

FEUILLE 1 : LOI JOINTE ET ESTIMATION PARAMÉTRIQUE

### Exercice 1 :

On lance successivement trois pièces de monnaie et les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  désignent respectivement le nombre de *faces* apparues sur les deux premières pièces et le nombre de *piles* sur les deux dernières.

1. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ , puis les lois marginales de  $X$  et  $Y$ , et indiquer si ces variables aléatoires sont indépendantes.
2. Calculer  $Cov(X, Y)$ .

### Exercice 2 :

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de lois :

$x$	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$y$	1	2	3
$P(X = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

1. Calculer  $E(X)$  ;  $Var(X)$  ;  $E(Y)$  ;  $Var(Y)$ .
2. Donner la loi de probabilité conjointe de  $X$  et  $Y$ .
3. Établir la loi de probabilité de  $T = X + Y$ . Calculer  $E(T)$  et  $Var(T)$ .
4. Établir la loi de probabilité de  $Z = XY$ . Calculer  $E(Z)$  et  $Var(Z)$ .
5. Vérifier par le calcul que  $Cov(X, Y) = 0$ .

### Exercice 3 :

$X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires ayant le même ensemble de valeurs possibles  $\{0; 0.5; 1\}$ . La loi du couple est donnée par le tableau suivant :

$Y \setminus X$	0	0.5	1
0	0.1	0.1	0.1
0.5	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.1

1. Calculer les distribution de probabilités marginales de  $X$  et  $Y$ .
2. Calculer les distribution de probabilités de  $X$  conditionnées par l'événement  $\{Y = 0.5\}$ , puis  $\{Y = 1\}$ .
3. Calculer les espérances conditionnelles  $E(X|Y = 0.5)$  et  $E(X|Y = 1)$ . En déduire  $E(XY)$  et calculer  $E(X|Y = 0)$ .

## Exercice 4 :

Dans une banque, le nombre de chèques émis par les clients chaque jour est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On suppose que les chèques sont émis indépendamment les uns des autres. Pour un chèque émis, la probabilité pour que ce chèque soit sans provision est  $p \in ]0, 1[$ . On appelle  $Y$  la variable aléatoire correspondant au nombre de chèques émis sans provision lors d'une journée.

1. Soit  $n$  un entier strictement positif. Montrer que la loi conditionnelle de la variable  $Y$  sachant l'événement  $\{X = n\}$  est une loi binomiale dont on déterminera les paramètres ;
2. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$  ;
3. En déduire la loi de la variable aléatoire  $Y$  et calculer son espérance ;
4. Les variables  $Y$  et  $X - Y$  sont-elles indépendantes ?

## Exercice 5 :

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$ . On pose

$$p_{kn} = P(X = k, Y = n) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda} \alpha^n (1 - \alpha)^{k-n}}{n!(k-n)!} \mathbf{1}_{\{0 \leq n \leq k\}}(k, n)$$

où  $\lambda > 0$  et  $0 \leq \alpha \leq 1$  sont des nombres réels donnés.

1. Quelle est la loi de la variable  $X$  ?
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire  $Y$  ?  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. Quelle est la loi de la variable aléatoire  $Z = X - Y$  ?
4. Pour tout couple  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ , calculer  $P(Y = m | Z = n)$ . Que peut-on en déduire sur  $Y$  et  $Z$  ?
5. On fait l'hypothèse que le nombre d'enfants d'une famille, tirée au hasard dans une population donnée est une variable aléatoire de Poisson d'espérance 2.2. On admet qu'à chaque naissance, la probabilité d'observer un garçon est égale à  $\frac{1}{2}$ .
  - (a) Montrer que, conditionnellement au fait que la famille a  $n$  enfants, le nombre de garçons suit une loi Binomiale  $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ .
  - (b) Quelle est la probabilité pour qu'une famille ainsi choisie contienne  $a$  enfants dont  $b$  garçons ?
  - (c) Que peut-on dire des variables aléatoires représentant le nombre de filles d'une famille choisie au hasard dans la population donnée ?

## Exercice 6 :

Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . On note  $Y$  une autre variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , définie sur le même espace probabilisé  $(\Omega, P)$  que  $X$ , telle que,  $\forall i, j \in \mathbb{N}$ ,

$$P(Y = j | X = i) = \begin{cases} P(Y = j) & \text{si } |i - j| \geq 2 \\ 0 & \text{si } |i - j| = 1 \\ \frac{\lambda^{i-1} [\lambda^2 + \lambda(i+1) + i(i+1)] e^{-\lambda}}{(i+1)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer la loi de  $Y$ .

## Exercice 7 : La laiterie

Une laiterie produit des camemberts commercialisés sous la marque “Le moine gourmand”. La masse  $X$ , exprimée en g, d’un camembert tiré au hasard dans la production, est distribuée selon une loi normale.

On tire un échantillon simple de 17 camemberts que l’on pèse et dont le tableau suivant fournit les masses :

250	254	254	253	256	250	257	251	253
255	250	255	252	261	252	251	255	

1. En utilisant une calculatrice donner la moyenne et la variance de cet échantillon.
2. Donner une estimation de la variance  $\sigma^2$  de la production.
3. Le responsable de fabrication des camemberts “Le moine gourmand” souhaite savoir quelle taille minimale donner à un échantillon aléatoire simple pour obtenir un intervalle de confiance pour  $\mu$ , au niveau 95%, d’amplitude inférieure à 1.

Le responsable précise alors que  $\sigma^2 = 6.25$ . Calculer la taille minimale que doit avoir un échantillon pour que l’intervalle de confiance à 95 % pour  $\mu$  ait une amplitude inférieure à 1.

## Exercice 8 : Loi normale

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un échantillon d’une variable aléatoire i.i.d suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . On veut estimer  $\sigma^2$  inconnu. On définit la famille de statistiques  $Q_a := a \sum_{i=1}^n X_i^2$  avec  $a > 0$ .

On rappelle que si  $(X_1, \dots, X_n)$  sont  $n$  variables aléatoires i.i.d suivant une loi normale centrée réduite alors la variable  $X := \sum_{i=1}^n X_i^2$  suit une loi du  $\chi^2$  à  $n$  degré de liberté (ddl). Dans ce cas, son espérance est  $E(X) = n$  et sa variance est  $V(x) = 2n$ .

1. Montrer que  $Q_a \sim a \sigma^2 \chi^2(n)$ .
2. Calculer le biais de  $Q_a$ , comme estimateur de  $\sigma^2$ , en fonction de  $a$ .
3. En déduire le risque quadratique associé à  $Q_a$ .
4. Pour quelles valeurs de  $a$  ce risque est-il minimum ? L’estimateur correspondant est-il alors sans biais ?

## Exercice 9 : Machine outil

Une machine outil fabrique en série des axes dont le diamètre est une variable aléatoire  $X$ . On suppose que  $X$  suit une loi normale d’espérance  $m$  et de variance  $\sigma^2$  inconnues. On dispose d’un échantillon i.i.d. de taille  $X$ .

1. Donner les estimateurs du maximum de vraisemblance de  $m$  et  $\sigma^2$ .
2. Donner l’estimateur, noté  $S^2$ , sans biais de  $\sigma^2$  (résultat du cours). Comparer son risque quadratique avec celui du maximum de vraisemblance.
3. Application numérique : Pour un échantillon de  $n = 9$  pièces, on a mesuré les diamètres et obtenu les mesures suivantes : (398.4; 398.5; 399; 399.2; 399.8; 400; 400.1; 400.3; 400.6). Donner les estimateur de  $m$  et  $\sigma^2$ .

## Exercice 10 : Variables de poisson

Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  la réalisation d’un échantillon i.i.d. d’une variable aléatoire de Poisson  $X \sim \mathcal{P}(\theta)$ .

1. Donner l’estimateur du maximum de vraisemblance  $\bar{\theta}_n$  de  $\theta$ .
2. Cet estimateur est-il biaisé ?

## Exercice 11 :

Une urne contient un nombre de boules inconnu  $\theta \geq 2$ , une seule d'entre elles étant blanche. On effectue dans cette urne des tirages successifs avec remise, jusqu'à ce qu'on obtienne une boule blanche et on note  $X$  la variable aléatoire qui représente le nombre de tirages effectués.

1. Quelle est la loi de probabilité de  $X$  ? Donner son espérance et sa variance.
2. On souhaite maintenant estimer le paramètre  $\theta$ . Soit  $(x_1, \dots, x_n)$  la réalisation d'un échantillon i.i.d.  $(X_1, \dots, X_n)$  de  $X$ . On pose  $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$ .

(a) Montrer que l'expression de la vraisemblance de  $(x_1, \dots, x_n)$  est

$$L_\theta(x_1, \dots, x_n) = \frac{(\theta - 1)^{s_n - n}}{\theta^{s_n}}$$

- (b) Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n$  de  $\theta$ . Cet estimateur est-il sans biais ?
3. Si  $(X_1, \dots, X_n)$  est un échantillon de la loi géométrique de paramètre  $p$ , déduire des résultats précédents l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $p$ .