Fiche TD Théorie des graphes

Exercice 1

Soient les graphes $G_1(X_1, U_1)$ et $G_2(X_2, U_2)$ suivants (voir Figure 1)

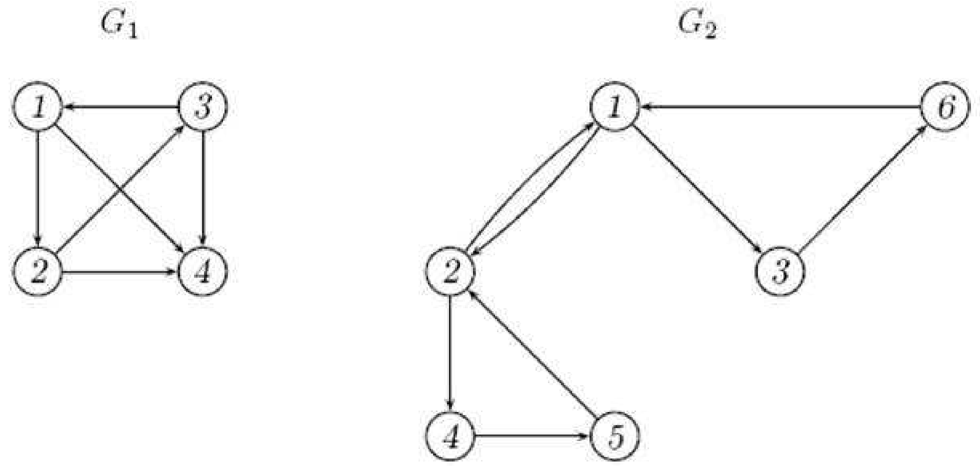

FIGURE 1 – Schéma exercice 1

1. Pour chaque sommet des deux graphes G_1 et G_2, donner les ensembles des prédécesseurs, des successeurs et des voisins, ainsi que les degrés $d^+(x), d^-(x)$ et $d(x)$.
2. Donner les matrices d'adjacence et d'incidence des deux graphes.

Exercice 2

Soit $G(X, U)$ un graphe d'ordre n. Soit $d(x)$ le degré du sommet $x \in X$. On admet le résultat suivant :

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2|U|$$

Déterminer les degrés des sommets du graphes de la Figure 2. En déduire le nombre d'arcs ou arêtes de ce graphe.

Exercice 3

Peut-on construire un graphe simple (aucune arête n'est une boucle et il y a au plus une arête entre deux sommets) ayant :

1. 4 sommets et 7 arêtes
2. 5 sommets et 11 arêtes
3. 10 sommets et 46 arêtes

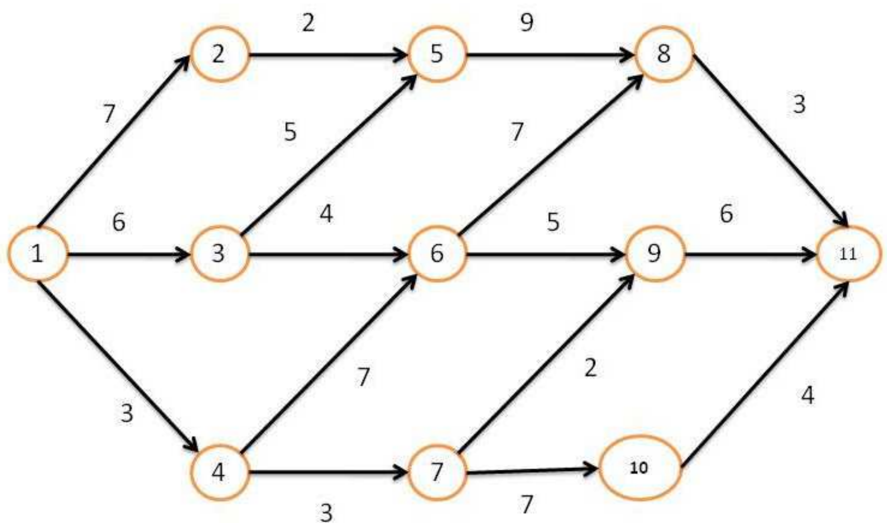

FIGURE 2 – Schéma exercice 2

Exercice 4

Deux joueurs disposent de 2 ou plusieurs tas d'allumettes. A tour de rôle, chaque joueur peut enlever un certain nombre d'allumettes de l'un des tas (selon la règle choisie). Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.

— Modéliser ce jeu à l'aide d'un graphe dans le cas où l'on dispose au départ de deux tas contenant chacun trois allumettes, et où un joueur peut enlever une ou deux allumettes à chaque fois.

— Que doit jouer le premier joueur pour gagner la partie à coup sûr ?

Exercice 5

Étant donné un groupe de dix personnes, le tableau suivant indique les paires de personnes qui ont une relation d'amitié.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Amis de i	3,6,7	6,8	1,6,7	5,10	4,10	1,2,3,7	1,3,6	2		4,5

1. Représentez cette situation par un graphe.
2. Ce graphe est-il complet ? Connexe ?
3. Si l'adage "les amis de nos amis sont nos amis" était vérifié, que pourrait-on en conclure sur la structure du graphe ?

Exercice 6

Combien d'arbres différents existe-t-il avec 5 sommets ? avec 6 sommets ? avec 7 sommets ?

Exercice 7

Soit un réseau comportant des machines A, B, C, D, et E qui doivent pouvoir communiquer entre elles. Les coûts de liaisons envisagées sont représentées par la matrice suivante :

	A	B	C	D	E
A	0	5	0	0	4
B	5	0	2	4	6
C	0	2	0	3	0
D	0	4	3	0	2
E	4	6	0	2	0

Comment câbler le réseau à moindre coût ?

Exercice 8 : Visite d'un musée

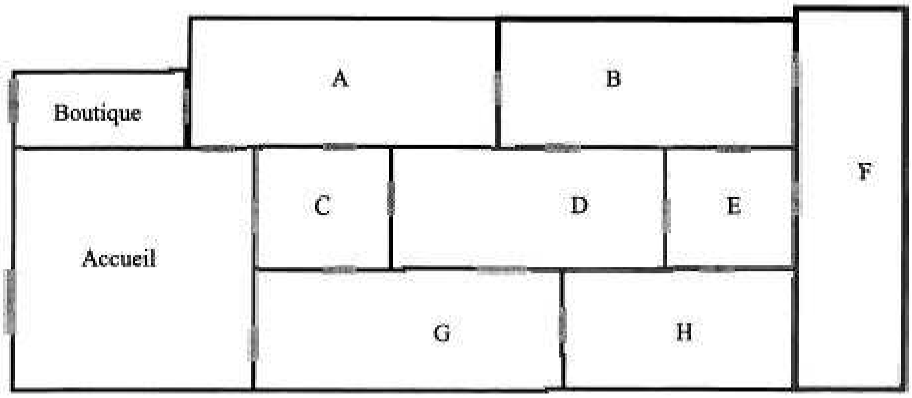

Figure 3 – Schéma exercice 4

Voici le plan d'un musée (Figure 3) : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite à la boutique.

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.
2. (a) Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes ?
   (b) Donner un exemple d'un tel circuit.
3. Comment colorier les salles y compris l'accueil et la boutique, en utilisant un minimum de couleurs, pour que 2 salles qui communiquent par une porte aient des couleurs différentes ?

Exercice 9

Cinq étudiants : A, B, C, D, et E doivent passer certains examens parmi les suivants : M1, M2, M3, M4, M5 et M6. Les examens ne se tiennent qu'une seule fois. Chaque étudiant ne peut passer qu'un examen par jour. La liste des inscriptions aux examens est la suivante :

A	M1, M2, M5
B	M3, M4
C	M2, M6
D	M3, M4, M5
E	M3, M6

1. Combien d'examens peut-on effectuer par jour ?
2. Quel est le nombre minimal de jours nécessaires pour faire passer tous les examens ?

Exercice 10

Déterminer un arbre couvrant de poids minimum du graphes suivant (Figure 4) à l'aide des algorithmes de Prim et Kruskal.

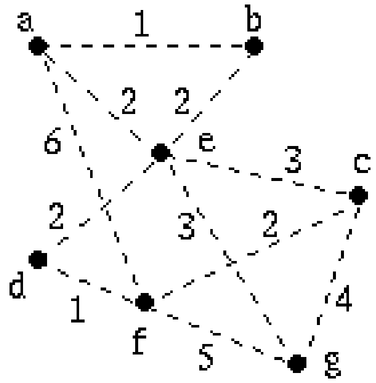

FIGURE 4 – Schéma exercice 9

Exercice 11

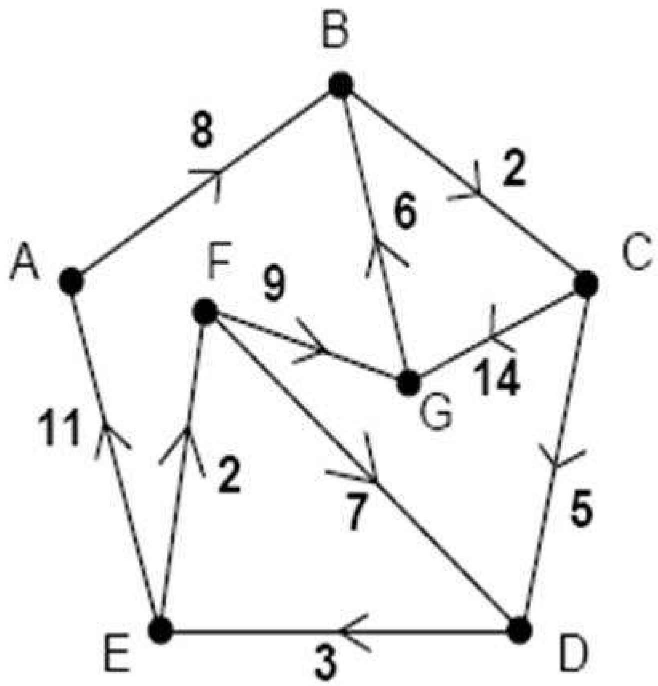

FIGURE 5 – Schéma exercice 11

Executer l'algorithme de Dijkstra sur le graphe de la Figure 5, à partir du sommet C puis à partir du sommet F.

Exercice 12

Soit $G = (X, U)$ le graphe valué représenté par la Figure 2 :

1. Montrer que G est sans circuit ;
2. Dans les deux cas suivants, déterminer un chemin de valeur optimal du sommet 1 au sommet 11, ainsi que sa valeur :
   — les valuations sur les arcs représentent des distances (exprimées en km) et l'on s'interesse à un chemin de distance minimale.
   — les valuations sur les arcs représentent des capacités (exprimées en KW) et l'on s'interesse à un chemin de capacité maximale.

Exercice 13

Une chèvre, un chou et un loup se trouvent sur la rive d'un fleuve ; un passeur souhaite les transporter sur l'autre rive mais, sa barque étant trop petite, il ne peut transporter qu'un seul d'entre eux à la fois. Comment doit-il procéder afin de ne jamais laisser ensemble et sans surveillance le loup et la chèvre, ainsi que la chèvre et le chou ?

Exercice 14

Montrer que dans un graphe non orienté, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Exercice 15

Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions ; chaque espion doit espionner tous les espions des autres pays (mais pas son propre collègue !).

1. Représentez cette situation par un graphe d'ordre 6.
2. Ce graphe est-il complet ? est-il connexe ?
3. Quel est le degré de chaque sommet ? Déduisez-en le nombre d'arêtes.