) dans G_π. Comme G_π est outerplanaire, 2-sommet connexe, et $|[v_i,v_{i+1}]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, pour $i = 1,\ldots,p$ (modulo p), d'après le théorème 3.5, $\mathcal{F}_\pi$ définit une facette de kECSP(G_π). Considérons les solutions $\tilde{x}_i(e) \in \mathbb{R}^{|E_\pi|}$, pour $i = 1,\ldots,p$, données par:

$$\tilde{x}_i(e) = \begin{cases} 1 & \text{pour exactement } \frac{k-1}{2} \text{ arêtes } e \text{ de } [V_i,V_{i+1}] \text{ (modulo } p), \\ 1 & \text{pour exactement } \frac{k+1}{2} \text{ arêtes } e \text{ de } [V_j,V_{j+1}],\ j \in \{2,\ldots,p\},\ j \neq i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les solutions $\tilde{x}_i$, $i = 1,\ldots,p$, appartiennent à $\mathcal{F}_\pi$. De plus, elles sont affinement indépendantes. Soit $x_i \in \mathbb{R}^{|E|}$, $i = 1,\ldots,p$, la solution donnée par

$$x_i(e) = \begin{cases} \tilde{x}_i(e) & \text{si } e \in E_\pi, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est clair que les x_i , $i = 1,\ldots,p$, appartiennent à $\mathcal{F}$ et forment p vecteurs affinement indépendants. Soit $e^* \in E(V_{i_0})$, pour $i_0 \in \{1,\ldots,p\}$. Soit $z) \in \mathbb{R}^{|E|}$ tel que

$$z(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = e^*, \\ x_1(e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

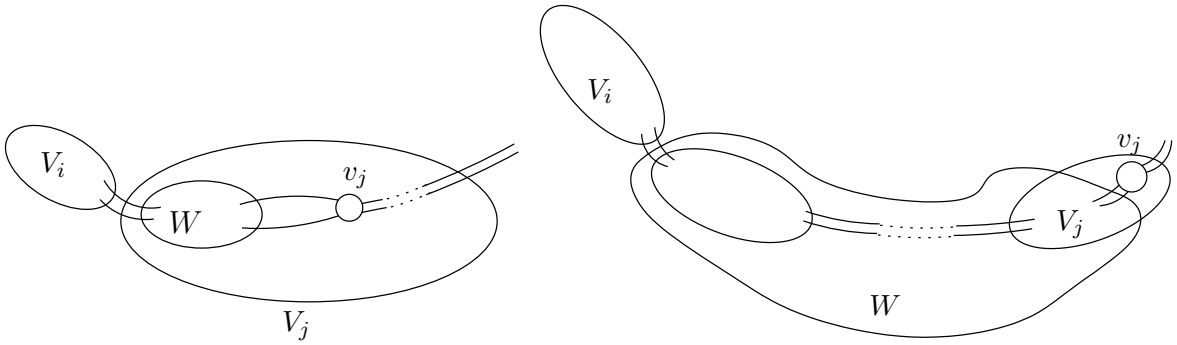

FIG. 3.2 – *Cas où exactement un sommet v_j est tel que $[W,v_j] \nsubseteq E_\pi$*

Nous allons montrer que z induit un graphe k-arête connexe. Soit $W \subset V$. Supposons que $\delta(W) \nsubseteq E_\pi$. Alors il existe au moins un sommet $v_j \in V$ tel que $[W,\{v_j\}] \nsubseteq E_\pi$. Supposons qu'il en existe exactement un. La figure 3.2 illustre de telles configurations. La figure 3.2.(a) décrit le cas où il existe $V_j \in (V_1,\ldots,V_p)$ tel que $W \subset V_j$. Quant à la

figure 3.2.(b), elle décrit le cas où W intersectent plusieurs ensembles de la partition. Dans tous ces cas, il existe un ensemble V_i, $i \in \{1,\ldots,p\}$, tel que $[V_i,W] \subset \delta(W)$. Par définition de z, on a $z([V_i,W]) \geqslant \frac{k-1}{2}$. Notons V_j l'ensemble de la partition contenant v_j. V_j est $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$-arête connexe, donc $[W \cap V_j, V_j \backslash W] \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} z(\delta(W)) &\geqslant z([V_i,W]) + z([W \cap V_j, V_j \backslash W]) \\ &\geqslant \frac{k-1}{2} + \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil \\ &= k. \end{aligned}$$

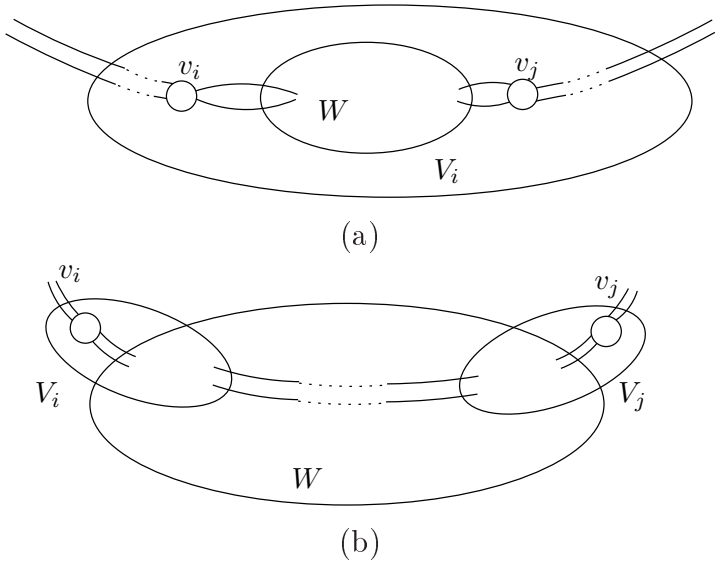

FIG. 3.3 – *Cas où exactement 2 sommets v_i et v_j vérifient $[W,\{v_j\}] \nsubseteq E_\pi$, $[W,\{v_i\}] \nsubseteq E_\pi$*

Supposons maintenant qu'il existe deux sommets, disons v_i et v_j tels que $[W,\{v_i\}] \nsubseteq E_\pi$ et $[W,\{v_j\}] \nsubseteq E_\pi$. La figure 3.3 illustre ces configurations là. Notons V_i (resp. V_j), l'ensemble de la partition contenant v_i (resp. v_j). Dans le cas où $V_i = V_j$, autrement dit v_i, v_j et W sont contenus dans le même ensemble de la partition (cas de la figure 3.3(a)), alors il existe une partition (S_1,W,S_2) de V_i telle que $v_i \in S_1$, $v_j \in S_2$.
Supposons que où $V_i \neq V_j$ (resp. $V_i = V_j$) et qu'il existe au moins une arête f reliant $V_i \backslash W$ et $V_j \backslash W$ (resp. S_1 et S_2). Comme G est outerplanaire et que par conséquent, il n'y a pas de corde qui se coupe, l'existence de f implique qu'il n'y a pas d'arête incidente à W en dehors des arêtes de $[W,V_i \backslash W]$ et de $[W,V_j \backslash W]$ (resp. $[W,S_1]$ et $[W,S_2]$).

Ainsi on a $\delta(W) = [W,V_i\backslash W] \cup [W,V_j\backslash W]$ (resp. $\delta(W) = [W,S_1] \cup [W,S_2]$). Comme G est $(k+1)$-arête connexe, $|\delta(W)| \geqslant k+1$, et comme il y a, au plus, une seule arête parmi celles des faisceaux $[W,V_i\backslash W]$ et $[W,V_j\backslash W]$ (resp. $[W,S_1]$ et $[W,S_2]$) de valeur nulle, on a $z(\delta(W)) \geqslant k$.
Supposons maintenant que $V_i \neq V_j$ et qu'il n'existe pas d'arête reliant $V_i\backslash W$ et $V_j\backslash W$. Comme $G[V_i]$ et $G[V_j]$ sont $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$-arête connexe, donc $|[V_i\backslash W]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ et $|[V_j\backslash W,W]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$. Ainsi $z(\delta(W)) \geqslant z([V_i\backslash W]) + z([V_j\backslash W,W]) \geqslant k$.
Supposons enfin que $V_i = V_j$ et qu'il n'existe pas d'arête reliant S_1 et S_2. Comme $G[V_i]$ est $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$-arête connexe, on a $|[S_1,W \cup S_2]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$ et $|[S_1 \cup W,S_2]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$. Ainsi $z(\delta(W)) \geqslant z([S_1,W \cup S_2]) + z([S_1 \cup W,S_2]) \geqslant k$. Donc z induit un graphe k-arête connexe et vérifie (3.1) à l'égalité. Pour chaque arête $\hat{e} \in E - E_\pi$, on définit $z_{\hat{e}}$ tel que

$$z_{\hat{e}}(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e = \hat{e}, \\ x_1(e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces vecteurs appartiennent à $\mathcal{F}$. On peut construire ainsi $|E - \delta(\pi)|$ vecteurs. Les solutions x_i, $i = 1,\ldots,p$, et $z_{\hat{e}}$ forment $|E|$ vecteurs affinement indépendants appartenant à $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ est une facette de kECSCP(G). □

Didi Biha et Mahjoub [25] ont montré le théorème suivant.

Théorème 3.8. *[25] Soient $G = (V,E)$ un graphe série-parallèle et $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$ une partition de V telle que $G[V_i]$ est connexe pour $i = 1,\ldots,p$. L'inégalité (3.1) définit une facette de kECSP(G) différente d'une facette triviale, où k est impair et $k \geqslant 3$, seulement si*

1) *le graphe $G_\pi = (V_\pi,E_\pi)$ est 2-sommet connexe,*
2) *pour tout $e \in E_\pi$ tel que $G - e$ est k-arête connexe, $G_\pi - e$ est 2-sommet connexe,*
3) *si e_0 est une arête de $G[V_i]$, $i \in \{1,\ldots,p\}$ telle que le graphe $G - e_0$ est k-arête connexe, alors pour tout partition (V_i^1,V_i^2) de V_i avec $e_0 \in [V_i^1,V_i^2]$, on a $|[V_i^1,V_i^2]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil + 1$.*

Par le lemme 3.7 et le théorème 3.8, on obtient l'équivalence énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 3.9. *Soit G un graphe outerplanaire, $(k+1)$-arête connexe, 2-sommet*

connexe et $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ *une partition de* G *induisant un graphe outerplanaire et telle que* $G[V_i]$ *soit connexe. La contrainte (3.1) définit une facette si et seulement si*

1) $|[V_i, V_{i+1}]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, *pour tout* $i = 1, \ldots, p$ *(modulo p),*
2) $G[V_i]$ *est* $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$*-arête connexe, pour tout* $i = 1, \ldots, p$. □

3.2.2 Graphes série-parallèles

Dans cette section, on s'intéresse aux contraintes de SP-partition définies par des partitions induisant des graphes série-parallèles et non outerplanaires, c'est-à-dire des graphes contractibles à $K_{3,2}$.

Remarque 3.10. Lorsque le graphe induit par une partition est série-parallèle mais non outerplanaire, alors la contrainte de SP-partition ne définit pas nécessairement de facette, même si les conditions du théorème 3.9 sont vérifiées.

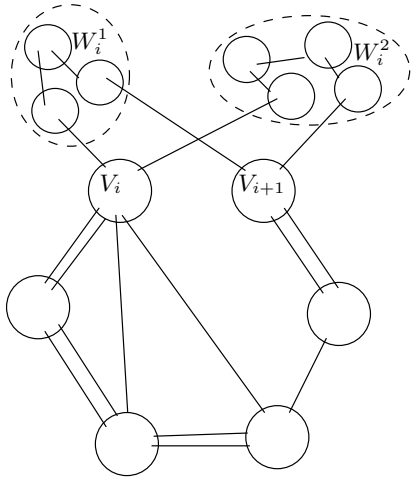

FIG. 3.4 – *Partition* π_{SP} *série-parallèle et non outerplanaire*

En effet, il existe des graphes série-parallèles et contactibles à $K_{2,3}$ pour lesquels les contraintes de SP-partitions sont dominées par d'autres contraintes de SP-partitions définies par des partitions qui induisent des graphes outerplanaires. Soit $G = (V,E)$ un graphe série-parallèle et soit $\pi_{SP} = (V_1, \ldots, V_p)$, $p \geqslant 3$, une partition de V qui induit un graphe série-parallèle non outerplanaire. Supposons que G a la configuration décrite par la figure 3.4. En particulier, on suppose qu'il existe deux ensembles V_i, V_{i+1}, tels

qu'il existe 2 ensembles de sommets W_i^1,W_i^2, qui sont déconnectés l'un de l'autre et qui sont tous deux connectés à la fois à V_i et à V_{i+1}, autrement dit W_i^1,W_i^2 sont tels que $[W_i^1,W_i^2] = \emptyset$ et $[W_i^t,V_i] \neq \emptyset \neq [W_i^t,V_{i+1}]$, $t = 1,2$.

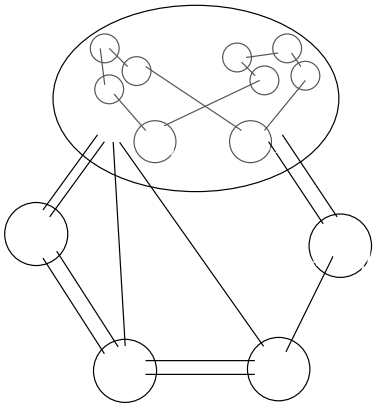

FIG. 3.5 – *Partition π_{OP}*

Soit π_{OP} la partition obtenue en mettant dans le même ensemble V_i,V_{i+1},W_i^1,W_i^2. La figure 3.5 décrit le graphe obtenu. Le graphe induit par π_{OP} est outerplanaire. Notons par p_i^1 (resp. p_i^2) le nombre d'ensembles V_i, $i = 1,\ldots,p$, inclus dans W_i^1 (resp. W_i^2). Soit $\pi_{W_i^t}$, $t \in \{1,2\}$, la partition obtenue à partir de π_{SP} en mettant ensembles tous

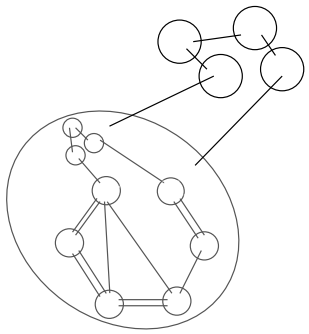

FIG. 3.6 – *Exemple de partition $\pi_{W_i^2}$*

les sommets des ensembles qui ne sont pas dans W_i^t (cf figure 3.6). Le graphe induit par $\pi_{W_i^t}$, $t \in \{1,2\}$, est série-parallèle. Donc les contraintes suivantes sont valides pour

kECSP(G).

$$x(\delta(\pi_{OP})) \geqslant (p - p_1 - p_2 - 1)\frac{k+1}{2} - 1 \quad \text{inégalité induite par } \pi_{OP}, \tag{3.8}$$

$$x(\delta(\pi_{W_i^1})) \geqslant (p_i^1 + 1)\frac{k+1}{2} - 1 \quad \text{inégalité induite par } \pi_{W_i^1}, \tag{3.9}$$

$$x(\delta(\pi_{W_i^2})) \geqslant (p_i^2 + 1)\frac{k+1}{2} - 1 \quad \text{inégalité induite par } \pi_{W_i^2}, \tag{3.10}$$

$$x([V_i,V_{i+1}]) \geqslant 0 \quad \text{inégalité de positivité.} \tag{3.11}$$

En additionnant ces contraintes, on obtient:

$$\begin{aligned} x(\delta(\pi_{SP})) &\geqslant (p+1)\frac{k+1}{2} - 1 - 2 \\ &= p\frac{k+1}{2} - 1 + \frac{k+1}{2} - 2. \end{aligned}$$

Or, si $k = 3$, $\frac{k+1}{2} - 2 = 0$. La contrainte $x(\delta(\pi_{SP})) \geqslant \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil p - 1$ est alors redondante par rapport aux contraintes (3.8)-(3.11). Si $k \geqslant 5$, alors $\frac{k+1}{2} - 2 > 0$, la contrainte de SP-partition induite par π_{SP} est dominée par les contraintes (3.8)-(3.11).

3.2.3 Graphes quelconques

Dans cette section, nous nous intéressons aux graphes quelconques. Dans un premier temps, nous considérons les contraintes de SP-partition définies par des partitions induisant des graphes outerplanaires. On étudie en particulier les conditions sous lesquelles ces contraintes peuvent définir des facettes pour des graphes généraux. Puis on s'intéresse au cas où la partition induit un graphe qui n'est pas série-parallèle. On introduit les contraintes dites de *SP-partition liftées* et on donne des conditions suffisantes pour qu'elles définissent des facettes.

3.2.3.1 Partition outerplanaire

Une question que l'on peut se poser est de savoir si les propriétés de facette des contraintes de SP-partition sont toujours les mêmes lorsque le graphe est quelconque et que la partition induit un graphe outerplanaire. Malheureusement les conditions qui étaient nécessaires, dans le théorème 3.9, ne le sont plus pour un graphe général, même avec une partition induisant un graphe outerplanaire. En effet, d'après ce théorème,

pour un graphe $G = (V,E)$ outerplanaire et une partition $\pi = (V_1,...,V_p)$, $p \geqslant 2$, l'inégalité de SP-partition induite par π définit une facette seulement si les sous-graphes $G[V_i]$ sont $(\lceil \frac{k}{2} \rceil + 1)$-arêtes-connexes, $i = 1,...,p$. Or dans le graphe de la figure 3.7 avec $k = 3$, la contrainte de SP-partition induite par $\pi = (V_1,V_2,V_3,V_4,V_6,V_7)$ définit une facette mais le sous-graphe induit par V_4 n'est pas $(\lceil \frac{3}{2} \rceil + 1 = 3)$-arête connexe.

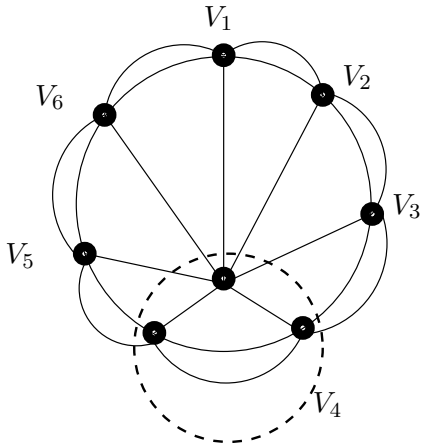

FIG. 3.7 – *Contre-exemple*

On peut supposer qu'ici, l'existence de cordes dans $G[V_4]$ d'un sommet adjacent aux autres sommets du graphe rend la condition non nécessaire.

3.2.3.2 Les contraintes de SP-partition liftées

Chopra [16] a développé une procédure de lifting qui généralise les contraintes de SP-partition au cas où le graphe G n'est pas outerplanaire. Cette procédure se présente comme suit. Soit $G_\pi = (V_\pi,E_\pi)$ un graphe outerplanaire. Soit $\overline{E} = \{e_1,...,e_l\}$, $l \geqslant 1$, tel que $G'_\pi = (V_\pi,E_\pi \cup \overline{E})$ n'est pas outerplanaire. Alors la contrainte

$$\sum_{e \in E_\pi} x(e) + \sum_{i=1}^{l} a(e_i)x(e_i) \geqslant \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil p - 1, \tag{3.12}$$

où $a(e_i)$ est la longueur d'un plus court chemin dans G_π entre les extrémités de l'arête e_i (la longueur étant le nombre d'arête(s) qui compose(nt) le chemin), est appelée *contrainte de SP-partition liftée* et est valide pour kECSP(G). Cette procédure

de lifting peut facilement être étendue au cas où le graphe G n'est pas série-parallèle et peut être très utile dans le cadre d'algorithmes de coupes et branchements pour kECSP.

Soit $G = (V,E)$, un graphe outerplanaire. G est dit *outerplanaire maximal* s'il n'est plus outerplanaire lorsqu'on ajoute une arête entre deux sommets qui n'étaient pas reliés. Dans ce qui suit, nous donnons des conditions suffisantes pour que les contraintes (3.12) définissent des facettes. Pour cela, nous rappelons le résultat de Chopra [16] suivant.

Lemme 3.11. *[16] Soit $G = (V,E)$ un graphe outerplanaire maximal et 2-sommet connexe. Soient u et v deux sommets de G et P_1 et P_2 deux chemins sommets-disjoints entre u et v. On désigne par $U = \{u_0,u_1,...,u_{r_1}\}$, $r_1 \geqslant 2$ et $W = \{w_0,w_1,...,w_{r_2}\}$, $r_2 \geqslant 2$, les ensembles de sommets de P_1 et P_2 respectivement, avec $u_0 = w_0 = u$ et $u_{r_1} = u_{r_2} = v$. Remarquons qu'on a $U \cap W = \{u,v\}$ et que $V = U \cup W$. Si $l \geqslant 2$ est la longueur d'un plus court chemin entre u et v dans G, alors il existe au moins $l-1$ arêtes $e = u_i w_i$ telles que*

1) $u_i \in U \setminus \{u,v\}$ et $w_i \in W \setminus \{u,v\}$,
2) $u_i \neq u_j$, pour $i \neq j$ et
3) $w_i \neq w_j$, pour $i \neq j$

Théorème 3.12. *Soient $G = (V,E)$ un graphe quelconque et $\pi = (V_1,...,V_p)$, $p \geqslant 2$, une partition de V. Soit $G_\pi = (V_\pi,E_\pi)$ le graphe induit par la partition. Supposons qu'il existe $\{e_1,\ldots,e_l\} \subset E_\pi$ avec $e_k \notin [V_i,V_{i+1}]$, pour $k = 1,\ldots,l$ et $i = 1,\ldots,p$ (modulo p), tels que $(V_\pi,E_\pi\setminus\{e_1,\ldots,e_l\})$ est outerplanaire. Alors l'inégalité de SP-partition liftée*

$$\sum_{e\in E_\pi\setminus\{e_1,...,e_l\}} x(e) + \sum_{i=1}^{l} a(e_i)x(e_i) \geqslant \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil p - 1, \tag{3.13}$$

définit une facette de kECSP(G) si les conditions suivantes sont satisfaites:

1) $(V_\pi,\ E_\pi\setminus\{e_1,\ldots,e_l\})$ est outerplanaire maximal,
2) $|[V_i,V_{i+1}]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, $i = 1,...,p$, (modulo p),
3) $G[V_i]$ est $(k+1)$-arête connexe, pour $i = 1,...,p$.

Preuve. Notons par $ax \geqslant \alpha$ l'inégalité (3.13) induite par π sur G et soit $\mathcal{F} = \{x \in k\text{ECSP}(G) \mid ax = \alpha\}$. Supposons que la face $\mathcal{F}$ soit incluse dans une facette $\mathcal{F}'$ de $k\text{ECSP}(G)$ définie par une inégalité $bx \geqslant \beta$.
On montre que $b(e) = b(f)$, pour tout $e,f \in ([V_i,V_{i+1} \cup [V_{i+1},V_{i+2}])\backslash\{e_1,\ldots,e_l\}$, $i = 1,\ldots,p$ (modulo p). Soient f_1, f_2 deux arêtes quelconques de $[V_i,V_{i+1}]\backslash\{e_1,\ldots,e_l\}$ et g une arête de $[V_{i+1},V_{i+2}]\backslash\{e_1,\ldots,e_l\}$ pour un certain $i \in \{1,\ldots,p\}$. Comme $|[V_i,V_{i+1}]| \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, on peut choisir une numérotation des arêtes de $[V_i,V_{i+1}]$ de telle manière que $f_1 = e_{i,1}$, $f_2 = e_{i,\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ et $g = e_{i+1,1}$. Soient

$$\begin{aligned}
E_0^i =& \{e_{i,j} : j = 1,\ldots,\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1\} \cup (\bigcup_{l \neq i} \{e_{l,j} : j = 1,\ldots,\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil\}) \cup (E\backslash E_\pi),\\
E_1^i =& (E_0^i \cup \{f_2\})\backslash\{f_1\},\\
E_2^i =& (E_0^i \cup \{f_2\})\backslash\{g\}.
\end{aligned}$$

Les ensembles E_j^i, $j = 0,\ 1,\ 2$, induisent des sous-graphes k-arête connexes. Aussi, les vecteurs $x^{E_j^i}$, $j = 0,\ 1,\ 2$, vérifient $ax = \alpha$. Comme $\mathcal{F} \subset k\text{ECSP}(G)$, il en résulte que $b^T x^{E_j^i} = b_0$, $j = 0,\ 1,\ 2$. D'où $b(f_1) = b(f_2) = b(g)$. Puisque f_1, f_2, g sont des arêtes quelconques de $[V_i,V_{i+1}]\cup[V_{i+1},V_{i+2}]$, on en déduit que $b(e) = \rho$, pour tout $e \in [V_i,V_{i+1}]$, $i = 1,\ldots,p$, pour un certain scalaire $\rho \in \mathbb{R}$. Soit $e \in [V_s,V_t]$, avec $s,t \in \{1,\ldots,p\}$ et $t \notin \{s-1,s,s+1\}$, (modulo p). Sans perte de généralité, on peut supposer que $1 < s < t$. Considérons l'ensemble

$$E_3 = (E_0^1 \cup \{e\})\backslash\{e_{s,1}\},$$

qui induit un sous-graphe k-arête connexe de G. Puisque $x^{E_3} \in \mathcal{F} \subseteq k\text{ECSP}(G)$, on en déduit que $b^T x^{E_3} = b^T x^{E_0^1} = b_0$. D'où, $b(e) = b(e_{s,1})$, et par conséquent $b(e) = \rho$ pour tout $e \in E_\pi$. Maintenant considérons une arête $f_0 \in E\backslash E_\pi\backslash\{e_1,\ldots,e_l\}$. Soit $E_4 = E_0^1\backslash\{f_0\}$. Puisque $G[V_i]$ est $(k+1)$-arête connexe, il s'ensuit que le graphe induit par E_4 est k-arête connexe. Donc, $x^{E_4} \in k\text{ECSP}(G)$. D'où $b(f_0) = b^T x^{E_0^1} - b^T x^{E_4} = 0$. Ce qui implique que $b(e) = 0$, pour tout $e \in E\backslash E_\pi$. Ainsi, nous avons bien

$$\begin{aligned}
b(e) =& \rho \quad \forall e \in E_\pi,\\
b(e) =& 0 \quad \forall e \in E\backslash E_\pi.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que, pour une arête $e \in \{e_1,\ldots,e_l\}$, le coefficient $b(e)$ est égal à $\rho a(e)$. Soit $\overline{e} \in \{e_1,\ldots,e_l\}$ avec $\overline{e} = uv$. Soient P_1 et P_2 deux chemins sommet-disjoints reliant u et v dans $G_\pi\backslash\{e_1,\ldots,e_l\}$ et r la longueur d'un plus court chemin entre u et v dans $G_\pi\backslash\{e_1,\ldots,e_l\}$. Désignons par U et W les ensembles de sommets de V_π qui forment P_1 et P_2, respectivement. D'après le lemme 3.11, il existe au

moins $r-1$ arêtes $e_i \in E_\pi$ ayant chacune une extrémité dans U et l'autre dans W. Posons $v_{i_0} = u$ et soient $v_{i_0},...,v_{i_0+r-1}$ les extrémités des arêtes e_i qui sont dans W. Soient T_i un sous-ensemble de $[v_i,v_{i+1}]$ contenant exactement $\frac{k+1}{2}$ arêtes et T'_i un sous-ensemble de T_i contenant exactement $\frac{k-1}{2}$ arêtes. On définit la solution $x \in \mathbb{R}^{|E|}$ suivante:

$$x(e) = \begin{cases} 1 & \text{pour } e = e_i,\ i = 1,...,r-1, \\ 1 & \text{pour tout } e \in T'_{i_0+j},\ j = 0,...,r-1, \\ 1 & \text{pour tout } e \in T_i,\ i \in \{1,...,p\} \setminus \{i_0,...,i_0+r-1\} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La solution x induit un sous-graphe k-arête connexe de G et vérifie l'inégalité de SP-partition liftée à l'égalité. Soit $\tilde{e}_i$ une arête de T_i, $i \in \{1,...,p\} \setminus \{i_0,...,i_0+r-1\}$. Considérons maintenant la solution $x' \in \mathbb{R}^{|E|}$ telle que:

$$x'(e) = \begin{cases} 1 & \text{pour } e = \overline{e}, \\ 1 & \text{pour tout } e \in T_i \setminus \{\tilde{e}_i\},\ i \in \{1,...,p\} \setminus \{i_0,...,i_0+r-1\}, \\ 0 & \text{pour } e = \tilde{e}_i,\ i \in \{1,...,p\} \setminus \{i_0,...,i_0+r-1\}, \\ x(e) & \text{sinon.} \end{cases}$$

x' induit un sous-graphe k-arête connexe de G et satisfait l'inégalité de SP-partition liftée à l'égalité. On a donc $bx = bx' = \beta$. Par conséquent, $bx' = bx - \sum_{i=i_0-r}^{i_0-1} + b(\tilde{e}_i)b(\overline{e})$. Comme $b(\tilde{e}_i) = \rho$ pour tout $i \in \{1,...,p\} \setminus \{i_0,...,i_0+r-1\}$, on a $b(\overline{e}) = r\rho$.

Il s'ensuit que $b(e) = \rho a(e)$ pour tout $e \in \overline{E}$. Comme kECSP$(\overline{G})$ est de pleine dimension, $ax \geqslant \alpha$ définit une facette de kECSP$(\overline{G})$. □

3.3 Conclusion

Nous avons étudié spécifiquement les contraintes de SP-partition dans les cas où $r(v) = k$ pour tout sommet v, k étant un entier impair supérieur ou égal à 3. Nous avons alors établi des conditions nécessaires et suffisantes pour que ces contraintes définissent des facettes lorsque G est outerplanaire. Nous avons également montré que les contraintes de SP-partition, induites par des partitions π, ne peuvent pas définir des facettes du problème lorsque le graphe induite par π est série-parallèle et non outerplanaire.

Dans le cas des graphes quelconques, nous avons donné des conditions suffisantes pour qu'elles induisent des facettes de kECSP(G). Enfin, nous avons présenté une procédure de lifting pour les contraintes de SP-partition qui permet de les étendre aux cas où le graphe induit par la partition n'est pas série-parallèle.

Les contraintes de SP-partition sont très importante pour le problème du sous-graphe k-arête connexe. En effet, s'il l'on connaît un algorithme efficace pour séparer les contraintes de SP-partition dans les graphes série-parallèles, alors on sait résoudre de manière efficace le problème dans cette classe de graphe en utilisant un algorithme de coupe. Le problème de séparation des contraintes de SP-partition est résolu de manière combinatoire dans le chapitre suivant dans lequel on s'intéresse plus généralement à séparer les contraintes de partition de la forme $x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant ap+b$, où a et b sont deux réels tels que $b > -a$, pour des graphes $\{1,2\}$-décomposables.

Chapitre 4

Séparation des contraintes de partition

L'objectif de ce chapitre est de présenter un algorithme de séparation pour les inégalités dites de partition dans les graphes décomposables par des 1- et 2-sommets d'articulation. Soient $G = (V,E)$ un graphe et $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$ une partition de V. Soient a et b deux scalaires et $x \in \mathbb{R}_+^E$. Une *inégalité de partition* est une inégalité de la forme :

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant ap + b \tag{4.1}$$

De telles inégalités sont souvent rencontrées dans les problèmes de conception de réseaux fiables [11, 60]. Nous nous intéressons principalement dans ce chapitre au *problème de séparation* de ces contraintes. Ce problème consiste, étant donné un vecteur x associé aux arêtes, à déterminer si x vérifie toutes les contraintes de partition et sinon, à en trouver une qui soit violée par x.

Après une présentation des méthodes existantes pour séparer les contraintes de partition, nous donnons un algorithme combinatoire de séparation dans le cas où $a > 0$, $b > -a$ et le graphe peut être décomposé par des 1- et 2-sommets d'articulation. Enfin, nous discutons de quelques applications de notre algorithme.

4.1 Introduction

4.1.1 État de l'art

Le problème de séparation des contraintes de partition a été étudié dans le cas où $a \leqslant 0$ et $b \leqslant -a$.

Lorsque $a \leqslant 0$, le problème revient à chercher une coupe minimum. En effet, soit $G = (V,E)$, un graphe, soit $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ de V et soit x un vecteur associé aux arêtes E. Supposons que la contrainte de partition associée à π est violée par x. Donc $x(\delta(V_1, \ldots, V_p)) < ap + b$. Soit $\pi' = (V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$. On a

$$\begin{aligned} x(\delta(V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)) &= x(\delta(V_1, V_2, V_3, \ldots, V_p)) - x[V_1, V_2], \\ &< ap + b - x[V_1, V_2], \\ &= a(p-1) + b + a - x[V_1, V_2], \\ &< a(p-1) + b. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que a et $(-x[V_1, V_2])$ sont deux nombres négatifs. Donc la partition obtenue en considérant V_1 et V_2 ensemble est également violée. En répétant cette procédure on obtient $x(\delta(V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_{p-1}, V_p)) < 2a + b$. Ce qui implique que la coupe $\delta(V_p)$ est violée. Donc le problème de séparation des inégalités de partition dans ce cas se ramène au calcul d'une coupe de poids minimum (avec des poids positifs), et peut donc être résolu en temps polynomial à l'aide de techniques de flots.

Lorsque $a > 0$, on différencie alors deux cas selon que b soit strictement inférieur à a ou non. Lorsque $b \leqslant -a$, Cunningham [22] a montré que le problème se ramène à $|E|$ problèmes de coupes minimum. Puis Barahona [8] a amélioré ce résultat en montrant que le problème se ramène à $|V|$ problèmes de coupe minimum. Baïou et al. [11] ont considéré le cas où $a > 0$ et $b > -a$. Ils ont montré que le problème se ramène dans ce cas à la résolution d'une fonction sous-modulaire. Cet algorithme a ensuite été étendu pour la séparation des contraintes de partition dans le cas où $r(v) \in \{1,2\}$, $\forall v \in V$, par Kerivin et Mahjoub [61] et Barahona et Kerivin [9].

C'est ce cas, c'est-à-dire $a > 0$ et $b > -a$, que nous allons traiter dans ce chapitre.

Nous allons donner pour ce cas un algorithme combinatoire, dans les graphes décomposables par des 1- et 2-sommets d'articulation, n'utilisant pas les fonctions sous-modulaires.

Nous supposons donc tout au long de ce chapitre que les contraintes de partition sont telles que $a > 0$ et $b > -a$.

4.1.2 Décomposition de graphe

On appelle *1-sommet d'articulation* dans un graphe, un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes. Soit $G = (V,E)$ un graphe. Soient $G_1 = (V_1,E_1)$ et $G_2 = (V_2,E_2)$ tels que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et $V_1 \cap V_2 = \{v\}$ (cf figure 4.1). Alors v est un sommet d'articulation. On dira alors que G est *1-décomposable* et que G_1 et G_2 sont les blocs de G. On dira aussi que G est une *1-somme* de G_1 et G_2.

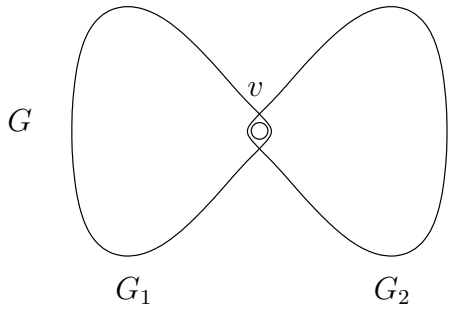

FIG. 4.1 – *Graphe 1-décomposable*

On appelle *2-sommets d'articulation* un ensemble de deux sommets dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe. Considérons un graphe $G = (V,E)$ qui se décompose en $G_1 = (U_1,E_1)$ et $G_2 = (U_2,E_2)$ avec $U_1 \cap U_2 = \{v_1,v_2\}$, $U_1 \cup U_2 = V$ et $E_1 \cup E_2 = E$. Soit $\{v_1,v_2\}$ un ensemble tel que $U_1 \neq \{v_1,v_2\} \neq U_2$ et $\{v_1,v_2\} = U_1 \cap U_2$. Alors $\{v_1,v_2\}$ est un 2-sommet d'articulation. De même, G est alors *2-décomposable*. On dit aussi que c'est une *2-somme* de G_1 et G_2, qui sont les *blocs* de G (cf figure 4.2).

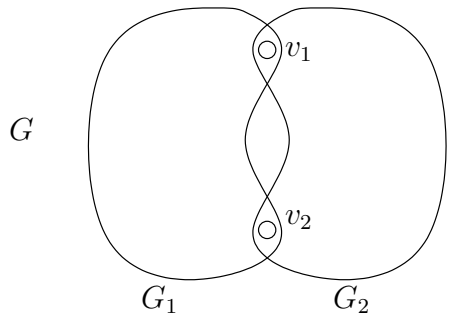

FIG. 4.2 – *Graphe 2-décomposable*

Étant donné un ensemble de graphes $\mathcal{H}$, on dira que G est *récursivement 1-décomposable* (resp. *récursivement 2-décomposable*) par rapport à $\mathcal{H}$ si G peut être récursivement décomposé par des 1-sommets (resp 2-sommets) d'articulation de telle manière que les blocs résultants, c'est-à-dire les graphes non-décomposables, soient dans $\mathcal{H}$.

On dira également que G est *récursivement* $\{1,2\}$*-décomposable* par rapport à $\mathcal{H}$ si G peut être récursivement décomposé par des 1- et des 2-sommets d'articulation de telle manière que les blocs résultants soient dans $\mathcal{H}$.

Les graphes de $\mathcal{H}$ seront aussi nommés, pour coller davantage à l'intuition, des *pièces*.

On dira (en référence à Diestel [28]) que la classe $\mathcal{H}$ est la *base d'homéomorphisme* de la décomposition récursive de G (qui est a priori non unique).

Un graphe G est dit *sans mineur* H si H ne peut pas être obtenu à partir de G en supprimant et en contractant des arêtes de G. On dit qu'un graphe sans mineur H est *maximal* si l'ajout de n'importe quelle arête fait apparaître un sous-graphe ayant comme mineur H. Le tableau 4.1 donne des exemples de graphes maximaux définis par leurs mineurs exclus, qui sont récursivement 1-décomposables, 2-décomposables ou encore $\{1,2\}$-décomposables. La première colonne donne le mineur exclus, puis la deuxième colonne, les pièces.

Mineurs Exclus	Bases d'homomorphismes	Type de décomposition
K_3	K_2	1-décomposable
C_4	K_2,K_3	1-décomposable
K_4^-	K_2 et les cycles	1-décomposable
K_4	K_3	2-décomposable
les graphes finis 3-connexes	K_3	2-décomposable
C_5	K_2,K_3,K_4	{1,2}-décomposable
$C_5 + e$	K_2,K_3,K_4 et les cycles C_n,$n \geqslant 5$	{1,2}-décomposable
$K_{2,3}$	K_2,K_3,K_4	{1,2}-décomposable
$K_{1,1,3}$	K_2,K_3,$K_{3,3}$, les prismes et les roues	{1,2}-décomposable
$K_{1,2,2}$	K_3,K_4	2-décomposable
K_5^{-2}	K_2,K_3,$K_{3,3}$, les prismes et les roues	{1,2}-décomposable
K_5^-	K_3,$K_{3,3}$, les prismes et les roues	2-décomposable

TAB. 4.1 – *Graphes maximaux récursivement décomposables*

4.1.3 2-réduction de graphes

Étant donnés un ensemble de graphes $\mathcal{H}$ et un graphe G, si G est 2-décomposable en G_1 et G_2, et si $G_1 \in \mathcal{H}$, on appelle *2-réduction* de G la transformation de G en G'_2

où G'_2 est le graphe G_2 auquel on ajoute une arête entre le 2-sommets d'articulation associé à la 2-décomposition (voir figure 4.3).

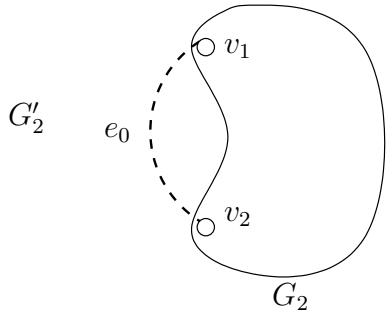

FIG. 4.3 – *2-réduction*

4.2 Séparation des contraintes de partition dans les graphes {1,2}-décomposables

Dans cette section, nous présentons un algorithme combinatoire pour la séparation des contraintes de partition dans les graphes récursivement {1,2}-décomposables. Nous commençons par donner quelques notations.

4.2.1 Notations

Considérons un graphe $G = (V,E)$ récursivement 2-décomposable par rapport à un ensemble de graphe(s) $\mathcal{H}$. Supposons que G ne soit pas une pièce. Il existe donc dans G deux sous-graphes, disons G_1 et G_2, tels que G se décompose selon une 2-décomposition en G_1, G_2 et $G_1 \in \mathcal{H}$. Soit v_1 et v_2 le 2-sommet d'articulation de cette décomposition. On notera G'_1 le graphe obtenu à partir de G_1 par contraction des sommets v_1 et v_2. On notera également e_0 l'arête qui est ajoutée au graphe G_2 pour obtenir G'_2.

Considérons le problème suivant appelé problème élémentaire.

Problème 4.1. *Problème élémentaire*
Données : un graphe G_1, un vecteur x associé aux arêtes de G_1, un réel a strictement

positif.
Le problème : Déterminer une partition des sommets de G_1 en une famille de sous-ensembles $S_1,\ldots,S_k$, $k \geqslant 2$, telle que la quantité $x(\delta(S_1,\ldots,S_k)) - a(k-2)$ soit minimum.

Nous ferons dans la suite l'abus de langage suivant en disant, étant donné un vecteur x, qu'une partition est violée alors que c'est la contrainte de partition associée à la partition considérée qui est violée par x. Nous dirons également qu'une partition $(V_1^*,\ldots,V_{p^*}^*)$ d'un ensemble W est *la plus violée* lorsque

$$x(\delta(V_1^*,\ldots,V_{p^*}^*)) - ap^* - b = \min_{(V_1,\ldots,V_p) \text{ partitions de } W} (x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) - ap - b).$$

Nous donnons dans cette section certaines propriétés des contraintes de partition. Celles-ci seront utilisées pour montrer comment la séparation des contraintes de partition dans un graphe 1-décomposable en blocs eux-même {1,2}-décomposables par rapport à un ensemble de graphes $\mathcal{H}$, peut être ramenée à la séparation dans les graphes de $\mathcal{H}$. Dans un premier temps nous allons voir les propriétés liées à la 1-décomposition. Puis nous verrons celles liées à la 2-décomposition.

4.2.2 Contraintes de partition et décomposition de graphes

Lemme 4.2. *Soit $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$ une partition violée. Supposons que π est parmi les partitions les plus violées. Supposons également que V_1 est un sommet d'articulation dans G_π. Supposons que $V_2,\ldots,V_r$, $2 \leqslant r < p$, sont tels qu'il n'existe pas d'arête reliant un sommet V_i à un sommet V_j, où $i \in \{2,\ldots,r\}$ et $j \in \{r+1,\ldots,p\}$. Soit $\pi_1 = (V_1 \cup (\bigcup_{i=r+1}^{p} V_i), V_2,\ldots,V_r)$ et $\pi_2 = (V_1 \cup (\bigcup_{i=2}^{r} V_i), V_{r+1},\ldots,V_p)$. Alors π_1 et π_2 sont des partitions violées.*

Preuve. Remarquons que π_1 et π_2 ont pour cardinalité respective r et $p-r+1$. Supposons dans un premier temps qu'aucune des deux partitions n'est violée. On a donc

$$x(\delta(\pi_1)) \geqslant ar + b,$$
$$x(\delta(\pi_2)) \geqslant a(p-r+1) + b.$$

Comme $\delta(\pi) = \delta(\pi_1) + \delta(\pi_2)$ et $\delta(\pi_1) \cap \delta(\pi_2) = \emptyset$, on obtient en sommant ces inégalités

$$\begin{aligned} x(\delta(\pi)) &\geqslant a(r + p - r + 1) + 2b, \\ &= a(p+1) + 2b. \end{aligned}$$

Comme π est violée, il s'ensuit que $ap + b > a(p+1) + 2b$. Donc $b < -a$, une contradiction.
Maintenant supposons qu'exactement une des partitions, disons π_1, est violée. Alors $x(\delta(\pi_2)) \geqslant a(p - r + 1) + b$. Comme π est parmi les partitions les plus violées, on a aussi $x(\delta(\pi_1)) - ar - b \geqslant x(\delta(\pi)) - ap - b$. En sommant ces deux dernières inégalités, on obtient $a \leqslant -b$, induisant de nouveau une contradiction. □

Lemme 4.3. *Si $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ est une partition parmi les plus violées de G, alors $G(V_i)$ est connexe pour $i = 1, \ldots, p$.*

Preuve. Supposons par exemple que $G(V_1)$ ne soit pas connexe et soit (V_1^1, V_1^2) une partition de V_1 telle que $[V_1^1, V_1^2] = \emptyset$. Soit $\pi' = (V'_1, \ldots, V'_{p+1})$ la partition définie par

$$\begin{cases} V'_i = V_1^i & \text{pour } i = 1,2, \\ V'_i = V_{i-1} & \text{pour } i = 3, \ldots, p+1. \end{cases}$$

Remarquons que $\delta(\pi') = \delta(\pi)$. Donc $x(\delta(\pi')) - a(p+1) - b < x(\delta(\pi)) - ap - b$, ce qui contredit le fait que π est une partition parmi les plus violées. □

Lemme 4.4. *Soit $G = (V,E)$ un graphe. Supposons que G contient un sommet d'articulation v_0. Soient $G_1 = (U_1, E_1)$ et $G_2 = (U_2, E_2)$ tels que $U_1 \cap U_2 = \{v_0\}$, $U_1 \cup U_2 = V$, $E_1 \cup E_2 = E$ et $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. S'il y a une partition violée dans G, alors au moins un des graphes G_1 et G_2 contient une partition violée.*

Preuve. Soit $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ une des partitions les plus violées de G. D'après le lemme 4.3, $G(V_i)$ est connexe pour $i = 1, \ldots, p$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $v_0 \in V_1$. Alors pour $i = 2, \ldots, p$, V_i est contenu soit dans U_1, soit dans U_2. On distingue deux cas. Soit les autres ensembles de la partition sont, pour une partie, dans U_1, et pour l'autre, dans U_2. Soit ils se trouvent tous dans le même ensemble U_i, $i = 1$ ou 2. Supposons que $V_2, \ldots, V_r \subseteq U_1$ et $V_{r+1}, \ldots, V_p \subseteq U_2$, pour un entier $r \geqslant 2$, $r < p$. Comme V_1 est un sommet d'articulation du graphe G_π, d'après le lemme 4.2,

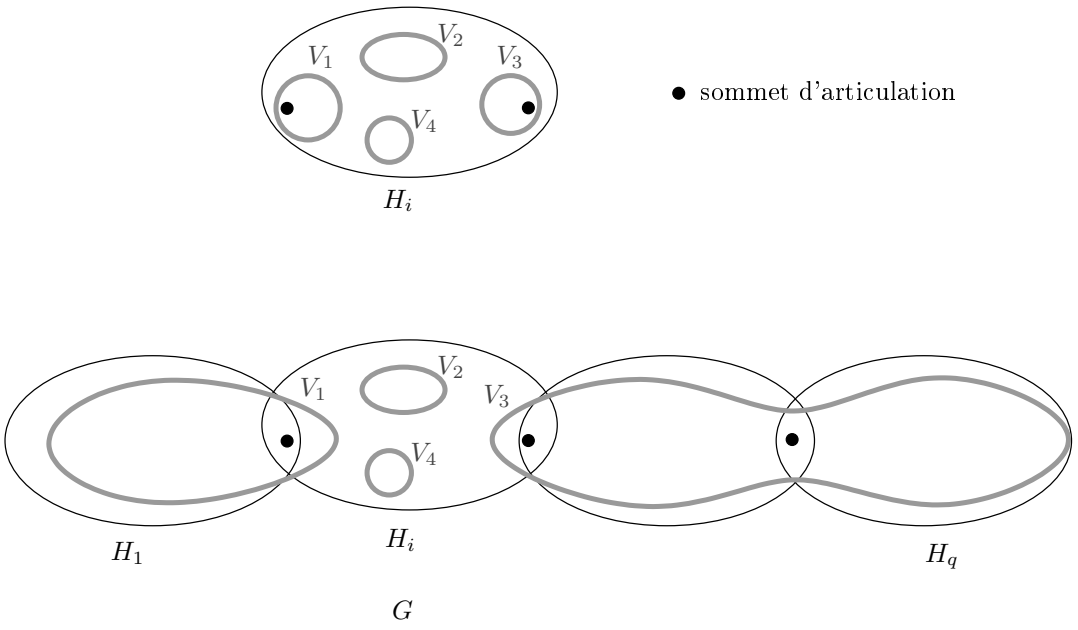

FIG. 4.4 – *Extension de la partition*

les partitions $((V_1 \backslash U_2) \cup \{v_0\}, V_2, \ldots, V_r)$ de G_1 et $((V_1 \backslash U_1) \cup \{v_0\}, V_{r+1}, \ldots, V_p)$ de G_2 sont violées.
Maintenant supposons que tous les éléments de $V_2, \ldots, V_p$ sont par exemple inclus dans U_1. Cela signifie que $U_2 \subseteq V_1$. Considérons la partition $\pi_1 = ((V_1 \backslash U_2) \cup \{v_0\}, V_2, \ldots, V_p)$ de G_1. Comme $x(\delta(\pi)) = x(\delta(\pi_1))$ et π est violée, π_1 est également violée. □

Lemme 4.5. *Si G se décompose par des sommets d'articulation en $H_1, \ldots, H_q$ et si un certain H_i, où $i \in \{1, \ldots, q\}$, contient une partition violée, alors G contient également une partition violée.*

Preuve. La figure 4.2.2 illustre comment construire une partition violée sur G à partir d'un partition violée sur un sous-graphe H_i. La partition obtenue a la même cardinalité que la partition de départ. De plus, ce sont les même arêtes qui interviennent dans la contrainte. La partition obtenu est donc violée. □

Remarque 4.6. Losque l'on sépare les contrainte de partition, on recherche les arêtes qui interviennent dans la contrainte. On n'a donc pas besoin de connaître la répartition des sommets dans les ensembles de la partition.

Nous allons maintenant nous intéresser à la 2-décomposition. Les lemmes suivant donnent des propriétés des partitons sur un graphe auquel on applique une réduction.

Soit $\mathcal{H}$ un ensemble de graphes. Considérons un graphe $G = (V,E)$ qui se décompose en $G_1 = (U_1,E_1)$ et $G_2 = (U_2,E_2)$ avec $U_1 \cap U_2 = \{v_1,v_2\}$, $U_1 \cup U_2 = V$, $E_1 \cup E_2 = E$ et supposons que $G_1 \in \mathcal{H}$. Soit $G'_1 = (U'_1,E'_1)$ le graphe obtenu à partir de G_1 en contractant $\{v_1,v_2\}$ et soit u le sommet obtenu par cette contraction.

Lemme 4.7. *Soit $(S_1,\ldots,S_k)$ une partition de U'_1. Supposons que $u \in S_1$. Soit $\overline{S}_1 = (S_1\backslash\{u\}) \cup U_2 \cup \{v_1,v_2\}$. Si $(S_1,\ldots,S_k)$ est violée dans G'_1, alors $(\overline{S}_1,S_2,\ldots,S_k)$ est violée.*

Preuve. Ce sont deux partitions de même valeur et de même cardinalité, donc si l'une est violée, l'autre l'est aussi. □

Dans ce qui suit, nous supposons que G'_1 ne contient pas de partition violée. Nous allons montrer que dans ce cas, trouver une partition violée dans G, s'il y en a une, revient à déterminer une partition violée dans le graphe $G'_2 = (V'_2,E'_2)$. On rappelle que G'_2 est le graphe obtenu à partir de G_2 en ajoutant une arête e_0 entre v_1 et v_2. Soit $\pi_1^* = (S_1,\ldots,S_{p_1^*})$ une partition solution du problème élémentaire 4.1. Soit x'_2 le vecteur de $\mathbb{R}^{E'_2}$ donné par

$$x'_2(e) = \begin{cases} x(e) & \text{si } e \in E_2, \\ \sigma & \text{si } e = e_0. \end{cases}$$

où $\sigma = x(\delta(\pi_1^*)) - a(p_1^* - 2)$.

Lemme 4.8. *Si $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$ est une des partitions les plus violées de G, alors $x([V_i,V_j]) \leqslant a$ pour $i,j = 1,\ldots,p$, $i \neq j$.*

Preuve. Supposons par exemple que $x([V_1,V_2]) > a$. Soit $\pi' = (V'_1,\ldots,V'_{p-1})$ la partition donnée par

$$\begin{cases} V'_1 = V_1 \cup V_2, \\ V'_i = V_{i+1}, \qquad \text{pour } i = 2,\ldots,p-1. \end{cases}$$

Nous avons:

$$\begin{aligned} a(p-1)+b-x(\delta(\pi')) &= a(p-1)+b-x(\delta(\pi))+x([V_1,V_2]) \\ &> a(p-1)+b-x(\delta(\pi))+a \\ &= ap+b-x(\delta(\pi)). \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que π est une des partitions les plus violées. □

Lemme 4.9. $\sigma > 0$

Preuve. Par hypothèse, il n'y a pas de partition violée dans G'_1. Notons par S_1 (resp. S_2) l'élément de π_1^* contenant v_1 (resp. v_2). Notons qu'on peut avoir $S_1 = S_2$. Soit π'_1 la partition obtenue à partir de π_1^* en remplaçant S_1 et S_2 par $((S_1 \cup S_2)\backslash\{v_1,v_2\}) \cup \{u\}$. π'_1 est une partition de G'_1. Elle n'est donc pas violée par la restriction de x sur G'_1. Notons par p'_1 la cardinalité de π'_1. Si v_1 et v_2 appartiennent au même ensemble de π_1^*, c'est-à-dire $S_1 = S_2$, alors $x(\delta(\pi'_1)) = x(\delta(\pi_1^*))$ et $p'_1 = p_1^*$. Cela implique que

$$\begin{aligned} \sigma &= x(\delta(\pi_1^*)) - a(p_1^* - 2) \\ &= x(\delta(\pi'_1)) - a(p'_1 - 2) \\ &\geqslant ap'_1 + b - a(p'_1 - 2) \\ &\geqslant b + 2a \\ &> a \\ &> 0. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que v_1 et v_2 appartiennent à des ensembles différents de π_1^*, c'est-à-dire $S_1 \neq S_2$. On a donc

$$\begin{aligned} \sigma &= x(\delta(\pi_1^*)) - a(p_1^* - 2) \\ &= x(\delta(\pi'_1)) + x[S_1,S_2] - a(p'_1 + 1 - 2) \\ &\geqslant ap' + b + x[S_1,S_2] - a(p'_1 - 1) \\ &= b + x[S_1,S_2] + a \\ &> x[S_1,S_2] \\ &> 0. \end{aligned}$$

□

Lemme 4.10. *S'il existe une partition violée dans G avec au moins trois ensembles, alors il existe une partition violée dans G'_2 par rapport à x'_2.*

Preuve. Soit $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$, $p \geqslant 3$, une partition parmi les plus violées dans G. Considérons d'abord le cas où v_1 et v_2 sont dans le même élément de π, disons V_1. Comme G'_1 ne contient pas de partition violée, au moins un des éléments de π intersecte U_2. Comme π est une partition parmi les plus violées, d'après le lemme 4.3, $G(V_i)$ est connexe pour $i = 1,\ldots,p$. Cela implique que pour $i = 2,\ldots,p$, soit $V_i \subset U_1$, soit $V_i \subset U_2$. On peut donc supposer que, pour un certain entier q tel que $2 \leqslant q \leqslant p$, $V_2,\ldots,V_q$ sont les éléments de π dans U_2. Nous allons montrer que $p = q$. En effet, sinon V_1 serait un sommet d'articulation dans G'_π, et d'après le lemme 4.2, la partition $((\cup_{i=1}^{q} V_i),V_{q+1},\ldots,V_p)$ serait violée. Comme l'ensemble d'arêtes induit par cette partition est dans G_1 et $v_1,v_2 \in V_1$, on en déduit que G'_1 contient une partition violée, une contradiction.
Par conséquent, $q = p$, c'est-à-dire $U_1 \subseteq V_1$. Soit $\pi_2 = (V'_1,V_2,\ldots,V_q)$ où $V'_1 = V_1 \cap U_2$. Notons que π_2 est une partition de G'_2. Comme cette partition a le même nombre d'éléments et le même poids que π, il en résulte que π_2 est violée.
Maintenant supposons que les sommets v_1 et v_2 sont dans deux éléments différents. Supposons par exemple que $v_1 \in V_1$ et $v_2 \in V_2$. Notons par $V_3,\ldots,V_q$ les éléments de π dans G_1 et $V_{q+1},\ldots,V_p$ ceux dans G_2. Rappelons que les graphes induits par les V_i sont connexes. Les ensembles V_1 et V_2 ont une partie dans G_1 et une partie dans G_2. Soit $p_2 = p - q + 2$. Considérons la partition $\pi_2 = (V'_1,V'_2,\ldots,V'_{p_2})$ de U_2 donnée par

$$\begin{cases} V'_1 = (V_1 \backslash U_1) \cup \{v_1\}, \\ V'_2 = (V_2 \backslash U_1) \cup \{v_2\}, \\ V'_i = V_{q+i-2}, & \text{pour } i = 3,\ldots,p_2. \end{cases}$$

On définit également $\overline{V}_i = V_i \cap U_1$, pour $i = 1,2$. On a

$$\begin{aligned} x'_2(\delta(\pi_2)) &= x(\delta(\pi)) - x(\delta(\overline{V}_1,\overline{V}_2,\ldots,V_q)) + x'_2(e_0), \\ &< ap + b - x(\delta(\overline{V}_1,\overline{V}_2,\ldots,V_q)) + x(\delta(\pi_1^*)) - a(p_1^* - 2), \\ &= a(p_2 + q - 2) + b - x(\delta(\overline{V}_1,\overline{V}_2,\ldots,V_q)) + x(\delta(\pi_1^*)) - a(p_1^* - 2). \end{aligned}$$

Comme π_1^* est une partition de G_1 qui est solution du problème élémentaire (4.1), nous avons $aq - x(\delta(\overline{V}_1,\overline{V}_2,\ldots,V_q)) \leqslant ap_1^* - x(\delta(\pi_1^*))$. Donc

$$\begin{aligned} x'_2(\delta(\pi_2)) &< a(p_2 - 2) + b + (ap_1^* - x(\delta(\pi_1^*))) + x(\delta(\pi_1^*)) - a(p_1^* - 2), \\ &= ap_2 + b. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité de partition associée à π_2 dans G'_2 est violée par rapport à x'_2. □

Maintenant nous allons voir que si G'_2 contient une partition violée par rapport à x'_2 alors G contient également une partition violée par rapport à x.

Lemme 4.11. *Si π'_2 est une partition parmi les plus violées dans G'_2 et $e_0 \in \delta(\pi'_2)$, alors π^*_1 est violée. De plus, v_1 et v_2 appartiennent à deux ensembles distincts de π^*_1.*

Preuve. Supposons que π^*_1 n'est pas violée. Alors

$$x(\delta(\pi^*_1)) \geqslant ap^*_1 + b. \tag{4.2}$$

Comme π'_2 est parmi les plus violées dans G'_2, d'après le lemme 4.8, on a $a \geqslant x'_2(e_0) = x(\delta(\pi^*_1)) - a(p^*_1 - 2)$. Donc $x(\delta(\pi^*_1)) \leqslant a(p^*_1 - 1)$. En sommant cette inégalité et (4.2), nous obtenons $b \leqslant -a$, une contradiction.
Donc π^*_1 est violée. De plus, comme G'_1 ne contient pas de partition violée, alors v_1 et v_2 sont dans des ensembles différents de la partition π^*_1. □

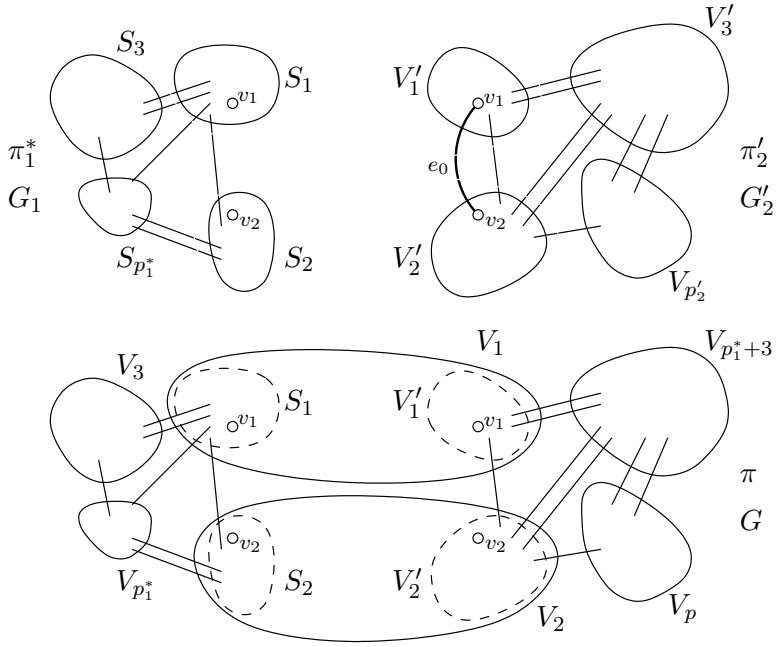

FIG. 4.5 – *Construction de π lorsque $e_0 \in \delta(\pi'_2)$*

Soit $\pi'_2 = (V'_1, \ldots, V'_{p_2})$ une partition parmi les plus violées dans G'_2 par rapport à x'_2 telle que $e_0 \in \delta(\pi'_2)$. Supposons par exemple que e_0 est entre V'_1 et V'_2. Alors par le lemme 4.11, π^*_1 est violée et v_1 et v_2 appartiennent à des ensembles différents de π^*_1,

disons S_1 et S_2, respectivement.

Lemme 4.12. *Soit $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$, avec $p = p_1^* + p_2 - 2$, la partition de G telle que*

$$\begin{cases} V_1 = V_1' \cup S_1^*, & \\ V_2 = V_2' \cup S_2^*, & \\ V_i = S_i^*, & \text{pour } i = 3, \ldots, p_1^*, \\ V_i = V'_{i-p_1^*}, & \text{pour } i = p_1^* + 3, \ldots, p_1^* + p_2 \end{cases}$$

(voir la figure 4.5 pour une illustration). Alors π est violée.

Preuve. Notons que $x(\delta(\pi)) = x(\delta(\pi_1^*)) + x(\delta(\pi_2'))$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} ap - x(\delta(\pi)) &= a(p_1^* + p_2 - 2) - x(\delta(\pi_1^*)) - x(\delta(\pi_2')) \\ &= ap_2 - \sigma - x(\delta(\pi_2')) \\ &= ap_2 - x_2'(\delta(\pi_2')). \end{aligned}$$

Comme π_2' est violée, π l'est aussi. □

Lemme 4.13. *Si $\pi_2' = (V_1', \ldots, V_{p_2}')$ est violée par rapport à x_2' et si v_1 et v_2 sont dans le même élément de π_2', disons V_1', alors la partition $\pi = (V_1' \cup U_1, V_2', \ldots, V_{p_2}')$ est une partition violée dans G.*

Preuve. Les partitions π et π_2' sont de même valeur et de même cardinalité. Comme π_2' est violée, π l'est aussi. □

Remarque 4.14. La partition π, qu'elle soit définie selon le lemme 4.12 ou le lemme 4.13, vérifie $ap - x(\delta(\pi)) = ap_2 - x_2'(\delta(\pi_2'))$.

Lemme 4.15. *Supposons que $\pi_2' = (V_1', \ldots, V_{p_2'}')$ est une partition parmi les plus violées dans G_2' par rapport à x_2'. Soit π la partition introduite dans le lemme 4.12 (resp. lemme 4.13) si $e \in \delta(\pi_2')$ (resp. $e \notin \delta(\pi_2')$). Alors π est une partition parmi les plus violées dans G.*

Preuve. Soit $\hat{\pi} = (\hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_{\hat{p}})$ une partition de G. Soient $\hat{\pi}_1$ et $\hat{\pi}_2$ les restrictions de $\hat{\pi}$ sur G_1 et G_2. Notons par $\hat{p_1}$ et $\hat{p_2}$ respectivement les nombres d'éléments de $\hat{\pi}_1$ et $\hat{\pi}_2$. Dans la suite, nous discuterons de trois cas.

Cas 1. Il existe $i \in \{1,\ldots,\hat{p}\}$ tel que $U_1 \subseteq \hat{V}_i$.
Donc

$$\begin{aligned} a\hat{p} - x(\delta(\hat{\pi})) &= a\hat{p}_2 - x(\delta(\hat{\pi}_2)) \\ &\leqslant ap_2 - x'_2(\delta(\pi'_2)) \\ &= ap - x(\delta(\pi)). \end{aligned}$$

La deuxième inégalité vient du fait que π'_2 fait partie des partitions les plus violées dans G'_2.
Cas 2. Il n'existe pas d'indice $i \in \{1,\ldots,\hat{p}\}$ tel que $U_1 \subseteq \hat{V}_i$, mais v_1 et v_2 sont dans le même élément de $\hat{\pi}$. Comme G'_1 ne contient pas de partition violée, on en déduit que $x(\delta(\hat{\pi}_1)) \geqslant a\hat{p}_1 + b$. Cela implique que

$$\begin{aligned} a\hat{p} - x(\delta(\hat{\pi})) &= a(\hat{p}_1 + \hat{p}_2 - 1) - x(\delta(\hat{\pi}_1)) - x(\delta(\hat{\pi}_2)) \\ &\leqslant a(\hat{p}_1 + \hat{p}_2 - 1) - a\hat{p}_1 - b - x(\delta(\hat{\pi}_2)) \\ &= a\hat{p}_2 - a - b - x(\delta(\hat{\pi}_2)) \\ &\leqslant a\hat{p}_2 - x(\delta(\hat{\pi}_2)) \\ &\leqslant a\hat{p}_2 - x'_2(\delta(\pi'_2)) \\ &= ap - x(\delta(\pi)). \end{aligned}$$

La troisième inégalité vient du fait que $-b < a$.
Cas 3. v_1 et v_2 sont dans deux éléments différents de $\hat{\pi}$. Dans ce cas, $\hat{p} = \hat{p_1} + \hat{p_2} - 2$. Nous avons

$$\begin{aligned} a\hat{p} - x(\delta(\hat{\pi})) &= a(\hat{p}_1 + \hat{p}_2 - 2) - x(\delta(\hat{\pi}_1)) - x(\delta(\hat{\pi}_2)) \\ &\leqslant a(p^*_1 + \hat{p}_2 - 2) - x(\delta(\pi^*_1)) - x(\delta(\hat{\pi}_2)) \\ &= a\hat{p}_2 - x'_2(e_0) - x(\delta(\hat{\pi}_2)). \end{aligned}$$

La deuxième ligne vient du fait que π^*_1 est la partition la plus violée de G_1. $x(\delta(\hat{\pi}_2)) + x'_2(e_0)$ est la valeur de la multicoupe induite par $\hat{\pi}_2$ sur G'_2. Comme π'_2 est une des partitions les plus violées de G'_2, il s'ensuit que $a\hat{p}_2 - x(\delta(\hat{\pi}_2)) \leqslant ap_2 - x'_2(\delta(\pi'_2)) = ap - x(\delta(\pi))$.
Dans tous les cas, nous obtenons $a\hat{p} - x(\delta(\hat{\pi})) \leqslant ap - x(\delta(\pi))$, ce qui signifie que $\hat{\pi}$ n'est pas plus violée que π. Comme $\hat{\pi}$ est une partition arbitraire, cela implique que π est une partition parmi les plus violées dans G. □

D'après le lemme 4.12, si l'on connaît une partition parmi les plus violées dans G'_2 par rapport à x'_2, telle que v_1 et v_2 appartiennnent à des éléments différents de la partition, alors on peut étendre cette partition à une partition parmi les plus violées de G.

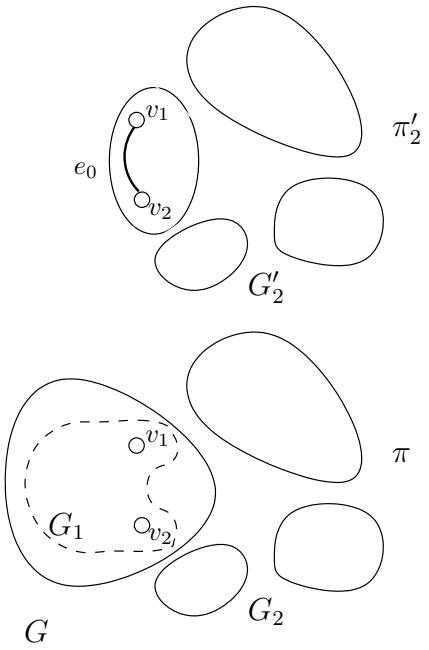

FIG. 4.6 – *Construction de π lorsque v_1,$v_2 \in V'_1$*

Nous déduisons des lemmes précédents, le théorème suivant.

Théorème 4.16. *Il existe une partition violée dans G si et seulement s'il existe une partition violée dans G'_2 par rapport à x'_2.*

Preuve. Supposons que G contient une partition violée. Alors, d'après le lemme 4.10, G'_2 contient une partition violée. Inversement, supposons que G'_2 contient une partition violée. Soit π'_2 la partition la plus violée de G'_2. Soit π la partition de G introduite dans le lemme 4.12 (resp. lemme 4.13) si $e \in \delta(\pi'_2)$ (resp. $e \notin \delta(\pi'_2)$). Alors, d'après 4.15, π est une partition parmi les plus violées dans G. De plus, d'après la remarque 4.14, π est bien violée. □

Ces résultats nous conduisent au théorème suivant.

Théorème 4.17. *Si G est récursivement $\{1,2\}$-décomposable par rapport à un ensemble*

de graphes $\mathcal{H}$ et si le problème de séparation des contraintes de partition peut être résolu en un temps polynomial dans les pièces, alors il peut être résolu en temps polynomial dans G.

Enfin ces résultats nous permettent de donner un algorithme de séparation des contraintes de partition que nous présentons dans la section suivante.

4.2.3 Algorithme de séparation

L'algorithme 1 permet de séparer les contraintes de partition sur un graphe récursivement {1,2}-décomposable par rapport à un ensemble de graphes $\mathcal{H}$ sur lesquels le problème de séparation peut être résolu en temps polynomial. Il consiste dans un premier temps à décomposer le graphe selon les sommets d'articulation. Ensuite, pour chacun des sous-graphes, on applique des réductions jusqu'à ce que l'on trouve une pièce qui contienne une partition violée ou que l'on ait vérifié qu'il n'y a pas de pièce contenant une partition violée.

Algorithme 1 Algorithme de séparation des contraintes de partition sur un graphe {1,2}-décomposable

Données : $G = (V,E)$ un graphe récursivement {1,2}-décomposable par rapport à un ensemble $\mathcal{H}$, des réels a et b, $a > 0$ et $b > -a$, un vecteur x associé à E.

Sortie : Une partition dont la contrainte de partition associée ($x(\delta(\pi)) \geqslant ap + b$) est violée, s'il en existe une.

Décomposer le graphe selon les sommets d'articulation en $(H_1, \ldots, H_q)$, $q \in \mathbb{N}$.

pour $i = 1$ à q **faire**

si $H_i \in \mathcal{H}$ **alors**

Résoudre le problème de séparation par rapport à la réduction de x sur H_i.

si il existe une partition violé sur H_i **alors**

Étendre la partition π_i en une partition π sur G (cf lemme 4.5)

Renvoyer π. STOP.

sinon

Considérer G_1 et G_2 deux sous-graphes de H_i tels que H_i est la 2-somme de G_1 et G_2, et $G_1 \in \mathcal{H}$

si G'_1 (le graphe obtenu à partir de G_1 en contractant les 2 sommets d'articulation de la 2-somme) contient une partition violée **alors**

Étendre cette partition violée en une partition π_i sur H_i (cf lemme 4.7)

Étendre la partition π_i en une partition π sur G (cf lemme 4.5)

Renvoyer la partition π. STOP.

sinon

Réduire H_i en G'_2 (le graphe obtenu à partir de G_2 en ajoutant une arête entre les 2-sommets d'articulation)

Appliquer l'algorithme 1 sur G'_2

si il existe une partition π'_2 violée sur G'_2 **alors**

Étendre la partition π'_2 en une partition π_i sur H_i (cf lemme 4.15)

Étendre la partition π_i en une partition π sur G (cf lemme 4.5) et

Renvoyer π. STOP.

4.2.4 Complexité

Dans l'algorithme 1, les boucles se réalisent toutes un nombre de fois borné par le nombre de sommets. Par hypothèse, nous considérons des graphes dont on connaît les pièces, celles-ci étant de taille bornée ou de structure telle qu'il existe un algorithme polynomial pour séparer les contraintes de partition. Nous donnons des exemples de graphes qui vérifient cette propriété dans la section 4.3. Soit $\mathcal{C}$ la complexité de l'algorithme de séparation des contraintes de partition sur les pièces. La complexité de l'algorithme est alors en $O(\mathcal{C}|V|)$. Si les pièces sont des graphes de taille fixe, la séparation sur ces graphes se fait en un temps borné. C'est le cas des pièces des graphes série-parallèles. La complexité globale de l'algorithme est donc alors en $O(|V|)$. C'est une amélioration notable dans les graphes série-parallèles par rapport à l'algorithme de Baïou et al [11] dont la complexité est en $O(|V|^3)$ fois la complexité d'un problème de st-coupe minimum.

4.3 Applications

Dans cette partie, nous allons donner quelques applications de l'algorithme présenté dans la section précédente dans la classe des graphes décomposables par des 1 et 2-sommets d'articulation.

4.3.1 Décomposition simpliciale

La décomposition des graphes a été largement étudiée [80, 28]. En particulier, Diestel [28] a étudié la décomposition de graphes où les pièces sont des graphes complets. Nous présentons dans la suite cette décomposition.

Soient G un graphe, σ et λ deux entiers et B_λ, $\lambda < \sigma$, un sous-graphe induit de G. La famille $F = (B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$ est appelée *décomposition simpliciale de* G si :

- (S1) $G = \cup_\lambda B_\lambda$,
- (S2) $S_\mu = (\cup_{\lambda<\mu} B_\lambda) \cap B_\mu$ est un graphe complet, pour tout $\mu > 0$ et $\mu < \sigma$,
- (S3) S_μ ne contient ni B_μ, ni B_λ, quels que soient μ et λ tels que $0 \leqslant \lambda < \mu < \sigma$.

On appelle *ensembles d'articulation* les sous-graphes S_μ définis ci-dessus. Les sous-graphes B_λ sont les *facteurs* de la décomposition.

Théorème 4.18. *(Halin [28])*
Tout les graphes ne contenant pas de graphe complet infini, admettent une décomposition simpliciale en des pièces.

La décomposition simpliciale est utilisée pour prouver une assertion sur un graphe G en montrant que l'assertion est vérifée sur ses facteurs, puis en étend le résultat au graphe G. Ainsi, dans le cas des graphes sans mineur égal à K_5, le graphe complet sur 5 sommets, cette approche permet de montrer que ces graphes sont au plus 4-coloriables. Et plus généralement, si $(B_\lambda)_{\lambda<\sigma}$ est une décomposition simpliciale de G telle que les B_λ sont k-coloriables, alors G est k-coloriable.

4.3.1.1 Exemples de graphes avec mineurs exclus

Wagner a caractérisé la classe des graphes sans mineur égal à K_5 en termes de décomposition simpliciale. Des théorèmes similaires caractérisent d'autres classes de graphes de la même manière. Le tableau 4.1 montre celles qui se décomposent avec des ensembles d'articulation ayant un ou deux sommets. Par exemple, la classe des graphes sans mineur égal à C_4, le cercle sur 4 sommets, admet une décomposition simpliciale et ses pièces sont des K_2, c'est-à-dire des arêtes, et des k_3, c'est-à-dire des triangles. Ce sont bien, dans tous les cas, des graphes sur lesquels l'algorithme s'applique.

Une autre classe particulière sur laquelle la décomposition simpliciale s'applique est la classe des k-arbres. Un *k-arbre* est un graphe obtenu à partir de K_k en ajoutant récursivement un nouveau sommet formant un graphe complet d'ordre $k+1$ avec k sommets déjà présents. Les k-arbres admettent une décomposition en graphes complets. Les pièces sont des K_{k+1} et les ensembles d'articulation sont des K_k. Les graphes série-parallèles sont des 2-arbres partiels, c'est-à-dire des 2-arbres auxquels il manque un certain nombre d'arêtes. L'algorithme donné dans la section précédente s'applique aux 2-arbres.

4.3.2 Séparation des contraintes de SP-partition

Considérons le problème kECSP, k étant un entier impair tel que $k \geqslant 3$, qui a été introduit dans le chapitre précédent. Rappelons que pour ce problème, les inégalités suivantes dites de SP-partition

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant \frac{k+1}{2}p - 1 \tag{4.3}$$

sont valides si le graphe induit par la partition est série-parallèle. Ces inégalités sont de la forme $x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant ap+b$ avec $b > -a$. Ici $a = \frac{k+1}{2}$ et $b = -1$. Si l'on considère des graphes série-parallèles, toute partition induit alors une contrainte de SP-partition valide. Or, si G est série-parallèle et 2-sommet-connexe, alors G est 2-décomposable. On peut considérer comme pièces les chemins sur 3 sommets et des triangles; ceux-ci pouvant comporter des arêtes multiples (voir figure 4.7).

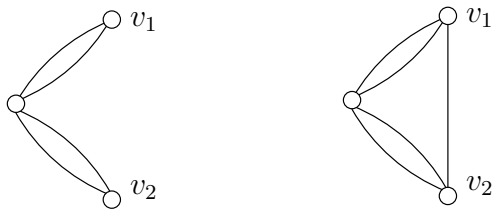

FIG. 4.7 – *Pièces des graphes série-parallèles*

Comme le polytope des solutions de kECSP est donné par les contraintes de SP-partition et par les contraintes triviales dans les graphes série-parallèles [27], nous obtenons par conséquent un algorithme de coupe polynomial pour résoudre le problème kECSP dans cette classe de graphes.

4.3.3 Séparation des contraintes de partition et de F-partition

Il existe d'autres inégalités de partition valides pour le kECSP pour lesquelles on peut utiliser notre algorithme de séparation. Par contre, ces inégalités n'étant pas exactement de la forme $x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant ap + b$, l'algorithme est alors utilisé soit comme heuristique, soit pour séparer des cas particuliers. On peut citer par exemple les contraintes de partition introduites par Grötschel et al. [48] qui s'écrivent de la manière suivante:

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant \lceil \frac{kp}{2} \rceil.$$

La séparation de ces contraintes est un problème NP-difficile. On peut par contre utiliser notre algorithme pour séparer les contraintes

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant \frac{k}{2}p.$$

et obtenir ainsi une séparation approchée.

Une autre classe d'inégalités valides pour kECSP est la classe des inégalité de F-partition ([68] [58]). Soient $(V_0,V_1,\ldots,V_p)$ une partition de V et F un ensemble d'arêtes de $\delta(V_0)$ tel que $|F| = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Ces inégalités s'écrivent

$$x(\delta(V_0,V_1,\ldots,V_p)\backslash F) \geqslant p-k.$$

La séparation de ces contraintes pour des graphes quelconques est une question ouverte. Si les ensembles de la partition $(V_0,V_1,\ldots,V_p)$ sont des singletons, alors on peut séparer ces inégalités par l'algorithme de Padberg et Rao. Si l'on fixe $|F|$, on peut alors utiliser notre algorithme pour séparer ces inégalités dans les graphes $\{1,2\}$-décomposables.

4.3.4 Heuristiques pour des graphes généraux

Notre algorithme peut également être utilisé comme heuristique pour des graphes quelconques. En effet, dans les graphes quelconques, on peut dans un premier temps utiliser un algorithme approché pour déterminer un sous-graphe décomposable approprié sur lequel on peut dans un deuxième temps appliquer notre algorithme. Ainsi cet algorithme peut être utilisé pour séparer de manière heuristique les contraintes de SP-partitions liftées pour le problème kECSP, avec $k \geqslant 3$. Soit $G = (V,E)$ un graphe série-parallèle et $\overline{G} = (V,\overline{E})$ obtenu à partir de G en ajoutant les arêtes $\{e_1,\ldots,e_t\}$. La contrainte de SP-partition liftée s'écrit :

$$\sum_{e\in E} x(e) + \sum_{j=1,\ldots,t} a(e_j)x(e_j) \geqslant \frac{k+1}{2}p - 1,$$

où $a(e_j)$ est la longueur du plus court chemin entre les sommets extrêmités de e_j dans G.

Pour obtenir un sous-graphe série-parallèle, on peut utiliser par exemple l'algorithme de Calinescu et al [15], ou encore celui de Cai [14].

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme de séparation combinatoire pour les contraintes de partition de la forme $x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant ap + b$ avec a et b deux scalaires tels que $a > 0$ et $b > -a$ quand le graphe peut être décomposé par des 1 et 2-sommets d'articulation. Lorsque les pièces sont de taille bornée, l'algorithme est linéaire. C'est le cas par exemple des graphes série-parallèles. On a aussi discuté de certaines applications dans des classes de graphes et pour certaines familles de contraintes valides pour le kECSP, $k \geqslant 3$. L'algorithme a été testé pour la séparation des contraintes de SP-partition dans les graphes série-parallèles. Les résultats sont décrits dans le chapitre 7.

Chapitre 5

Polytope des sous-graphes $(1,k)$-arête connexes

Ce chapitre porte sur le problème SNDP(G,r) dans le cas où les sommets $v \in V$ ont un type de connexité $r(v)$ égal à 1 ou k, où k est un entier fixé $\geqslant 3$. Nous considérons le polytope donné par les contraintes triviales et les contraintes de SP-partition dans ce cas. Nous montrons que ce polytope est entier pour la classe des graphes série-parallèles et sans toupie; les graphes sans toupie étant une sous-classe des graphes outerplanaires. Cela généralise les travaux de Didi Biha et al [26] qui portaient sur le cas où $r(v) \in \{1,2\}^V$. La première section de ce chapitre est une présentation des motivations pour une telle étude. Ensuite nous introduisons les graphes série-parallèles et sans toupie. Dans la section 5.3, nous donnons des propriétés structurales des solutions du problème et dans la section 5.4, nous examinons les graphes qui vérifient les conditions de fiabilité mais qui ne sont pas 2-sommet connexes, c'est-à-dire les graphes qui possèdent au moins un sommet dont la suppression déconnecte le graphe. Nous montrons que pour ces graphes, il suffit de considérer indépendamment le polytope dans chaque partie 2-sommet connexe du graphe. Enfin, et comme conséquence, nous présentons dans la dernière section de nouvelles inégalités valides, les inégalités de toupie, qui définissent des facettes du polytope SNDP(G,r) lorsque G est quelconque.

5.1 Introduction

Le problème du sous-graphe (1,k)-arête connexe est un cas particulier du problème de conception de réseau fiable présenté dans le chapitre 2. Dans ce problème, on considère que les nœuds du réseau cœur doivent être reliés entre eux de manière fiable, alors que les autres nœuds qui ne sont que des points d'accès au réseau, doivent simplement être reliés au réseau, sans que l'on ait à s'assurer qu'il existe des liaisons de secours en cas de panne.

Ce problème s'énonce de la manière suivante. Étant donnés un entier k, supérieur ou égal à 2, et un graphe $G = (V,E)$ auquel on associe, pour chaque arête e, un coût $c(e)$ positif, et pour chaque sommet v, un type $r(v) \in \{1,k\}$, trouver un sous-graphe de coût minimum tel que pour chaque paire de sommets (u,v), il y ait au moins $min(r(u),r(v))$ chemins arêtes-disjoints.

Rappelons les notations suivantes introduites au chapitre 2.

$$\begin{aligned} r(W) &= max\{r(v) : v \in W\} \\ r(s,t) &= min(r(s),r(t)) \\ con(W) &= max\{r(s,t) : s \in W, t \in \overline{W}\} \\ &= min(r(W),r(\overline{W})) \end{aligned}$$

Le problème du sous-graphe (1,k)-arête connexe peut être formulé de la manière suivante.

$$\begin{array}{lll} & \min cx & \\ \text{s.c.} & x(\delta(W)) \geqslant con(W) & \text{pour tout } W \subset V, W \neq \emptyset \\ & x(e) \geqslant 0 & \text{pour tout } e \in E \\ & x(e) \leqslant 1 & \text{pour tout } e \in E \\ & x \in \{0,1\}^E & \end{array} \tag{5.1}$$

Les contraintes (5.1) expriment deux configurations possibles illustrées dans la figure 5.1. Dans un cas, les ensembles W et $V \backslash W$ contiennent tous deux au moins un sommet de type k ; la contrainte de coupe impose la présence d'au moins k arêtes entre ces ensembles. Dans l'autre cas, un des ensembles au moins ne contient que des sommets de type 1 ; la contrainte de coupe impose alors la présence d'au moins une arête entre

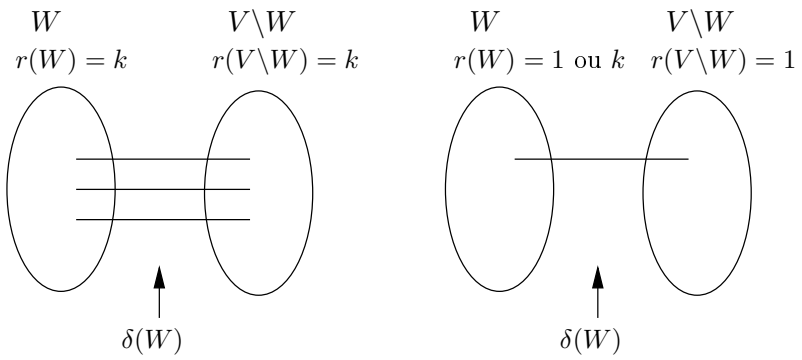

FIG. 5.1 – *Coupes serrées (pour $k = 3$)*

les ensembles. On peut aussi écrire ce problème de manière plus détaillée de la façon suivante.

$$
\begin{array}{lll}
 & \min cx & \\
\text{s.c.} & x(\delta(W)) \geqslant k & \text{s'il existe un sommet de type } k \text{ dans } W \text{ et un sommet} \\
 & & \text{de type } k \text{ dans } V\backslash W \ . \\
 & x(\delta(W)) \geqslant 1 & \text{sinon} \\
 & x(e) \geqslant 0 & \text{pour tout } e \in E \\
 & x(e) \leqslant 1 & \text{pour tout } e \in E \\
 & x \in \{0,1\}^E &
\end{array}
$$

Soit $(V_1, \ldots, V_p)$ une partition des sommets du graphe. Soit p_t le nombre d'ensembles V_i, $i = 1, \ldots, p$, de la partition tels que $con(V_i) = t$, pour $t \in \{1,k\}$. Si $p_k = 0$, on dit que la partition est de *type 1*. Sinon, on dit qu'elle est de *type k*. L'inégalité de SP-partition pour le problème du sous-graphe $(1,k)$-arête connexe induite par la partition $(V_1, \ldots, V_p)$ s'écrit

$$
x(\delta(V_1, \ldots, V_p) \geqslant \begin{cases} p - 1 & \text{si } p_k = 0 \\ p + \frac{k-1}{2} p_k - 1 & \text{si } k \text{ impair,} \\ p + (\frac{k}{2} - 1) p_k & \text{si } p_k > 0 \text{ et } k \text{ pair.} \end{cases} \tag{5.2}
$$

L'inégalité de coupe est un cas particulier de cette classe d'inégalités pour une partition ayant deux éléments. Soit CPP(G,r) (pour Cut Partition Polytope) le polytope donné

par les contraintes triviales, les contraintes de coupe et les contraintes de SP-partition.

Étant donnée $(U_1,\ldots,U_p)$ une partition d'un ensemble de sommets $W \subseteq V$, on note par $[U_1,\ldots,U_p]$ l'ensemble des arêtes ayant leurs extrémités dans deux ensembles différents de la partition.

5.2 Les graphes série-parallèles sans toupie

Rappelons que les graphes série-parallèles sont les graphes sans mineur égal à K_4, le graphe complet sur 4 sommets. Selon une définition équivalente, ce sont les graphes obtenus à partir d'une forêt (c'est-à-dire un graphe sans cycle) par duplication et subdivision d'arêtes. *Une toupie* est un graphe ayant 5 sommets, disons $\{v_0,v_1,\ldots,v_4\}$, et $3k+3$ arêtes, $k \geqslant 2$, tel que :

- $r(v_0) = 1$ et $r(v_i) = k$, pour $i = 1,2,3$,
- $|[v_0,v_i]| = 1$ et $|[v_4,v_i]| = k$ pour $i = 1,2,3$,
- $|[v_i,v_j]| = \emptyset$ pour $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$.

Il existe donc pour chaque valeur de k exactement deux toupies (aux homéomorphies près). La figure 5.2 illustre les toupies existantes pour $k = 2$, et la figure 5.3, celles pour k quelconque.

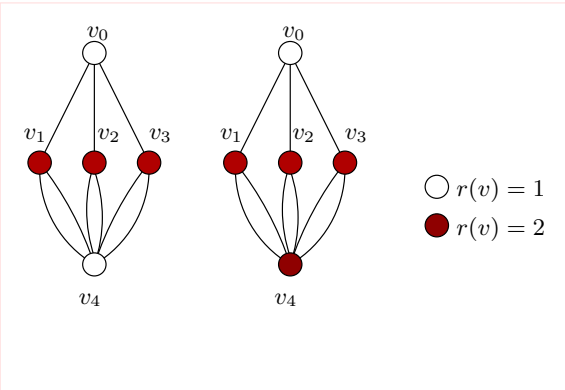

FIG. 5.2 – *Toupies lorsque* $k = 2$

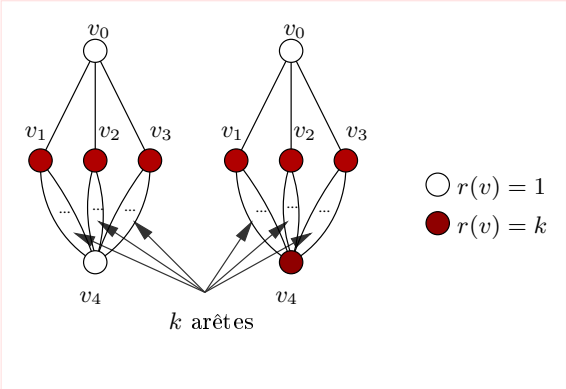

FIG. 5.3 – *Toupies pour k quelconque*

Soit F un sous-ensemble d'arêtes de E. On note $V(F)$ l'ensemble des sommets qui sont incidents aux arêtes de F et G/F, le graphe obtenu à partir de G en contractant F. Soit w le sommet obtenu par la contraction. Le vecteur de connexité r_F, associé aux sommets $V' = (V \backslash V(F)) \cup \{w\}$ est défini par

$$r_F = \begin{cases} r(u) & \text{si } u \in V' \backslash \{w\}, \\ con(V(F)) & \text{si } u = w. \end{cases}$$

(G,r) est dit *sans toupie*, si l'on n'obtient pas de toupie par contraction.

On peut remarquer que les toupies sont des $K_{2,3}$ avec un certain nombre d'arêtes doubles. Ainsi les graphes série-parallèles et sans toupie sont des graphes qui ne sont contractibles ni à K_4, ni à $K_{2,3}$. Un tel graphe est outerplanaire. Donc les graphes outerplanaires constituent une sous-classe des graphes série-parallèles, sans toupie.

5.3 Propriétés structurales du polytope CPP(G,r)

Dans cette section, nous donnons certaines propriétés structurales des solutions du problème du $\{1,k\}$-arête connexe. Ces propriétés sont ensuite utilisées dans la section 5.5 pour caractériser le polytope du problème dans la classe des graphes série-parallèles et sans toupie. Soit x un point de CPP(G,r).

Proposition 5.1. *Soit $F \subset E$ un ensemble d'arêtes qui induit un graphe connexe. Alors $x' \in \mathbb{R}^{|E \backslash F|}$, la restriction de x sur $E \backslash F$, est un point de CPP(G/F,r_F).*

Preuve. Notons con_F la connexité sur G/F (con_F est défini par rapport au type de connexite r_F). Soit w le sommet obtenu par la contraction de F. Soit W un ensemble de sommets de G/F. On peut supposer sans perte de généralité que $w \in W$. Notons $\overline{W}$ l'ensemble de sommets complémentaire à W, et $\hat{W} = (W \backslash \{w\}) \cup V(F)$ l'ensemble de sommets de G obtenu à partir de W en décontractant F. La valeur $x'(\delta(W))$ dans G/F est égale à $x(\delta(\hat{W}))$. Comme x est un point de CPP(G,r), on a $x(\delta(\hat{W})) \geqslant con(\hat{W})$. Donc $x'(\delta(W)) \geqslant con(\hat{W})$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} con_F(W) &= min(r_F(W),r_F(\overline{W})) \\ &= min(r_F(W),r(\overline{W})) \\ &= min(max(r_F(W\backslash\{w\}),r_F(w))),r(\overline{W})) \\ &= min(max(r(W\backslash V(F)),con(V(F)),r(\overline{W})) \\ &= min(con(\hat{W}),r(\overline{W})) \\ &= con(\hat{W}) \end{aligned}$$

Ainsi on a $x'(\delta(W)) \geqslant con(W)$ pour tout ensemble $W \subset V\backslash V(F)$.
Soit $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ une partition de G/F. On peut supposer sans perte de généralité que $w \in V_1$. Avec le même raisonnement que précédemment, on trouve que $con(V_1) = con((V_1\backslash\{w\}) \cup V(F))$. Soit $\hat{\pi} = ((V_1\backslash\{w\}) \cup V(F), V_2, \ldots, V_p)$. Puisque x est un point de CPP(G,r), on a

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p) \geqslant \begin{cases} p-1 & \text{si } p_k = 0 \\ p + \frac{k-1}{2}p_k - 1 & \text{si } k \text{ impair,} \\ p + (\frac{k}{2} - 1)p_k & \text{si } p_k > 0 \text{ et } k \text{ pair.} \end{cases}$$

où p est le nombre d'ensembles de la partition et p_k, le nombre d'ensembles de type k. Comme les arêtes de la multicoupe $\delta(\pi)$ sont les même que celles de $\delta(\hat{\pi})$, on a $x(\delta(\pi)) = x(\delta(\hat{\pi}))$. Par ailleurs, p est également le nombre d'ensembles de π et p_k, son nombre d'ensembles de type k. Par conséquent,

$$x'(\delta(V_1,\ldots,V_p) \geqslant \begin{cases} p-1 & \text{si } p_k = 0 \\ p + \frac{k-1}{2}p_k - 1 & \text{si } k \text{ impair,} \\ p + (\frac{k}{2} - 1)p_k & \text{si } p_k > 0 \text{ et } k \text{ pair.} \end{cases}$$

Donc les contraintes de SP-partition sont bien vérifiées par x' pour toute partition de G/F. Donc $x' \in$CPP(G/F,r_F). □

Proposition 5.2. *Soit $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$ une partition serrée pour x. Supposons que $p \geqslant 3$. Considérons $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $i < j$. Soit $\pi' = (V'_1,\ldots,V'_{p-1})$ la partition définie par*

$$\begin{aligned} V'_t &= V_t \qquad \text{pour } t = 1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,j-1,\\ V'_i &= V_i \cup V_j,\\ V'_t &= V_{t+1} \qquad \text{pour } t = j,\ldots,p-1. \end{aligned}$$

1) Si π est de type 1, alors $x[V_i,V_j] \leqslant 1$.

2) Si π est de type k et π' est de type 1, alors $x[V_i,V_j] \leqslant k$.

3) Si π est de type k et π' est de type k, alors

3.1) si $r(V_i) = r(V_j) = k$, alors $x[V_i,V_j] \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$,

3.2) sinon $x[V_i,V_j] \leqslant 1$.

De plus, si les inégalités précédentes sont vérifiées à l'égalité, alors π' est également serrée pour x.

Preuve. (1) Supposons que π est de type 1. Alors π' est aussi de type 1. Nous avons

$$\begin{aligned} x[V_i,V_j] &= x(\delta(\pi)) - x(\delta(\pi'))\\ &= (p-1) - x(\delta(\pi'))\\ &\leqslant (p-1) - ((p-1)-1)\\ &\leqslant 1 \end{aligned}$$

De plus, si $x[V_i,V_j] = 1$, cela implique que $x(\delta(\pi')) = (p-1)-1$, et donc π' est serrée.

(2) Supposons que π est de type k, et π' est de type 1. On distingue deux cas selon que k soit pair ou impair. Si k est impair, on a

$$\begin{aligned} x[V_i,V_j] &= x(\delta(\pi)) - x(\delta(\pi'))\\ &\leqslant (p + \frac{k-1}{2}p_k - 1) - (p-2) \end{aligned}$$

Or, avec cette configuration, $p_k = 2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} x[V_i,V_j] &\leqslant p + \frac{k-1}{2}2 - 1 - p + 2\\ &\leqslant k. \end{aligned}$$

Si k est pair, alors

$$\begin{aligned} x[V_i,V_j] &= x(\delta(\pi)) - x(\delta(\pi')) \\ &\leqslant (p + (\frac{k}{2} - 1)p_k - (p-2) \\ &\leqslant p + \frac{k}{2}2 - 2 - p + 2 \\ &\leqslant k. \end{aligned}$$

De plus, si $x[V_i,V_j] = k$, cela implique que $x(\delta(\pi')) = (p + \frac{k-1}{2}2 - 1) - k = p - 2$ (resp. $x(\delta(\pi')) = (p + \frac{k}{2}2 - 2) - k = p - 2$) lorsque k est impair (lorsque k est pair), et donc π' est serrée.

(3) Supposons que π et π' sont tous deux de type k.
(3.1) Supposons que $r(V_i) = r(V_j) = k$. Si k est impair, alors

$$\begin{aligned} x[V_i,V_j] &= x(\delta(\pi)) - x(\delta(\pi')) \\ &\leqslant (p + \frac{k-1}{2}p_k - 1) - ((p-1) + \frac{k-1}{2}(p_k - 1) - 1) \\ &\leqslant \frac{k+1}{2}. \end{aligned}$$

Si k est pair, alors

$$\begin{aligned} x[V_i,V_j] &\leqslant (p + (\frac{k}{2} - 1)p_k) - ((p-1) + (\frac{k}{2} - 1)(p_k - 1)) \\ &\leqslant \frac{k}{2}. \end{aligned}$$

De plus, si $x[V_i,V_j] = \frac{k+1}{2}$ et k impair (resp. $x[V_i,V_j] = \frac{k}{2}$ et k pair), cela implique que $x(\delta(\pi')) = (p + \frac{k-1}{2}p_k - 1) - \frac{k+1}{2} = (p-1) + \frac{k-1}{2}(p_k - 1) - 1$ (resp. $x(\delta(\pi')) = (p + (\frac{k}{2} - 1)p_k - \frac{k}{2} = (p-1) + (\frac{k}{2} - 1)(p_k - 1)$), et donc π' est serrée.

(3.2) Supposons que $r(V_i) = 1$ ou $r(V_j) = 1$. Si k est impair, on a

$$\begin{aligned} x[V_i,V_j] &\leqslant (p + \frac{k-1}{2}p_k - 1) - ((p-1) + \frac{k-1}{2}p_k - 1) \\ &\leqslant 1. \end{aligned}$$

Si π est pair, on a alors

$$\begin{aligned} x[V_i,V_j] &\leqslant (p + (\frac{k}{2} - 1)p_k) - ((p-1) + (\frac{k}{2} - 1)p_k) \\ &\leqslant 1. \end{aligned}$$

De plus, si $x[V_i,V_j] = 1$ et k impair (resp. k pair), cela implique que $x(\delta(\pi')) = (p + \frac{k-1}{2}p_k - 1) - 1 = (p-1) + \frac{k-1}{2}p_k - 1$ (resp. $x(\delta(\pi')) = (p + (\frac{k}{2}-1)p_k - 1 = (p-1) + (\frac{k}{2}-1)p_k$), et donc π' est serrée. □

Nous avons aussi la proposition suivante. Elle est donnée sans preuve puisque sa preuve est similaire à celle de la proposition 5.2.

Proposition 5.3. *Soit $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$ une partition serrée par x. Soit (V_i^1,V_i^2) une partition de V_i pour un certain $i \in \{1,\ldots,p\}$. Soit $\pi' = (V'_1,\ldots,V'_{p+1})$ la partition définie par*

$$\begin{aligned} &V'_t = V_t \qquad \text{pour } t = 1,\ldots,i-1,\\ &V'_i = V_i^1,\\ &V'_{i+1} = V_i^2,\\ &V'_t = V_{t-1} \quad \text{pour } t = i+2,\ldots,p+1. \end{aligned}$$

1) Si π est de type 1 et π' est de type 1,
alors $x[V_i^1,V_i^2] \geqslant 1$.
2) Si π est de type est 1 et π' est de type est k,
alors $x[V_i^1,V_i^2] \geqslant k$.
3) Si π est de type k et $r(V_i^1) = r(V_i^2) = k$,
alors $x[V_i^1,V_i^2] \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$.
4) Si π est de type k et $r(V_i^1) = 1$ ou $r(V_i^2) = 1$,
alors $x[V_i^1,V_i^2] \geqslant 1$.

De plus, si ces inégalités sont vérifiées à l'égalité, alors π' est aussi serrée. □

Comme conséquence de la proposition 5.3, nous avons la proposition suivante.

Proposition 5.4. *Les graphes $G(V_i)$ sont connexes.*

On peut généraliser la proposition 5.2 à la réunion de plus de deux ensembles. De même, on peut généraliser la proposition 5.3 à la subdivision en plus de deux ensembles.

Proposition 5.5. *Soit $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$ une partition de V serrée pour x. Soient deux indices i et j dans $\{1,\ldots,p\}$ tels que $|V_i| \geqslant 2$ et $|V_j| \geqslant 2$. Soient $W \subset V_i$ et $(V_j^1,\ldots,V_j^q)$*

une partition de V_j, $q \geqslant 2$. *Soit* $\pi' = (V'_1,\ldots,V'_{p'})$, *avec* $p' = p+q-1$, *la partition définie par*

$$\begin{array}{lll} V'_t & = V_t & t \leqslant i-1, \\ V'_i & = V_i \backslash W, & \\ V'_t & = V_t & t = i+1,\ldots,j-1, \\ V'_j & = V_j^1 \cup W, & \\ V'_{t+j} & = V_j^{t+1} & t = 1,\ldots,q-1, \\ V'_{t+q-1} & = V_t & t = j+1,\ldots,p. \end{array}$$

1) Si π *et* π' *sont de type 1, on a*

$$x[V_j^1,\ldots,V_j^q] \geqslant q-1+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W].$$

2) Si π *est de type 1 et* π' *est de type* k *avec* p'_k *le nombre d'ensembles de type* k *dans* π', *alors on a*

$$x[V_j^1,\ldots,V_j^q] \geqslant \begin{cases} q+\frac{k-1}{2}p'_k-1+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W] & \text{si } k \text{ est impair,} \\ q+(\frac{k}{2}-1)p'_k+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W] & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases}$$

3) Si π *est de type* k *et* π' *est de type 1, on a , quelle que soit la parité de* k,

$$x[V_j^1,\ldots,V_j^q] \geqslant q-k+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W].$$

4) Si π *et* π' *sont de type* k, *en notant* $p_k^j = max(|\{con(V_j^t)=k,\, t=1,\ldots,q\}|-1,0)$, *le nombre d'ensembles supplémentaires de type* k *obtenus par le partitionnement de* V_j *et*

$$\alpha = \begin{cases} 1 & si\ r(W)=r(V_i\backslash W)=k\ et\ r(V_j^1)=1, \\ -1 & si\ r(W)=r(V_j^1)=k\ et\ r(V_i\backslash W)=1, \\ 0 & sinon, \end{cases}$$

alors on a

$$x[v_j^1,\ldots,V_j^q] \geqslant \begin{cases} q-1+\frac{k-1}{2}(p_k^j+\alpha)+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W] & \text{si } k \text{ impair,} \\ q-1+(\frac{k}{2}-1)(p_k^j+\alpha)+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W] & \text{si } k \text{ pair.} \end{cases}$$

Preuve. (1) Supposons que π et π' sont de type 1. Donc on a $x(\delta(\pi)) \geqslant p-1$ et $x(\delta(\pi')) \geqslant p+q-1-1 = p+q-2$. Or par définition de π', $x(\delta(\pi')) = x(\delta(\pi)) + x[V_j^1,\ldots,V_j^q] - x[W,V_j^1] + x[W,V_i\backslash W]$. Donc

$$\begin{aligned} x[V_j^1,\ldots,V_j^q] &= x(\delta(\pi')) - x(\delta(\pi)) + x[W,V_j^1] - x[W,V_i\backslash W] \\ &\geqslant p+q-2-(p-1-x[W,V_j^1]+x[W,V_i\backslash W]) \\ &\geqslant q-1+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W]. \end{aligned}$$

(2) Supposons que π est de type 1 et π' de type k. Dans le cas où k est impair on a $x(\delta(\pi')) \geqslant (p+q-1) + \frac{k-1}{2}p'_k - 1 = p+q-2+\frac{k-1}{2}p'_k$.

$$\begin{aligned} x[V_j^1,\ldots,V_j^q] &= x(\delta(\pi')) - x(\delta(\pi)) + x[W,V_j^1] - x[W,V_i\backslash W] \\ &\geqslant p+q-2+\frac{k-1}{2}p'_k-(p-1)+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W] \\ &\geqslant q+\frac{k-1}{2}p'_k-1+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W]. \end{aligned}$$

Maintenant, considérons le cas où k est pair. On a $x(\delta(\pi')) \geqslant (p+q-1)+(\frac{k}{2}-1)p'_k$. D'où

$$\begin{aligned} x[V_j^1,\ldots,V_j^q] &\geqslant (p+q-1)+(\frac{k}{2}-1)p'_k-(p-1)+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W] \\ &\geqslant q+(\frac{k}{2}-1)p'_k+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W]. \end{aligned}$$

(3) Supposons que π est de type k et π' est de type 1. Cela signifie que les sommets de type k sont dans W et V_j^1 et que $p_k = 2$. On a donc dans le cas k impair (le cas k pair est similaire)

$$\begin{aligned} x[V_j^1,\ldots,V_j^q] &\geqslant (p+q-1)-1-(p+\frac{k-1}{2}2-1-x[W,V_j^1]+x[W,V_i\backslash W]) \\ &\geqslant q-k+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W]. \end{aligned}$$

(4) Supposons que π et π' sont de type k. Alors p'_k prend trois valeurs différentes selon la connexité de W, celle de $V_i\backslash W$ et celle de V_j^1.

$$p'_k = \begin{cases} p_k + p_k^j + 1 & \text{si } r(W) = r(V_i\backslash W) = k \text{ et } r(V_j^1) = 1, \\ p_k + p_k^j - 1 & \text{si } r(W) = r(V_j^1) = k \text{ et } r(V_i\backslash W) = 1, \\ p_k + p_k^j & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, pour calculer le nombre d'éléments de type k dans π', il faut ajouter le nombre d'éléments de type k dans π au nombre d'éléments de type k dans la partition de V_j, et soustraire 1 dans le cas où V_j est de type k pour ne pas compter cet ensemble deux fois. De plus, le fait de soustraire l'ensemble W à l'ensemble V_i et de mettre ensemble les ensembles W et V_j^1 nécessite de considérer certains cas. Si $r(W) = r(V_i \backslash W) = k$ et $r(V_j^1) = 1$, alors on a un nouvel élément de type k qui n'était pas ni dans π' ni dans la partition de V_j. Si $r(W) = r(V_j^1) = k$ et $r(V_i \backslash W) = 1$, alors l'ensemble $W \cup V_j^1$ est de type k et il est "comptabilisé" à la fois dans les ensembles de type k de π et dans ceux de la partition de V_j. Si k est impair, on a

$$\begin{aligned} x[V_j^1,\ldots,V_j^q] =& x(\delta(\pi')) - x(\delta(\pi)) + x[W,V_j^1] - x[W,V_i\backslash W] \\ &\geqslant p+q-1+\frac{k-1}{2}(p_k+p_k^j+\alpha)-1-(p+\frac{k-1}{2}p_k-1)+x[W,V_j^1] \\ &\quad - x[W,V_i\backslash W] \\ &= q-1+\frac{k-1}{2}(p_k^j+\alpha)+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W]. \end{aligned}$$

Si k est pair, on a

$$\begin{aligned} x[V_j^1,\ldots,V_j^q] =& x(\delta(\pi')) - x(\delta(\pi)) + x[W,V_j^1] - x[W,V_i\backslash W] \\ &\geqslant p+q-1+(\frac{k}{2}-1)(p_k+p_k^j+\alpha)-(p+(\frac{k}{2}-1)p_k)+x[W,V_j^1] \\ &\quad - x[W,V_i\backslash W] \\ &\geqslant q-1+(\frac{k}{2}-1)(p_k^j+\alpha)+x[W,V_j^1]-x[W,V_i\backslash W]. \end{aligned}$$

Ainsi la proposition 5.5.4 est vérifiée. Ce qui termine la preuve de la proposition 5.5. □

Soit x un point extrême de CPP(G,r). On note

- $E_0(x)$ l'ensemble des arêtes telles que $x(e) = 0$,
- $E_1(x)$ l'ensemble des arêtes telles que $x(e) = 1$,
- $E_f(x)$ l'ensemble des arêtes telles que $0 < x(e) < 1$,
- $P_1(x)$ l'ensemble des partitions $\pi_1 = (V_1,\ldots,V_p)$ de type 1 serrées pour x,
- $P_k(x)$ l'ensemble des partitions $\pi_2 = (W_1,\ldots,W_q)$ de type k serrées pour x.

Il existe alors $P_1^*(x) \subseteq P_1(x)$ et $P_k^*(x) \subseteq P_k(x)$ tels que x est la solution unique du

système

$$S(x)\begin{cases} x(e)=0 & \text{pour tout } e\in E_0(x),\\ x(e)=1 & \text{pour tout } e\in E_1(x),\\ x(\delta(V_1,\ldots,V_p))=p-1 & \text{pour tout } (V_1,\ldots,V_p)\in P_1^*(x),\\ x(\delta(W_1,\ldots,W_q))=\beta & \text{pour tout } (W_1,\ldots,W_q)\in P_k^*(x)\ , \end{cases}$$

avec $\beta=\begin{cases} p+\frac{k-1}{2}p_k-1 & \text{si } k \text{ impair},\\ p+(\frac{k}{2}-1)p_k & \text{si } k \text{ pair} \end{cases}$

et $|P_1^*(x)|+|P_k^*(x)|=|E_f(x)|$.

Remarque 5.6. À partir de tout système d'équations induit par des inégalités de CPP(G,r) dont l'unique solution est x on peut extraire un sous-système ayant exactement $|E|$ équations ayant aussi x comme solution unique.

Remarque 5.7. Pour chaque arête $e\in E$, il y a au moins une équation de $S(x)$ dans laquelle $x(e)$ apparaît avec un coefficient non nul.

Proposition 5.8. *Si x est fractionnaire, alors $|E_f(x)|\geqslant 2$*

Preuve. Soit $f\in E_f(x)$. D'après la remarque 5.7, $x(f)$ apparaît au moins dans une équation de $S(x)$. Or, comme les équations de $S(x)$ ont des coefficients égaux à 0 ou à 1 et un membre de droite entier, il existe au moins une autre arête fractionnaire. □

Proposition 5.9. *Pour chaque paire d'arêtes appartenant à $E_f(x)$, il existe au moins une équation dans $P_1^*(x)\cup P_k^*(x)$ qui fait intervenir exactement une des deux arêtes.*

Preuve. Soient f_1,f_2 des arêtes de $E_f(x)$. Supposons qu'il n'existe pas d'équation dans $P_1^*(x)\cup P_k^*(x)$ qui fait intervenir exactement une des deux arêtes. Alors x' défini par

$$x'(e)=\begin{cases} x(u)+\epsilon & \text{si } e=f_1,\\ x(v)-\epsilon & \text{si } e=f_2,\\ x(e) & \text{sinon} \end{cases}$$

est aussi solution de $S(x)$, une contradiction. □

Remarque 5.10. Si u et v sont deux sommets de V, alors au plus une arête de $[u,v]$ est fractionnaire.

Proposition 5.11. *Soit $W \subset V$, $\emptyset \neq W \neq V$ tel que $x(\delta(W)) = 1$.*
Alors $x(e) \in \{0,1\}$, pour tout $e \in \delta(W)$.

Preuve. Supposons qu'il existe $f \in \delta(W) \cap E_f(x)$. Comme $x(\delta(W)) = 1$, alors il existe une autre arête fractionnaire, disons f', dans la coupe $\delta(W)$. Nous allons montrer que le système $S(x)$ peut être choisi de telle sorte que ses équations fassent intervenir à la fois f et f' ou ne fassent intervenir aucune des deux arêtes. Supposons qu'il existe une partition $\pi^* = (V_1, \ldots, V_p) \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ telle qu'il y ait au moins deux ensembles, disons V_i et V_j, qui intersectent W (c'est-à-dire tels que $V_i \cap W \neq \emptyset \neq V_j \cap W$). En appliquant la proposition 5.3 aux partitions $(V_1, \ldots, V_i \cap W, V_i \backslash W, \ldots, V_p)$ et $(V_1, \ldots, V_j \cap W, V_j \backslash W, \ldots, V_p)$, on obtient

$$x[V_i \cap W, V_i \backslash W] \geqslant 1$$
$$\text{et } x[V_j \cap W, V_j \backslash W] \geqslant 1.$$

Comme $x(\delta(W)) \geqslant x[V_i \cap W, V_i \backslash W] + x[V_j \cap W, V_j \backslash W]$, on a $x(\delta(W)) \geqslant 2$, une contradiction. Donc $W \subseteq V_k$ pour un certain $k \in \{1, \ldots, p\}$. Si $W = V_k$, alors f et f' interviennent ensemble dans la contrainte de SP-partition relative à π. Si $W \subset V_k$, alors par la proposition 5.3, $x[V_k \backslash W, W] \geqslant 1$. Comme $x[V_k \backslash W, W] \leqslant x(\delta(W))$ et $x(\delta(W)) = 1$, on en déduit que $\delta(W) = [V_k \backslash W, W]$. Par conséquent, f et f' n'interviennent pas dans la contrainte de SP-partition relative à π. Ainsi $S(x)$ peut être choisi de telle sorte que ses équations fassent intervenir à la fois f et f' ou ne fassent intervenir aucune des deux arêtes. Mais cela contredit la proposition 5.9. □

Proposition 5.12. *Soit $W \subset V$ tel que $con(W) = k$. Si $x(\delta(W)) = k$, alors le système $S(x)$ peut être choisi de telle manière que $P_1^*(x) = \emptyset$.*

Preuve. Supposons le contraire. Soit $\pi = (V_1, \ldots, V_p) \in P_1^*(x)$. Comme π est de type 1, tous les sommets de type de connexité k sont dans le même ensemble de π. Sans perte de généralité, on suppose que cet ensemble est V_1. D'après nos hypothèses, ils s'en suit que W intersecte V_1. De plus, comme $con(W) = k$, on a $r(W \cap V_1) = k$ et $r(\overline{W} \cap V_1) = k$. Soit $\pi' = (V_1 \backslash W, V_1 \cap W, V_2, \ldots, V_p)$. π' est donc de type k. D'après la proposition 5.3.2, $x[V_1 \backslash W, V_1 \cap W] \geqslant k$. Or, $k = x(\delta(W)) \geqslant x[V_1 \backslash W, V_1 \cap W] \geqslant k$. Il en résulte donc que $x(\delta(W)) = x[V_1 \backslash W, V_1 \cap W]$, c'est-à-dire que W ou $\overline{W}$ est inclus dans

V_1. Par conséquent,

$$\begin{aligned} x(\delta(\pi')) &= x(\delta(\pi)) + x(\delta(W)) \\ &= (p-1) + k \\ &= \begin{cases} (p+1) + \frac{k-1}{2}2 - 1 & \text{si } k \text{ est impair,} \\ (p+1) + (\frac{k}{2} - 1)2 & \text{si } k \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme la cardinalité de π' est $p+1$ et comme le nombre d'ensembles de π' de type k est 2, cela signifie que π' est serrée quelle que soit la parité de k.

On distingue maintenant deux cas selon que $(W,\overline{W})$ appartienne ou non à $P_k^*(x)$. Si $(W,\overline{W}) \in P_k^*(x)$, alors le système obtenu à partir de $S(x)$ en enlevant l'équation induite par π et en ajoutant l'équation induite par π', a comme solution unique x et ne contient pas d'équation induite par des partitions de type 1. Si $(W,\overline{W}) \notin P_k^*(x)$, alors le système obtenu à partir de $S(x)$ en enlevant l'équation induite par π et en ajoutant les équations induites par π' et $(W,\overline{W})$ a comme solution unique x. Le système obtenu contient $|E|+1$ équations. On peut en extraire un système de dimension $|E|$ par la remarque 5.6. Comme le système contient une équation induite par une partition de type 1 de moins que $S(x)$, il en est de même pour le système extrait.
Cette procédure peut être répétée jusqu'à ce que le système obtenu ne contienne plus aucune équation induite par une partition de type 1. □

Proposition 5.13. *Soient u et v deux sommets distincts.*

1) Si $x[u,v] \geqslant 1$, alors $S(x)$ peut être choisi de telle manière que
   1.1) $\delta(V_1,\ldots,V_p) \cap [u,v] = \emptyset$, pour tout $(V_1,\ldots,V_p) \in P_1^*(x)$
   1.2) Si $(V_1,\ldots,V_p) \in P_k^*(x)$, $p \geqslant 3$ et $[u,v] \subseteq [V_i,V_j]$, pour $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, alors $r(V_i) = r(V_j) = k$.

2) Si $x[u,v] \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, alors $S(x)$ peut être choisi de telle manière que si $(V_1,\ldots,V_p) \in P_k^*(x)$, $p \geqslant 3$ et $[u,v] \subseteq [V_i,V_j]$, pour $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, alors $r(V \backslash (V_i \cup V_j)) = 1$.

Preuve. Soit $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$ une partition de G. On note V_i et V_j les ensembles de la partition tels que $[u,v] \subseteq [V_i,V_j]$. Soit π' la partition obtenue en considérant $V_i \cup V_j$ comme un seul ensemble.
(1) On montre d'abord (1.1). Supposons par contradiction que $(V_1,\ldots,V_p) \in P_1^*(x)$.

Supposons que $p = 2$. D'après la proposition 5.11, $x(e) \in \{0,1\}$, pour tout $e \in \delta(W)$. Alors l'équation relative à $(V_1,\ldots,V_p)$ est redondante par rapport aux équations $x(e) = 0$ et $x(e) = 1$. Supposons maintenant que $p \geqslant 3$. D'après la proposition 5.2, $x[V_i,V_j] \leqslant 1$. Or comme $x[u,v] \geqslant 1$, on en déduit que $x[V_i,V_j] = 1$, et donc π' est également serrée. D'après la remarque 5.10, $[u,v]$ contient au plus une arête fractionnaire. Or $x[u,v] = 1$, donc il n'y a pas d'arête fractionnaire dans le faisceau. Ainsi l'équation induite par π peut être obtenue à partir de l'équation relative à π', des équations $x(e) = 0$, pour tout $e \in E_0(x) \cap [u,v]$, et des équations $x(e) = 1$, pour tout $e \in E_1(x) \cap [u,v]$.

On montre maintenant (1.2). Supposons que $\pi \in P_k^*(x)$. Si π' est de type 1, comme π est de type k, on a $r(V_i) = r(V_j) = k$. Considérons le cas où π' est de type k. Supposons par exemple que $r(V_i) = 1$, alors, par la proposition 5.2, $x[V_i,V_j] \leqslant 1$. Donc $x[V_i,V_j] = 1$ et par le même raisonnement qu'au-dessus, il en résulte que l'équation induite par π peut être obtenue à partir de celle induite par π' et des équations issues des contraintes triviales.

(2) Supposons que $\pi \in P_k^*(x)$. Si π' est de type 1, alors $r(V\backslash(V_i \cup V_j)) = 1$. Considérons maintenant le cas où π' est de type k. Supposons par exemple que $r(V_i) = 1$. D'après la proposition 5.2, on a $x[V_i,V_j] \leqslant 1$. Or, $x[V_i,V_j] \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Comme $k \geqslant 3$, c'est impossible. Donc $r(V_i) = r(V_j) = k$. Par la proposition 5.2, on obtient $x[V_i,V_j] \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$ donc $x[V_i,V_j] = \lceil \frac{k}{2} \rceil$. En suivant le même raisonnement que dans la preuve de (1) on montre que l'équation induite par π peut être obtenue à partir de celle induite par π' et des équations issues des contraintes triviales. □

Proposition 5.14. *Soit u un sommet ayant exactement 2 voisins u_1 et u_2. Alors $S(x)$ peut être choisi de telle manière que les partitions $(V_1,\ldots,V_p)$ de $\in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$, avec $p \geqslant 3$ et $[u,u_1] \subset \delta(V_1,\ldots,V_p)$, respectent la propriété suivante :*

$$|V_i \cap \{u_1,u_2\}| \leqslant 1 \quad \textit{pour } i = 1,\ldots,p. \tag{5.3}$$

De plus, si $x[u,u_2] < 1$, alors

$$|V_i \cap \{u,u_2\}| \leqslant 1 \quad \textit{pour } i = 1,\ldots,p. \tag{5.4}$$

Preuve. Soit $\pi = (V_1,\ldots,V_p) \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ avec $p \geqslant 3$ et $[u,u_1] \subset \delta(\pi)$. On suppose sans perte de généralité que $u \in V_1$ et $u_1 \in V_2$. Supposons que $u_2 \in V_2$. Par la proposition 5.4, les ensembles de la partition doivent induire des graphes connexes. Il en résulte que $V_1 = \{u\}$. Si $r(u) = 1$, alors on a $x(\delta(V_1)) \geqslant 1$. Or par la proposition

5.2, $x(\delta(V_1)) \leqslant 1$. Donc $x(\delta(V_1)) = 1$. Si $r(u) = k$, alors $x(\delta(V_1)) \geqslant k$. De plus, la proposition 5.2 implique que $x(\delta(V_1)) \leqslant k$. Donc $x(\delta(V_1)) = k$. Soit π' la partition obtenue en considérant $V_1 \cup V_2$ comme un seul ensemble. Alors π' est serrée pour x. Ainsi l'équation induite par π peut être obtenue à partir de l'équation induite par π' et des équations $x(e) = 0$ pour $e \in E_0(x) \cap \delta(V_1)$ et $x(e) = 1$ pour $e \in E_1(x) \cap \delta(V_1)$. En conséquence, on peut écrire $S(x)$ de telle manière que les contraintes de SP-partition soient induites par des partitions dans lesquelles u_1 et u_2 ne sont pas dans le même ensemble.
Montrons maintenant l'inégalité (5.4). Supposons le contraire, c'est-à-dire que $u_2 \in V_1$ (on rappelle que V_1 est l'ensemble contenant u). Soit $\pi' = (\{u\},V_1\backslash\{u\},V_2,\ldots,V_p)$. D'après la proposition 5.3, $x[\{u\},V_1\backslash\{u\}] \geqslant 1$. Ce qui contredit l'hypothèse $x[u,u_2] < 1$. On a donc $|V_1 \cap \{u,u_2\}| \leqslant 1$. □

Proposition 5.15. *Soient $u,v \in V$ tels que $x[u,v] \geqslant k$. Alors $x(e) \in \{0,1\}$, pour tout $e \in [u,v]$ et le système $S(x)$ peut être choisi de telle manière que $x(e)$ apparaisse seulement dans les équations induites par $E_0(x) \cup E_1(x)$ pour toute arête $e \in [u,v]$.*

Preuve. Soient u,v tels que $x[u,v] \geqslant k$. Supposons qu'il existe $\pi \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ tel que $[u,v] \subset \delta(\pi)$. Supposons, sans perte de généralité, que $u \in V_1$ et $v \in V_2$. D'après la proposition 5.13, comme $x[u,v] \geqslant k \geqslant 1$ et $(V_1,\ldots,V_p) \cap [u,v] \neq \emptyset$, π est de type k. Soit π' la partition obtenue par unification de V_1 et V_2. Supposons que π' est de type k. Alors la proposition 5.2 nous donne $x[V_1,V_2] \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, une contradiction. Supposons maintenant que π' est de type 1. Alors, d'après la proposition 5.2, $x[V_1,V_2] \leqslant k$. Donc $x[V_1,V_2] = k$ et par conséquent π' est serrée. On peut remplacer dans $S(x)$ l'équation induite par π par celle induite par π' et par les équations $x(e) = 0$ pour $e \in E_0(x) \cap \delta(V_1)$ et $x(e) = 1$ pour $e \in E_1(x) \cap \delta(V_1)$. □

5.4 Décomposition par des sommets d'articulation

Soit $G = (V,E)$ un graphe possédant un sommet d'articulation u. On peut donc décomposer G en 2 sous-graphes $G_1 = (V_1,E_1)$ et $G_2 = (V_2,E_2)$ tels que $V_1 \cap V_2 = \{u\}$, $V_1 \cup V_2 = V$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ et $E_1 \cup E_2 = E$. On rappelle que r_{E_i}, $i = 1,2$ désigne le vecteur de connexité associé aux sommets obtenus en contractant E_i en un sommet w_i

pour $i = 1,2$ et il est défini par

$$r_{E_i} = \begin{cases} r(u) & \text{si } u \in V'\backslash\{w\}, \\ con(V(E_i)) & \text{si } u = w_i. \end{cases}$$

Pour simplifier l'écriture, on notera r_1 pour r_{E_2} et r_2 pour r_{E_1}. Nous montrons dans cette partie que si CPP(G_i,r_i), $i = 1,2$, est entier, alors CPP(G,r) est entier également.

Lemme 5.16. *Si x est un point extrême de CPP(G,r), alors la restriction x_i de x sur G_i, $i = 1,2$, est un point extrême de CPP(G_i,r_i).*

Preuve. D'après la proposition 5.1, $x_i \in$ CPP(G_i,r_i). Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que l'on peut choisir $S(x)$ tel que pour n'importe quelle paire d'arêtes (e,f), $e \in E_1$ et $f \in E_2$, il n'y a pas d'équation de $S(x)$ faisant intervenir simultanément $x(e)$ et $x(f)$.
Soit $\pi = (W_1,\ldots,W_p)$ une partition serrée pour x. D'après la proposition 5.4, les graphes $G(V_i)$ sont connexes. On peut donc numéroter les ensembles de π de telle sorte que les $q-1$ premiers ensembles soient dans V_1, W_q contienne u, et les $p-q$ derniers ensembles soient dans V_2. Soient

$$\pi_1 = (W_1,W_2,\ldots,W_{q-1},W_q^1) \text{ avec } W_q^1 = \cup_{k \geqslant q} W_k$$
$$\pi_2 = (W_{q+1},\ldots,W_p,W_q^2) \quad \text{avec } W_q^2 = \cup_{k \leqslant q} W_k.$$

On a $x(\delta(\pi)) = x(\delta(\pi_1)) + x(\delta(\pi_2))$. Notons p^1 et p^2 les cardinalités de π_1 et π_2 et notons p_k^1 et p_k^2 les nombres d'ensembles de connexité k dans π_1 et π_2 respectivement. On a $p = p^1 + p^2 - 1$.
Supposons que π est de type 1, alors π_1 et π_2 sont également de type 1 et

$$p - 1 = x(\delta(\pi)) = x(\delta(\pi_1)) + x(\delta(\pi_2)) \geqslant p^1 - 1 + p^2 - 1 = p - 1.$$

Donc π_1 et π_2 sont toutes les deux serrées pour x. En conséquence, on peut remplacer l'équation induite par π dans $S(x)$, par celles induites par π_1 et π_2.

Maintenant supposons que π est de type k. Nous distinguons deux cas selon la parité de k. Supposons que k est impair. On montre que l'on ne peut pas avoir π_1 et π_2 de type k et $con(W_q) = k$. En effet, supposons le contraire. On a alors $p_k = p_k^1 + p_k^2 - 1$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} x(\delta(\pi)) = x(\delta(\pi_1)) + x(\delta(\pi_2)) &\geqslant p^1 + \frac{k-1}{2}p_k^1 - 1 + p^2 + \frac{k-1}{2}p_k^2 - 1 \\ &= (p+1) + \frac{k-1}{2}(p_k+1) - 2. \end{aligned}$$

Comme $x(\delta(\pi)) = p + \frac{k-1}{2}p_k - 1$ et $k \geqslant 3$, on a

$$\begin{aligned} -1 &\geqslant \frac{k-1}{2} - 1 \\ -1 &\geqslant \frac{3-1}{2} - 1 \\ -1 &\geqslant 0, \end{aligned}$$

une contradiction. Donc soit l'une des deux partitions est de type 1, soit $con(W_q) = 1$. Dans les deux cas $p_k = p_k^1 + p_k^2$. On a donc

$$\begin{aligned} p + \frac{k-1}{2}p_k - 1 = x(\delta(\pi)) = x(\delta(\pi_1)) + x(\delta(\pi_2)) &\geqslant p^1 + \frac{k-1}{2}p_k^1 - 1 + p^2 + \frac{k-1}{2}p_k^2 - 1 \\ &= p + \frac{k-1}{2}p_k - 1 \end{aligned}$$

Donc π_1 et π_2 sont serrées pour x. En conséquence, on peut remplacer l'équation induite par π dans $S(x)$, par celles induites par π_1 et π_2.

Supposons maintenant que k est pair. On montre que l'on ne peut pas avoir π_1 et π_2 de type k. En effet, supposons le contraire. Si $k = 2$ on a

$$p = x(\delta(\pi)) = x(\delta(\pi_1)) + x(\delta(\pi_2)) \geqslant p^1 + p^2 = p + 1$$

une contradiction. Si $k \geqslant 4$, on a

$$\begin{aligned} p + (\frac{k}{2} - 1)p_k = x(\delta(\pi)) = x(\delta(\pi_1)) + x(\delta(\pi_2)) &\geqslant p^1 + (\frac{k}{2} - 1)p_k^1 + p^2 + (\frac{k}{2} - 1)p_k^2 \\ &= (p+1) + (\frac{k}{2} - 1)(p_k + 1) \end{aligned}$$

une contradiction. Donc π_1 ou π_2 est de type 1. Supposons par exemple que π_1 est de type 1. Ainsi $p_k = p_k^2$. On a donc

$$\begin{aligned} p + (\frac{k}{2} - 1)p_k = x(\delta(\pi)) = x(\delta(\pi_1)) + x(\delta(\pi_2)) &\geqslant p^1 - 1 + p^2 + (\frac{k}{2} - 1)p_k^2 \\ &= p + (\frac{k}{2} - 1)p_k \end{aligned}$$

Donc π_1 et π_2 sont serrées pour x. On peut remplacer l'équation induite par π dans $S(x)$, par celles induites par π_1 et π_2. □

En utilisant les mêmes notations, nous avons comme conséquence immédiate du lemme le corollaire suivant.

Corollaire 5.17. *Si CPP(G_1,r_1) et CPP(G_2,r_2) sont entiers, alors CPP(G,r) est également entier.*

Spposons que G est décomposable par des sommets d'articulation en G_1,G_2,...,G_t, avec $t \geqslant 2$. Soit r_i , $i = 1,\ldots,t$, le type de connexité associé à G_i défini de la même manière que pour le lemme . Une conséquence directe de ce corollaire est que, si CPP(G_i,r_i) est entier pour $i \in \{1,\ldots,t\}$ alors CPP(G,r) est également entier.

5.5 CPP(G,r) dans les graphes série-parallèle sans toupie

Dans cette partie, nous montrons que le polytope du problème du sous-graphe (1,k)-arête connexe, $k \geqslant 2$, lorsque le graphe est série-parallèle et sans toupie, est décrit par les contraintes triviales et les contraintes de SP-partition. Rappelons que les toupies sont des graphes associés à un vecteur de type de connexité particulier. Soit $G_k = (V,E)$ avec $V = \{v_0,v_1,v_2,v_3,v_4\}$ et E tels que

- $|[v_0,v_i]| = 1$, pour $i = 1,2,3$,
- $|[v_i,v_4]| = k$, pour $i = 1,2,3$,
- il n'y a pas d'autres arêtes que les arêtes dans les faisceaux $[v_0,v_i]$ pour $i = 1,2,3$.

Soient $r_k^1 = (1,k,k,k,1)$ et $r_k^2 = (1,k,k,k,k)$ deux vecteurs de type de connexité. Alors (G_k^1,r_k^1) et (G_k^2,r_k^2) sont les toupies pour la valeur k donnée.

Soient $G = (V,E)$ un graphe et $r \in \{1,k\}^V$ un vecteur type de connexité associé à G. On dit que G *a pour mineur* une toupie, si on obtient (G_k^1,r_k^1) et (G_k^2,r_k^2) par contraction et/ou suppression d'arêtes. Au contraire, un graphe est dit *sans toupie* s'il n'a pas pour mineur de toupie.

Avant tout, notons que dans le cas particulier où tous les sommets sont de type 1, ou dans le cas où tous les sommets sont de type k, la description du polytope est connue. Ainsi, lorsque tous les sommets sont de type 1, le problème du sous-graphe $(1,k)$-arête connexe revient à chercher un arbre de poids minimum. Kruskal [64] a donné un algorithme polynomial pour résoudre le problème de l'arbre couvrant de poids minimum et Fulkerson [39] a donné une description complète du polytope des arbres couvrants. On a par conséquent le théorème suivant.

Théorème 5.18 (Fulkerson[39]). *Si $|I_3| \leqslant 1$ alors CPP(G,r) est entier.*

Didi Biha et Mahjoub [27] ont montré que dans la classe des graphes série-parallèles, lorsque le type de connexité est uniforme et égal à k, $k \geqslant 2$, alors le polytope est décrit par les contraintes de SP-partition et les contraintes triviales. De plus, lorsque k est pair, les contraintes triviales et les contraintes de coupe (qui sont des contraintes de SP-partition particulières) suffisent pour décrire le polytope. Ce résultat s'énonce également de la manière suivante.

Théorème 5.19 (Didi Biha, Mahjoub [27]). *Si G est série-parallèle et si $|I_1| = 0$ alors CPP(G,r) est entier.*

On considère dans la suite, des graphes série-parallèles contenant au moins un sommet de type 1 et deux de type k.

Théorème 5.20. *Soient $G = (V,E)$ un graphe série-parallèle et $r \in \{1,k\}^V$. Si G n'admet ni (G_k,r_k^1), ni (G_k,r_k^2) comme mineur, alors CPP(G,r) est entier.*

Preuve. Le théorème est vrai pour les graphes ayant au plus $k+1$ arêtes car on est alors ramené à des cas sur lesquels s'appliquent les théorèmes 5.18 et 5.19. On suppose qu'il est vrai pour tous les graphes série-parallèles ayant au plus m arêtes, $m > k+1$, et n'ayant ni (G_k,r_k^1), ni (G_k,r_k^2) comme mineur.
Soient $G = (V,E)$ et $r \in \{1,k\}^{|V|}$ tels que $|E| = m+1$ et G n'a ni (G_k,r_k^1) ni (G_k,r_k^2) comme mineur. Supposons que CPP(G,r) n'est pas entier. Alors il existe un point extrême fractionnaire x de CPP(G,r). On suppose que G et r sont tels que la cardinalité de I_k est maximum. Cela signifie que pour tout graphe G' ayant $m+1$ arêtes et un vecteur $r' \in \{1,k\}^V$ tel que $|I'_k| > |I_k|$, CPP(G',r') est entier. Parmi les points extrêmes fractionnaires de CPP(G',r'), on choisit x de telle sorte que $|E_0(x) \cup E_1(x)|$ soit maximum.

Une conséquence directe de nos hypothèses est que $x(e) > 0, \forall e \in E$.

Assertion 1. Toute variable a un coefficient non nul dans au moins deux équations de $S(x)$.

Preuve. Par la remarque 5.1, toute variable $x(e)$, $e \in E$, apparaît dans au moins une équation. Supposons qu'il en existe une qui apparaît dans une seule contrainte. Soit $f \in [u,v]$ une telle arête. Soit $S'(x)$ le système obtenu à partir de $S(x)$ en supprimant les équations faisant intervenir des arêtes du faisceau $[u,v]$. $S'(x)$ contient exactement $|E| - |[u,v]|$ équations et $S'(x)$ est non singulier. Soit x' la solution unique de $S'(x)$. x' est fractionnaire. Or le sous-graphe obtenu par la contraction du faisceau $[u,v]$ ne contient pas de mineur égal à (G_k,r_k^1) ou (G_k,r_k^2). Cela contredit l'hypothèse de récurrence. □

Assertion 2. G est 2-sommet connexe.

Preuve. Si G n'est pas 2-sommet connexe alors, comme G est connexe, il se décompose par un sommet d'articulation en deux sous-graphes G_1 et G_2. Il est clair que G_1 et G_2 contiennent chacun au plus m arêtes. Par contre, comme CPP(G,r) n'est pas entier, un des polytopes CPP(G_1,$r_{E(G_2)}$) et CPP(G_2,$r_{E(G_1)}$), n'est pas entier. Cela contredit l'hypothèse de récurrence. □

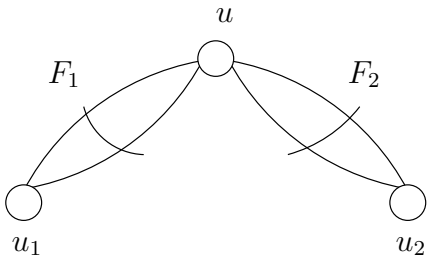

FIG. 5.4 – *Sommet u adjacent à u_1 et u_2*

Soit u un sommet adjacent à deux sommets exactement, disons u_1 et u_2. Notons $F_1 = [u_1,u]$ et $F_2 = [u_2,u]$. On suppose que

$$x(F_1) \geqslant x(F_2). \tag{5.5}$$

Assertion 3. $r(u) = k$.

Preuve. Supposons le contraire, *i.e.* $r(u) = 1$. Montrons d'abord que $x(F_1) \geqslant 1$. Supposons le contraire. Alors, on a également $x(F_2) < 1$. Donc $|F_1| = |F_2| = 1$. Soient $F_1 = \{f_1 = (u,u1)\}$ et $F_2 = \{f_2 = (u,u_2)\}$ avec f_1 et f_2 deux arêtes de valeur fractionnaire. D'après la proposition 5.9, il existe une partition $(V_1,\ldots,V_p)$ de $P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ telle que $|\delta(V_1,\ldots,V_p) \cap \{f_1,f_2\}| = 1$. Sans perte de généralité, on suppose que $f_1 \in \delta(V_1,\ldots,V_p)$ et que $u,u_2 \in V_i$ pour $i \in \{1,\ldots,p\}$. Ainsi $x[u,V_i\backslash\{u\}] = x(f_2) < 1$ ce qui contredit la proposition 5.3. Donc $x(F_1) \geqslant 1$.

Soit $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$ une partition telle que $F_1 \subseteq \delta(\pi)$ et $\pi \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$. Supposons sans perte de généralité que $u \in V_1$ et $u_1 \in V_2$. Comme $x(F_1) \geqslant 1$, d'après la proposition 5.13, on peut supposer que $\pi \in P_k^*(x)$. D'après la même proposition, on a alors $r(V_1) = r(V_2) = k$. Comme $r(u) = 1$, on en déduit que $r(V_1\backslash\{u\}) = k$. Cela implique que $F_2 \nsubseteq \delta(\pi)$, autrement dit $u_2 \in V_1$. En effet, sinon, en déplaçant u dans V_1, on obtient une partition de type k violée par x.
Soit la partition $\pi' = (V_1\backslash\{u\},V_2 \cup \{u\},V_3,\ldots,V_p)$. π' est de type k. De plus, π' a la même cardinalité que π et le même nombre d'ensembles de type k. On a donc

$$x(\delta(\pi')) = x(\delta(\pi)) - x(F_1) + x(F_2) \geqslant x(\delta(\pi))$$

On en déduit que $x(F_2) \geqslant x(F_1)$. Or, par hypothèse $x(F_1) \geqslant x(F_2)$. Donc $x(F_2) = x(F_1)$ et π' est serrée.

Soient $\pi_1,\ldots,\pi_t$ des partitions telles que $F_1 \subseteq \delta(\pi_a)$ et $\pi_a \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$, quel que soit $a \in \{1,\ldots,t\}$. En appliquant la transformation introduite ci-dessus pour $\pi_1,\ldots,\pi_t$, on obtient des partitions $\pi'_1,\ldots,\pi'_t \in P_k^*(x)$ telle que $F_2 \in \delta(\pi'_a)$ et $F_1 \notin \delta(\pi'_a)$, pour $a = 1,\ldots,t$.

Soit $S_{F_1}(x)$ le système obtenu à partir de $S(x)$ en supprimant toutes les équations induites par $\pi_1,\ldots,\pi_t$, ainsi que les équations $x(e) = 1$ pour les arêtes de $E(x) \cap F_1$ et en ajoutant les équations induites par $\pi'_1,\ldots,\pi'_t$ qui ne sont pas déjà dans $S(x)$. La restriction x_{F_1} de x sur $E\backslash F_1$ appartient au polytope CPP(G_{F_1},r_{F_1}). De plus (G_{F_1},r_{F_1}) n'admet comme mineur ni (G_k,r_k^1), ni (G_k,r_k^2). Comme (G_{F_1},r_{F_1}) a strictement moins de $m+1$ arêtes par hypothèse de récurrence, CPP(G_{F_1},r_{F_1}) est entier. Comme x_{F_1} est fractionnaire., il n'est donc pas un point extrême de CPP(G_{F_1},r_{F_1}).

En conséquence $S_{F_1}(x)$ n'est pas un système non singulier. $S_{F_1}(x)$ décrit une face de dimension strictement supérieure à 1. Il existe donc un point extrême entier de CPP(G_{F_1},r_{F_1}), disons y_1, qui appartient également à la face décrite par $S_{F_1}(x)$. y_1 est

différent de x. On peut maintenant construire une solution y pour (G,r) définie telle que

$$\begin{aligned} y(e) &= y_1(e) && \text{si } e \notin F_1, \\ y(e) &= 1 && \text{si } e \in F_1 \cap E_1(x), \\ y(F_1) &= y_1(F_2). \end{aligned}$$

Notons que y est aussi solution de $S(x)$ et est entier. Comme x est fractionnaire, cela contredit le fait que x est la solution unique de $S(x)$. □

Assertion 4. $r(u_2) = 1$.

Preuve. Supposons le contraire, *i.e.* $r(u_2) = k$. Soit $\pi = (V_1, \ldots, V_p)$ une partition telle que $F_1 \subseteq \delta(\pi)$ et $\pi \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$. Comme $x(F_1) \geqslant 1$, d'après la proposition 5.13, $\pi \in P_k^*(x)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $u \in V_1$ et $u_1 \in V_2$. D'après la même proposition, on a en conséquence $r(V_1) = r(V_2) = k$.

On montre que $x(F_1) = x(F_2)$. Supposons que $x(F_1) > x(F_2)$. Comme $x(\delta(u)) = x(F_1) + x(F_2) \geqslant k$, donc $x(F_1) > k/2$. On distingue trois cas.
Cas 1. $u_2 \notin V_1 \cup V_2$. Dans le cas où k est pair, comme π est serrée et $r(u) = k = r(u_2)$, d'après la proposition 5.2 par rapport à la partition obtenue à partir de π en faisant l'union de V_1 et V_2, on a $x(F_1) \leqslant k/2$, une contradiction. Dans le cas où k est impair, d'après cette même proposition, on a $x(F_1) \leqslant \frac{k+1}{2}$. Supposons que $x(F_1) = \frac{k+1}{2}$, alors d'après la proposition 5.13.2, $r(V \backslash V_1 \cup V_2)) = 1$. Comme $r(u_2) = 1$, c'est une contradiction. Donc $x(F_1) < \frac{k+1}{2}$. Soit $\pi' = (V_1 \cup V_2, V_3, \ldots, V_p)$. On a

$$\begin{aligned} x(\delta(\pi')) &= x(\delta(\pi)) - x(F_1) \\ &< p + \frac{k-1}{2} p_k - 1 - \frac{k+1}{2} \\ &= (p-1) + \frac{k-1}{2}(p_k - 1) - 1 \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que $x \in \mathrm{CPP}(G,r)$.
Cas 2. $u_2 \in V_1$ et $p \geqslant 3$. Soit $\pi' = (V_1 \backslash \{u\}, V_2 \cup \{u\}, V_3, \ldots, V_p)$. Comme $r(V_1 \backslash \{u\}) = r(u_2) = k = r(u) = r(V_2 \cup \{u\})$, π' de type k. Donc on a

$$\begin{aligned} x(\delta(\pi')) &= x(\delta(\pi)) - x(F_1) + x(F_2) \\ &= \beta - x(F_1) + x(F_2) \\ &< \beta \end{aligned}$$

où β est le second membre de la contrainte de SP-partition induite par π. Comme π et π' sont de même type, c'est impossible.

Cas 3. $u_2 \in V_2$ et π est de cardinalité 2, c'est-à-dire $\pi = (\{u\},V\backslash\{u\})$. Comme $x(\delta(\pi)) = k$ et $x(F_1) > x(F_2)$, on a $x(F_1) > \frac{k}{2}$ et $0 < x(F_2) < \frac{k}{2}$. Si les arêtes de $F_1 \cup F_2$ sont toutes entières, alors l'équation associée à π est redondante par rapport aux équations $x(e) = 1$, $e \in E_1(x) \cap (F_1 \cup F_2)$. Cela contredit le fait que $S(x)$ est non singulier. Donc $F_1 \cup F_2$ contient des arêtes fractionnaires. Comme $x(\delta(\pi))$ est entier, $\delta(\pi)$ doit contenir au moins deux arêtes fractionnaires. De plus $\delta(\pi) = F_1 \cup F_2$, donc par la remarque 5.10, on a une arête fractionnaire dans F_1 et une dans F_2. Ces arêtes n'apparaissent que dans cette équation. Cela contredit l'assertion 1. Donc $x(F_1) = x(F_2)$.

On considère la partition de départ π. On considère x_{F_1} la restriction de x sur $G\backslash F_1$ et on construit le système $S_{F_1}(x)$ en supprimant de $S(x)$ les équations dans lesquelles interviennent les arêtes de F_1. x_{F_1} est solution de $S_{F_1}(x)$. Comme x_{F_1} est fractionnaire, on déduit que $S_{F_1}(x)$ est une face de dimension au moins deux. Soit y_1 un point extrême solution de $S_{F_1}(x)$. Soit y tel que

$$\begin{aligned} y(e) &= y_1(e) && \text{si } e \notin F_1, \\ y(e) &= 1 && \text{si } e \in F_1 \cap E_1(x), \\ y(F_1) &= y_1(F_2). \end{aligned}$$

Le point y est différent de x puisque sa projection sur $G\backslash F_1$ est différente de celle de x. Pourtant x et y sont solutions de $S(x)$. Cela contredit le fait que le système est non singulier. □

Assertion 5. La configuration dans laquelle $|F_1| = k - 1$ et $|F_2| = 1$ est impossible.

La figure 5.5 illustre cette configuration.

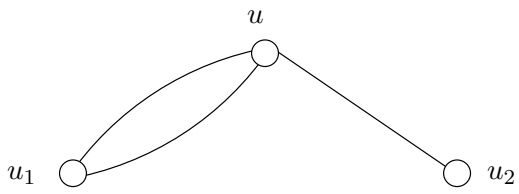

FIG. 5.5 – *Configuration* $|F_1| = k - 1$ *et* $|F_2| = 1$ *pour* $k = 3$

Preuve. Supposons le contraire. Comme $r(u) = k$, on a $x(F_1) = k - 1$ et $x(F_2) = 1$. On note e_2 l'arête de F_2. Soit r^*défini par

$$r^*(v) = r(v) \quad \text{pour tout } v \neq u_2,$$
$$r^*(v) = k \qquad \text{si } v = u_2.$$

On montre que (G,r^*) ne contient pas de toupie. Supposons le contraire, c'est-à-dire (G,r^*) contient une toupie. Notons par (H,r^*_H) cette toupie et soit ($S_1,\ldots,S_5$) la partition de V qui l'induit. Sans perdre de généralité, on peut supposer que

1) S_1 est de degré 3 et $r(S_1) = 1$,
2) S_2, S_3, S_4 sont de degré $k-1$ et $r(S_2) = r(S_3) = r(S_4) = k$,
3) S_5 est de degré $3k$.

La figure 5.6 illustre cette partition. $r^*(u_2) = k$ donc $u_2 \in S_i$ pour un certain $i \in$

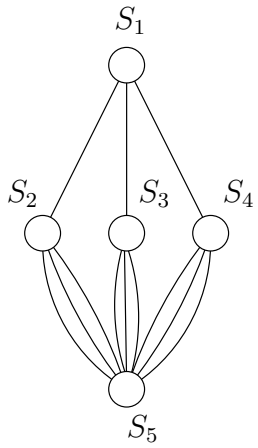

FIG. 5.6 – *Partition de (G,r^*) en toupie dans le cas $k = 3$*

$\{2,\ldots,5\}$. Si S_i contient d'autres sommets de type k alors (H,r_H) est aussi un mineur de (G,r), ce qui contredit l'hypothèse de récurrence. Donc les autres sommets de S_i sont de type 1. Donc u n'appartient pas à S_i. Soit S_j l'ensemble contenant u. Comme $r(u) = k$ et $r(S_1) = k$, on en déduit que $j \neq 1$. On a $u_1 \in S_j$. En effet, $G(S_j)$ est connexe et si $u_1 \notin S_j$, cela signifie que $S_j = \{u\}$. Or $\{u\}$ est de degré k et S_t, $t = 2,\ldots,5$ sont de degré supérieur ou égal à $k+1$. Si $i = 5$, cela veut dire que (H,r^*_H) = (G_k,r^2_k). Dans ce cas, on a (H,r_H) = (G_k,r^1_k) ce qui contredit le fait que G ne contient pas de toupie comme mineur. Donc $i \neq 5$. Supposons que $j = 5$. Soit $\pi' = (S'_1,\ldots,S'_5)$ la partition

définie par

$$\begin{aligned} S'_i &= S_i \cup \{u\}, \\ S'_5 &= S_5 \backslash \{u\}, \\ S'_k &= S_k \qquad k \in \{1,\ldots,4\},\ k \neq i. \end{aligned}$$

On a $(\pi',r^*) = (G_k,r_k^2)$ et donc (π',r) est égal à (G_k,r_k^1) ou (G_k,r_k^2), une contradiction. En conséquence, (G,r^*) ne contient pas de toupie.

On montre maintenant que x est un point extrême de CPP(G,r^*). Pour ce faire, on montre que toute équation de $S(x)$ reste vérifiée par x par rapport à r^*. Soit $\pi = (V_1,\ldots,V_p) \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$. Si u et u_2 sont dans le même ensemble de la partition alors π est également serrée pour x par rapport à r^*. Supposons que u et u_2 sont dans deux ensembles différents, disons $u \in V_1$ et $u_2 \in V_2$. On remarque que π ne peut pas être une coupe de type 1. En effet, cela signifierait que $\delta(V_1,V_2) = \{e_2\}$ car il n'y a pas d'arête de valeur nulle. Or cela induit un graphe qui n'est pas 2-sommet connexe, ce qui contredit l'assertion 2. Donc si π est une coupe, c'est une coupe de type k. Et donc π est aussi serrée par x par rapport à r^*. Si π est de cardinalité $\geqslant 3$, alors par la proposition 5.13, on sait que l'on a pu choisir $S(x)$ tel que π vérifie $r(V_1) = k$ et $r(V_2) = k$. π est donc également serrée par x par rapport à r^*.
Donc toutes les équations de $S(x)$ sont vérifiées par x par rapport à r^*. $S(x)$ est un système d'équations non singulier de CPP(G,r^*). Comme G a plus de sommets de type k par rapport à r^*, par l'hypothèse de récurrence il s'ensuit que CPP(G,r^*) est entier. Comme x est fractionnaire, on a une contradiction. □

Assertion 6. $x(F_1) < k$.

Preuve. D'après la proposition 5.15, si $x(F_1) \geqslant k$ alors les variables $x(e)$, $e \in F_1$, n'apparaissent que dans une équation induite par $E_0(x) \cup E_1(x)$. Donc chacune de ces variables n'apparaîtrait que dans une équation de type $x(e) = 1$, ce qui contredit l'assertion 1. □

Assertion 7. Si $x(F_2) \geqslant \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, alors $S(x)$ peut être choisi de telle manière que $S(x)$ ne contient pas équation provenant d'une contrainte de SP-partition induite par une partition de cardinalité supérieure à 3 et dont la multicoupe contient F_1 et F_2.

Preuve. Comme $x(F_1) \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, par la proposition 5.13.2, $S(x)$ peut être choisi de telle manière que quelle que soit $\pi \in P_k^*(x)$ telle que $[u,u_1] \in \delta(\pi)$, disons $u \in V_1$ et $u_1 \in V_2$,

alors $r(V\backslash(V_1 \cup V_2)) = 1$. De plus, comme $x(F_2) \geqslant 1$, par la proposition 5.13.1.1 on peut choisir $S(x)$ telle que les partitions $\pi \in P_k^*(x)$ telles que $[u,u_2] \in \delta(\pi)$, disons $u \in V_i$ et $u_2 \in V_j$, $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, vérifient $r(V_i) = r(V_j) = k$. Donc on ne peut avoir à la fois F_1 et F_2 dans une partition de $S(x)$ sinon comme $V_j \subset V\backslash(V_1 \cup V_2)$, on aurait $r(V\backslash(V_1 \cup V_2)) \neq 1$. □

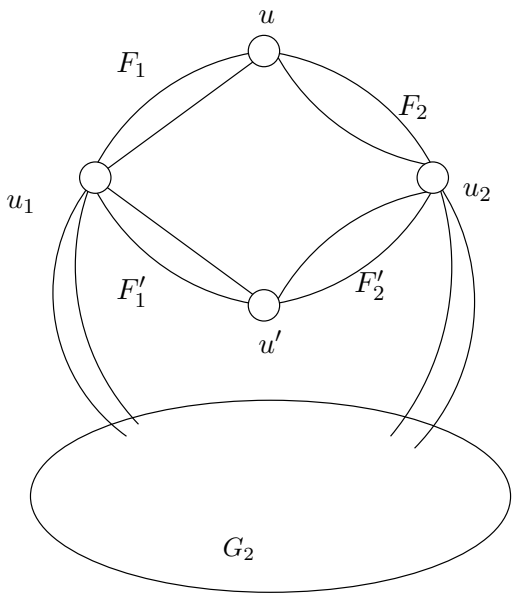

FIG. 5.7 – *Graphe G décomposé en G_1 et G_2*

Par les assertions précédentes, on déduit que les chaînes sont constituées, à l'exception des extrémités, uniquement de sommets de type k. De plus, étant donnée la configuration, c'est-à-dire le fait que chaque sommet adjacent à deux sommets exactement, est adjacent à au moins un sommet de type 1, il ne peut y avoir au plus dans une chaîne que quatre sommets.

Comme G est série-parallèle et 2-sommet connexe, il existe un ensemble $\{v_1,v_2\}$ tel que $G = (V,E)$ se décompose en deux graphes $G_1 = (V_1,E_1)$ et $G_2 = (V_2,E_2)$ avec $\{v_1,v_2\} = V_1 \cap V_2$ et G_1 est un cycle. Soient L_1 et L_2 deux chemins de G_1 n'ayant en commun que les sommets v_1 et v_2. Dès que $|V| \geqslant 3$, une telle décomposition existe avec $|V_1| \geqslant 3$. D'après ce qui précède, tous les sommets de L_1 et L_2 sont de type k et ces chemins contiennent au plus 2 sommets internes chacun. Pour le reste de la preuve, nous supposerons que L_1 et L_2 n'ont qu'un seul sommet interne. Les autres configurations peuvent être traitées en utilisant les même arguments.

Ainsi L_1 a uniquement un nœud interne que l'on note u et on note par F_1 (resp. F_2) l'ensemble d'arêtes entre u et u_1 (resp. u et u_2). La chaîne L_2 a également un nœud interne qu'on note u'. On suppose sans perte de généralité que $|\delta(u)| \leqslant |\delta(u')|$. On notera également F_1' le faisceau d'arêtes entre u' et u_1 et F_2' celui entre u' et u_2. La figure 5.7 illustre ces nouvelles notations.

Assertion 8. $|F_2| = 1$

Preuve. La preuve est similaire à celle de l'assertion 5.

□

Assertion 9. $x(F_2) < 1$.

Preuve. Supposons le contraire. Par l'assertion 8, $x(F_2) = 1$. Soit f_2 l'arête constituant le faisceau F_2. D'abord, remarquons que $x(F_1) > k-1$. En effet, on a $|F_2| = 1$ et d'après l'assertion 5, $|F_1| \neq k-1$, donc $|F_1| \geqslant k$. Comme $x(e) > 0$ pour tout $e \in E$ et F_1 contient au maximum une arête fractionnaire, on a $x(F_1) > k-1$. Soit $\pi = (V_1, \ldots, V_p) \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ tel que $F_1 \subset \delta(\pi)$, disons $u_1 \in V_1$ et $u \in V_2$. Une telle partition existe puisque par l'assertion 1, tous les $x(e)$ apparaissent au moins dans deux équations de $S(x)$, donc dans au moins une contrainte de SP-partition.
On peut choisir $S(x)$ de telle façon que quelle que soit $\pi \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ telle que $F_1 \in \delta(\pi)$, on ait $F_2 \nsubseteq \delta(\pi)$. En effet, supposons que F_1 et F_2 appartiennent à la même multicoupe $\delta(\pi)$, pour une partition π de $S(x)$. Si $p = 2$, alors $x(\delta(\pi)) = x(F_1)+x(F_2) > k-1+1 = k$, une contradiction. Supposons que $p \geqslant 3$. Par la proprosition 5.13.2, on peut choisir $S(x)$ tel que $r(V \backslash (V_1 \cup V_2)) = 1$. Soit π' la partition obtenue en mettant V_1 et V_2 ensemble. On a alors

$$\begin{aligned} x(\delta(\pi')) &= x(\delta(\pi)) - x[V_1,V_2] \\ &< \begin{cases} (p + (\frac{k}{2} - 1)p_k) - (k-1) & \text{si } k \text{ est pair} \\ (p + \frac{k-1}{2}p_k - 1) - (k-1) & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \\ &= \begin{cases} p + (\frac{k}{2} - 1)2 - k + 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ p + \frac{k-1}{2}2 - 1 - k + 1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \\ &= p - 1. \end{aligned}$$

Ce qui contredit le fait que x est une solution.
Soit $\pi^1 \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ tel que $F_1 \subset \delta(\pi^1)$ et $F_2 \nsubseteq \delta(\pi^1)$. D'après la proposition

5.13.2, $\pi^1 \in P_k^*(x)$. D'après la proposition 5.14, on peut numéroter les ensembles de π^1 de telle manière que $u_1 \in V_2$ et u et $u_2 \in V_1$. D'après l'assertion 1, $x(f_2)$ apparaît au moins dans deux équations de $S(x)$. Donc il doit apparaître au moins une fois dans une équation induite par une partition. Soit $\pi^2 = (W_1, \ldots, W_q)$ une partition de $S(x)$ telle que $f_2 \in \delta(W_1, \ldots, W_q)$.

On montre que $S(x)$ peut être choisi tel que $q \geqslant 3$. Supposons le contraire, *i.e.* $q = 2$

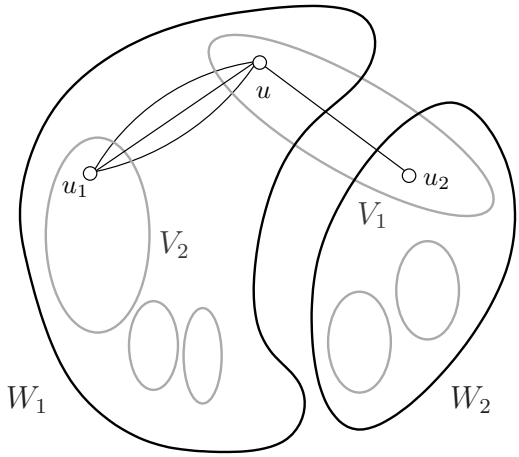

FIG. 5.8 – *cas où* $\pi^2 = (W_1, W_2)$

(cf figure 5.8). On montre que $con(W_1) = k$. Supposons que $con(W_1) = 1$. D'après l'assertion 1, chaque variable apparaît dans au moins deux équations de $S(x)$. On peut choisir $S(x)$ de telle manière que $x(f_2)$ apparaisse une fois dans les contraintes triviales et une fois dans une contrainte de SP-partition. Si cette contrainte est une contrainte de coupe de type 1, cela signifie que

$$x(W_1,W_2) = x(f_2) + \sum_{e \in [W_1,W_2] \setminus \{f_2\}} x(e) = 1,$$

et donc $\sum_{e \in [W_1,W_2] \setminus \{f_2\}} x(e) = 0$. Comme on n'a pas d'arête à 0, la contrainte $x(\delta(W_1)) = 1$ s'écrit $x(f_2) = 1$. La contrainte $x(\delta(W_1)) \geqslant 1$ est donc redondante par rapport aux contraintes triviales. Donc f_2 apparaît également dans une contrainte de SP-partition de type k.

On a donc $con(W_1) = con(W_2) = k$. On a supposé que $x(F_1) \geqslant x(F_2)$ et comme $r(u) = k$, on sait que $x[u,u_1] \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Donc d'après 5.13.2, $r(V \setminus (V_1 \cup V_2)) = 1$. Donc $con(V_1 \setminus \{u\}) = k$ puisque W_2 contient les sommets de $V_1 \setminus \{u\}$ et $r((V \setminus (V_1 \cup V_2)) \cap W_1) = 1$. Autrement dit, les sommets de type k de W_2 sont dans $V_1 \setminus \{u\}$. Comme $\pi^1 \in S(x)$ et $x[u,u_1] \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, on en déduit par la proposition 5.13 que $r(V_2) = k$. La partition

$\pi' = (V_2 \cup \{u\}, V_1 \backslash \{u\}, V_3, \ldots, V_p)$ est donc de type k. On note p' et p'_k respectivement la cardinalité de π' et le nombre d'éléments de π' de connexité k. On a

$$x(\delta(\pi')) = x(\delta(\pi^1)) - x(F_1) + x(F_2)$$

Comme $p' = p$, $p_k = 2 = p'_k$ et $k-1 \leqslant x(F_1) < k$, on obtient $x(\delta(\pi')) \leqslant x(\delta(\pi)) - (k-1) + 1$. Or $-k < -2$. Donc $x(\delta(\pi')) < x(\delta(\pi))$. C'est impossible.
Donc $q \geqslant 3$. Soit l le nombre d'ensembles de π^2 intersectant V_2. $u_1 \in V_2 \cap W_1$, donc $V_2 \cap W_1 \neq \emptyset$. On montre que $V_2 \cap W_2 \neq \emptyset$. En effet, soit $\pi' = (V_1 \backslash \{u\}, V_2 \cup \{u\}, V_3, \ldots, V_p)$. On a

$$\begin{aligned} x(\delta(\pi')) =& x(\delta(\pi^1)) - x(F_1) + x(F_2) \\ =& \begin{cases} p + \frac{k-1}{2} p_k - 1 - k + 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ p + (\frac{k}{2} - 1) p_k - k + 2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \\ =& \begin{cases} p + \frac{k-1}{2} 2 - 1 - k + 2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ p + (\frac{k}{2} - 1) 2 - k + 2 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \\ =& \begin{cases} p & \text{si } k \text{ est pair} \\ p & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \end{aligned}$$

La seule possibilité est que π' est de type 1. Donc les sommets de type k sont tous dans $V_2 \cup \{u\}$. La partition π_2 est de type k. On a, d'après la proposition 5.13.1.1, $con(W_1) = con(W_2) = k$. Donc les sommets de W_2 de type k sont aussi dans V_2, et ainsi $W_2 \cap V_2 \neq \emptyset$. On numérote les ensembles de π^2 de sorte que $W_1, \ldots, W_l$ intersectent V_2, et $W_{l+1}, \ldots, W_q$ ne l'intersectent pas. Soit $(U_1, \ldots, U_l)$ la partition de V_2 définie par $U_i = W_i \cap V_2$, pour tout $i \leqslant l$. La figure 5.9 décrit cette configuration. On sait que $r(U_1) = r(U_2) = k$. Donc $(U_1, \ldots, U_l)$ est de type k. Soit $W = \{u\}$. Soit $p_k^j = max(|\{con(V_j^t) = k,\ t = 1, \ldots, q\}| - 1,\ 0)$. En appliquant la proposition 5.5, on obtient

$$x[U_1, \ldots, U_l] \geqslant \begin{cases} l - 1 + (\frac{k}{2} - 1)(p_k^j - 1) + x(F_1) - x(F_2) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ l - 1 + \frac{k-1}{2}(p_k^j - 1) + x(F_1) - x(F_2) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

On a $p_k^j = q_k - 1$ car tous les sommets de type k sont dans $V_2 \cup \{u\}$. On a ainsi

$$x[U_1, \ldots, U_l] \geqslant \begin{cases} l - 1 + (\frac{k}{2} - 1)(q_k - 2) + x(F_1) - x(F_2) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ l - 1 + \frac{k-1}{2}(q_k - 2) + x(F_1) - x(F_2) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases} \quad (5.6)$$

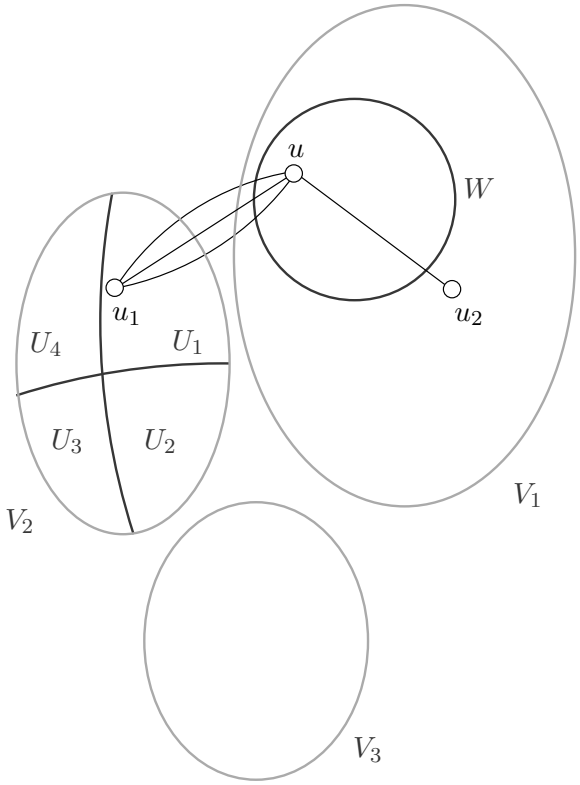

FIG. 5.9 – *Partition* $(U_1,\ldots,U_l)$ *de* V_2

Comme $F_2 \notin \delta(U_1,\ldots,U_l)$,

$$\begin{aligned} x[U_1,\ldots,U_l] &\leqslant x(\delta(W_1,\ldots,W_q)) - x(F_2) \\ &\leqslant \begin{cases} q + (\frac{k}{2}-1)q_k - x(F_2) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ q + \frac{k-1}{2}q_k - 1 - x(F_2) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Si $q = l$, alors

$$q - 1 + (\frac{k}{2}-1)(q_k-2) + x(F_1) - x(F_2) \leqslant q + (\frac{k}{2}-1)q_k - x(F_2) \qquad \text{si } k \text{ est pair,}$$
$$q - 1 + \frac{k-1}{2}(q_k-2) + x(F_1) - x(F_2) \leqslant q + \frac{k-1}{2}q_k - 1 - x(F_2) \qquad \text{si } k \text{ est impair.}$$

D'où $x(F_1) \leqslant k-1$, une contradiction.

Supposons maintenant que $l < q$. Considérons la partition $(Z_1,\ldots,Z_{q-l+1})$ définie par

$$Z_1 = \bigcup_{i=1}^{l} W_i,$$
$$Z_i = W_{i+l-1} \text{ pour } i = 2,\ldots,q-l+1.$$

Comme les sommets de type k sont dans $V_2 \cup \{u\} \subset Z_1$, il s'ensuit que la partition $(Z_1,\ldots,Z_{q-l+1})$ est de type 1. Comme $F_2 \subseteq E(Z_1)$ et les arêtes de F_2 n'appartiennent pas à $\delta(U_1,\ldots,U_l)$, on a

$$x(\delta(Z_1,\ldots,Z_{q-l+1})) = x(\delta(W_1,\ldots,W_q)) - x[U_1,\ldots,U_l] - x(F_2)$$
$$\leqslant \begin{cases} (q + (\frac{k}{2}-1)q_k - x[U_1,\ldots,U_k] - x(F_2) & \text{si } k \text{ est pair,} \\ (q + \frac{k-1}{2}q_k - 1) - x[U_1,\ldots,U_l] - x(F_2) & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Or $x(\delta(Z_1,\ldots,Z_{q-l+1})) \geqslant (q-l+1)-1$, car la partition $(Z_1,\ldots,Z_{q-l+1})$ est de type 1. On a donc

$$q + (\frac{k}{2}-1)q_k - x[U_1,\ldots,U_k] - x(F_2) \geqslant (q-l+1)-1$$
$$x[U_1,\ldots,U_k] \leqslant (\frac{k}{2}-1)q_k + l - x(F_2),$$

dans le cas où k est pair et sinon on a

$$(q + \frac{k-1}{2}q_k - 1) - x[U_1,\ldots,U_l] - x(F_2) \geqslant (q-l+1)-1$$
$$x[U_1,\ldots,U_l] \leqslant \frac{k-1}{2}q_k - 1 + l - x(F_2).$$

Par transitivité, et en considérant l'inégalité (5.6), on obtient

$$(\frac{k}{2}-1)q_k + l - x(F_2) \geqslant l - 1 + (\frac{k}{2}-1)(q_k-2) + x(F_1) - x(F_2) \quad \text{si } k \text{ est pair,}$$
$$\frac{k-1}{2}q_k - 1 + l - x(F_2) \geqslant l - 1 + \frac{k-1}{2}(q_k-1) + x(F_1) - x(F_2) \quad \text{si } k \text{ est impair.}$$

D'où

$$k - 2 \geqslant x(F_1) \quad \text{si } k \text{ est pair,}$$
$$\frac{k-1}{2} \geqslant x(F_1) \quad \text{si } k \text{ est impair.}$$

Comme $x(F_1) > k-1$, on obtient une contradiction. □

Par l'assertions 6, $x(F_1) < k$, par l'assertion 9, $x(F_2) < 1$. Or $r(u) = k$. On en déduit que F_1 est constitué d'exactement k arêtes et F_2, d'exactement une arête. Cette dernière sera notée f_2. Elle est fractionnaire. De plus, une des arêtes de F_1 est fractionnaire. On la note f_1.

Assertion 10. L_2 contient un sommet interne.

Preuve. On montre que si L_2 ne contient pas de sommet interne, *i.e.* si L_2 est un faisceau d'arêtes entre u_1 et u_2, alors on a une contradiction avec le fait que x est un point extrême. Supposons que L_2 ne contient pas de sommet, c'est-à-dire L_2 est un faisceau d'arête(s). Notons ce faisceau par F_0. On remarque que si F_1 intervient dans une partition de cardinalité supérieure ou égale à 3, disons $(V_1,\ldots,V_p)$ avec $F_1 \subseteq [V_1,V_2]$, alors, par la proposition 5.13, on a $r(V_1) = r(V_2) = k$. Or, par la proposition 5.2, on sait que $x[V_1,V_2] \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$. D'autre part, $x(F_1) > k-1$. De plus, dès que $k \geqslant 2$, $k-1 \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$. Donc $x[V_1,V_2] \geqslant x(F_1) > \lceil \frac{k}{2} \rceil$, une contradiction. Donc il n'existe pas de partition de $P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ faisant intervenir F_1 qui soit de cardinalité supérieure ou égale à 3.
Comme $x(f_1)$ est fractionnaire, la variable apparaît dans $S(x)$ dans deux contraintes de coupe, donc il existe au moins une contrainte de coupe faisant intervenir F_1 et F_0. On en déduit que $x(F_0) \leqslant k - x(F_1)$. Donc $x(F_0) < 1$. On note f_0 l'arête fractionnaire qui constitue F_0. La figure 5.10 illustre ce cas.
Supposons que la coupe $(\{u\},V\backslash\{u\})$ est serrée. Donc $x(f_1) = x(f_2)$. Soit $(W,V\backslash W)$

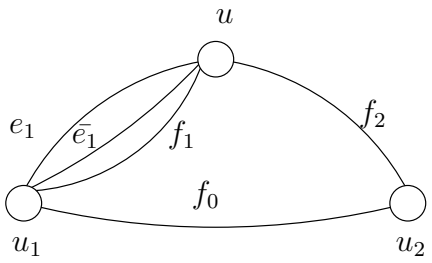

FIG. 5.10 – *Cas ou L_2 est un faisceau d'arête dans le cas $k = 3$*

une coupe serrée telle que $F_1 \in \delta(W)$ et $u \in W$. $x(\delta(W\backslash\{u\})) = k - x(F_1) + x(F_2) = 1$. Donc $(W\backslash\{u\},(V\backslash W) \cup \{u\})$ est une coupe serrée de type 1, car x est une solution valide. Chaque coupe $(W_t,V\backslash W_t)$ de $S(x)$ dans laquelle intervient F_1 peut donc être remplacée par une coupe $(W_t\backslash\{u\},(V\backslash W_t) \cup \{u\})$. On obtient un système équivalent. Pourtant, $x(f_1)$ apparaît au plus une fois. Cela contredit l'assertion 1.
Donc $(\{u\},V\backslash\{u\})$ n'est pas serré. Soit y défini par

$$y(e) = \begin{cases} x(e) & \text{pour tout } e \in E\backslash\{f_0,f_1,f_2\} \\ x(f_1) + \epsilon & \text{si } e = f_1 \\ x(f_2) + \epsilon & \text{si } e = f_2 \\ x(f_0) - \epsilon & \text{si } e = f_0 \end{cases}$$

avec $\epsilon = min(x(f_0),1 - x(f_1),1 - x(f_2))$. On voit que $y(\pi) \geqslant x(\pi)$ quel que soit π. Donc y appartient à CPP(G,r). De plus, y est solution de $S(x)$. En effet, toutes les

contraintes de SP-partition faisant intervenir F_1 sont des contraintes de coupe qui font intervenir F_0 et ne font pas intervenir F_2. Quant aux contraintes de SP-partition faisant intervenir F_2 elles font nécessairement intervenir F_0. Enfin, étant donné le graphe, les contraintes de SP-partition faisant intervenir F_0 font intervenir nécessairement soit F_1, soit F_2. Ainsi y est également solution de $S(x)$. Ce qui contredit le fait que x est un point extrême. □

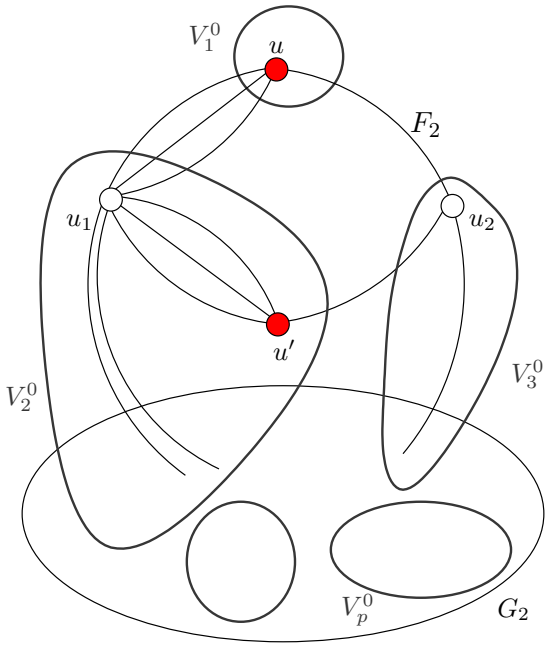

FIG. 5.11 – *Partition* π_0

Soit $\pi_0 = (V_1^0,\ldots,V_p^0) \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ tel que $p \geqslant 3$ et $F_1 \in \delta(\pi)$. Cette partition existe. En effet, comme F_1 contient une arête fractionnaire, et que, d'après l'assertion 1, chaque variable apparaît deux fois, $x(f_1)$ apparaît au moins une fois dans une contrainte de SP-partition différente de $(\{u\},V\backslash\{u\})$. De plus, d'après la proposition 5.3, si π_0 est tel que un V_i^0, $i \in \{1,\ldots,p\}$, contient u et u_2, alors $x[\{u\},V_i^0\backslash\{u\}] = x(f_2) < 1$, cela contredit la proposition 5.3. Donc π_0 est de cardinalité supérieure ou égale à 3. La partition π_0 est de type k. La figure 5.11 illustre cette partition. On note p_k le nombre d'ensembles de π_0 de type k. On note également

$$\beta_0 = \begin{cases} p + \frac{k-1}{2}p_k - 1 & \text{si } k \text{ impair,} \\ p + (\frac{k}{2} - 1)p_k & \text{si } k \text{ pair.} \end{cases}$$

Assertion 11. $|F_2'| = 1$

Preuve. Supposons que $|F_2'| \geqslant 2$. D'après la proposition 5.14, on sait que u, u_1 et u_2 appartiennent à trois ensembles différents de la partition π_0. Supposons que $u \in V_1^0$, $u_1 \in V_2^0$ et $u_2 \in V_3^0$. Comme $x(F_1) \geqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, on déduit de la proposition 5.13 que $r(V_3^0) = 1$. $x(F_2') > 1$ donc si $F_2' \subseteq \delta(\pi)$, d'après la proposition 5.13, le type de connexité des ensembles de la partition qui sont aux extrémités de F_2' est k. Cela contredit le fait que $r(V_3^0) = 1$. Donc $F_2' \nsubseteq \delta(\pi)$. Ainsi $u' \in V_3^0$. Par ailleurs $r(u') = k$. Cela contredit le fait que $r(V \backslash (V_1^0 \cup V_2^0)) = 1$. □

On note f_2' l'arête constituant F_2' et f_1' l'arête non nécessairement entière dans le faisceau F_1'. Pour $F \subseteq E$ et x une solution de CPP(G,r), on note $P(x,F)$ l'ensemble des partitions π d'au moins 3 ensembles, appartenant à $P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ et telles que $F \subseteq \delta(\pi)$.

Assertion 12. le système $S(x)$ peut être choisi de telle sorte que $P(x,F_1) = \{\pi_0\}$.

Preuve. Considérons $\pi_0 = (V_1^0, \ldots, V_p^0)$ la partition définie précédement. Soit $\pi_0' = (V_1^0 \cup V_2^0 \backslash \{u'\}, \{u'\}, V_3^0, \ldots, V_p^0)$. On montre que $x(F_1) = x(F_1')$. On a

$$\begin{aligned} x(\delta(\pi_0')) &= x(\delta(\pi_0)) + x(F_1') - x(F_1) \\ &= \beta_0 + x(F_1') - x(F_1). \end{aligned}$$

Comme π_0' a la même cardinalité et le même nombre d'ensembles de type k que π_0, on a $x(\delta(\pi_0')) \geqslant \beta_0$. Donc $x(F_1') \geqslant x(F_1)$. De même il existe une partition de $P_1^*(x) \cup P_k^*(x)$ faisant intervenir F_1'. Par le même raisonnement, on obtient $x(F_1) \geqslant x(F_1')$. Donc $x(F_1) = x(F_1')$ et $x(f_1) = x(f_1')$.
On a donc $x(\delta(\pi_0')) = x(\delta(\pi_0))$. Quelque soit la partition π_s de $P(x,F_1)$, on peut construire une partition π_s' de la même façon (c'est-à-dire en faisant l'union des ensembles contenant u et u' et en excluant $\{u'\}$ pour en faire un ensemble de la partition). On obtient pour toutes les $\pi_s \in P(x,F_1)$, l'égalité $x(\delta(\pi_s)) = x(\delta(\pi_s'))$. On remplace dans $S(x)$ toutes les équations relatives aux partitions $\pi_s \in P_1^*(x) \cup P_k^*(x) \backslash \{\pi_0\}$ par les partitions π_s'. Le système obtenu reste non singulier et x reste l'unique solution de $S(x)$.
Ainsi le système $S(x)$ peut être choisi de telle sorte que $P(x,F_1) = \{\pi_0\}$. □

Assertion 13.

$$x(f_1) = x(f_2) = x(f_1') = x(f_2') = \frac{1}{2}$$

Preuve. On montre que $x(\delta(u)) = x(\delta(u')) = k$. D'après l'assertion 12, le système $S(x)$ peut être choisi de telle sorte que $P(x,F_1) = \{\pi_0\}$ et puisque $x(f_1)$ est fractionnaire et qu'il faut au moins deux équations dans $S(x)$ pour chaque variable, cela impose que $x(\delta(u)) = k$ soit également dans $S(x)$. En faisant le même raisonnement pour F_1', on obtient $x(\delta(u')) = k$.

Maintenant on montre que $x(f_2) + x(f_2') = 1$. Supposons que $x(f_2) + x(f_2') > 1$ (le raisonnement est similaire pour $x(f_2) + x(f_2') < 1$). D'après la proposition 5.1, CPP($G\backslash F_1$) est entier. Soit x_1 la restriction de x sur $E\backslash F_1$. Le point x_1 est fractionnaire. Donc ce n'est pas un point extrême. Il existe t points extrêmes x^i, pour $i = 1,\ldots,t$, tels que $x_1 = \sum_i \lambda_i x^i$ avec $\lambda_i \geqslant 0$ et $\sum_i \lambda_i = 1$.
Les x_i sont solutions de $S_{F_1}(x)$. Comme $x_1(f_2) + x_1(f_2') > 1$, il existe une solution x^{i_0} telle que $x^{i_0}(f_2) + x^{i_0}(f_2') > 1$. Comme x^{i_0} est entier, on a $x^{i_0}(f_2) = x^{i_0}(f_2') = 1$. Soit

$$y(e) = \begin{cases} 1 & \text{pour } e \in \{e_1,\bar{e_1}\} \\ 0 & \text{si } e = f_1 \\ x^{i_0}(e) & \text{pour } e \in E\backslash\{f_0,f_2\} \end{cases}$$

Ainsi d'une part y est solution de $S_{F_1}(x)$ et d'autre part, y vérifie les équations $y(e_1) = 1$, $y(\delta(u)) = k$ et $y(\delta(\pi_0)) = \beta_0$, qui sont exactement les équations qui manquent à $S_{F_1}(x)$ pour donner $S(x)$. Donc y est solution de $S(x)$. Or $y \neq x$. Cela contredit le fait que x est la solution unique de $S(x)$. □

On note pour le reste de la preuve, $W = V\backslash\{u,u',u_1,u_2\}$.

Assertion 14. Les deux propriétés suivantes sont vraies.

1) $r(W) = k$,
2) $|[u_1,S]| \geqslant k$ et $|[u_2,S]| \geqslant 1$, pour tout $S \subseteq W$ tel que S est connexe et $r(S) = k$.

Preuve. (1). Supposons que les sommets de type k sont inclus dans $\{u,u',u_1\}$. On construit le graphe $G^* = (V^*,E^*)$ à partir de G en contractant u,u' et u_1 et en supprimant f_2. On appelle w le sommet obtenu par la contraction. On définit r^*, le vecteur de connexité de G^*, par $r^*(v) = 1$ pour tout $v \in V^*$. On montre que la restriction de x sur G^*, que l'on note x^*, appartient à CPP(G^*,r^*). Soit $\pi^* = (V_1^*,\ldots,V_p^*)$ une partition de V^*. On suppose par exemple que $w \in V_1^*$. Soit $\pi = (U_1,\ldots,U_p)$ la partition de G

définie par

$$\begin{aligned} U_1 &= V_1^* \backslash \{w\} \cup \{u_1,u_2,u\}, \\ U_i &= V_i^* \qquad\qquad\qquad \text{pour } i = 2,\ldots,p. \end{aligned}$$

Si $f_2' \notin \delta(\pi^*)$, alors $x^*(\delta(\pi^*)) = x(\delta(\pi)) \geqslant p-1 = p^*-1$. La contrainte de SP-partition induite par π^* est vérifiée par x^*. Supposons maintenant que $f_2' \in \delta(\pi^*)$. Soit $\pi' = (U_1\backslash\{u\},\{u\},U_2,\ldots,U_p)$. La partition π' est de type k. Si k est impair, on a

$$\begin{aligned} x^*(\delta(\pi^*)) &= x(\delta(\pi')) - x(\delta(u)) \\ &\geqslant p' + \frac{k-1}{2}p_k' - 1 - k \\ &\geqslant (p^*+1) + \frac{k-1}{2}2 - 1 - k \\ &\geqslant p^* - 1, \end{aligned}$$

où p' est la cardinalité de π' et p_k' est le nombre d'ensembles de type k de π'. Si k est pair, on a

$$\begin{aligned} x^*(\delta(\pi^*)) &= x(\delta(\pi')) - x(\delta(u)) \\ &\geqslant p' + (\frac{k}{2}-1)p_k' - k \\ &\geqslant (p^*+1) + (\frac{k}{2}-1)2 - k \\ &\geqslant p^* - 1. \end{aligned}$$

Ainsi la contrainte de SP-partition induite par π^* est vérifiée par x^*. Ceci est vrai pour toute partition π^* de G^*, donc $x^* \in \mathrm{CPP}(G^*,r^*)$.
D'après la proposition 5.12, on peut choisir $S(x)$ tel que $P_1^*(x) = \emptyset$. De plus, d'après l'assertion 12, on peut choisir $S(x)$ tel que $P(x,F_1) = \{\pi_0\}$. Soit $\pi_0^* = (U_1^*,\ldots,U_{p^*}^*)$ la partition de V^* telle que

$$\begin{aligned} U_1^* &= (V_2^0\backslash\{u',u_1\}) \cup \{w\}, \\ U_i^* &= V_{i+1}^0 \qquad\qquad\qquad \text{pour } i = 2,\ldots,p-1. \end{aligned}$$

Remarquons que la cardinalité p^* de π_0^* est $p^* = p-1$. On a $x(\delta(\pi_0^*)) = p-2 = p^*-1$. Notons par $Q^*(F_1')$ l'ensemble des partitions obtenues à partir des partitions $\pi_1 \in P(x,F_1')$ en otant u_1 de l'ensemble contenant ce sommet dans π_1 (à l'instar de la partition π_0^* obtenue à partir de π_0).

Soit $\pi'_1 \in Q^*(F'_1)$. On a

$$\begin{aligned} x^*(\delta(\pi'_1)) &= x(\delta(\pi_1)) + x(\delta(u)) \\ &= p'_1 - 1 \end{aligned}$$

Par conséquent, x^* est solution de

$$S(x^*) = \begin{cases} x(e) = 1 & \text{pour tout } e \in E_1(x)\backslash(E_1(x) \cap (F_1 \cup F'_1)), \\ x(\delta(\pi'_1)) = p'_1 - 1 & \text{pour tout } \pi'_1 \in Q^*(F'_1). \end{cases}$$

x^* est fractionnaire. D'après l'hypothèse de récurence, CPP(G^*,r^*) est entier, donc x^* n'est pas un point extrême. Par concéquent, il existe des points extrêmes dont x est une combinaison convexe. Comme, d'après l'assertion 13, $x(f'_2) = 1/2$, il en existe au moins un, disons y^*, tel que $y^*(f'_2) > 0$. Comme y^* est entier, on en déduit que $y^*(f'_2) = 1$. Soit $\bar{y}$ défini par

$$\bar{y}(e) = \begin{cases} y^*(e) & \text{pour tout } e \in E\backslash(\delta(u) \cup F'_1), \\ 1 & \text{pour tout } e \in (E_1(x) \cap (F_1 \cup F'_1)) \cup \{f_2\}, \\ 0 & \text{pour tout } e \in \{f_1, f'_1\}. \end{cases}$$

On a $\bar{y}(\delta(u)) = k$, $\bar{y}(\delta(u')) = k$, $\bar{y}(\delta(\pi_0)) = \beta_0$, donc y est une solution de $S(x)$.

(2). D'abord on montre $|[u_1,S]| \geqslant 1$ (le raisonnement est le même pour $|[u_2,S]| \geqslant 1$). Supposons le contraire, c'est-à-dire $|[u_1,S]| = \emptyset$. u_2 est alors un sommet d'articulation, ce qui contredit l'assertion 2. Donc $|[u_1,S]| \geqslant 1$ et $|[u_2,S]| \geqslant 1$.

On montre maintenant que $|[u_1,S]| \geqslant k$. Supposons le contraire c'est-à-dire que $1 \leqslant |[u_1,S]| \leqslant k-1$. Considérons la partition $\pi_0 = (V_1^0, \ldots, V_p^0)$ définie précédemment. Comme $r(V\backslash(V_1^0 \cup V_2^0)) = 1$, et que $r(S) = k$, au moins une partie des sommets de S est dans V_2^0. Soit $S^0 = S \cap V_2^0$. Comme $|[u_1,S]| \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$, on a $x([u_1,S]) \leqslant \lceil \frac{k}{2} \rceil$. La figure 5.12 illustre la partition π_0 avec l'ensemble S.

Considérons la partition $(S^0,(V_2^0\backslash S^0) \cup \{u\},V_3^0,\ldots,V_p)$. Cette partition est de type k avec la même cardinalité et le même nombre d'ensembles de type k que la partition π_0. Cependant on a

$$\begin{aligned} x(\delta(S^0,(V_2^0\backslash S^0) \cup \{u\},V_3^0,\ldots,V_p)) &= x(\delta(\pi_0)) - x(F_1) + x([S^0,u_1]) \\ &\leqslant \beta_0 - (k - 1/2) + (k-1) \\ &= \beta_0 - 1/2. \end{aligned}$$

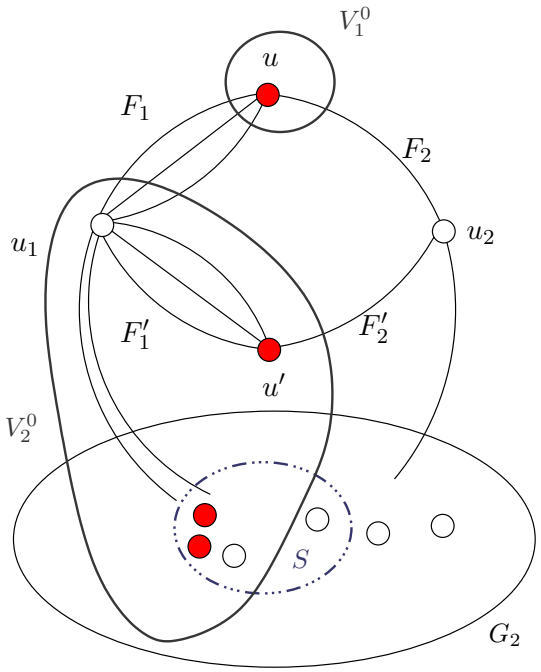

FIG. 5.12 – *Partition π_0 et ensemble S*

Cela contredit le fait que x est une solution de CPP(G,r). Ainsi $|[S,u_1]| \geqslant k$. □

En contractant les arêtes de G_2, on obtient une toupie, une contradiction. Ceci termine la preuve du théorème. □

Ainsi on a montré qu'il n'existe pas de point exrême fractionnaire dans le polytope CPP(G,r). Autrement dit pour les graphes (G,r) série-parallèles et sans toupie, le polytope SNDP(G,r) est entièrement décrit par les contraintes triviales et les contraintes de SP-partition. Didi Biha et al. [26] ont montré que dans le cas où $k = 2$, le polytope est décrit par les contraintes triviales et les contraintes de partition. Comme les contraintes de SP-partition et les contraintes de partition sont identiques dans le cas où $r \in \{1,2\}^V$, on en conclut que pour les graphes série-parallèles et sans toupie, le polytope des sous-graphes $\{1,k\}$-arête connexes, $k \geqslant 2$, est entièrement décrit par les contraintes triviales et les contraintes de SP-partition.

5.6 Nouvelles facettes pour le polytope SNDP(G,r)

Dans cette partie, nous présentons une nouvelle famille d'inégalités définissant des facettes pour le polytope SNDP(G,r). Ces inégalités ont été introduites par Didi Biha et al. [26], lorsque $r \in \{1,2\}^V$. Nous les généralisons ici pour le cas où $r \in \{1,k\}^V$, $k \geqslant 2$.

Étant donnés un graphe G quelconque et un vecteur type de connexité $r \in \{1,k\}^V$, $k \geqslant 2$, soit $(V_1,V_1,\ldots,V_t,V_{t+1})$ une partition de V telle que $t \geqslant 2$ et

1) $r(V_0) = 1$
2) $r(V_i) = k$ pour $i = 1,2,\ldots,t$
3) $[V_i,V_j] = \emptyset$ pour $i = 1,2,\ldots,t-1$, et $j = i+1,\ldots,t$.

L'inégalité

$$x(\delta(V_0,V_1,\ldots,V_t,V_{t+1})) + x(\delta(V_0)) \geqslant kt + 2 \tag{5.7}$$

est appelée inégalité de toupie.

Théorème 5.21. *L'inégalité (5.7) est valide pour le polytope SNDP(G,r).*

Preuve. Soient $H = (V,F)$ une solution et x^F son vecteur d'incidence. On distingue deux cas selon que le nombre d'arêtes de F incidentes à V_0 est égal à 1 ou supérieur ou égal à 2. Posons $I_0 = \{i_0 \mid [V_0,V_{i_0}] \cap F \neq \emptyset\}$.

Cas 1: $|I_0| = 1$, disons $I_0 = \{i_0\}$. Puisque H vérifie les contraintes de coupes, on a

$$x^F(\delta(V_i)) \geqslant k, \text{ pour } i \neq i_0,\ 1 \leqslant i \leqslant t \tag{5.8}$$

$$x^F(\delta(V_{i_0} \cup V_0)) \geqslant k \tag{5.9}$$

$$x^F(\delta(V_0)) \geqslant 1 \tag{5.10}$$

En sommant (5.8), (5.9) et deux fois l'inégalité (5.10), on en déduit que x^F vérifie bien (5.7).

Cas 2: $|I_0| \geqslant 2$. On considère simplement les inégalités de coupe induites par les ensembles $V_0,V_1,\ldots,V_t$.

$$x^F(\delta(V_i)) \geqslant k \quad \text{pour } i = 1,\ldots,t$$
$$x^F(\delta(V_0)) \geqslant 2 \quad \square$$

En les sommant, on en déduit également que x^F vérifie bien (5.7).
Ainsi (5.7) est une inégalité valide puisqu'elle est vérifiée par toutes les solutions. □

On voit expérimentalement que l'inégalité de toupie définit une facette. De plus, Didi et al. [26] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles définissent des facettes dans le cas où $r \in \{1,2\}^V$. Nous pensons que ces conditions peuvent se généraliser au cas où $r \in \{1,k\}^V$, $k \geqslant 2$ ce qui nous motive à donner la conjecture suivante.

Théorème 5.22. *Supposons que SNDP($G(V_{t+1})$,$r[V_{t+1}]$) est de pleine dimension. Si les propositions*

1) SNDP($G(V_i)$,$r[V_i]$) est de pleine dimension pour $i = 0,1,\ldots,t$,
2) $|[V_0,V_i]| \geqslant 1$ pour $i = 1,\ldots,t$ et
3) $|[V_i,V_{t+1}]| \geqslant k$ pour $i = 1,\ldots,t$,

sont vérifiées, alors l'inégalité (5.7) définit une facette de SNDP(G,r).

Preuve. Supposons que (1), (2) et (3) sont vérifiées. Nous montrons que (5.7) définit une facette. Notons $\mathcal{F}_1$ l'ensemble des solutions de SNDP(G,r) vérifiant (5.7) à l'égalité. On peut numéroter les arêtes de telle manière que les arêtes du faisceau $[V_0,V_i]$ soient $e_{i,1},\ldots,e_{i\ |\ [V_0,V_i]|}$ pour $i = 1,\ldots,t$, et que les arêtes du faisceau $[V_i,V_{t+1}]$ soient $e_{t+i,1},\ldots,e_{t+i\ |\ [V_i,V_{t+1}]|}$.

Soit V_i un ensemble de π, pour un certain $i \in \{1,\ldots,t\}$. Soit $\widehat{F_i}$ l'ensemble d'arêtes suivant.

$$\widehat{F_i} = \{e_{i,1}\} \cup \{e_{t+j,1},e_{t+j,2},e_{t+j,3},\ \ldots\ ,e_{t+j,k} \mid j = 1,\ldots,t\}$$

Soit $x^{\widehat{F_i}}$ le vecteur d'incidence associé.

$x^{\widehat{F_i}}$ vérifie (5.7) à l'égalité. Donc $\mathcal{F}_1$ est une face propre. Supposons que $\mathcal{F}_1$ est inclus dans une facette $\mathcal{F} = \{x \in \text{SNDP}(G,r) \mid bx = b_0\}$.
Soit $j \in \{1,\ldots,t\}$, $j \neq i$, $\widehat{F_j}$ est également solution de SNDP(G,r). Donc $bx^{\widehat{F_i}} = b_0 = bx^{\widehat{F_j}}$, donc $b(e_{i,1}) = b(e_{j,1})$.

Soit $\widehat{F}_{i,j} = \widehat{F}_j \cup \{e_{i,1}\} \backslash \{e_{t+i,1}, e_{t+j,1}\}$. $\widehat{F}_{i,j}$ est une solution de $\mathcal{F}_1$. Pour $k_1 \in \{2, \ldots, |[V_i, V_{t+1}]|\}$ et $k_2 \in \{2, \ldots, |[V_j, V_{t+1}]|\}$, considérons les ensembles suivants.

$$\widehat{F}'_{i,j} = (\widehat{F}_{i,j} \backslash \{e_{t+i,1}\}) \cup \{e_{t+i,k_1},\} \tag{5.11}$$

$$\widehat{F}''_{i,j} = (\widehat{F}_{i,j} \backslash \{e_{t+j,1}\}) \cup \{e_{t+j,k_2}.\} \tag{5.12}$$

Les solutions $\widehat{F}'_{i,j}$ et $\widehat{F}''_{i,j}$, pour tout i,j, sont des points de $\mathcal{F}$. On en déduit que $b(e_{t+i,1}) = b(e_{t+i,k_1})$, pour $k_1 \in \{2, \ldots, |[V_i, V_{t+1}]|\}$ et $b(e_{t+j,1}) = b(e_{t+j,k_2})$, pour $k_2 \in \{2, \ldots, |[V_j, V_{t+1}]|\}$. De plus, en comparant $\widehat{F}_i$ et $\widehat{F}_{i,j}$, on en déduit que $b(e_{t+i,1}) + b(e_{t+j,1}) = b(e_{i,1})$, c'est-à-dire, $b(e_{i,1}) = 2b(e_{t+i,1})$.

On trouve donc que les arêtes entre V_0 et V_i, pour $i = 1, \ldots, t$, ont les même coefficients α dans la contrainte $bx = b_0$, toutes les autres ont le même coefficient β dans cette contrainte. De plus $\alpha = 2 * \beta$. Enfin, par le lemme (2.5), on en déduit que $\mathcal{F}_1$ est une facette. □

Remarque 5.23. Lorsque $t = 2$, la contrainte de toupie est dominée par les contraintes de SP-partition.

Remarque 5.24. Si la connexité d'un ensemble V_i, pour $i = 1, \ldots, t$, est 1, alors la contrainte de toupie est dominée par les contraintes de SP-partition.

5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons montré que le polytope associé au problème du sous-graphe (1,k)-arête connexe, lorsque $k \geqslant 2$ et lorsque le graphe sous-jacent est série-parallèle et sans toupie, est complétement décrit par les contraintes triviales et les contraintes de SP-partition. Par conséquent, le problème du sous-graphe (1,k)-arête connexe, lorsque $k \geqslant 2$, pourrait être résolu en temps polynomial à l'aide d'une méthode de coupe pour les graphes série-parallèles sans toupie si l'on disposait d'un algorithme polynomial pour séparer les contraintes de SP-partition dans ce cas. Pour $k = 2$, Kerivin et Mahjoub [61] ont donné un algorithme de séparation polynomial pour ces contraintes, basé sur les fonctions sous-modulaires. Barahona et Kerivin [9] ont ensuite amélioré la complexité de cet algorithme. L'extension de ces algorithmes au cas où $k \geqslant 3$ est encore une question ouverte.

Chapitre 6

Le problème du sous-graphe (1,2,3)-arête connexe

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons le problème SNDP lorsque les types de connexité des sommets sont 1, 2 ou 3. Ce problème modélise des réseaux hautement fiables. Soient $G = (V,E)$ un graphe et $r \in \{1,2,3\}$ un vecteur de type de connexité associé à V. Le problème dans ce cas est équivalent au programme en nombres entiers suivant.

$$Min \sum_{e \in E} c(e)x(e)$$

s.c

$$x(\delta(W)) \geqslant 1 \qquad \text{pour tout } W \subset V,\ W \neq \emptyset,\ con(W) = 1, \tag{6.1}$$

$$x(\delta(W)) \geqslant 2 \qquad \text{pour tout } W \subset V,\ W \neq \emptyset,\ con(W) = 2, \tag{6.2}$$

$$x(\delta(W)) \geqslant 3 \qquad \text{pour tout } W \subset V,\ W \neq \emptyset,\ con(W) = 3, \tag{6.3}$$

$$x(e) \geqslant 0 \qquad \text{pour tout } e \in E, \tag{6.4}$$

$$x(e) \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } e \in E, \tag{6.5}$$

$$x(e) \in \{0,1\} \qquad \text{pour tout } e \in E, \tag{6.6}$$

Dans ce cas, SNDP(G,r) $=conv\{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid x$ satisfait (6.1),(6.2),(6.3),(6.4),(6.5),(6.6)$\}$. Ce chapitre présente des résultats théoriques sur le problème du sous-graphe $\{1,2,3\}$-

arête connexe. Ce problème généralise les problèmes considérés dans les chapitres précédents. De plus, le chapitre suivant complètera cette étude en présentant des résultats expériementaux issus de l'implémentation des algorithmes de résolution de ce problème.

6.2 Inégalités valides

Dans cette section, nous présentons des classes d'inégalité valides pour le problème du sous-graphe {1,2,3}-arête connexe. Nous voyons en particulier comment les contraintes de partition, de SP-partition, de r-recouvrement généralisées et de F-partition se déclinent pour ce problème.

6.2.1 Inégalité de partition

Étant donnée une partition $(V_1,\ldots,V_p)$ de V soient $I_1 = \{i \mid con(V_i) = 1\}$ et $I_2 = \{i \mid con(V_i) \geqslant 2\}$. Alors, pour le cas spécifique du problème du sous-graphe {1,2,3}-arête connexe, les inégalités de partition s'écrivent de la manière suivante.

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant \begin{cases} p-1 & \text{si } I_2 = \emptyset, \\ \lceil p_2 + 3/2p_3 \rceil + p_1 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{6.7}$$

pour toute partition $(V_1,\ldots,V_p)$ de V.

6.2.2 Inégalité de SP-partition

Étant donnée une partition $\pi = (V_1,\ldots,V_p)$, p_i désigne le nombre de classes de la partition ayant une connexité i et $r_{max} = max(con(V_i) \mid V_i \in \pi)$. Les inégalités de SP-partition s'écrivent, pour le problème du sous-graphe {1,2,3}-arête connexe, de la manière suivante.

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p) \geqslant \begin{cases} p-1 & \text{si } r_{max} = 1, \\ p & \text{si } r_{max} = 2, \\ p_1 + p_2 + 2p_3 - 1 & \text{si } r_{max} = 3, \end{cases} \tag{6.8}$$

pour tout partition $(V_1,\ldots,V_p)$ de V.

6.2.3 Inégalité de r-recouvrement généralisée

Soient H un sous-ensemble de sommets de V, $H \neq V$ et $T \subseteq \delta(H)$ un sous-ensemble d'arêtes. Pour chaque arête $e = uv$ notons $T_e = u,v$, les dents. Pour une partition $(H_1,\ldots,H_p)$ de H, on note $q_i = |\{H_j \in (H_1,\ldots,H_p) \mid con(H_j) = i\}|$. Étant donnée une partition $(H_1,\ldots,H_p)$ de H, $p \geqslant 3$, telle que

- $r(H_i) \geqslant 1$, pour tout $i = 1,\ldots,p$,
- pas plus de $con(H_i) - 1$ dents intersectent H_i, pour tout $i = 1,\ldots,p$,
- au moins 3 H_i sont intersectés par des dents,
- $2q_2 + 3q_3 - |T|$ est impair,

les inégalités de r-recouvrement s'écrivent pour le problème du sous-graphe {1,2,3}-arête connexe de la manière suivante.

$$x(\delta(H_1,H_2,\ldots,H_p)) + x(\delta(H)\backslash T) \geqslant \left\lceil \frac{2 * q_2 + 3 * q_3 - |T|}{2} \right\rceil + q_1 \qquad (6.9)$$

6.2.4 Inégalité de F-partition

Soit $\pi = (V_0,V_1,\ldots,V_p)$ une partition de V. Soient $F \subseteq \delta(V_0)$ et $p_i = |\{j \mid con(V_j) = i,\ j = 1,\ldots,p\}|$ pour $i \in 1,\ldots,p$. Les inégalités de F-partition s'écrivent, pour le problème du sous-graphe {1,2,3}-arête connexe, de la manière suivante.

$$x(\delta(V_0,V_1,\ldots,V_p)\backslash F) \geqslant p_1 + p_2 + 2p_3 - \left\lfloor \frac{p_1 + p_3 + |F|}{2} \right\rfloor, \qquad (6.10)$$

pour toute partition $(V_1,\ldots,V_p)$, $p \geqslant 2$, et pour tout $F \subseteq \delta(V_0)$.

6.3 Inégalités de toupie

Nous présentons ici une généralisation des contraintes données par Didi Biha et al. [26].

Définition 6.1. *Une partition $\pi = (V_0,V_1,\ldots,V_{t+1})$ de G a une configuration de toupie si π vérifie les propriétés suivantes.*

- $t \geqslant 3$,
- $r(V_0) = 1$
- $r(V_i) = k$ *pour* $i = 1,\ldots,t$ *et* $k \in \{2,3\}$
- $[V_i,V_j] = \emptyset$ *pour* $i = 1,\ldots,t-1$, $j = 2,\ldots,t$ *et* $i < j$.

À une configuration de toupie $\pi = (V_0,V_1,\ldots,V_{t+1})$, on associe la contrainte

$$x(\delta(\pi)) + x(\delta(V_0)) \geqslant \sum_{i=1}^{t} con(V_i) + 2, \tag{6.11}$$

qui est appelée *contrainte de toupie*.

Lemme 6.2. *L'inégalité de toupie (6.11) est valide pour le problème du $\{1,2,3\}$-arête connexe.*

Preuve. Soient $H = (V,F)$ une solution de SNDP(G,r) et x^F le vecteur d'incidence associé à H. Soit $I_0 = \{i_0 \mid [V_0,V_{i_0}] \cap F \neq \emptyset\}$. On distingue deux cas selon que I_0 est un singleton ou un ensemble d'arêtes.
Cas 1: $|I_0| = 1$.
Posons $I_0 = \{i_0\}$. On a

$$\begin{aligned} x^F(\delta(V_i)) &\geqslant con(V_i) \quad \forall i \in \{1,\ldots,t\},\ i \neq i_0 \\ x^F(\delta(V_{i_0} \cup V_0)) &\geqslant con(V_{i_0}) \end{aligned}$$

En sommant ces inégalités, on obtient l'inégalité

$$x^F(\delta(\pi) \backslash \delta(V_0)) \geqslant \sum_{i=1}^{t} con(V_i).$$

On ajoute à cela deux fois l'inégalité $x^F(\delta(V_0)) \geqslant 1$. On obtient

$$x^F(\delta(\pi)) + x^| F(\delta(V_0)) \geqslant \sum_{i=1}^{t} con(V_i) + 2$$

Ce qui implique que x^F vérifie (6.11).

Cas 2: $|I_0| \geqslant 2$
On somme les inégalités suivantes.

$$x^F(\delta(V_i)) \geqslant con(V_i) \quad \forall 1 = 1,\ldots,t$$
$$x^F(\delta(V_0)) \geqslant 2$$

Par conséquent, x^F vérifie bien l'inégalité (6.11). L'inégalité (6.11) est donc vérifiée par toutes les solutions valides de SNDP(G,r). □

Porta nous permet de voir que lorsque $t \geqslant 3$, l'inégalité définit des facettes. La figure 6.1 illustre des points fractionnaires du polytope défini par les contraintes triviales et les contraintes de SP-partitions, qui sont coupés par des inégalités de toupie.

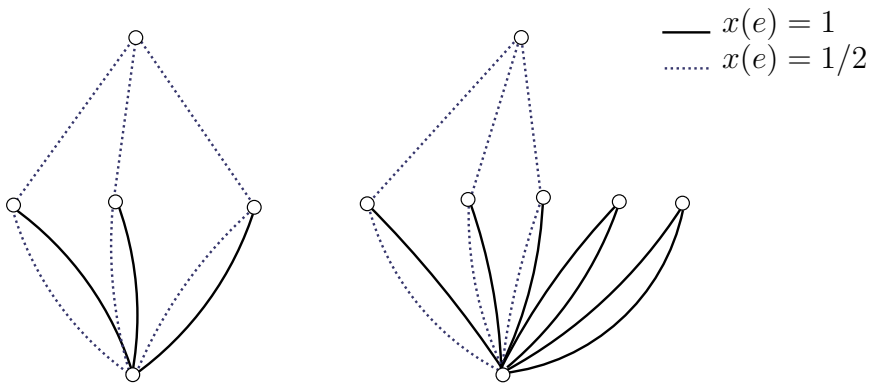

FIG. 6.1 – *Points fractionnaires coupés par des inégalités de toupie*

Soit $W \subset V$ et $r \in \{1,2,3\}^V$ un vecteur de type de connexité associé aux sommets V. On définit $r[W]$ comme étant la restriction de r pour les sommets W.

Théorème 6.3. *Supposons que SNDP($G(V_{t+1})$,$r[V_{t+1}]$) est de pleine dimension. Si les propositions*

1) SNDP($G(V_i)$,$r[V_i]$) est de pleine dimension pour $i = 0,1,\ldots,t$,
2) $|[V_0,V_i]| \geqslant 1$ pour $i = 1,\ldots,t$ et
3) $|[V_i,V_{t+1}]| \geqslant con(V_i)$ pour $i = 1,\ldots,t$,

sont vérifiées, alors l'inégalité (6.11) définit une facette de SNDP(G,r).

Preuve. Supposons que (1), (2) et (3) sont vérifiées. Nous montrons que (6.11) définit une facette. Notons $\mathcal{F}_1$ l'ensemble des solutions de SNDP(G,r) vérifiant (6.11) à l'égalité. On peut numéroter les arêtes de telle manière que les arêtes du faisceau $[V_0,V_i]$ soient $e_{i,1},\ldots,e_{i\ |\ [V_0,V_i]|}$ pour $i=1,\ldots,t$, et que les arêtes du faisceau $[V_i,V_{t+1}]$ soient $e_{t+i,1},\ldots,e_{t+i\ |\ [V_i,V_{t+1}]|}$.

Soit V_i un ensemble de π, pour un certain $i\in\{1,\ldots,t\}$. Soit $\widehat{F}_i$ l'ensemble d'arêtes suivant.

$$\begin{aligned}\widehat{F}_i =&\{e_{i,1}\}\cup\{e_{t+j,1},e_{t+j,2}\mid j=1,\ldots,t\}\\ &\cup\{e_{t+j,3}\mid con(V_j)=3 \text{ et } j=1,\ldots,t\}\\ &\cup\{e\mid e\in E(V_j),\ j=0,\ldots,t+1\}\end{aligned}$$

Soit $x^{\widehat{F}_i}$ le vecteur d'incidence associé.

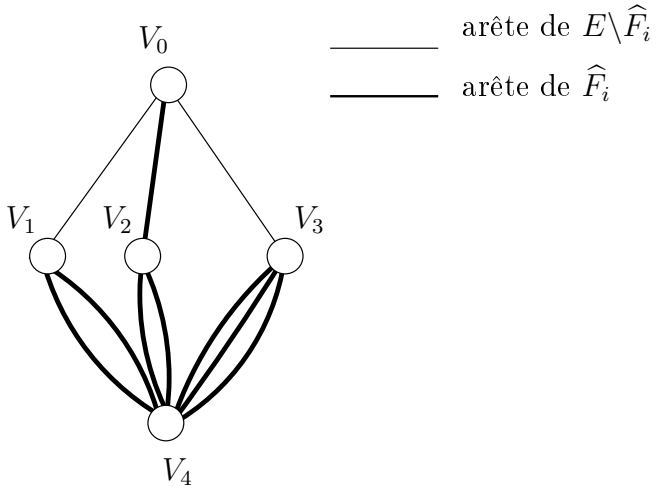

FIG. 6.2 – $\widehat{F}_2$ *dans un graphe avec* $con(V_1)=con(V_2)=2$ *et* $con(V_3)=3$

$x^{\widehat{F}_i}$ vérifie (6.11) à l'égalité. Donc $\mathcal{F}_1$ est une face propre. Supposons que $\mathcal{F}_1$ est inclus dans une facette $\mathcal{F}=\{x\in\text{SNDP}(G,r)\mid bx=b_0\}$.
Soit $j\in\{1,\ldots,t\}$, $j\neq i$, $\widehat{F}_j$ est également solution de SNDP(G,r). Donc $bx^{\widehat{F}_i}=b_0=bx^{\widehat{F}_j}$, donc $b(e_{i,1})=b(e_{j,1})$.
Soit $\widehat{F}_{i,j}=\widehat{F}_j\cup\{e_{i,1}\}\backslash\{e_{t+i,1},e_{t+j,1}\}$. $\widehat{F}_{i,j}$ est une solution de $\mathcal{F}_1$. Pour $k_1\in\{2,\ldots,|[V_i,V_{t+1}]|\}$ et $k_2\in\{2,\ldots,|[V_j,V_{t+1}]|\}$, considérons les ensembles suivants.

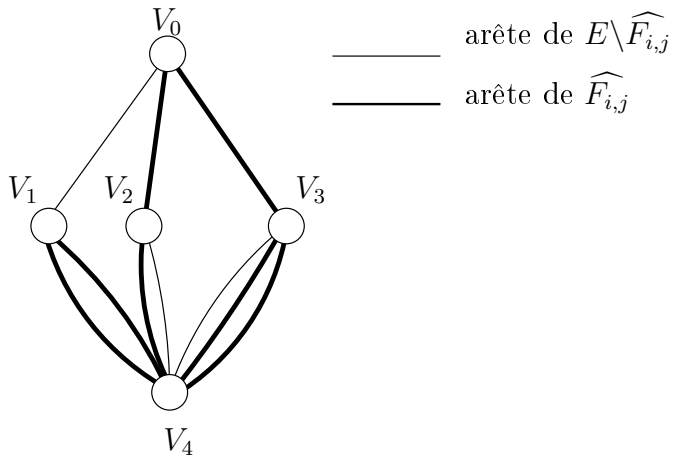

FIG. 6.3 – $\widehat{F}_{2,3}$

$$\widehat{F}'_{i,j} = (\widehat{F}_{i,j}\backslash\{e_{t+i,1}\}) \cup \{e_{t+i,k_1},\} \tag{6.12}$$

$$\widehat{F}''_{i,j} = (\widehat{F}_{i,j}\backslash\{e_{t+j,1}\}) \cup \{e_{t+j,k_2}.\} \tag{6.13}$$

Les solutions $\widehat{F}'_{i,j}$ et $\widehat{F}''_{i,j}$, pour tout i,j, sont des points de $\mathcal{F}$. On en déduit que $b(e_{t+i,1}) = b(e_{t+i,k_1})$, pour $k_1 \leqslant |[V_0,V_i]|$ et $b(e_{t+j,1}) = b(e_{t+j,k_2})$, pour $k_2 \leqslant |[V_i,V_{t+1}]|$. De plus, en comparant $\widehat{F}_i$ et $\widehat{F}_{i,j}$, on en déduit que $b(e_{t+i,1}) + b(e_{t+j,1}) = b(e_{i,1})$, c'est-à-dire, $b(e_{i,1}) = 2b(e_{t+i,1})$.

On trouve donc que les coefficients des arêtes entre V_0 et V_i, pour $i = 1,\ldots,t$, ont les même coefficients α dans la contrainte $bx = b_0$, toutes les autres ont le même coefficient β dans cette contrainte. De plus $\alpha = 2 * \beta$. Enfin, par le lemme (2.5), on en déduit que $\mathcal{F}_1$ est une facette. □

6.4 Inégalités de toupie liftées

On déduit du lemme 2.20 que la contrainte

$$x(E_\pi) + x(\delta(V_0)) + 2 * x(F) \geqslant \sum_{i=1}^{t} con(V_i) + 2 \tag{6.14}$$

où $F = \{e \in [V_i,V_j] | i,j \in \{1,\ldots,t\}, i \neq j\}$, est valide pour le problème du {1,2,3}-arête connexe.

6.5 Inégalités de chaînes impaires

Ce travail fait suite au travail de Bendali et al. [12] sur le problème SNDP dans le cas où $r(v) = k$ pour tout $v \in V$, k un entier $\geqslant 3$. Soient $G = (V,E)$ un graphe et $r \in \mathbb{N}^E$ un vecteur de type de connexité quelconque. Supposons que SNDP(G,r) est de pleine dimension. Soit $\pi = (W_1,W_2,V_1,V_2,\ldots,V_{2p})$, $p \geqslant 2$, une partition de V. Soient $I_1 = \{4q, 4q+1, q = 1,\ldots,\lceil \frac{p}{2} \rceil - 1\}$ et $I_2 = \{2, 3, \ldots, 2p-2, 2p-1\} \backslash I_1$. On dit que π a une configuration de chaîne impaire si

1) $|[V_i,W_j]| = con(V_j) - 1$, pour $(i,j) \in (I_1 \times \{1\}) \cup (I_2 \times \{2\})$,
2) $|[W_1,W_2]| \leqslant con(W) - 1$ où $W = W_1 \cup (\cup_{i \in \{1,\ldots,2p\} \text{ tel que } i \text{ modulo } 4 = 0 ou 1} V_i)$,
3) $\delta(V_i) = [V_i,W_1] \cup [V_i,V_{i-1}] \cup [V_i,V_{i+1}]$ si $i \in I_1$,
   $\delta(V_i) = [V_i,W_2] \cup [V_i,V_{i-1}] \cup [V_i,V_{i+1}]$ si $i \in I_2$.
4) $\delta(V_1) = [W_1,V_1] \cup [V_1,V_2]$,
   $\delta(V_{2p}) = [W_2,v_{2p}] \cup [V_{2p-1},V_2]$

La figure 6.4 donne un exemple de configuration de chaîne impaire.

Soit $C = \cup_{i=1}^{2p-1} [V_i,V_{i+1}]$. Notons que C peut être vu comme un chaîne d'extrémités V_1 et V_{2p}, de longueur impaire en terme d'arêtes dans le graphe G_π.

A une configuration de chaîne impaire, on associe l'inégalité

$$x(C) \geqslant p, \tag{6.15}$$

appelée *inégalité de chaîne impaire*.

Théorème 6.4. *Les inégalités (6.15) sont valides pour SNDP(G,r).*

Preuve. Les contraintes de coupe suivantes sont valides.

$$x[V_{2s-1},V_{2s}] + x[V_{2s},V_{2s+1}] \geqslant 1 \qquad s = 1,\ldots,p-1 \tag{6.16}$$

$$x[V_{2s},V_{2s+1}] + x[V_{2s+1},V_{2s+2}] \geqslant 1 \qquad s = 1,\ldots,p-1 \tag{6.17}$$

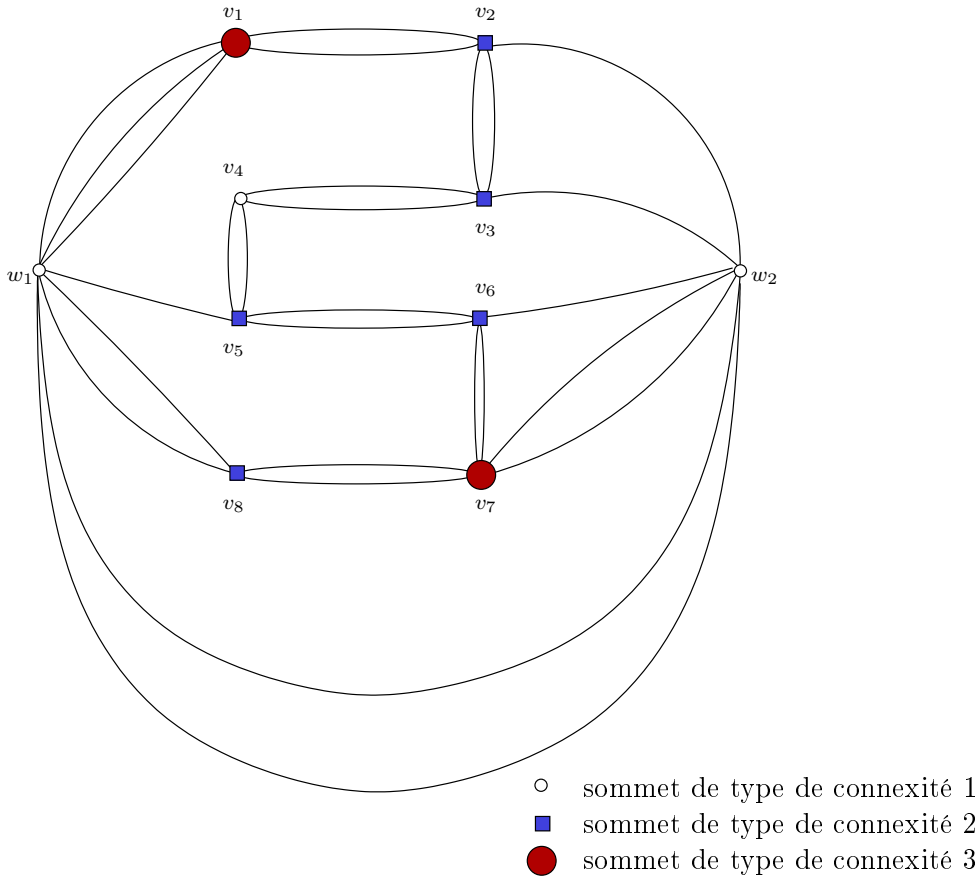

FIG. 6.4 – *Exemple de configuration de chaîne impaire*

En sommant ces inégalités pondérées avec le coefficient $\frac{p-s}{p}$, avec s qui varie de 1 à p, pour les inégalités (6.16), et pondérées par le coefficient $\frac{s}{p}$, pour les inégalités (6.17), on obtient

$$\sum_{s=1,\ldots,p-1} x[V_{2s},V_{2s+1}] + \sum_{s=1,\ldots,p-1} \frac{p-1}{p} x[V_{2s-1},V_{2s}] \geqslant p-1$$

□

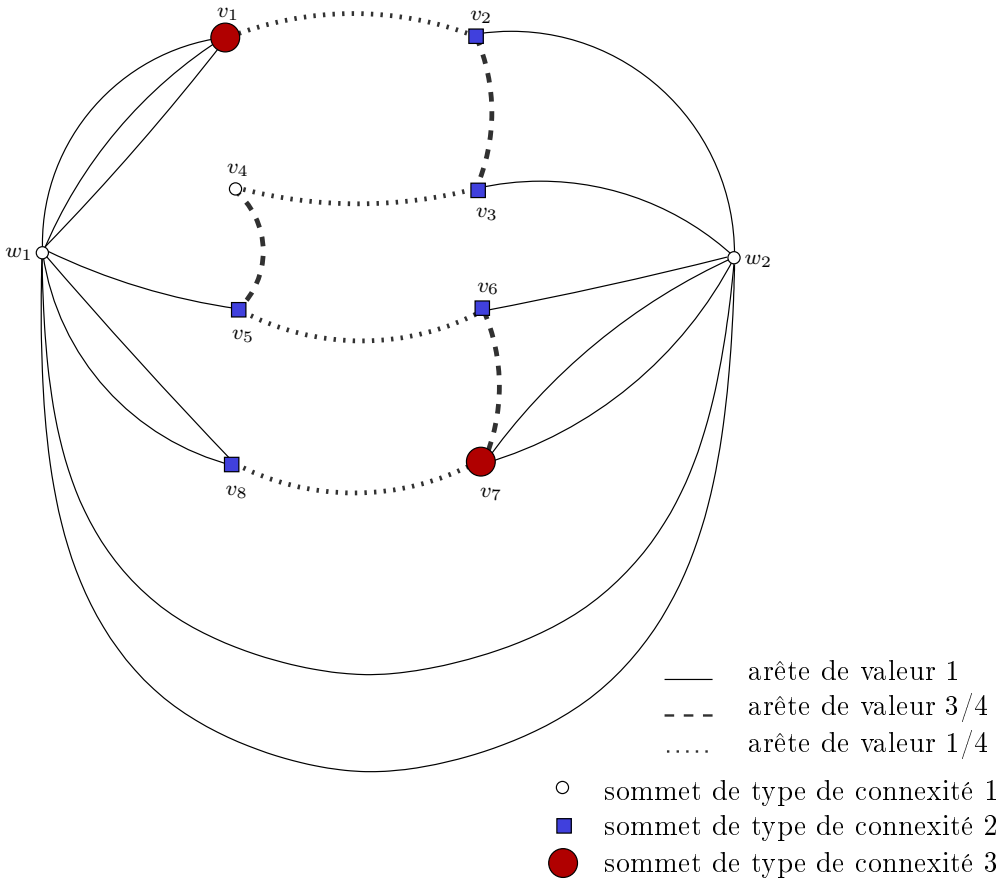

FIG. 6.5 – *Exemple de point fractionnaire*

La figure 6.5 montre un point fractionnaire coupé par la contrainte de chaîne impaire. Cette solution est un point extrême. Elle vérifie le système suivant.

$$\begin{cases} x(\delta(V_2)) = 2 \\ x(\delta(V_3)) = 2 \\ x(\delta(V_4)) = 1 \\ x(\delta(V_5)) = 2 \\ x(\delta(V_6)) = 2 \\ x(\delta(V_7)) = 3 \\ x(\delta(W)) = 3 \\ x(e) = 1 \qquad \text{pour tout } e \in E_1(x) \\ x(e) = 0 \qquad \text{pour tout } e \in E_0(x) \end{cases}$$

Théorème 6.5. *Les inégalités (6.15) définissent des facettes de SNDP(G,r) si les conditions suivantes sont vérifiées.*

1) *les sous-graphes* $G[W_1]$, $G[W_2]$ *et* $G[V_i]$ *pour* $i = 1,\ldots,2p$ *sont* $(r+1)$*-arête connexes,*
2) $|[W_1,W_2]| = con(W) - 1$, $|[V_1,W_1]| = con(V_1)$ *et* $|[W_{2p},W_2]| = con(V_{2p})$ *(resp.* $|[W_{2p},W_1]| = con(V_{2p})$*) si* p *est pair (resp. impair).*

Preuve. Suposons que p est pair (la preuve est similaire lorsque p est impair). Soit e_i une arête de $[V_i,V_{i+1}]$, pour tout $i = 1,\ldots,2p-1$. Soient $E_0 = \bigcup_{s=1}^{p}[V_{2s-1},V_{2s}]$, $E_1 = \bigcup_{s=1}^{p-1}[V_{2s},V_{2s+1}]$ et $E' = E\backslash(E_0 \cup E_1)$. L'inégalité (6.15) est équivalente à

$$x(E_0) + x(E_1) \geqslant p$$

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des solutions de SNDP(G,r) vérifiant (6.15) à l'égalité. Soit $S_1 = E' \cup \{e_1,e_3,\ldots,e_{2p-1}\}$. L'ensemble S_1 est solution du problème et son vecteur associé appartient à $\mathcal{F}$. Donc $\mathcal{F}$ est une face propre.
Supposons que $\mathcal{F}$ est inclus dans une facette $\mathcal{F}'$ définie par l'inégalité $bx \geqslant \beta$

Soit f une arête de $E(W_1) \cup E(W_2) \cup (\cup_i E(V_i)) \cup \delta(W_1) \cup \delta(W_2)$. Soit $S_2 = S_1\backslash\{f\}$. S_2 est une solution et son vecteur associé appartient à $\mathcal{F}$. Par conséquent, il appartient aussi à $\mathcal{F}'$ et donc $b(f) = 0$ pour tout $f \in E(W_1) \cup E(W_2) \cup (\cup_i E(V_i)) \cup \delta(W_1) \cup \delta(W_2)$.
Soit $g \in [V_{2s-1},V_{2s}]\backslash\{e_{2s-1}\}$ pour un certain $s \in \{1,\ldots,p\}$. Soit $S_3 = (S_1\backslash\{s_{2p-1}\})\cup\{g\}$. S_3 est solution et son vecteur appartient à $\mathcal{F}'$. On en déduit que toutes les arêtes d'un même faisceaux d'arêtes parmi les faisceaux de E_2 ont le même coefficient. Autrement dit, $b(g) = \sigma_{2s-1}$ pour tout $g \in [V_{2s-1},V_{2s}]$.
Soit $S_4 = E' \cup \{e_1\} \cup (\cup_{s=1}^{p} e_{2s})$. S_4 est une solution.
Soit $s \in \{1,\ldots,p\}$ et $f \in [V_{2s},V_{2s+1}]$. On définit $S_5 = (S_4\backslash\{e_{2s}\}) \cup f$. S_5 est également solution. On en déduit que toutes les arêtes d'un même faisceau d'arêtes parmi les faisceaux de E_1 ont le même coefficient. Autrement dit, $b(f) = \sigma_{2s}$ pour tout $f \in [V_2s,V_2s+1]$.
Soit $s \in \{2,\ldots,p\}$. On définit $S_6 = (S_4\backslash\{e_1\}) \cup \{e_{2s-1}\}$. Comme S_6 est une solution et que son vecteur appartient à $\mathcal{F}$, on en déduit que les arêtes de E_0 ont le même coefficient, c'est-à-dire $b(e) = \sigma_1 = \cdots = \sigma_{2p-1}$ pour tout $e \in E_0$.
Soit $S_7 = (S_4\backslash\{e_1,e_2s\}) \cup \{e_{2s+1},\ e_{2s-1} \mid s = 2,\ldots,p-1\}$. Comme S_7 est également solution et que son vecteur associé vérifie aussi (6.15) à l'égalité, on en déduit que $b(e) = \sigma_2 = \cdots = \sigma_{2p}$.

Par le lemme (2.5), on en déduit que $\mathcal{F}_1$ est une facette. □

6.6 Conclusion

Les différents problèmes traités précédemment nous ont permis d'établir un certain nombres de propriétés pour le problème du sous-graphe {1,2,3}-arête connexe. D'autres propriétés devront également être établies dans la suite. Nous donnons ainsi les conjectures suivantes

Conjecture 6.6. *Si $G = (V,E)$ est un graphe série-parallèle et sans toupie, alors SNDP(G,r), avec $r \in \mathbb{N}_+^V$, est complètement caractérisé par les inégalités de SP-partition (2.6), et les inégalités triviales (2.2) et (2.3).*

Conjecture 6.7. *Si $G = (V,E)$ est un graphe série-parallèle, alors SNDP(G,r), avec $r \in \{1,2,3\}^V$, est complètement caractérisé par les inégalités de SP-partition (6.8), les inégalités de toupie (6.11), et les inégalités triviales (6.4) et (6.5).*

Le chapitre suivant présente un algorithme de coupes et branchements pour ce problème. Nous y développons des algorithmes de séparation des contraintes de partition, de SP-partition et de F-partition présentées dans ce chapitre et nous présentons les résultats numériques.

Chapitre 7

Algorithme de coupes et branchements

Dans ce chapitre, nous discutons d'un algorithme de coupes et branchements que nous avons développé pour résoudre le problème de conception de réseaux fiables lorsque les sommets ont des types de connexité égaux à 1, 2 ou 3 afin de mettre en œuvre les résultats théoriques présentés dans les chapitres précédents. Cet algorithme permet en particulier de résoudre le cas où tous les sommets sont de type 3 et où les graphes sont série-parallèles. Des études similaires avaient déjà été effectuées [77, 58, 13]. Néanmoins il nous est paru pertinent de développer un tel algorithme car, depuis les travaux de Stoer, de nouvelles classes de contraintes valides ont été établies. Il est donc intéressant d'actualiser l'algorithme de coupes et branchements dédié à ce problème. De plus, s'intéresser à ce problème plus général que le cas où les sommets sont de type 1 ou 2 (qui est assez largement traité) est aussi d'un grand intérêt puisqu'il permet de traiter avec plus de précision des cas réels. Enfin l'utilisation d'une procédure de séparation des contraintes de SP-partition pour le cas où tous les sommets sont de type 3 et où les graphes sont série-parallèles, nous a permis de tester notre algorithme décrit au chapitre 4.

7.1 Algorithme de résolution

7.1.1 Algorithme de coupes et branchements

Étant donnés un graphe $G = (V,E)$, un vecteur de types de connexité associés aux sommets, $r \in \{1,2,3\}^V$, et un vecteur coût associé aux arêtes, $c \in \mathbb{R}^E$, notre algorithme commence par résoudre le programme linéaire suivant.

$$\begin{aligned} & \min cx \\ s.c. \quad & x(\delta(v)) \geqslant r(v) \quad \text{pour tout } v \in V, \\ & 0 \leqslant x(e) \leqslant 1 \quad \text{pour tout } e \in E. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Si la solution optimale de ce programme est une solution du problème SNDP, c'est-à-dire si elle est entière et si elle vérifie les contraintes de coupe, alors elle est optimale pour SNDP. En général, la solution obtenue est fractionnaire. Dans ce cas, l'algorithme génère des inégalités valides (de coupe, de SP-partition, etc) qui ne sont pas vérifiées par la solution courante, ajoute ces inégalités à la relaxation linéaire courante et résout le nouveau programme linéaire. Cela est répété jusqu'à ce que l'on ne trouve plus d'inégalité violée. Si la solution obtenue est entière, alors elle est optimale et l'algorithme renvoie cette solution. Sinon il entame une phase de branchement (présentée en détail dans le chapitre 1).

L'algorithme 2, présenté ci-dessous, reprend de manière formelle ces différentes étapes.

Pour générer des contraintes violées, l'algorithme utilise des procédures de séparation. Dans la suite, nous décrivons ces procédures pour les contraintes utilisées. Pour cela considérons une solution $x \in \mathbb{R}^E$.

7.1.2 Séparation des contraintes de coupe

La séparation des contraintes de coupe dans un graphe $G = (V,E)$, avec les valeurs $x(e)$ associées aux arêtes, est résolue par l'algorithme de Gomory-Hu [46]. Cet algorithme consiste à construire un arbre T avec des valeurs $t(e)$ sur les arêtes, appelé *arbre de Gomory-Hu*, qui a la propriété suivante. Pour toute paire de sommets $u,v \in V$, la

Algorithme 2 Algorithme de coupe et branchement

Données : un graphe $G = (V,E)$, un vecteur type de connexité $r \in \{1,2,3\}^V$ et un vecteur poids $c \in \mathbb{R}^E$.

Sortie : Une solution optimale de $Min\{cx \mid x \in \text{SNDP}(G,r)\}$.

1: PL $\leftarrow$ PL$_{debut}$ =(7.1)

2: Résoudre le programme linéaire PL.
Soit x^* la solution optimale de PL.

3: **si** x^* est réalisable pour SNDP(G,r) **alors**
x^* est une solution optimale. STOP

4: **sinon si** des contraintes violées par x^* sont trouvées **alors**
Les ajouter à PL.
Aller en 2.

5: **sinon** brancher sur une variable fractionnaire.
Soient PL_1 et PL_2 les relaxations linéaires courantes des deux sous-problèmes créés.

6: Résoudre PL_1 (PL_2).
Si la solution optimale trouvée est réalisable pour SNDP(G,r), alors le sous-problème en question est déclaré "résolu".
Sinon, générer des contraintes violées s'il en existe.

7: S'il y a des sous-problèmes non résolus, aller en 5.

8: Prendre la meilleure solution de tous les sous-problèmes.

valeur $t(e)$ d'une arête e dans T est égale à la valeur minimum (par rapport aux poids $x(e)$, $e \in E$) d'une coupe séparant u et v dans G. Gusfield [53] a donné une version de cet algorithme qui est très simple à implémenter. Elle consiste à résoudre $|V| - 1$ problèmes de flot maximum dans le graphe G. Pour la recherche d'un flot maximum, nous utilisons l'algorithme de Golberg et Tarjan [45].

Les variantes du problème SNDP que nous traitons ont des types de connexité associés aux sommets égaux à 1, 2 ou 3. Par conséquent, dans notre algorithme de séparation des contraintes de coupe, nous sommes amenés à distinguer les contraintes de coupe

$x(\delta(W)) \geqslant 3$, $x(\delta(W)) \geqslant 2$ et $x(\delta(W)) \geqslant 1$. Tout d'abord, nous traitons les coupes dont le membre de droite est égal à 3. Pour cela, nous cherchons l'arbre de Gomory-Hu, T_3, dans G en ne considérant dans cet arbre que les sommets ayant un type de connexité égal à 3. Ainsi, si la coupe minimum entre 2 sommets est inférieure à 3, cela signifie que nous avons une coupe violée par x. Chaque coupe violée ainsi trouvée est sauvegardée. Ensuite, nous construisons un deuxième arbre de Gomory-Hu, T_2, avec les sommets de type de connexité égal à 2 ou 3. Si une coupe minimum entre 2 sommets est inférieure à 2, c'est qu'une contrainte de coupe est violée. Nous sauvegardons toutes les contraintes de coupe violées ainsi trouvées. Enfin, nous construisons l'arbre T_1 avec tous les sommets. Nous cherchons alors les coupes minimum de valeur strictement inférieure à 1.

Nous pouvons remarquer que si l'on considère les sommets par ordre de type de connexité décroissant, on peut commencer à construire l'arbre T_2 à partir de l'arbre T_3, et on peut commencer à construire l'arbre T_1 à partir de T_2. Cela permet de plus de ne pas compter les contraintes de coupe qui sont violées d'au moins 1, plusieurs fois. Posons V_i, $i = 1,2,3$, l'ensemble des sommets de type de connexité i. Supposons que les sommets sont numérotés de telle manière que les $|V_3|$ premiers sont les sommets de types 3, puis les $|V_2|$ suivants sont de type 2 et enfin les $|V_1|$ derniers sont de type 1. Autrement dit $V_3 = \{u_1, \ldots, u_{|V_3|}\}$, $V_2 = \{u_{|V_3|+1}, \ldots, u_{|V_3|+|V_2|}\}$ et $V_1 = \{u_{|V_3|+|V_2|+1}, \ldots, u_{|V|}\}$. La procédure ainsi obtenue est décrite dans l'algorithme 3.

Notre algorithme nécessite donc au plus $|V|$ appels de la fonction qui calcule une coupe minimum. Or cette dernière a une complexité en $O(n^3)$. Ainsi l'alorithme de séparation des contraintes de coupe a une complexité en $O(n^4)$.

7.1.3 Séparation des contraintes de F-partition

Les contraintes de F-partition ont été introduites par Mahjoub [68] pour le problème SNDP lorsque les types de connexités sont tous égaux à 2. Ces contraintes sont très importantes puisque, comme l'ont montré Barahona et Mahjoub [10], elles suffisent avec les inégalités triviales et les inégalités de coupe, à caractériser le polytope SNDP(G,r), lorsque $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$ et pour la classe des graphes de Halin (un graphe de Halin H est un graphe planaire constitué d'un arbre $T(H)$ ayant au moins trois feuilles et d'un cycle $C(H)$ reliant l'ensemble des feuilles de $T(H)$, cf figure 7.1).

Algorithme 3 Séparation des contraintes de coupe

Données : un graphe $G = (V,E)$, un vecteur type de connexité $r \in \{1,2,3\}^V$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}_+^E$.

Sortie : Liste des contraintes de coupe violées par x

pour i allant de 2 à $|V|$ **faire**
  Voisin$[i] \leftarrow u_1$
pour i allant de 2 à $|V_3|$ **faire**
  Calculer une coupe minimum $\delta(W)$, dans G entre u_i et Voisin$[i]$ telle que $u_i \in W$.
  si $x(\delta(W)) < 3$ **alors**
    Ajouter $\delta(W)$ à la liste des coupes violées par x.
  pour j allant de i à $|V_3|$ **faire**
    si $u_j \in W$ et Voisin$[j]$=Voisin$[i]$ **alors**
      Voisin$[j] \leftarrow u_i$
pour i allant de $|V_3|+1$ à $|V_3|+|V_2|$ **faire**
  Calculer une coupe minimum $\delta(W)$, dans G entre u_i et Voisin$[i]$ telle que $u_i \in W$.
  si $x(\delta(W)) < 2$ **alors**
    Ajouter $\delta(W)$ à la liste des coupes violées par x.
  pour j allant de i à $|V_3|+|V_2|$ **faire**
    si $u_j \in W$ et Voisin$[j]$=Voisin$[i]$ **alors**
      Voisin$[j] \leftarrow u_i$
pour i allant de $|V_3|+|V_2|+1$ à $|V|$ **faire**
  Calculer une coupe minimum $\delta(W)$, dans G entre u_i et Voisin$[i]$ telle que $u_i \in W$.
  si $x(\delta(W)) < 1$ **alors**
    Ajouter $\delta(W)$ à la liste des coupes violées par x.
  pour j allant de i à $|V|$ **faire**
    si $u_j \in W$ et Voisin$[j]$=Voisin$[i]$ **alors**
      Voisin$[j] \leftarrow u_i$

Dans sa thèse [58], Kerivin a généralisé ces contraintes pour des types de connexité quelconques. Elles sont définies de la manière suivante.

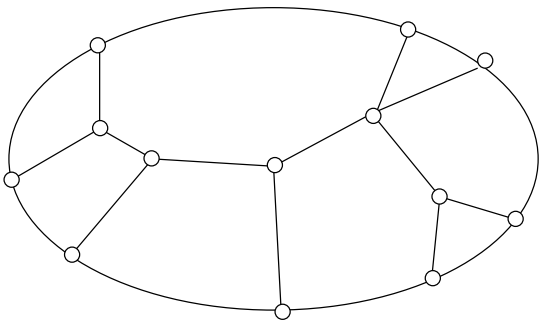

FIG. 7.1 – *Exemple de graphe de Halin*

Soient $G = (V,E)$ un graphe, $r \in \mathbb{N}^V$ un vecteur de type de connexité et $\pi = (V_0,V_1,\ldots,V_p)$, $p \geqslant 2$, une partition de V telle que $r(V_i) \geqslant 1$, pour tout $i = 1,\ldots,p$. V_0, par contre, peut avoir un type de connexité nul. Soit F un sous-ensemble d'arêtes. Afin de simplifier les écritures, nous posons

- $r_\pi = max\{con(V_i) \mid i = 0,\ldots,p\}$,
- p_i le nombre de sous-ensembles V_j, $j = 1,\ldots,p$, de la partition tels que $con(V_j) = i$, pour $i = 1,\ldots,r_\pi$,
- S_{impair} l'ensemble des indices des sous-ensembles V_i, $i = 1,\ldots,p$, de la partition tels que $con(V_i)$ est impair,
- $\Delta = \delta(V_0,V_1,\ldots,V_p)\backslash F$

L'inégalité de F-partition dans le cas général s'écrit

$$x(\Delta) \geqslant \sum_{j=1}^{\lceil \frac{r_\pi}{2} \rceil} j(p_{2j} + p_{2j-1}) - \left\lfloor \frac{|S_{impair}| + |F|}{2} \right\rfloor . \tag{7.2}$$

Dans le cas où les types de connexité sont égaux à 1, 2 ou 3, (7.2) s'écrit donc de la manière suivante.

$$x(\Delta) \geqslant p_1 + p_2 + 2p_3 - \left\lfloor \frac{p_1 + p_3 + |F|}{2} \right\rfloor . \tag{7.3}$$

La complexité du problème de séparation des contraintes de F-partition est inconnue pour le cas où $r \in \{1,2,3\}^V$ (elle est également inconnue dans le cas uniforme, lorsque $r(v) = 2$ pour tout v). Nous avons développé une heuristique pour séparer ces inégalités

basée sur les résultats de Fonlupt et Mahjoub [33]. En effet, lorsque tous les sommets ont un type de connexité égal à 2, Fonlupt et Mahjoub ont caractérisé les points extrêmes fractionnaires, dits critiques, du polytope $Q(G,r)$, donnés par les contraintes triviales et les contraintes de coupe. Ils ont montré que si $\overline{x}$ est un point extrême fractionnaire critique de ce polytope, alors le graphe G et $\overline{x}$ peuvent être réduits, au sens de certaines opérations de réduction, à un graphe $G' = (V',E')$ et un point extrême $\overline{x}'$ de $Q(G',r')$ qui vérifient les propriétés suivantes.

1) $V' = V'_1 \cup V'_2$,
   $E' = E'_1 \cup E'_2$ avec $E'_1 \cap E'_2 = \emptyset$,
   (V'_1,E'_1) est un cycle impair,
   (V'_2,E'_2) est une forêt dont les sommets pendants sont dans V'_1 et tous les sommets de V'_2 sont de degré $\geqslant 3$.
2) $\overline{x}'(e) = \frac{1}{2}$ pour tout $e \in E'_1$,
   $\overline{x}'(e) = 1$ pour tout $e \in E'_2$,
3) pour toute coupe propre $\delta(W')$ de G', $\overline{x}'(\delta(W')) > 2$.

En se basant sur ce résultat et sur l'heuristique proposée par Kerivin [58] pour le cas où $r(v) \in \{1,2\}$, nous avons développé une heuristique qui a le schéma suivant. Tout d'abord, nous cherchons des cycles composés d'arêtes fractionnaires dans le graphe G. Puis, pour chaque cycle $(v_1,\ldots,v_p)$ détecté, nous essayons de trouver un sous-ensemble d'arêtes F parmi celles ayant exactement une extrêmité dans le cycle, de telle sorte que l'inégalité de F-partition induite par la partition $(V\backslash\{v_1,\ldots,v_p\},\{v_1\},\ldots,\{v_p\})$ et F soit violée. L'algorithme 4 décrit cette heuristique.

Algorithme 4 Séparation des contraintes de F-partition

Données : un graphe $G = (V,E)$, un vecteur type de connexité $r \in \{1,2,3\}^V$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}_+^E$.

Sortie : Une liste de contraintes de F-partition violées par x

Rechercher des cycles composés d'arêtes fractionnaires.

Notons par $(v_1^i,\ldots,v_{p^i}^i)$, $i = 1,\ldots,s$ les cycles ainsi trouvés.

pour i allant de 1 à s **faire**

$p \leftarrow$ nombre de sommets dans le cycle considéré

$p_1 \leftarrow$ nombre de singletons $\{v_k^i\}$, $k \in \{1,\ldots,p_i\}$, ayant une connexité égale à 1

$p_2 \leftarrow$ nombre de singletons $\{v_k^i\}$, $k \in \{1,\ldots,p_i\}$, ayant une connexité égale à 2

$p_3 \leftarrow$ nombre de singletons $\{v_k^i\}$, $k \in \{1,\ldots,p_i\}$, ayant une connexité égale à 3

Sélectionner un sous-ensemble d'arêtes $F \subseteq \delta(v_1^i,\ldots,v_p^i)$ tel que $p_1 + p_3 + |F|$ soit impair.

si $x(\delta(V\backslash\{v_1^i,\ldots,v_{p^i}^i\},\{v_1^i\},\ldots,\{v_{p^i}^i\}))\backslash F) < p + p_3 - \frac{p_1+p_3+|F|-1}{2}$ **alors**

ajouter cette inégalité à la liste des F-partition violées par x'.

7.1.4 Séparation des contraintes de SP-partition

Nous avons implémenté la procédure de séparation des contraintes de SP-partition basée sur l'algorithme de séparation des contraintes de partition dans les graphes récursivement 2-décomposables vue au chapitre 4. Cette procédure peut être utilisée uniquement pour les problèmes où les types de connexité sont tous égaux à 3 et où les graphes sont série-parallèles.

Algorithme 5 Séparation des contraintes de SP-partition

Données : un graphe $G = (V,E)$ un graphe série-parallèle, un type de connexité uniforme, égal à 3, et un vecteur $x \in \mathbb{R}_+^E$ tel qu'il n'y a pas de contrainte de coupe violée par x.

Sortie : une contrainte de SP-partition violée par x ou rien s'il n'y en a pas.

tant que pas de contrainte de coupe trouvée et nombre de sommets supérieur à 3 **faire**

Trouver v, un sommet adjacent à 2 sommets exactement

v_1,$v_2 \leftarrow$ les sommets adjacents à v.

Supprimer v

Ajouter une arête e_v entre v_1 et v_2 ayant pour valeur $x(e_v) = \sum_{e\in[v,v_1]} x(e) + \sum_{e\in[v,v_2]} x(e) - 2$

Calculer la coupe minimum entre v_1 et v_2.

si une coupe $\delta(W)$ est violée **alors**

$\pi \leftarrow$ la famille d'ensembles composée de W et de son complémentaire

rhs $\leftarrow 2$

pour arête ajoutée e_v appartenant à la multicoupe $\delta(\pi)$ **faire**

$\pi = \pi + \{v\}$

rhs $\leftarrow$ rhs $+1$

Ajouter au graphe le sommet v et les arêtes incidentes à v

renvoyer la contrainte $x(\delta(\pi)) \geqslant$ rhs.

7.1.5 Séparation des contraintes de partition

Soit $(V_1,\ldots,V_p)$ une partition de V et soit r_π la connexité maximale des ensembles de la partition (c'est-à-dire la plus grande connexité telle qu'il existe au moins deux ensembles différents V_i et V_j de la partition tels que $r(V_i) = r(V_j) = r_\pi$). Notons p_i, $i = 1,2,3$, le nombre d'ensembles de la partition de connexité égale à i. Alors la contrainte de partition pour des types de connexité égaux à 1, 2 ou 3, s'écrit de la

manière suivante.

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant \begin{cases} p-1 & \text{si } r_\pi = 1 \\ p & \text{si } r_\pi = 2 \\ p_1 + p_2 + \left\lceil \frac{3p_3}{2} \right\rceil & \text{si } r_\pi = 3 \end{cases}$$

On ne connaît pas la complexité du problème de séparation des contraintes de partition dans le cas où les types de connexité sont 1, 2 ou 3. Kerivin et Mahjoub [61] (voir aussi Barahona et Kerivin [9]) ont montré que lorsque les types de connexité sont tous égaux à 1 ou 2, le problème de séparation des contraintes de partition peut être résolu en temps polynomial. Si le type de connexité de chaque sommet est 1, les contraintes de partition dans ce cas ne sont rien d'autre que les contraintes de multicoupe

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant p-1 \tag{7.4}$$

qui peuvent être séparées efficacement. Cunningham [22] et Barahona [8] ont décrit des algorithmes polynomiaux pour la séparation des contraintes (7.4).

Tout d'abord nous cherchons les partitions de type 1 qui violent une contrainte de partition. Puis nous recommençons pour les partitions de type 2 et 3. Nous avons implémenté une heuristique qui détecte certaines configurations de partitions de type 2 ou 3 pour lesquelles la contrainte de partition est violée.

7.1.5.1 Partition de type 1

Pour de telles partitions, tous les sommets ayant un type de connexité égal à 2 ou à 3 doivent appartenir au même ensemble de la partition. Nous avons donc considéré le graphe $G_1 = (V_1,E_1)$ obtenu par la contraction des sommets de type 2 et 3.

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, la séparation des contraintes de partition de ce type a été résolue par Cunningham [22] qui a ramené ce problème à $|E_1|$ problèmes de coupe minimum. Par la suite Barahona [8] a montré que ce problème peut se ramener à $|V_1|$ problèmes de coupe minimum. Ainsi, pour séparer les contraintes de partition nous avons implémenté l'algorithme de Barahona que nous présentons ci-dessous (cf algorithme 6).

Algorithme 6 Algorithme de séparation des contraintes de partition de type 1

Données : un graphe $G_1 = (V_1,E_1)$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}_+^E$.

Sortie : une partition $\mathcal{F} = (V_1,\ldots,v_p)$ telle que $x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) - p + 1$ est le plus petit possible.

pour i allant de 1 à $|V_1|$ **faire**

$y(v_i) \leftarrow 2$

$\mathcal{F} \leftarrow \emptyset$

pour k allant de 1 à $|V_1|$ **faire**

si $v_k \notin \mathcal{F}$ **alors**

$\alpha \leftarrow f(\overline{S}) - y(\overline{S}) = max\{f(S)_y(S) | v_k \in S\}$,

$y(v_k) = y(v_k) + \alpha$,

$\mathcal{F} \cup \{\overline{S}\}$.

tant que il existe 2 ensembles S et T dans $\mathcal{F}$ avec $S \cap T = \emptyset$ **faire**

$\mathcal{F} \leftarrow (\mathcal{F} \backslash \{S,T\}) \cup \{S \cup T\}$.

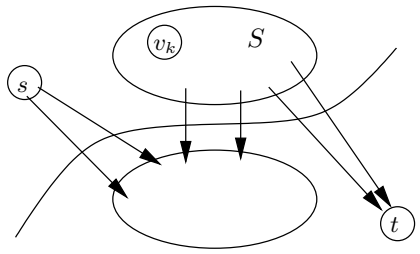

FIG. 7.2 – *Coupe minimum entre s et t pour le calcul de α*

Cet algorithme fait appel au calcul de α. L'algorithme 7 précise comment α est calculé.

Comme l'avait vu Kerivin dans sa thèse [58], les contraintes de partition de type 1 n'interviennent pas significativement. Nous avons donc été amenés à remplacer cette procédure de séparation par une autre, heuristique, qui traite à la fois les partitions de type 1 et les partitions de type supérieur qui contiennent des ensembles de connexité 1. Cette heuristique consiste à trouver une chaîne d'arêtes fractionnaires qui passe par des sommets de type 1, disons $(v_1,v_2,\ldots,v_k)$. On rassemble les autres sommets dans un ensemble W. On teste si la partition ainsi obtenue est violée. Si elle ne l'est pas, on scinde W en deux ensembles W_1, W_2 de manière à ce que la valeur des arêtes

Algorithme 7 Calcul de α

Données : un graphe orienté $D = (N,A)$ obtenu à partir du graphe précédent $G_1 = (V_1,E_1)$, où $N = V_1 \cup \{s,t\}$ et $A = \{(i,j),(j,i)|ij \in E_1\} \cup \{(s,i),(i,t)|i \in V\}$.

Sortie : α.

pour tout $i \in V$ $i \neq r$ **faire**

$\eta(i) = y(i)$

$\eta(r) = y(r) + 2$

pour tout $i \in V$, $i \neq v_k$ **faire**

si $\eta(i) < 0$ **alors**

$c(s,i) = -\eta(i)$,

$c(i,t) = 0$.

si $\eta(i \geqslant 0$ **alors**

$c(i,t) = \eta(i)$,

$c(s,i) = 0$.

$c(s,v_k) = -\infty$,

$c(v_k,t) = \eta(v_k)$.

pour tout $ij \in E_1$ **faire**

$c(i,j) = c(j,i) = x(i,j)$

$S \leftarrow$ l'ensemble tel que $S \cup \{s\}$ est la coupe minimum entre s et t (cf figure 7.2).

$\beta \leftarrow$ la valeur de cette coupe.

$\alpha = 2 - \beta - \sum\{\eta(v)|\eta(v) < 0\}$.

entre ces ensembles, $x[W_1,W_2]$, soit minimum. On a en effet remarqué que les solutions fractionnaires contiennent de telles configurations. La figure 7.3 décrit une partition d'un tel type. Cette heuristique est appelée *l'heuristique L1*. Dans la pratique cette heuristique s'est révélée très performante.

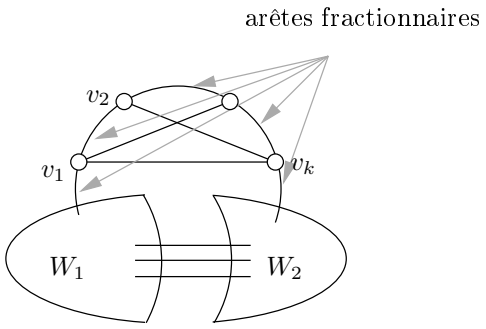

FIG. 7.3 – *Configuration de partition violée détectée par l'heuristique L*1

7.1.5.2 Partition de type 2 et 3

La contrainte de partition, lorsqu'il y a au moins deux ensembles de type de connexité supérieur ou égal à 2, s'écrit de la manière suivante.

$$x(\delta(V_1,\ldots,V_p)) \geqslant p_1 + p_2 + \left\lceil \frac{3}{2} p_3 \right\rceil .$$

Algorithme 8 Heuristique de séparation des contraintes de partition de type 2 ou 3

Données : un graphe $G = (V,E)$ et un vecteur $x \in \mathbb{R}_+^E$.

Sortie : une liste de partitions $\mathcal{F} = (V_1,\ldots,v_p)$ de type 2 ou 3 qui violent la containte de partition.

pour tout arête fractionnaire $f = uv$ **faire**

déterminer W telle que $\delta(W)$ est une coupe minimum entre u et v telle que $u \in W$

si $(W\backslash\{u\},\{u\},V\backslash W)$ constitue une partition violée **alors**

l'ajouter à la liste des partitions violées

si $(W,\{u\},(V\backslash W)\backslash\{v\})$ constitue une partition violée **alors**

l'ajouter à la liste des partitions violées

Pour détecter des contraintes violées de type 2 ou 3, nous avons développé deux heuristiques. La première consiste à détecter des partitions violées constituées de 3 ensembles de sommets. Cette heuristique cherche, pour chaque arête fractionnaire f, une partition $(\{v\},W\backslash\{v\},V\backslash W)$ violée où v est une extrémité de f et W est un ensemble de sommets contenant v et tel que $f \in \delta(W)$. La figure 7.4 décrit une telle

configuration. Pour que la partition soit violée, il suffit que les deux inégalités suivantes soient vérifiées.

$$x[\{v\},W\backslash\{v\}] < \left\lceil \frac{con(W\backslash\{v\})}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{con(v)}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{con(V\backslash W)}{2} \right\rceil - con(W)$$

$$x[\{v\},V\backslash W] \geqslant con(v) - x(f) - x[\{v\},W\backslash\{v\}]$$

Pour trouver l'ensemble W on cherche une coupe minimum entre les extrémités de l'arête f. L'algorithme 8 décrit formellement cette heuristique, que l'on appelle *heuristique L3*.

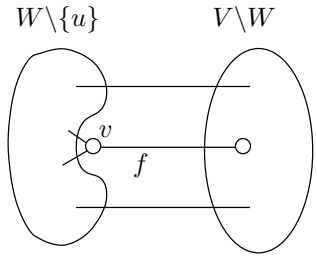

FIG. 7.4 – *Configuration de partition violée détectée par l'heuristique L3*

La deuxième heuristique consiste à prendre la partition constituée des singletons de sommets pour tous les sommets de W, et de l'ensemble $V\backslash W$. La figure 7.5 illustre cette configuration de partition. On appelle cette heuristique, *l'heuristique Ln*.

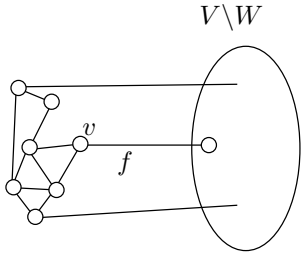

FIG. 7.5 – *Configuration de partition violée détectée par l'heuristique Ln*

Les heuristiques L3 et Ln se sont révélées très performantes dans le cas où tous les sommets sont de type de connexité égal à 3 (cf tables 7.5, 7.6 , 7.7 et 7.8). Selon les exemples l'une ou l'autre est plus performante et la collaboration des deux est toujours pertinente. Nous obtenons des résultats similaires (et souvent meilleurs) à ceux obtenus par Bendali et al. [13, 12].

7.2 Résultats expérimentaux

7.2.1 Matériel et logiciels

Pour implémenter nos algorithmes de coupes et branchements, nous avons utilisé les librairies ABACUS (A Branch-And-CUt System), version 3.0 [3, 31, 79] pour la gestion de l'arbre de branchement. Pour ce qui est de la résolution des programmes linéaires, ABACUS fait appel au logiciel CPLEX, version 9.0 [1] ou au solveur linéaire CLP développé par IBM dans sa librairie COIN-OR [2]. Ces solveurs sont des implémentations de l'algorithme du simplexe. Ils ont été testés sur un biprocesseur Pentium IV cadencé à 2,8 Ghz avec 1 Go de mémoire vive, sous système Linux.

7.2.2 Description des instances traitées

Les résultats qui sont présentés ici ont été obtenus à partir d'instances aléatoires et d'autres, prises de la TSP Library[73]. Nous avons généré une série d'instances sur des graphes série-parallèles. Pour les instances de la TSP Library, les coûts des arêtes correspondent à la distance euclidienne entre les sommets. Des types de connexité égaux à 1, 2 ou 3 sont assignés aux sommets de manière aléatoire en respectant certaines proportions.

7.2.3 Le problème du sous-graphe 3-arête connexe dans les graphes série-parallèles

La première série de tests résout des instances pour lesquelles les types de connexité sont tous égaux à 3 et les graphes sont série-parallèles. Le but de ces expérimentations est de tester notre algorithme de séparation des contraintes de partition donné dans le chapitre 4. La relaxation linéaire dans ce cas est entière. Par conséquent, le problème peut toujours être résolu dans la phase de coupe à la racine de l'arbre. Pour tester l'efficacité des contraintes de SP-partition, nous avons relevé la valeur de la solution avant l'ajout de ces contraintes.

Nos résultats expérimentaux sont reportés dans la table suivante. Les différentes colonnes représentent :

$\|V\|$	:	le nombre de sommets de G,
$\|E\|$	:	le nombre d'arêtes de G (que l'on indique pour les graphes non complets),
NC	:	le nombre de contraintes de coupe générées, lorsqu'on génère aussi de contraintes de SP-partition,
NSPπ	:	le nombre de contraintes SP-partitione générées, pour l'algorithme de coupe,
Copt	:	la valeur de la solution optimale,
C_{coupe}	:	la valeur de la solution avant la séparation des contraintes de SP-partition,
Csp	:	la valeur de la solution avant le branchement,
Gap_{coupe}	:	erreur relative entre la solution optimale et la borne inférieure obtenue avant l'ajout des contraintes de SP-partition , autrement dit, Gap-coupe = $\frac{\text{Copt -Ccoupe}}{\text{Copt}}*100$,
Gap	:	erreur relative entre la solution optimale et la borne inférieure avant branchement, autrement dit, Gap = $\frac{\text{Copt -Csp}}{\text{Copt}}*100$,
TT	:	le temps CPU total en secondes.

$\|V\|$	$\|E\|$	NC	NSPπ	Copt	Csp	C_{coupe}	Gap	Gap_{coupe}	TT
10	36	4	6	249	249	229,5	0	7,83	0,05
20	70	11	16	586	586	531,5	0	9,3	0,13
30	114	20	22	839	839	772,5	0	7,93	0,3
40	168	23	29	1045	1045	968	0	7,37	0,36
50	194	36	47	1402	1402	1259	0	10,2	0,62
60	235	39	50	1672	1672	1516,5	0	9,3	0,69
70	310	34	48	1922	1922	1748	0	9,05	0,8
80	308	52	71	2252	2252	2037	0	9,55	1,47
90	347	56	80	2574	2574	2319,5	0	9,89	1,37
100	394	67	96	2865	2865	2568	0	10,37	2,33
110	437	74	105	3168	3168	2855	0	9,88	2,63
120	474	77	110	3477	3477	3147	0	9,49	3,58
130	522	82	118	3744	3744	3389,5	0	9,47	4,22
140	565	86	118	4023	4023	3646,5	0	9,36	4,09
150	620	78	120	4347	4347	3931	0	9,57	5,76
160	652	98	132	4594	4594	4182,5	0	8,96	6,46
170	701	100	134	4879	4879	4445,5	0	8,89	8,36
180	744	106	145	5151	5151	4695	0	8,85	10,81
190	784	123	163	5435	5435	4934	0	9,22	11,25
200	809	116	172	5668	5668	5119	0	9,69	12,82
210	857	120	183	5998	5998	5409	0	9,82	13,80
220	931	111	176	6254	6254	5686	0	9,08	13,97
230	1008	145	185	6586	6586	5986	0	9,11	17,47
240	980	132	189	6852	6852	6238,5	0	8,95	13,842
250	1023	137	196	7176	7176	6535	0	8,93	15,803
260	1064	143	204	7451	7451	6790,5	0	8,86	24,66
270	1129	149	226	7801	7801	7072,5	0	9,34	29,26
280	1146	157	233	8032	8032	7290,5	0	9,17	26,42
290	1190	161	238	8288	8288	7528	0	9,17	38,28
300	1238	164	243	8591	8591	7809	0	9,1	47,93

TAB. 7.1 – *Graphes série-parallèles*

Avant tout, ces expérimentations illustrent un résultat théorique connu : le polytope du problème est alors totalement décrit par les contraintes de SP-partition et les contraintes triviales. De plus, elles nous ont permis de vérifier que notre un algorithme, exact, de séparation des contraintes de SP-partition est adapté pour une implémenta-

tion. C'est une contribution importante puisque les précedents algorithmes de séparation exactes de ces contraintes, étant basés sur les fonctions sous-modulaires, étaient plus complexes et n'avaient pas encore été implémentés.

La table 7.2 fait ressortir l'efficacité de la méthode de coupe et branchement en montrant le temps nécessaire pour un algorithme n'utilisant pas les contraintes de SP-partition. Très rapidement les durées explosent. Ainsi pour une instance à 30 sommets et 114 arêtes, alors que l'instance est résolue en 0,033 seconde avec la séparation des contraintes de SP-partition, elle n'est pas résolue au bout de 1000 secondes lorsque l'on ne fait que la séparation des contraintes de coupe. De plus, le branchement génère au bout de ces 1000 secondes plus de 270 000 sous-problèmes dans un arbre de profondeur égale à 817.

$\|V\|$	$\|E\|$	NC	NSPπ	Copt	C_{coupe}	Gap_{coupe}	TT	TT sans SP	PB	SB
5	15	2	6	111	94,50	14,86	0,003	0,018	6	40
10	32	6	8	259	232,50	10,23	0,003	0,212	8	446
15	51	5	9	417	393,00	5,76	0,006	0,255	13	494
20	70	8	16	558	504,50	9,59	0,012	51,914	22	66730
25	70	10	14	558	504,50	9,59	0,015	439,828	25	249232
30	114	20	22	839	772,00	7,99	0,033	>1000	817	>270000

TAB. 7.2 – *Apport des contraintes de SP-partition en temps*

7.2.4 Le problème du sous-graphe (1,2,3)-arête connexe

Nous avons abordé le travail de programmation avec deux points de vue différents pour traiter d'une part la partie précédente, c'est-à-dire la résolution du problème du sous-graphe 3-arête connexe pour les graphes série-parallèles, et les parties suivantes dans lesquelles on résout le problème SNDP pour des graphes quelconques et des types de connexité différents.

Dans le cas des graphes série-parallèles, nous avons pu nous appuyer totalement sur nos travaux et nous avons élaboré un programme permettant d'utiliser ces résultats. Les calculs ont totalement confirmé l'approche théorique et nous n'avons pas eu besoin

de recourir à une phase de branchement. Nous obtenons donc des temps d'exécution trés rapides même pour des graphes de grande taille.

Pour traiter le cas général, nous avons combiné une approche théorique et une approche numérique, dans le sens où l'on a développé des procédures de séparation qui pour une part étaient basées sur des résultats théoriques, c'est le cas des F-partition, et d'autre part, des procédures de séparation basées sur l'observation des solutions obtenues avant la phase de branchement, pour les instances traitées. Nous avons ainsi plusieurs méthodes heuristiques qui séparent les contraintes de partition.

Pour nous assurer de la solidité de notre travail, nous avons comparé les résultats que nous obtenons à ceux obtenus par Kerivin [58] pour les cas où $r(v) = 2$ pour tous les sommets et pour le cas où $r(v)$ égale 1 ou 2. Naturellement, comme lui, nous obtenons de très bons résultats dans le cas uniforme où $r(v) = 2$ pour tout $v \in V$ grâce à la séparation des contraintes de coupe et à la séparation des contraintes de F-partition (cf table 7.3).

Voici les notations utilisées dans les tables de cette section.

NC	:	le nombre de contraintes de coupe générées,
Nπ	:	le nombre de contraintes de partition générées,
Nπ_{L1}	:	le nombre de contraintes de partition générées par l'heuristique $L1$,
Nπ_{L3}	:	le nombre de contraintes de partition générées par l'heuristique $L3$,
Nπ_{Ln}	:	le nombre de contraintes de partition générées par l'heuristique Ln,
N$F\pi$	:	le nombre de contraintes de F-partition générées,
SB	:	le nombre de nœuds de l'arbre de branchement générés,
PB	:	la profondeur de l'arbre de branchement

Copt	:	la valeur de la solution optimale,
Cc	:	la solution obtenue après la séparation des contraintes de coupe
C	:	la valeur de la solution avant branchement
Gap	:	l'erreur relative entre la meilleure borne supérieure (la valeur optimale si le problème à été résolu à l'optimum) et la borne inférieure obtenue avant branchement,
TT	:	le temps CPU total en secondes

Problème	NC	N$F\pi$	Nπ	Copt	Cc	C	Gap	SB	PB	TT
burma14	3	0	0	3323	3323,00	3323,00	0,00	1	0	0,033
ulysse16	6	0	0	6859	6859,00	6859,00	0,00	1	0	0,054
gr17	11	0	0	2085	2085,00	2085,00	0,00	1	0	0,096
gr21	0	0	0	2707	2707,00	2707,00	0,00	1	0	0,012
ulysse22	12	0	0	7013	7013,00	7013,00	0,00	1	0	0,108
gr24	5	2	0	1272	1272,00	1272,00	0,00	1	0	0,057
fri26	15	0	0	937	937,00	937,00	0,00	1	0	0,138
bayg29	8	2	0	1610	1608,00	1610,00	0,00	1	0	0,106
bays29	6	4	0	2020	2013,50	2020,00	0,00	1	0	0,102
dantzig42	11	2	0	699	697,00	698,00	0,14	2	1	0,160
swiss42	35	3	0	1273	1272,00	1273,00	0,00	1	0	0,321
att48	54	1	0	10628	10604,00	10610,33	0,17	8	5	0,727
gr48	26	14	0	5031	4959,00	5017,00	0,28	7	3	0,569
hk48	24	4	0	11461	11444,50	11461,00	0,00	1	0	0,201
eil51	15	27	0	426	422,50	426,00	0,00	3	1	0,474
berlin52	6	0	0	7542	7542,00	7542,00	0,00	1	0	0,060
brazil58	40	2	0	25405	25364,50	25405,00	0,00	1	0	0,324
st70	149	11	0	675	671,00	673,00	0,30	231	32	21,852
eil76	8	4	0	538	537,00	538,00	0,00	1	0	0,106
pr76	55	40	0	106492	105120,00	106194,00	0,28	36	13	4,043
rat99	42	8	0	1211	1206,00	1208,75	0,19	8	3	2,040
rd100	131	7	0	7910	7899,33	7910,00	0,00	1	0	5,383
kroa100	169	35	0	21261	20936,50	21167,38	0,44	38	12	15,740
krob100	208	30	0	22059	21834,00	21980,00	0,36	33	16	17,266
kroc100	124	45	0	20749	20472,50	20688,25	0,29	31	9	8,778
krod100	166	31	0	21294	21141,00	21235,00	0,28	12	8	7,498
kroe100	145	26	0	21923	21799,50	21908,87	0,06	7	3	6,022
eil101	68	6	0	629	627,00	628,00	0,16	9	4	2,365
lin105	212	2	0	14379	14370,50	14379,00	0,00	1	0	10,620
bier127	252	9	0	118282	117431,00	117987,67	0,25	61	14	26,132
u159	287	15	0	42373	41925,00	42166,20	0,49	93	20	61,496
kroa150	471	32	0	26537	26299,00	26382,54	0,58	513	43	304,876
krob150	380	16	0	26249	25732,50	25844,00	1,54	478	60	270,053
a280	148	78	0	2592	2579,00	2590,67	0,05	16	6	48,942
ts225	0	61	0	117363	115605,00	117363,00	0,00	1	0	0,232

TAB. 7.3 – *Résultats pour le problème 2-arête connexe*

Problème	NC	N$F\pi$	Nπ_{L1}	Nπ_{L3}	Nπ_{Ln}	Copt	C	Gap	SB	PB	TT
burma14	20	0	5	0	0	3084	3084,00	0,00	1	0	0,012
ulysse16	15	0	32	0	0	6009	6009,00	0,00	1	0	0,015
gr17	24	1	14	0	0	2015	2015,00	0,00	1	0	0,021
gr21	17	2	14	0	0	2648	2648,00	0,00	1	0	0,027
ulysse22	38	3	35	0	0	5779	5779,00	0,00	1	0	0,054
gr24	38	1	13	0	0	1218	1218,00	0,00	1	0	0,051
fri26	63	1	26	0	0	900	900,00	0,00	1	0	0,138
bayg29	47	3	56	0	0	1570	1570,00	0,00	1	0	0,117
bays29	37	0	51	0	0	1923	1923,00	0,00	1	0	0,125
dantzig42	113	5	36	0	4	667	667,00	0,00	1	0	0,655
swiss42	167	0	46	10	0	1245	1238,58	0,01	7	3	2,584
att48	89	2	102	0	21	10277	10270,50	0,06	2	1	1,418
gr48	106	0	174	0	16	4845	4806,22	0,81	49	14	14,322
hk48	151	0	45	0	7	11413	11368,00	0,40	13	5	3,339
eil51	155	0	141	0	13	411	410,00	0,24	33	10	14,823
berlin52	161	3	133	0	0	7313	7284,75	0,39	20	9	11,254
brazil58	177	2	143	0	25	24281	24209,33	0,30	159	19	17,276
st70	223	0	112	0	7	638	630,19	1,24	153	22	46,953

TAB. 7.4 – *Résultats pour le problème* $\{1,2\}$*-arête connexe*

Dans le cas où $r \in \{1,2\}^V$, nos résultats sont similaires à ceux de Kerivin. Ils font en particulier ressortir l'importance des contraintes de F-partition. On a remarqué que dans ce cas l'heuristique L_1 permet de générer beaucoup de contraintes, alors que l'heuristique L_3 en génère peu.

La table 7.5 donne les résultats de notre programme pour le problème de sous-graphe 3-arête connexe. Là encore, pour valider notre travail, nous avons comparé nos résultats à ceux donnés par Bendali et al. [13, 12]. Les méthodes que nous utilisons ne sont pas aussi complexes que les leurs. Ils utilisent notamment des méthodes de contraction de graphe ainsi que des procédures de séparation pour d'autres contraintes valides. Néanmoins, on peut voir que nos résultats restent comparables aux leurs.

Problème	NC	N$F\pi$	Nπ_{Ln}	Nπ_{L3}	Copt	C	Gap	SB	PB	TT
burma14	8	0	4	6	5530	5460,50	1,26	38	7	0,068
ulysse16	4	0	4	0	11412	11412,00	0,00	2	0	0,000
gr17	6	4	7	2	3455	3448,00	0,20	5	2	0,015
gr21	5	1	5	1	4740	4740,00	0,00	1	1	0,003
ulysse22	7	0	5	6	11713	11683,00	0,26	20	5	0,074
gr24	6	13	7	6	2157	2157,00	0,00	3	2	0,051
fri26	7	0	4	7	1543	1539,00	0,26	7	4	0,051
bayg29	16	4	9	8	2639	2629,00	0,38	19	4	0,165
bays29	16	1	7	12	3321	3303,00	0,54	111	14	0,617
dantzig42	24	7	17	14	1210	1203,00	0,58	172	15	1,733
swiss42	25	2	9	6	2161	2147,83	0,61	206	21	1,262
att48	19	0	9	14	17499	17464,67	0,20	30	7	0,489
gr48	26	10	7	18	8313	8281,42	0,38	48	10	0,711
hk48	13	12	14	7	19479	19424,67	0,28	78	11	0,987
eil51	7	5	5	0	692	690,00	0,29	14	6	0,172
berlin52	30	11	28	8	12716	12658,67	0,45	94	20	1,477
brazil58	47	2	12	27	42792	42739,71	0,12	112	16	2,803
st70	76	10	32	12	1126	1122,33	0,33	1492	22	21,408
eil76	7	73	8	4	876	875,50	0,06	6	2	0,578
pr76	147	12	29	16	187283	184282,88	1,60	19456	55	265,781
rat99	20	25	14	4	2029	2025,50	0,17	100	14	2,316

TAB. 7.5 – *Résultats pour le problème du sous-graphe 3-arête connexe*

Les tables 7.6, 7.7 et 7.8 montrent l'apport des différentes contraintes dans l'algorithme de génération de coupes et branchements. Le caractère * est utilisé lorsque le temp d'exécution de l'algorithme de coupe et branchement dépasse 1000 secondes. Chaque bloc correspond à une instance du problème. La première ligne des blocs donne la résolution obtenue avec toutes les procédures de séparation. Les lignes suivantes correspondent à des résolutions avec un sous-ensemble de procédures de séparation. On marque "-" lorsque la procédure de séparation n'a pas été activée pour la classe de contrainte correspondant à la colonne. Inversement, lorsque la procédure de séparation est activée, on marque "actif" ou le nombre de contraintes générées dans la colonne correspondante (le terme "actif" signifie que la séparation de la contrainte a été effectuée mais que l'on n'a pas conservé le nombre de contraintes obtenues par la séparation).

Problème	N$F\pi$	Nπ_{Ln}	Nπ_{L3}	Copt	C	Gap	TT
burma14	0	4	6	5530	5460,50	1,26	0,068
-	-	actif	-	5530	5393,00	2,48	0,180
-	-	-	actif	5530	5422,75	1,94	0,418
-	-	-	-	5530	5271,50	4,67	1,032
ulysse16	0	4	0	11412	11412,00	0,00	0,000
-	-	actif	-	11412	11412,00	0,00	0,000
-	-	-	3	11412	11330,50	0,71	0,159
-	-	-	-	11412	11279,00	1,17	0,883
gr17	4	7	2	3455	3448,00	0,20	0,015
-	1	-	-	3455	3395,00	1,74	0,405
-	-	6	-	3455	3420,00	1,01	0,084
-	-	-	5	3455	3418,00	1,07	0,159
-	-	-	-	3455	3384,00	2,05	0,359
gr21	1	5	1	4740	4740,00	0,00	0,003
-	1	-	-	4740	4677,00	1,33	0,093
-	-	actif	-	4740	4740,00	0,00	0,003
-	-	-	actif	4740	4740,00	0,00	0,003
-			-	4740	4662,00	1,65	0,112
ulysse22	0	5	6	11713	11683,00	0,26	0,074
-	-	5	-	11713	11606,50	0,91	0,658
-	-	-	7	11713	11611,50	0,87	0,464
-	-	-	-	11713	11540,50	1,47	5,670
gr24	13	7	6	2157	2157,00	0,00	0,051
-	0	-	-	2157	2118,00	1,81	0,524
-	-	2	-	2157	2132,00	1,16	0,333
-	-	-	8	2157	2145,67	0,53	0,323
-	-	2	4	2157	2149,00	0,37	0,252
-	-	-	-	2157	2118,00	1,81	0,524
fri26	0	4	7	1543	1539,00	0,26	0,051
-	-	4	-	1543	1536,00	0,45	0,056
-	-	-	7	1543	1538,87	0,27	0,021
-	-	-	-	1543	1523,00	1,30	0,171

TAB. 7.6 – *Résultats détaillés pour le problème 3-arête connexe*

Problème	N$F\pi$	Nπ_{Ln}	Nπ_{L3}	Copt	C	Gap	TT
bayg29	4	9	8	2639	2629,00	0,38	0,165
-	4	-	-	2639	2609,25	1,13	3,762
-	-	10	-	2639	2627,00	0,45	0,307
-	-	-	15	2639	2628,75	0,39	0,300
-	-	10	8	2639	2639,00	0,00	0,184
-	-	-		2639	2592,50	1,76	8,766
bays29	1	7	12	3321	3303,00	0,54	0,617
-	1	-	-	3321	3281,00	1,20	12,865
-	-	8	-	3321	3296,74	0,73	2,438
-	-	-	18	3321	3321,00	0,00	1,550
-	-	8	12	3321	3296,74	0,73	0,888
-	-	-		3321	3250,00	2,14	25,422
dantzig42	7	17	14	1210	1203,00	0,58	1,733
-	3	-	-	1210	1193,00	1,40	
-	-	15	-	1210	1195,83	1,17	17,190
-	-	-	21	1210	1196,69	1,10	14,438
-	-	19	12	1210	1203,00	0,58	1,925
swiss42	2	9	6	2161	2147,83	0,61	1,262
-	0	-	-	2161	2109,00	2,41	37,210
-	-	8	-	2161	2128,50	1,50	7,162
-	-	-	11	2161	2136,42	1,14	4,705
-	-	8	6	2161	2145,50	0,72	1,496
att48	0	9	14	17499	17464,67	0,20	0,489
-	-	9	-	17499	17346,83	0,87	13,353
-	-	-	14	17499	17417,38	0,47	1,260
-	-	-	-	17499	17179,5	1,83	60,480
gr48	10	7	18	8313	8281,42	0,38	0,711
-	5	-	-	8313	8195,5	1,41	*
-	-	8	-	8313	8250,75	0,75	4,134
-	-	-	20	8313	8250,33	0,75	3,105
-	-	actif	actif	8313	8263,75	0,59	0,856
hk48	12	14	7	19479	19424,67	0,28	0,987
-	12	-	-	19479	19127,25	1,81	*
-	-	13	-	19479	19378,13	0,52	2,166
-	-	-	17	19479	19300,1	0,92	1,863
-	-	13	6	19479	19400	0,41	0,935

TAB. 7.7 – *Résultats détaillés pour le problème 3-arête connexe*

Problème	N$F\pi$	Nπ_{Ln}	Nπ_{L3}	Copt	C	Gap	TT
eil51	5	5	0	692	690,00	0,29	0,172
-	3	-	-	692	684,5	1,08	1,430
-	-	6	-	692	689,75	0,33	0,170
-	-	-	13	692	688,25	0,54	0,518
-	-	6	10	692	689,75	0,33	0,191
berlin52	11	28	8	12716	12658,67	0,45	1,477
-	5	-	-	12716	12436	2,20	40,701
-	-	27	-	12716	12588,25	1,00	2,787
-	-	-	22	12716	12600	0,91	11,517
-	-	27	4	12716	12650	0,52	1,921
brazil58	2	12	27	42792	42739,71	0,12	2,803
-	2	-	-	42792	41523,5	2,96	*
-	-	10	-	42792	41854,25	2,19	81,352
-	-	-	36	42792	42631,2	0,38	8,775
-	-	11	28	42792	42737,71	0,13	3,870
st70	10	32	12	1126	1122,33	0,33	21,408
-	8	-	-	1126	1106,5	1,73	207,177
-	-	3	-	1126	1119,75	0,56	*
-	-	-	32	1126	1114,06	1,06	*
-	-	-	-	1126	1122,00	0,36	60,206
eil76	73	8	4	876	875,5	0,06	0,578
-	44	-	-	876	870,5	0,63	4,360
-	-	6	-	876	873,5	0,29	1,690
-	-	-	5	876	872,20	0,43	4,003
-	-	6	3	876	874,50	0,17	0,407
-	-	-	-	876	871,83	0,48	4,360
pr76	12	29	16	187283	184282,88	1,60	265,781
-	7	-	-	187283	180067	3,85	*
-	-	24	-	187283	182988,25	2,29	*
-	-	-	32	187283	183649,78	1,94	*
-	-	25	18	187283	184151,39	1,67	365,827
rat99	25	14	4	2029	2025,50	0,17	2,316
-	25	-	-	2029	2011,75	0,85	622,498
-	-	12	-	2029	2021,00	0,39	5,618
-	-	-	10	2029	2013,14	0,78	74,132
-	-	12	4	2029	2021,75	0,36	8,740

TAB. 7.8 – *Résultats détaillés pour le problème 3-arête connexe*

Problème	N$F\pi$	Nπ_{Ln}	Nπ_{L3}	Copt	C	Gap	TT
kroa100	6	20	36	36498	35795,32	1,93	35,57
-	-	16	-	36498	35230	3,47	*
-	-	-	49	36498	35455,87	2,86	*
-	-	20	30	36498	35666	2,28	*
-	1	-	-	36498	34679,25	4,98	*
kroe100	16	24	14	37302	37141,04	0,43	19,86
-	-	28	17	37302	37134,31	0,45	20,06
-	-	26	-	37302	36975,75	0,87	233,37
-	-	-	32	37302	36925,25	1,01	*
-	10	-	-	37302	36604	1,87	*
rd100	12	18	21	13284	13225	0,44	215,85
-	-	14	-	13284	13139,75	1,09	*
-	-	-	24	13284	13150,33	1,01	*
-	-	16	22	13284	13224,25	0,45	*
-	11	-	-	13284	13036	1,87	*
eil101	28	13	0	1016	1012,75	0,32	66,57
-	-	13	1	1016	1011,5	0,44	157,14
-	-	11	-	1016	1011,5	0,44	157,14
-	-	-	14	1016	1008,83	0,71	*
-	24	-	-	1016	1008,28	0,76	*
gr120	35	22	12	11442	11421	0,18	38,03
-	-	11	-	11442	11353	0,78	*
-	-	-	32	11442	11399,24	0,37	*
-	-	11	18	11442	11406,7	0,31	*
-	24	-	-	11442	11320,56	1,06	*
bier127	33	15	30	198417	198033,79	0,19	25,67
-	-	18	-	198417	197143	0,64	*
-	-	-	44	198417	197685,17	0,37	*
-	-	18	26	198417	197965,17	0,23	*
-	10	-	-	198417	192026	3,22	*
ch150	41	37	14	11027	10977,08	0,45	256,49
-	-	33	-	11027	10951,67	0,68	*
-	-	-	50	11027	10912,62	1,04	*
-	-	33	10	11027	10969,61	0,52	*
-	18	-	-	11027	10804,42	2,02	*

TAB. 7.9 – *Résultats détaillés pour le problème 3-arête connexe*

Problème	N$F\pi$	Nπ_{Ln}	Nπ_{L3}	Copt	C	Gap	TT
rat195	22	10	0	3934	3933	0,03	6,59
-	-	9	-	3934	3928,5	0,14	*
-	-	-	14	3934	3927,22	0,17	*
-	-	9	1	3934	3929	0,13	*
-	17	-	-	3934	3923,5	0,27	*
gr202	46	51	19	66696	66554,21	0,21	1075,91
-	-	33	-	66696	66258,83	0,66	*
-	-	-	49	66696	66211,8	0,73	*
-	-	34	16	66696	66370,84	0,49	*
-	28	-	-	66696	65896,88	1,2	*

TAB. 7.10 – *Résultats détaillés pour le problème 3-arête-connexe*

Nous avons ensuite appliqué notre algorithme au cas où $r \in \{1,2,3\}$. Nous avons repris les exemples de la TSP library en donnant des types de connexité égaux à 1, 2 et 3 aux sommets de manière à avoir 60% de sommets de type 1, 30 % de type 2 et 10 % de type 1. En plus des contraintes de coupe, nous avons utilisé les contrainte de F-partition et les contraintes de partition. De même, le signe "-" signifie que la procédure de séparation n'a pas été activée pour la classe de contrainte correspondant à la colonne. Les résultats que nous obtenons sont bons en termes d'erreur relative. Dans le cas où $r \in \{1,2,3\}^V$ cependant le nombre de coupes est très élevé, ce qui pèse sur la rapidité des calculs. Dans les exemples que nous donnons, nous trouvons une solution optimale en moins de 3 heures pour des graphes de moins de 58 sommets.

Problème	N$F\pi$	Nπ_{L1}	Nπ_{Ln}	Nπ_{L3}	Copt	C	Gap	TT	PB	SB
burma14 (7,4,3)	0	2	0	0	3607	3607,00	0,00	0,006	0	1
	-	2	-	-	3607	3607,00	0,00	0,006	1	3
	-	-	2	-	3607	3601,50	0,15	0,012	1	3
	-	-	-	2	3607	3583,50	0,65	0,021	3	7
	1	-	-	-	3607	3323,50	7,86	0,897	27	547
ulysse16 (11,2,3)	1	9	2	0	6084	6070,00	0,23	0,018	2	5
	-	10	-	-	6084	6052,00	0,52	0,064	11	13
	-	-	-	-	6084	5887,50	3,23	0,033	8	17
	-	-	-	-	6084	5877,00	3,40	0,049	13	27
	-	-	-	-	6084	5674,00	6,73	0,136	41	113
	-	-	-	-	6084	5139,50	15,52	32,159	73	14113
gr17 (10,4,3)	0	14	0	0	2514	2514,00	0,000	0,04	0	1
	-	14	-	-	2514	2514,00	0,000	0,04	0	1
	-	-	5	-	2514	2435,00	3,142	0,20	10	57
	-	-	-	3	2514	2413,50	3,998	0,21	12	67
	1	-	-	-	2514	2391,50	4,873	0,31	14	123
	-	-	-	-	2514	2270,50	9,686	4,01	47	1649
gr21 (13,4,4)	0	23	0	0	3326	3326,00	0,000	0,11	0	1
	-	23	-	-	3326	3326,00	0,000	0,11	0	1
	-	-	2	-	3326	3212,50	3,413	0,65	21	65
	-	-	-	1	3326	3207,50	3,563	0,46	11	25
	-	-	-	-	3326	3207,50	3,563	5,67	11	25
	-	-	-	-	3326	3148,50	5,337	0,05	41	1381
gr24 (16, 6, 2)	0	22	1	0	1266	1266,00	0,000	0,16	0	1
	1	-	-	-	1266	1226,50	3,120	1,07	13	69
	-	22	-	-	1266	1258,50	0,592	0,20	5	11
	-	-	4	-	1266	1248,00	1,422	0,20	11	35
	-	-	-	5	1266	1251,00	1,185	0,12	3	7
	-	-	1	5	1266	1266,00	0,000	0,09	0	1

TAB. 7.11 – *Résultats détaillés pour le problème {1,2,3}-arête connexe*

Nous avons comparé le comportement d'un problème en fonction de la répartition des types de connexité des sommets. La table 7.13 expose les résultats obtenus pour le problème fri26 lorsque l'on fait varier le nombre de sommets de type 3, de type 2 et de type 1. Il apparaît que le nombre de contraintes de coupe générées augmente

Problème	N$F\pi$	Nπ_{L1}	Nπ_{Ln}	Nπ_{L3}	Copt	C	Gap	TT	PB	SB
fri26 (13,11,2)	2	59	4	0	1063	1061,50	0,14	1,63	3	6
	-	10	-	-	1063	1058,10	0,46	1,84	5	16
	-	-	5	-	1063	1023,44	3,72	14,70	46	1472
	-	-	-	5	1063	1013,60	4,65	14,56	31	1370
	-	-	5	0	1063	1023,44	3,72	14,73	46	1472
	2	-	-	-	1063	1006,50	5,32	17,73	42	1860
	-	-	-	-	1063	935,50	11,99	>10000	*	*
bayg29 (20,6,3)	1	28	0	5	1642	1635,00	0,43	0,634	2	4
	-	29	-	-	1642	1613,00	1,77	0,550	10	50
	-	-	2	-	1642	1617,50	1,49	0,716	10	34
	-	-	-	5	1642	1620,40	1,32	0,599	9	36
	-	-	4	3	1642	1612,00	1,83	0,630	10	38
	1	-	-	-	1642	1380,00	15,96	>10000	*	*
bays29 (13,13,3)	2	17	0	0	2165	2163,00	0,092	0,20	3	6
	-	18	-	-	2165	2163,00	0,09	0,24	3	6
	-	-	4	-	2165	2157,25	0,35	0,20	4	12
	-	-	-	2	2165	2148,00	0,78	0,30	5	16
	2	-	-	-	2165	2141,00	1,10	0,28	7	22
	-	-	-	-	2165	2005,50	7,367	>10000	*	*
berlin52 (31,16,5)	0	177	0	0	8354	8322,00	0,38	120,91	29	156
	-	177	-	-	8354	8322,00	0,38	120,91	29	156
	-	-	11	-	8354	7847,00	6,07	>10000	*	*
	-	-	-	20	8354	7907,00	5,35	>10000	*	*
	1	-	-	-	8354	7727,00	7,501	>10000	*	*
	-	-	-	-	8354	7305,50	12,55	>10000	*	*
brazil58 (25,18,5)	0	128	0	0	31598	31441,11	0,50	1293	34	1692
	-	128	-	-	31598	31441,11	0,50	1293	34	1692
	-	-	6	-	31598	30987,67	1,93	>10000	*	*
	-	-	-	2	31598	30951,50	2,05	>10000	*	*
	-	-	6	0	31598	30987,67	1,93	>10000	*	*
	1	-	-	-	31598	30945,50	2,07	>10000	*	*
	-	-	-	-	31598	30251,50	4,26	>10000	*	*
pr76 (36,33,7)	9	14	21	10	145922	142214,75	2,54	822,02	64	34
	-	10	-	-	145922	140096,25	3,992	>10000	*	*
	-	-	28	-	145922	141434,38	3,075	>10000	*	*
	-	-	-	10	145922	140436,75	3,759	>10000	*	*
	-	-	28	6	145922	141935,44	2,732	>10000	*	*
	5	-	-	-	145922	139350,16	4,504	>10000	*	*
	-	-	-	-	145922	138142,00	5,332	>10000	*	*
pr225 (20,175,30)	34	41	0	0	131647	13055,67	0,82	26316	*	*

TAB. 7.12 – *Résultats détaillés pour le problème {1,2,3}-arête connexe*

avec la proportion de sommets de type 1. Par contre, il est difficile de faire ressortir d'autres règles en ce qui concerne les liens entre les répartitions de types de connexité et les contraintes, autres que les contraintes de coupe, générées. Néanmoins, il peut être intéressant par la suite de faire d'autres tests sur cet aspect du problème.

V_1	V_2	V_3	NC	N$F\pi$	Nπ_{L1}	Nπ_{Ln}	Nπ_{L3}	Copt	C	Gap	TT	PB	SB
21	3	2	160	2	44	0	0	901	884,92	1,785	4,106	18	203
20	3	3	156	0	47	3	0	962	940,75	2,209	4,352	25	229
14	10	2	77	2	60	4	0	1063	1061,50	0,141	1,674	3	7
13	9	4	64	3	23	4	0	949	944,33	0,492	0,829	4	11
13	11	2	80	2	59	4	0	1063	1061,50	0,141	1,433	3	7
10	5	11	64	2	7	0	1	1209	1189,00	1,654	1,428	40	109
7	7	12	131	0	14	8	3	1280	1243,25	2,871	19,256	61	2343
2	6	18	29	2	5	9	6	1466	1454,80	0,764	0,672	8	47

TAB. 7.13 – *Problème fri26 avec variation des types de connexité*

7.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté un algorithme de coupe et branchement pour résoudre le problème SNDP lorsque les types de connexité sont 1, 2 et 3 pour des graphes généraux. Nous avons traité de manière particulière le cas où les types de connexité sont tous égaux à 3 et les graphes sont série-parallèles. Nous avons implémenté l'algorithme de séparation des F-partition pour le cas où les types de connexité sont 1, 2 ou 3, ce qui n'avait jamais été fait précédement. Nous avons également développé plusieurs heuristiques détectant des contraintes de partition de type 2 ou 3 violées.

Lorsque $r(v) = 3$ pour tout $v \in V$ et lorsque les graphes sont série-parallèles, nous avons pu mesurer l'importance des contraintes de SP-partition. On a vu en effet que sans elles, la solution obtenue par application d'un algorithme de génération de coupe avec seulement les contraintes de coupe, est très loin de la solution optimale.

Lorsque les types de connexité sont égaux à 1, 2 ou 3, nous avons utilisé les contraintes de F-partition et les contraintes de partition. On a ainsi généralisé les résultats de Kerivin et al. [58, 60], en montrant que, d'une part dans le cas de type de connexité uniforme et égaux à 2, et d'autre part, dans le cas où les types de connexité sont 1 et 2, nos résultats sont similaires à ceux de Kerivin et al.

Notons également que notre algorithme ainsi conçu, peut fonctionner avec d'autres types de connexité plus grands que 3.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié une approche polyèdrale pour le problème de conception de réseaux fiables. Un des objectifs de ma thèse était d'étendre des résultats connus dans le cas où $r(v) = 2$ pour tout sommet v, au cas où $r \in \{1,2,3,\dots l\}^V$, $l \in \mathbb{N}$.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la contrainte de SP-partition dans le cas où $r(v) = k$, *kimpair* et $k \geqslant 3$. Cette contrainte est e très importante pour la définition du polyèdre du problème. Nous avons affiné la connaisance des conditions dans lesquelles elle définit une facette.

Ensuite, nous avons étudié la séparation des contraintes de la forme $x(\delta(V_1,\dots,V_p)) \geqslant ap + b$, où a et b sont deux scalaires tels que $a > 0$ et $b > -a$. Nous avons développé un algorithme polynomial qui sépare ces contraintes. Celui-ci peut être utilisé pour les contraintes valides de SNDP puisque nombre d'entre elles sont de cette forme. En particulier, c'est la cas des contraintes de SP-partition. Nous avons donc utilisé cet algorithme dans notre partie expérimentale. Notons également que cette étude a un champ d'application qui dépasse celui des problèmes de conception de réseaux fiables.

Puis nous nous sommes intéressés au cas où $r \in \{1,k,\dots l\}^V$, $k \geqslant 2$. Nous avons montré que le polytope de ce problème, pour les graphes série-parallèles et sans toupie, était totalement défini par les contraintes de SP-partition et les contraintes triviales. De plus, nous avons défini une nouvelle classe de contraintes valides, les contraintes de toupie.

Enfin, nous avons fait l'étude du problème dans le cas où $r \in \{1,2,3\}^V$, tirant profit des résultats obtenus précédemment. En particulier, nous avons introduis deux nouvelles classes de contraintes valides dans le cas général, les contraintes de chaînes impaires et les contraintes de toupies.

Enfin une étude expérimentale pour le cas où $r \in \{1,2,3\}^V$ a permis de mesurer l'intérêt des différentes contraintes valides et des différentes méthodes de séparation.

Ce travail ouvre des perspectives intéressantes, aussi bien d'un point de vue polyédral qu'algorithmique. Sur le plan polyédral, cela pose la question de la généralisation des résultats obtenus sur la description du polytope du problème lorsque $r \in \{1,k\}^V$ au cas où $r \in \{1,2,3,\dots l\}^V$, $l \in \mathbb{N}$. D'un point de vue algorithmique, nous allons développer des algorithmes de séparation des nouvelles contraintes valides : les contraintes de toupie et les contraintes de chaîne impaire. Cela nous permettra d'améliorer notre algorithme de coupes et branchements.

Bibliographie

[1] http://www.ilog.com/products/cplex/.

[2] http://www.coin-or.org/.

[3] *ABACUS, A Branch-And-CUt System, Version 3.0, User s Guide and Reference Manual, 2007.*

[4] A. Aggarwal and N. Garg. A scaling technique for better network design. In *Proc 5th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 233–240, 1994.

[5] A. Aggarwal, P. Klein, and R. Ravi. When trees collapse: An approximation algorithm for the generalized steiner problem in networks. *SIAM J Comput*, 24:440–456, 1995.

[6] R. K. Ahuja, T. L. Magnanti, and J. B. Orlin. *Network flows: theory, algorithms, and applications.* Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 1993.

[7] A. Balakrishnan, T. L. Magnanti, and P. Mirchandani. Connectivity-splitting models for survivable network design. *Networks*, 43:10–27, 2004.

[8] F. Barahona. Separating from the dominant of the spanning tree polytope. *Operations Research Letters*, 12:201–203, 1992.

[9] F. Barahona and H. Kerivin. Separation of partition inequalities with terminals. *Discrete Optimization*, 1:129–140, 2004.

[10] F. Barahona and A.R. Mahjoub. On two-connected subgraph polytopes. *Operation Research Letter*, 12:19–34, 1995.

[11] M. Baïou, F. Barahona, and A.R. Mahjoub. Separation of partition inequalities. *Mathematics of Operations Research*, 25(2):243–254, 2000.

[12] F. Bendali, I. Diarrassouba, M. Didi Biha, A. R. Mahjoub, and J. Mailfert. A branch-and-cut algorithm for the k-edge connected subgraph problem. *à paraître dans Networks.*

[13] F. Bendali, I. Diarrassouba, M. Didi Biha, A. R. Mahjoub, and J. Mailfert. Un algorithme de coupes et branchements pour le problème du sous-graphe k-arête

connexe. In *Actes des Articles Long de la Conférence ROADEF'06*, pages 57–78, Lille, France, 2006.

[14] L. Cai. On spanning 2-trees in a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 74:203–216, 1997.

[15] G. Calinescu, C. Fernandes, H. Karloff, and A. Zelikovsky. A new approximation algorithm for finding heavy planar subgraphs, 1997.

[16] S. Chopra. The k-edge-connected spanning subgraph polyhedron. *SIAM J. Discret. Math.*, 7(2):245–259, 1994.

[17] W. Chou and H. Franck. Survivable communication networks and the terminal capacity matrix. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 17(2):192–197, 1970.

[18] N. Christofides and C. A. Whitlock. Network synthesis with connectivity constraints — a survey. *In Operational Research*, 81:705–723, 1981.

[19] Lloyd W. Clarke and G. Anandalingam. A bootstrap heuristic for designing minimum cost survivable networks. *Computers & OR*, 22:921–934, 1995.

[20] S. A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures. In *Proceedings 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 151–158, New York, 1971. Association for Computing Machinery.

[21] C. R. Coullard, A. Rais, R. L. Rardin, and D. K Wagner. Linear-time algorithms for the 2-connected steiner subgraph problem on special classes of graphs. *Networks*, 23:195–206, 1993.

[22] W. H. Cunningham. Optimal attack and reinforcement of a network. *J. ACM*, 32(3):549–561, 1985.

[23] E. Dahlhaus, D.S. Johnson, C. H. Papadimitriou, P. D. Seymour, and M. Yannakakis. The complexity of multiterminal cuts. *SIAM J. Comput.*, 23(4):864–894, 1994.

[24] I. Diarrassouba and L. Slama. Les inégalités de SP-partition pour le problème du sous-graphe k-arête connexe. Technical Report RR-07-13, LIMOS, Aubière, France, 2007.

[25] M. Didi Biha. *Graphes k-arête connexes et polyèdres.* PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale, Brest, 1998.

[26] M. Didi Biha, H. Kerivin, and A.R. Mahjoub. On the polytope of the (1,2)-survivable network problem. *A paraître dans SIAM J. Discret. Math.*, 2005.

[27] M. Didi Biha and A. R. Mahjoub. k-edge connected subgraph polyhedra on series-parallel graphs. *Operations Research Letters*, 19:71–78, 1996.

[28] R. Diestel. *Graph Decompositions, A Study in Infinite Graph Theory.* Oxford University Press, 1990.

[29] J. Edmonds. Covers and packings in a family of sets. *Bull. American Mathematical Society 68*, pages 494–499, 1962.

[30] J. Edmonds. Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, B(69):9–14, 1965.

[31] M. Elf, C. Gutwenger, M. Jünger, and G. Rinaldi. Branch-and-Cut Algorithms for Combinatorial Optimization and Their Implementation in ABACUS. In M. Jünger and D. Naddef, editors, *Computational Combinatorial Optimization*, LNCS 2241, pages 157–222. 2001.

[32] K. P. Eswaran and R. E. Tarjan. Augmentation problems. *SIAM Journal on Computing*, 5:653–665, 1976.

[33] J. Fonlupt and A. R. Mahjoub. Critical extreme points of the 2-edge connected subgraph polytope. *Mathematical Programming*, 105(2-3):289–310, 2006.

[34] B. Fortz. *Design of Survivable Networks with Bounded Rings*, volume 2. Kluwer Academic Publishers, Network Theory and Applications, 2000.

[35] B. Fortz and M. Labbé. Structural results for two-connected networks with rings of bounded cardinality, 1999.

[36] B. Fortz, A. R. Mahjoub, S. T. McCormick, and P. Pesneau. Two-edge connected subgraphs with bounded rings: Polyhedral results and branch-and-cut. *Math. Program.*, 105(1):85–111, 2006.

[37] A. Frank. Augmenting graphs to meet edge-connectivity requirements. *SIAM J. Discret. Math.*, 5(1):25–53, 1992.

[38] G. N. Frederickson and J. JáJá. On the relationship between the biconnectivity augmentation and traveling salesman problems. *Theoretical Computer Science*, 19:189–201, 1982.

[39] D.R. Fulkerson. *Blocking Polyhedra*, volume In Graph Theory and Its Application. Academic press, 1970.

[40] H.N. Gabow, M.X. Goemans, E. Tardos, and D.P Williamson. Approximating the smallest k-edge connected spanning subgraph by lp rounding. In *Proceedings of the 16th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Vancouver, British Columbia*, pages 562–571, 2005.

[41] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness.* Freeman, San Francisco, 1979.

[42] M. X. Goemans and D. Bertsimas. Survivable networks, linear programming relaxations and the parsimonious property. *Math. Program*, 60:145–166, 1993.

[43] M.X. Goemans, A. Goldberg nad S. Plotkin, D. Shmoys, E. Tardos, and D. Williamson. Improved approximation algorithms for network design problems. In *Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 223–232, Arlington, VA, 1994.

[44] M.X. Goemans and D.P. Williamson. Primal-dual approximation algorithms for feedback problems in planar graphs. *Combinatorica*, 17:1–23, 1997.

[45] A. V. Goldberg and R. E. Tarjan. A new approach to the maximum-flow problem. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 35:921–940, 1988.

[46] R. E. Gomory and T. C. Hu. Multi-terminal network flows. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 9:551–570, 1961.

[47] M. Grörtschel, C. L. Monma, and M. Stoer. Polyhedral approaches to network survivability. *Reliability of Computer and Communication Networks, DIMACS Ser. Discret. Math. Theor. Comput. Sci.*, 5, 1991.

[48] M. Grötschel, C. L. Monma, and M. Stoer. Facets for polyhedral arising in the design of communication networks with low-connectivity constraints. *SIAM Journal on Optimization*, 2(3):474–504, August 1992.

[49] M. Grötschel and C.L. Monma. Integer polyhedra arising from certain network design problems with connectivity constraints. Technical Report 104, Institute of Mathematicss, University of Augsburg, Augsburg, Germany, 1988.

[50] M. Grötschel, C.L. Monma, and M. Stoer. Design of survivable netwoks. *Handbook in Operations Research and Management Science*, 7:617–671, 1995.

[51] M. Grötschel, C.L. Monma, and M. Stoer. Polyhedral and computational investigations for designing communication networks with hight survivability requirements. *Operations Research*, 43:1012–1024, 1995.

[52] Martin Grötschel, László Lovász, and Alexander Schrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 1(2):169–197, 1981.

[53] Dan Gusfield. Very simple methods for all pairs network flow analysis. *SIAM J. Comput.*, 19(1):143–155, 1990.

[54] T.-S. Hsu and M.-Y. Kao. A unifying augmentation algorithm for two-edge connectivity and biconnectivity. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2:237–256, 1998.

[55] D. Huygens, M. Labbé, A. R. Mahjoub, and P. Pesneau. Two edge-disjoint hop-constrained paths: Valid inequalities and branch-and-cut. *Networks*, 49(1):116–133, 2007.

[56] K. Jain. A factor 2 approximation algorithm for the generalized steiner network problem. *Combinatorica*, 21:39–60, 2001.

[57] R.M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations: Proc. of a Symp. on the Complexity of Computer Computations*, pages 85–103, New York, NY, 1972. The IBM Research Symposia Series, Plenum Press.

[58] H. Kerivin. *Réseaux fiables et polyèdres.* PhD thesis, Université de Clermont-Ferrand, 2000.

[59] H. Kerivin and A. R. Mahjoub. Design of survivable networks: A survey. *Networks*, 46(1):1–21, 2005.

[60] H. Kerivin and A. R. Mahjoub. On survivable network polyhedra. *Discrete Mathematics*, 290:183–210, 2005.

[61] H. Kerivin and A. Ridha Mahjoub. Separation of partition inequalities for the (1,2)-survivable network design problem. *Operations Research Letters*, 30:265–268, 2002.

[62] S. Khuller and B. Raghavachari. Improved approximation algorithms for uniform connectivity problems. In *Journal of Algorithms*, volume 21, pages 434–450. 27th Symposium on Theory of Computing (STOC), 1996.

[63] S. Khuller and U. Vishkin. Biconnectivity approximations and graph carvings, 1994.

[64] J. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *In Proceedings of the American Mathematical Society*, 1956.

[65] E Lawler. *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids.* Holt, Rinehart, Winston, 1976.

[66] T. L. Magnanti and S. Raghavan. Strong formulations for network design problems with connectivity requirements. *Networks*, 45:61–79, 2005.

[67] A. R. Mahjoub. Approches Polyédrales. In V. Th. Paschos, editor, *Optimisation combinatoire : Concepts fondamentaux.* chapitre 9. Hermès, Paris, 2005.

[68] A.R. Mahjoub. Two-edge connected spanning subgraphs and polyhedra. *Mathematical Programming*, 64:199–208, 1994.

[69] K. Menger. Zur allgemeinen kurventheorie. *Fundamanta Mathematicae*, 10:96–115, 1927.

[70] C. L. Monma, B. S. Munson, and W. R. Pulleyblank. Minimum-weight two-connected spanning networks. *Math. Program.*, 46(2):153–171, 1990.

[71] C. L. Monma and D. F. Shallcross. Methods for designing communication networks with certain two-connected survivability constraints. *Operations Research*, 37:531–541, 1989.

[72] R. Ravi and David P. Williamson. An approximation algorithm for minimum-cost vertex-connectivity problems. In *SODA '95: Proceedings of the sixth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 332–341, Philadelphia, PA, USA, 1995. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[73] G. Reinelt. TSPLIB - a traveling salesman problem library. *ORSA Journal on Computing 3*, pages 376–384, 1991.

[74] A. Schrijver. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency.* Algorithms and Combinatorics 24. Springer-Verlag, 2003.

[75] K. Steiglitz, P. Weiner, and D. Kleitman. The design of minimum-cost survivable networks. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 16:455 – 460, 1969.

[76] M. Stoer. *Design of survivable network.* Springer, 1932.

[77] M. Stoer. *Design of survivable network.* PhD thesis, University of Augsburg, 1992.

[78] K. Takamizawa, T. Nishizeki, and N. Saito. Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs. *J. ACM*, 29(3):623–641, 1982.

[79] S. Thienel. *ABACUS - A Branch-And-CUt System.* PhD thesis, Universität zu Köln, 1995.

[80] K. Wagner. Bemerkungen zu hadwigers vermatung. *Math. Ann.*, 141:433–451, 1979.

[81] P. Winter. Steiner problem in network: a survey. *Networks*, 17:129–167, 1987.