Un algorithme de détermination de la capacité pour l'intégrale de Choquet 2-additive

Brice Mayag[1,2] Michel Grabisch[1] Christophe Labreuche[2]

[1] Université de Paris 1

[2] Thales R & T France

RD 128 F-91767 Palaiseau cedex, France, brice.mayag@thalesgroup.com

106-112, Boulevard de l'Hôpital 75013 Paris, France, michel.grabisch@univ-paris1

RD 128 F-91767 Palaiseau cedex, France, christophe.labreuche@thalesgroup.com

Résumé :

L'utilisation de l'intégrale de Choquet en Aide Multicritère à la Décision (AMCD) nécessite l'identification de la capacité qui lui est associée. Nous proposons ici un algorithme de détermination d'une capacité pour l'intégrale de Choquet 2-additive à partir d'une information ordinale fournie par le décideur.

Mots-clés :

AMCD, intégrale de Choquet, capacité 2-additive.

Abstract:

The use of the Choquet integral in Multicriteria Decision Aiding (MCDA) requires the identification of its capacity. We present in this paper an algorithm which determine, from an ordinal information given by the decision-maker, the capacity for the 2-additive Choquet integral.

Keywords:

MCDA, Choquet integral, 2-additive capacity.

1 Introduction

La résolution de certains problèmes pratiques en aide multicritère à la décision nécessite l'utilisation de modèles de fonctions d'agrégation plus sophistiqués que la moyenne pondérée classique. Tel est le cas des intégrales floues dont l'une des plus connues est l'intégrale de Choquet [10, 7]. Elle est définie à partir d'une capacité ou mesure floue et permet de prendre en compte l'interaction entre critères, c'est-à-dire les phénomènes de redondance ou d'opposition entre critères.

L'expression de l'intégrale de Choquet devient simple lorsque la capacité qui lui est associée est 2-additive [5]. Dans ce cas, le modèle est entièrement déterminé par les valeurs de la capacité sur des alternatives particulières appelées ici actions binaires. Une action binaire est une alternative fictive prenant soit la valeur neutre **0** sur tous les critères, soit la valeur **0** sur tous les critères exceptés un ou deux critères pour lesquels on attribue la valeur satisfaisante **1**.

Nous présentons ici un algorithme de détermination d'une capacité 2-additive à partir d'une information préférentielle fournie par le décideur. Cet algorithme repose sur un théorème de caractérisation d'une échelle ordinale 2-additive faisant intervenir une nouvelle propriété fondamentale appelée MOPI. On pourra alors calculer les paramètres de l'intégrale de Choquet (les indices d'importance de chaque critère et d'interaction entre critères) grâce à la capacité construite. Notons ici que l'acquisition de l'information préférentielle se fait suivant la méthodologie MACBETH [3] restreint au cas ordinal (sans utilisation des intensités de préférence pour le décideur).

Des généralités sur l'intégrale de Choquet, les actions binaires et les graphes orientés seront données dans la prochaine section. Nous présenterons en Section 3 notre algorithme, le théorème de caractérisation sur lequel il repose et terminerons notre étude par une illustration de l'algorithme à travers un exemple.

2 Préliminaires

Dans ce papier, nous désignerons par :

– $N = \{1, ..., n\}$ un ensemble de n critères et par $Y_1, ..., Y_n$ l'ensemble des attributs. Une

alternative ou action x est un élément de $Y = Y_1 \times ... \times Y_n$ avec $x = (x_1, ..., x_n)$.
– 2^N ou $\mathcal{P}(N)$ l'ensemble des parties de N.
– $\forall A \subseteq N,\ N - A = N \setminus A$.
– $\forall i, j \in N,\ N - i = N - \{i\}$ et $N - ij = N - \{i, j\}$.
– $\forall A \subseteq N,\ z = (x_A, y_{N-A})$ signifie que z est défini par $z_i = x_i$ si $i \in A$, et $z_i = y_i$ sinon.

2.1 Rappels sur l'intégrale de Choquet

Nous n'aborderons dans cette section que quelques notions de base sur l'intégrale de Choquet. Pour de plus amples informations et détails à ce sujet, voir [7, 5, 6, 8].

Définition 2.1. *Une mesure floue ou capacité sur N est une fonction $\mu : 2^N \to [0, 1]$, avec $\mu(N) = 1$, $\mu(\emptyset) = 0$, et vérifiant la propriété de monotonie : $\forall A, B \in 2^N,\ [A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)]$.*

Définition 2.2. *Soit μ une capacité sur N. Soit $a := (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n_+$. L'intégrale de Choquet de a par rapport à μ est définie par :*

$$C_\mu(a) := a_{\tau(1)}\mu(N) + \sum_{i=2}^{n}(a_{\tau(i)} - a_{\tau(i-1)})\ \mu(\{\tau(i), ..., \tau(n)\})$$

où τ est une permutation sur N telle que $a_{\tau(1)} \leq a_{\tau(2)} \leq ... \leq a_{\tau(n-1)} \leq a_{\tau(n)}$.

La souplesse du modèle apportée par les capacités a un coût : pour n critères, le modèle comporte $2^n - 2$ paramètres libres, ce qui laisse présager une identification du modèle difficile. La notion fondamentale de capacité k-additive proposée par Grabisch [5] permet de réduire considérablement ce nombre de paramètres. En particulier, une capacité 2-additive nécessitera seulement $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ coefficients pour être déterminée.

Définition 2.3. *Soit μ une capacité sur N. La transformée de Möbius de μ est une fonction $m : 2^N \to \mathbb{R}$ definie par $m(T) := \sum_{K \subseteq T} (-1)^{|T \setminus K|}\mu(K), \forall T \in 2^N$.*

Définition 2.4. *Une capacité μ est dite k-additive ($k \in \{1, \ldots, n\}$)([5]) si sa transformée de Möbius vérifie les deux conditions suivantes :*
– $\forall T \in 2^N,\ m(T) = 0$ si $|T| > k$
– $\exists B \in 2^N$ tel que $|B| = k$ et $m(B) \neq 0$.

Ainsi, une capacité μ sur N sera dite 2-additive si sa transformée de Möbius vérifie : $\forall T \in 2^N,\ m(T) = 0$ si $|T| > 2$ et $\exists B \in 2^N$, tel que $|B| = 2$ et $m(B) \neq 0$. Dans la suite, nous adopterons les notations suivantes pour une capacité μ donnée : $\forall i, j \in N,\ \mu_i := \mu(\{i\})$, $\mu_{ij} := \mu(\{i, j\})$.

Lemme 1.

1. *Soit μ une capacité 2-additive sur N. Nous avons $\forall K \subseteq N,\ |K| \geq 2$,*

$$\mu(K) = \sum_{\{i,j\} \subseteq K} \mu_{ij} - (|K| - 2) \sum_{i \in K} \mu_i. \quad (1)$$

2. *Si les coefficients μ_i et μ_{ij} sont donnés pour tout $i, j \in N$, alors les conditions nécesssaires et suffisantes pour que $\mu : 2^N \to [0, 1]$ soit une capacité 2-additive sont :*

$$\sum_{\{i,j\} \subseteq N} \mu_{ij} - (n - 2) \sum_{i \in N} \mu_i = 1 \quad (2)$$

$$\mu_i \geq 0,\ \forall i \in N \quad (3)$$

$$\sum_{i \in A \setminus \{k\}} (\mu_{ik} - \mu_i) \geq (|A| - 2)\mu_k \quad (4)$$

$$\forall A \subseteq N,\ |A| \geq 2\ \forall k \in A,$$

Démonstration. Voir [5] □

Dans un problème d'aide multicritère à la décision où l'on cherche à construire un modèle, il importe de savoir quels sont les critères importants et ceux qui sont négligeables. Ainsi, pour l'intégrale de Choquet, un indice d'importance v_i suivant une capacité μ a été défini pour chaque critère i. Cet indice, qui correspond à l'indice de Shapley [15], a pour expression :

$v_i = \sum_{K \subseteq N \setminus i} \frac{(n-|K|-1)!|K|!}{n!} (\mu(K \cup i) - \mu(K))$.

Un autre indice tout aussi utile est l'indice d'interaction entre critères. Son expression pour une capacité μ 2-additive et deux critères i et j est donnée par :

$$I_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j.$$

– Si $I_{ij} > 0$ alors on a une synergie positive ou une complémentarité entre les critères i et j. En d'autres termes "l'importance de i et j pris ensemble", soit μ_{ij} est plus grande que la somme des importances individuelle $\mu_i + \mu_j$.
– Un phénomène de synergie négative ou une redondance entre les critères i et j équivaut à $I_{ij} < 0$. Dans ce cas les critères i et j sont par eux-même importants, tandis que les deux réunis ne sont pas beaucoup plus importants.
– $I_{ij} = 0$ traduit l'indépendance entre les critères i et j.

Pour $a := (a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n_+$, l'intégrale de Choquet peut s'exprimer très simplement en fonction des indices d'importance et d'interaction si la capacité μ est 2-additive :

$$C_\mu(a) = \sum_{i=1}^{n} v_i a_i - \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \subseteq N} I_{ij} |a_i - a_j| \quad (5)$$

avec $(v_i - \frac{1}{2} \sum_{\{i,j\} \subseteq N} I_{ij}) \geq 0 \; \forall i \in N, \; j \neq i$.

C_μ dans ce cas est appelé *intégrale de Choquet 2-additive*.

2.2 Actions binaires et information ordinale

Nous supposons que le décideur est en mesure d'identifier sur chaque critère i de N deux niveaux de références $\mathbf{1}_i$ et $\mathbf{0}_i$ dans Y_i correspondant respectivement aux niveaux qu'il juge satisfaisant et neutre sur le critère i. On appelle *action binaire* ou *alternative binaire* un élément de l'ensemble $X = \{\mathbf{0}_N, \; (\mathbf{1}_i, \mathbf{0}_{N-i}), \; (\mathbf{1}_{ij}, \mathbf{0}_{N-ij}), \; i,j \in N, i \neq j\} = \{a_0, \; a_i, \; a_{ij}, \; i,j \in N, i \neq j\} \subseteq Y$ où

– $\mathbf{0}_N = (\mathbf{1}_\emptyset, \mathbf{0}_N) = a_0$ est l'alternative jugée neutre sur tous les critères ;
– $(\mathbf{1}_i, \mathbf{0}_{N-i}) = a_i$ est l'alternative jugée satisfaisante sur le critère i et neutre sur les autres critères ;
– $(\mathbf{1}_{ij}, \mathbf{0}_{N-ij}) = a_{ij}$ est l'alternative jugée satisfaisante sur les critères i et j et neutre sur les autres critères.

On désignera par ϕ la bijection entre X et $\mathcal{P}^2(N) = \{S \subseteq N : |S| \leq 2\}$ definie par $\forall S \in \mathcal{P}^2(N), \phi((\mathbf{1}_S, \mathbf{0}_{N-S})) := S$.

Remarque 1. *L'intégrale de Choquet vérifie la propriété suivante (voir [10, 7]) : pour toute capacité μ, $C_\mu(\mathbf{1}_A, \mathbf{0}_{N-A}) = \mu(A), \; \forall A \subseteq N$.*

Au vu de cette remarque et d'après l'équation (5), les expressions de l'intégrale de Choquet 2-additive pour les actions binaires s'écrivent : $\forall i, j \in N$,

$$C_\mu(a_0) = 0$$

$$C_\mu(a_i) = \mu_i = v_i - \frac{1}{2} \sum_{k \in N, \; k \neq i} I_{ik}$$

$$C_\mu(a_{ij}) = \mu_{ij} = v_i + v_j - \frac{1}{2} \sum_{k \in N, \; k \notin \{i,j\}} (I_{ik} + I_{jk})$$

Ainsi, le modèle 2-additif de l'intégrale de Choquet est entièrement déterminé à partir des valeurs $C_\mu(a_i)$ et $C_\mu(a_{ij})$, $\forall i, j \in N$. Notre approche algorithmique consistera à déterminer ces valeurs à travers une démarche interactive avec le décideur. Pour cela, le décideur sera amené à fournir une information préférentielle sur l'ensemble des actions binaires sur base de comparaison par paires. En d'autre termes, pour deux actions binaires données, il pourra donner une préférence stricte pour l'une par rapport à l'autre, ou exprimer son indifférence de jugement entre les deux, ou encore ne pas se prononcer pour une comparaison des deux actions binaires. On en déduit la construction de deux relations binaires :

$$P = \{(x,y) \in X \times X : \text{le décideur préfère strictement } x \text{ à } y\}$$

$I = \{(x, y) \in X \times X$: le décideur est indifférent entre x et $y\}$

Définition 2.5. *La paire $\{P,\ I\}$ est appelée information ordinale sur X.*

Dans ce papier, on admettra pour hypothèse $P \neq \emptyset$ (**"axiome de non-trivialité"**). Nous concluons cette partie de préliminaires par quelques définitions importantes sur les graphes orientés [14, 4].

2.3 Eléments sur les graphes orientés

Définition 2.6. *Un graphe orienté G est formé de deux ensembles : un ensemble $V = \{v_1, v_2, ..., v_p\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et un ensemble $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ partie du produit cartésien $V \times V$, dont les éléments sont appelés arcs. On notera $G = (V, E)$.*

Définition 2.7. *Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et p éléments de V, $v_0, v_1, ..., v_q$, $q > 0$.*

1. *$((v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{q-1}, v_q))$ est un chemin dans G de v_0 à v_q si $(v_{l-1}, v_l) \in E$, $l = 1, \ldots, q$.*
2. *Un circuit dans G est un chemin $((v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{q-1}, v_q))$ dans G tel que $v_0 = v_q$.*
3. *Une composante fortement connexe (cfc) de G est un sous-ensemble A de V tel que, entre deux sommets v_1 et v_2 de A, il existe dans G, un chemin de v_1 à v_2 et un chemin de v_2 à v_1.*
4. *Supposons G sans circuit. Un tri topologique est une numérotation des sommets de G, c'est-à-dire une bijection σ entre V et $\{1, ..., p\}$, telle que $(x, y) \in E \Rightarrow \sigma(x) > \sigma(y)$.*

Remarque 2. *Le tri topologique sur le graphe sans circuit $G = (V, E)$ permet d'avoir une partition de V en q ($q \geq 1$) ensembles donnés par : $X_0 = \{x \in V : \forall y \in V,\ (x, y) \notin E\}$, $X_i = \{x \in V \backslash \{X_0 \cup X_1 \cup ... \cup X_{i-1}\} : \forall y \in V \backslash \{X_0 \cup X_1 \cup ... \cup X_{i-1}\},\ (x, y) \notin E\}$, $i = 1, ..., q-1$.*

3 Algorithme de détermination d'une capacité 2-additive de l'intégrale de Choquet

3.1 Formalisation du problème

Définition 3.1. *On dira que l'information ordinale $\{P, I\}$ est représentable par une intégrale de Choquet 2-additive s'il existe une capacité 2-additive μ telle que :*

1. *$\forall x, y \in X,\ x\ P\ y \Rightarrow C_\mu(x) > C_\mu(y)$*
2. *$\forall x, y \in X,\ x\ I\ y \Rightarrow C_\mu(x) = C_\mu(y)$.*

Définition 3.2. *Une échelle ordinale 2-additive sur X est une capacité 2-additive sur N vérifiant les deux conditions de la définition 3.1.*

Le problème est donc de mettre en œuvre une méthode permettant de construire une échelle ordinale 2-additive à partir d'une information ordinale $\{P, I\}$ fournie par le décideur.

Pour y arriver, nous avons complété $(P \cup I)$ par une nouvelle relation M sur X qui modélise la monotonie naturelle entre les actions binaires. On l'appellera *relation de monotonie sur les paires de critères*.

Définition 3.3. *Soit $\{P, I\}$ une information ordinale sur X. Pour $x, y \in X$, $x\ M\ y$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *$y = a_0$ et $non(x\ (P \cup I)\ y)$.*
2. *$\exists i, j \in N$ tel que $[x = a_{ij},\ y = a_i]$ et $non[x\ (P \cup I)\ y]$*

Remarque 3.

- *Les conditions sur μ issue de M correspondent aux équations (3) et (4) pour les ensembles A tels que $|A| = 2$. En effet, $\forall i, j \in N$, $i \neq j$, $a_i\ M\ a_0$ correspond à $\mu_i \geq 0$ et $a_{ij}\ M\ a_i$ correspond à $\mu_{ij} \geq \mu_i$.*
- *Soit μ une échelle ordinale 2-additive sur X. Par définition de M, nous avons $\forall x, y \in X$, $x\ M\ y \Rightarrow \mu(\phi(x)) \geq \mu(\phi(y))$.*

3.2 Circuits dans $(P \cup I \cup M)$

Les définitions suivantes, données pour la relation $(P \cup I \cup M)$, sont une adaption de celles présentées en section 2.3.

Définition 3.4. *Soit $x, y \in X$,*

1. *$\{x_1, x_2, \cdots, x_p\} \subseteq X$ est un chemin de x vers y pour une relation binaire $\mathcal{R}$ si $x = x_1 \ \mathcal{R} \ x_2 \ \mathcal{R} \cdots \mathcal{R} \ x_{p-1} \ \mathcal{R} \ x_p = y$. Un chemin de $\mathcal{R}$ de x vers x sera appelé circuit dans $\mathcal{R}$*
2. *Un chemin $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$ dans $(P \cup I \cup M)$ sera dit chemin strict de x vers y s'il existe $i \in \{1, ..., p-1\}$ tel que $x_i \ P \ x_{i+1}$.*
3. *Un chemin strict dans $(P \cup I \cup M)$ de x vers x est appelé circuit strict dans $(P \cup I \cup M)$.*
4. *Un circuit $(x_1, x_2, ..., x_p)$ dans $(P \cup I \cup M)$ sera dit circuit non-strict s'il n'est pas strict.*

Nous distinguons donc deux types de circuits dans $(P \cup I \cup M)$: les circuits stricts et les circuits non-stricts. Notons que certains auteurs ([13, 12]) désignent les circuits stricts comme des circuits contenant une relation asymétrique appelée ici P.

Définissons à présent une autre notion, la fermeture transitive TC, bien connue dans la littérature (voir [4, 2, 1, 9]). Elle permettra la détection de circuits non-strict dans $(P \cup I \cup M)$ grâce à la relation $\sim$ définie à sa suite.

Définition 3.5. $\forall x, y \in X$

1. *$x \ TC \ y$ s'il existe un chemin dans $(P \cup I \cup M)$ de x à y.*
2. *$x \ TC_P \ y$ s'il existe un chemin strict dans $(P \cup I \cup M)$ de x à y.*
3. *$x \sim y$ si et seulement si*

$$x = y \text{ ou } \begin{cases} x \ TC \ y \text{ et } non(x \ TC_P \ y) \\ \text{and} \\ y \ TC \ x \text{ et } non(y \ TC_P \ x) \end{cases}$$

La relation $\sim$ est de manière évidente une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont des circuits non-strict de $(P \cup I \cup M)$. En notant par $(X\backslash \sim)$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\sim$ et par $\overline{x}$ la classe d'équivalence de l'élément x de X, on montre aisément le résultat suivant :

Proposition 1. *Si μ est une échelle ordinale 2-additive sur X, alors $\forall \bar{x} \in (X\backslash \sim)$, $\forall y, z \in \bar{x}$, $\mu(\phi(y)) = \mu(\phi(z))$.*

Pour obtenir une caractérisation d'une représentation d'une information ordinale par l'intégrale de Choquet 2-additive nous avons introduit une nouvelle propriété liée au caractère 2-additif du modèle utilisé. C'est la propriété MOPI.

3.3 Propriété MOPI

Exemple introductif. Supposons $N = \{1, 2, 3, 4\}$ et les relations P et I données par le décideur comme suit : $P = \{(a_3, a_0)\}$ et $I = \{(a_4, a_{23}); (a_{24}, a_2)\}$. Par définition de M, on a : $a_{24} \ M \ a_4 \ I \ a_{23} \ M \ a_2 \ I \ a_{24}$. Donc $(a_{24}, a_4, a_{23}, a_2, a_{24})$ est un circuit non-strict de $(P \cup I \cup M)$.

Si μ est une échelle ordinale 2-additive de $\{P, I\}$ alors on aura $\mu_3 > 0$ et d'après la Proposition 1, $\mu_{24} = \mu_4 = \mu_{23} = \mu_2$, ce qui contredit la contrainte de monotonie d'une capacité 2-additive $\mu_{24} + \mu_{23} \geq \mu_2 + \mu_3 + \mu_4$ en prenant $A = \{2, 3, 4\}$ et $k = 2$ dans l'équation (4) du Lemme 1.

Le formalisme de ce type d'incohérence lié à la violation des conditions de monotonie de l'équation (4) fait appel à la notion de multi-ensemble [16] qui est une généralisation de celle d'ensemble avec une répétion permise des éléments.

Soit $K \subseteq N$ et $|K| = k \geq 2$. Soit i un élément fixé de K. Considérons le multi-ensemble K^i de X où seule la répétition de l'élément a_i est permise $(k-2)$ fois, c'est-à-dire :

$$K^i = \{\underbrace{a_i, a_i, ..., a_i}_{(k-2) \text{ fois}}\} \cup (\bigcup_{j \in K \backslash \{i\}} \{a_j\}).$$

K^i est un ensemble à $2k-3$ éléments et sera appelé *ensemble* (K,i)*-multiplié* de i.

Exemple 1. $N = \{1,2,3,4,5,6\}$ *et* $i = 3$ *fixé.*

$K = \{1,2,3,4,5\}$, $k = 5$: $\{1,2,3,4,5\}^3 = \{a_1, a_2, a_3, a_3, a_3, a_4, a_5\}$.

Définition 3.6. *Propriété MOPI*

Soit $K \subseteq N$ *tel que* $|K| = k \geq 3$. *Soit* i *un élément fixé de* K. *Posons* $K \setminus \{i\} := \{j_1, j_2, ..., j_{k-1}\}$.

1. *On appelle Monotonie de l'Information Préférentielle (Monotonicity of Preferential Information) dans* K *relativement à* i *la propriété suivante notée* (K,i)*-**MOPI** :*

   $$\left.\begin{array}{l} a_{ij_1} \sim a_{l_1} \\ a_{ij_2} \sim a_{l_2} \\ a_{ij_3} \sim a_{l_3} \\ \vdots \\ a_{ij_{k-1}} \sim a_{l_{k-1}} \\ \{a_{l_1}, a_{l_2}, ..., a_{l_{k-1}}\} \subseteq K^i \end{array}\right\} \Rightarrow$$

   $[non(a_{l_h}\ TC_P\ a_0),\ \forall a_{l_h} \in K^i \setminus \{a_{l_1}, a_{l_2}, ..., a_{l_{k-1}}\}]$

   Si la propriété (K,i)*-**MOPI** est vérifiée alors les éléments* $a_{l_h} \in K^i \setminus \{a_{l_1}, a_{l_2}, ..., a_{l_{k-1}}\}$ *sont appelés Actions Binaires Neutres (Neutral Binary Actions) de* K *relativement à* i. *L'ensemble de tels éléments sera noté* (K,i)*-NBA.*
2. *On dira que* K *vérifie la propriété de* Monotonie de l'Information Préférentielle *(MOPI) si* $\forall i \in K$, (K,i)*-MOPI est vérifiée.*

Exemple 2. *Soit* $N = \{1,2,3,4\}$ *et* $i = 1$ *fixé. Pour* $K = \{1,2,3\}$, $k = 3$ *et* $\{1,2,3\}^1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, *la propriété* $(\{1,2,3\},1)$*-MOPI s'écrit comme suit :*

- $\left\{\begin{array}{l} a_{12} \sim a_1 \\ a_{13} \sim a_2 \end{array}\right. \Rightarrow non(a_3\ TC_P\ a_0)$
- $\left\{\begin{array}{l} a_{12} \sim a_2 \\ a_{13} \sim a_1 \end{array}\right. \Rightarrow non(a_3\ TC_P\ a_0)$
- $\left\{\begin{array}{l} a_{12} \sim a_1 \\ a_{13} \sim a_3 \end{array}\right. \Rightarrow non(a_2\ TC_P\ a_0)$
- $\left\{\begin{array}{l} a_{12} \sim a_3 \\ a_{13} \sim a_1 \end{array}\right. \Rightarrow non(a_2\ TC_P\ a_0)$
- $\left\{\begin{array}{l} a_{12} \sim a_3 \\ a_{13} \sim a_2 \end{array}\right. \Rightarrow non(a_1\ TC_P\ a_0)$
- $\left\{\begin{array}{l} a_{12} \sim a_2 \\ a_{13} \sim a_3 \end{array}\right. \Rightarrow non(a_1\ TC_P\ a_0)$.

L'algorithme que nous proposons repose sur le théorème de caractérisation suivant [11] :

Théorème 1. *Il existe une échelle ordinale 2-additive sur* X *si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $(P \cup I \cup M)$ *n'admet pas de circuit strict ;*
2. *Tout sous-ensemble* K *de* N *tel que* $|K| = k \geq 3$ *vérifie la propriété MOPI.*

3.4 Algorithme

Soit G un graphe orienté. Appelons $SCC(G)$ la routine qui construit l'ensemble de toutes les composantes fortement connexes de G.
Input : N, X, P, I
Output : l'échelle ordinale 2-additive ν

1. Construire la relation binaire M ;
2. Construire le graphe orienté $G = (V,E)$ où
   - $V := X$ est l'ensemble des sommets de G
   - E est l'ensemble des arcs de G défini tel que $\forall a,b \in V$, $(a,b) \in E \Leftrightarrow (a,b) \in P$ ou $(a,b) \in I$ ou $(a,b) \in M$;
3. $SCC(G)$;
4. Pour $A \in SCC(G)$,
   - S'il existe $(a,b) \in A$ tel que $(a,b) \in P$ renvoyer FAUX ; (Les éléments de A forment un circuit strict de $(P \cup I \cup M)$)
   - Sinon aller à l'étape 5 ;
5. Pour chaque sous-ensemble K de N tel que $|K| \geq 3$ et pour chaque critère i de K, tester la propriété (K,i)-MOPI.
   - Si la propriété (K,i)-MOPI n'est pas vérifiée, renvoyer FAUX ;
   - Sinon, construire l'ensemble (K,i)-NBA. Pour chaque élément a de (K,i)-NBA, ajouter un arc dans G de a_0 à a ;

6. Construire le graphe réduit $G' = (V', E')$ où
   – $V' := SCC(G)$;
   – E' est l'ensemble des arcs de G' avec $\forall A, B \in V'$, $(A, B) \in E' \Leftrightarrow \exists x \in A$, $\exists y \in B$ tel qu'il existe un arc dans G de x à y ;
7. Faire un tri topologique sur G' ;
   Soit $\{X_0,\ X_1, ...,\ X_q\}$ la partition de X obtenu avec le tri toplogique sur G' (voir Remarque 2).
8. Construire la fonction μ comme suit : Pour $l \in \{0, ..., q\}$ et $a \in X_l$,

$$\forall x \in a,\ \mu(\phi(x)) = \begin{cases} 0 & \text{si } l = 0 \\ (2n)^l & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Construire la capacité ν comme suit :

$$\begin{cases} \nu_\emptyset = 0 \\ \nu_i = \frac{\mu_i}{\alpha},\ \forall i \in N \\ \nu_{ij} = \frac{\mu_{ij}}{\alpha},\ \forall i, j \in N \\ \nu(K) = \displaystyle\sum_{\{i,j\} \subseteq K} \nu_{ij} - (|K| - 2) \sum_{i \in K} \nu_i, \\ \forall K \subseteq N, |K| > 2 \end{cases}$$

   où $\alpha = \displaystyle\sum_{\{i,j\} \subseteq N} \mu_{ij} - (n-2) \sum_{i \in N} \mu_i$.
10. Renvoyer VRAI ; ν construite à l'étape 9 est une représentation 2-additive de l'information ordinale $\{P, I\}$.

Le cardinal de N étant faible en pratique, l'algorithme est utilisable dans des applications réelles malgré sa complexité exponentielle.

3.5 Illustration de l'algorithme

Input : $N = \{1, 2, 3\}$, $X = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}\}$, $P = \{(a_{12}, a_{23}); (a_{13}, a_3); (a_{12}, a_2)\}$ et $I = \{(a_{13}, a_1), (a_3, a_{23})\}$.

– Etapes 1 à 2 : Construction de la relation $M = \{(a_{12}, a_1); (a_{12}, a_0); (a_{23}, a_2); (a_{23}, a_0); (a_{13}, a_0); (a_1, a_0); (a_2, a_0); (a_3, a_0)\}$ et du graphe $G = (V, E)$ à partir de $(P \cup I \cup M)$ (Voir Figure 1).
– Etapes 3 à 5 : $SCC(G) = \{\{a_{13}, a_1\}, \{a_{23}, a_3\}, \{a_{12}\}, \{a_2\}, \{a_0\}\}$. Aucun élément de $SCC(G)$ ne contient un élément de P. La propriété MOPI est vérifiée et on a : $(\{1, 2, 3\}, 1)$-NBA$= \emptyset$, $(\{1, 2, 3\}, 2)$-NBA$= \emptyset$ et $(\{1, 2, 3\}, 3)$-NBA$= \{a_2\}$. Un arc allant de a_0 à a_2 est donc ajouté dans G (Voir Figure 2).
– Etape 6 : On applique une nouvelle fois la routine SCC et on construit le graphe réduit $G' = (V', E')$ (Voir Figure 3).

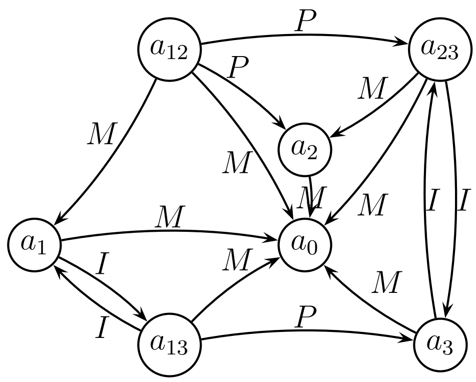

Figure 1 – Graphe $G = (V, E)$

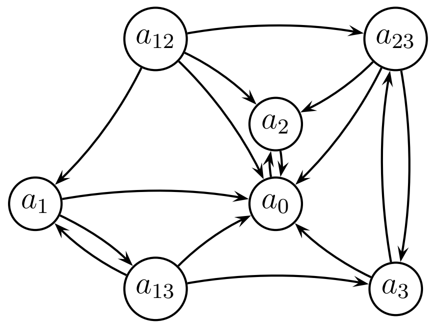

Figure 2 – Ajout de l'arc de a_0 vers a_2 dans $G = (V, E)$

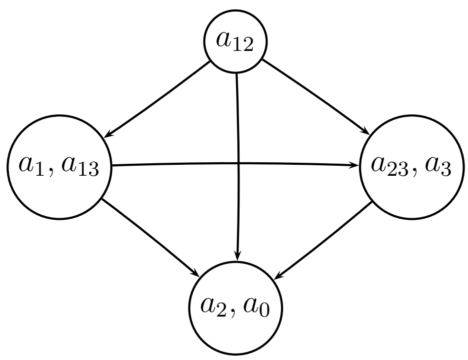

Figure 3 – Le graphe réduit $G' = (V', E')$

- Etape 7 : Application du tri topologique sur G' et obtention de la partition de X suivante : $X_0 = \{a_2, a_0\}$, $X_1 = \{a_{23}, a_3\}$, $X_2 = \{a_1, a_{13}\}$ et $X_3 = \{a_{12}\}$ (voir la Remarque 2).
- Etapes 8 à 10 : Les valeurs de μ et ν obtenues à ces étapes pour chaque action binaire sont reprises dans le tableau suivant :

	ϕ	μ	ν
a_0	$\emptyset$	0	0
a_1	$\{1\}$	36	$\frac{36}{216}$
a_2	$\{2\}$	0	0
a_3	$\{3\}$	6	$\frac{6}{216}$
a_{12}	$\{1,2\}$	216	1
a_{13}	$\{1,3\}$	36	$\frac{36}{216}$
a_{23}	$\{2,3\}$	6	$\frac{6}{216}$

Ainsi, les paramètres de l'intégrale de Choquet peuvent être déterminés grâce à la construction de la capacité 2-additive ν. Par exemple, l'indice d'interaction I_{23} entre les critères 2 et 3 est nul (critères indépendants), celui entre 1 et 2 vaut $I_{12} = 1 - \frac{36}{216} = \frac{180}{216}$ et l'importance du critère 2 est $v_2 = \nu_2 + \frac{1}{2}(I_{12} + I_{23}) = \frac{180}{432}$.

Références

[1] D. Bouyssou. Monotonicity of 'ranking by choosing'. *Social Choice and Welfare*, 23 :249–273, 2004.

[2] P. De Donder, M. Le Breton, and M. Truchon. Choosing from a weighted tournament. *Mathematical Social Sciences*, 40 :85–109, 2000.

[3] Carlos A. Bana e Costa, Jean-Marie De Corte, and Jean-Claude Vansnick. On the mathematical foundations of macbeth. *Multiple Criteria Decision Analysis : State of the Art Surveys*, 78 :409–437, 2005.

[4] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, 1986.

[5] M. Grabisch. k-order additive discrete fuzzy measures and their representation. *Fuzzy Sets and Systems*, 92 :167–189, 1997.

[6] M. Grabisch. The Möbius transform on symmetric ordered structures and its application to capacities on finite sets. *Discrete Mathematics*, 287 (1-3) :17–34, 2004.

[7] M. Grabisch and C. Labreuche. Fuzzy measures and integrals in MCDA. In J. Figueira, S. Greco, and M. Ehrgott, editors, *Multiple Criteria Decision Analysis*, pages 563–608. Kluwer Academic Publishers, 2004.

[8] M. Grabisch and Ch. Labreuche. A decade of application of the Choquet and Sugeno integrals in multi-criteria decision aid. *4OR*, 6 :1–44, 2008. doi 10.1007/s10288-007-0064-2.

[9] J.-F. Laslier. *Tournament solutions and majority voting*. Springer-Verlag, 1997.

[10] J.L. Marichal. An axiomatic approach of the discrete Choquet integral as tool to aggregate interacting criteria. *IEEE Tr. on Fuzzy systems*, 8(6) :800–807, 2000.

[11] B. Mayag, M. Grabisch, and C. Labreuche. A representation of ordinal information on binary actions by the choquet integral. *Mathematical Social Sciences (submitted)*.

[12] C. Mousset. *Familles de structures de préférence non complètes*. PhD thesis, University of Mons-Hainaut, Mons, 2004.

[13] M. Pirlot and Ph. Vincke. *Semiorders*. Kluwer academic publishers, 1997.

[14] Alexander Schrijver. *Combinatorial Optimization*, volume A. Springer, 2003.

[15] L.S. Shapley. A value for n-person games. *Contributions to the Theory of games*, pages 307–317, 1953.

[16] P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 1 and 2. Cambridge University Press, 1997 and 1999.