

TP2 : RÉOLUTION GÉNÉRALE D'UN PROGRAMME LINÉAIRE AVEC AMPL

1 Résoudre avec AMPL un programme linéaire en le décrivant différemment

Si le Programme Linéaire est beaucoup plus gros au niveau du nombre de variables et de contraintes, il existe une façon plus concise de le mettre au format AMPL. Cela consiste à définir dans un premier temps, donc premier fichier, le modèle général, puis ensuite préciser, dans un second fichier, les données particulières pour lesquelles on souhaite la résolution. Le modèle général est alors écrit sous forme algébrique. Ainsi, AMPL peut résoudre un modèle avec différentes données.

1.1 Modèle d'un PL

Le modèle générique de notre PL peut s'exprimer sous la forme suivante :

| | |
|-------------------------|--|
| Étant donné : | P un ensemble de produits R un ensemble de ressources a_{ij} la quantité de ressources i de R nécessaire pour une unité de chaque produit j de P b_i la quantité de ressource i disponible pour chaque i de R c_j le prix de vente d'une unité de produit j , pour tout j de P |
| Définir les variables : | $X_j =$ nombre de produits j à fabriquer, pour chaque j de P |
| Maximiser : | $\sum_{j \in P} c_j X_j$ |
| Sous les contraintes : | $\sum_{j \in P} a_{ij} X_j \leq b_i$ pour tout i de R $X_j \geq 0$ pour tout j de P |

Ce modèle décrit en fait une infinité de PL. Si nous donnons des valeurs spécifiques aux données, le modèle devient un problème spécifique. Notre exemple du cours, n'en est alors qu'une instance particulière.

Pour rentrer ce modèle sous AMPL, il existe des instructions qui permettent de spécifier chacune de ses composantes, à savoir : les ensembles, les paramètres, les variables, l'objectif et les contraintes. Le modèle de production générique, créé dans un fichier dont l'extension sera **.mod**, est donc avec AMPL le suivant :

```

set P;
set R;
param b{i in R};
param c{P};
param a{R,P};
var X{j in P};
maximize CA : sum {j in P} c[j]*X[j];
subject to contrainte {i in R} : sum {j in P} a[i,j]*X[j] <= b[i];
s.t. positivite {j in P}: X[j] >=0;

```

La syntaxe est la suivante :

- le mot-clé `set` permet de définir une collection finie d'éléments. Ces éléments peuvent être numériques ou non et sont souvent utilisés comme des indices. En particulier un ensemble particulièrement utilisé est de type $1 \dots n$ où n est à valeur entière précisée avant, et dans ce cas l'ensemble est celui de tous les entiers allant de 1 à n ,
- le mot-clé `param` permet de déclarer un paramètre qui devra être spécifié,
- `b{i in R}` (qui est équivalent à `b{R}`) permet de traduire "il y a un b_i pour chaque i de R " et pour accéder à b_i il faut écrire `b[i]`,
- `a{R,P}` permet de traduire "il y a un a_{ij} pour chaque i élément de R et chaque j élément de P " et pour accéder à a_{ij} il faut écrire `a[i,j]`,
- l'instruction `sum{j in P}` permet de faire une somme sur les indices j variant dans l'ensemble P ,
- l'instruction `s.t.` est équivalente à **subject to**. Si le nom de la contrainte est suivie d'accolades, c'est que l'on définit une collection de contraintes. Les contraintes de bornes supérieures, inférieures, positivité peuvent être faites au moment de la déclaration des variables en mettant `var X{j in P} >=0 <=M;`

Les ensembles, paramètres et variables doivent être déclarés avant d'être utilisés. Les noms utilisés pour identifier les objets du modèle (ensembles, paramètres, variables, contraintes, fonction objectif) doivent être uniques.

1.2 L'instanciation d'un Programme Linéaire via ses données

Considérons le programme linéaire suivant :

$$(PL) \begin{cases} \max & 2000 x_1 + 3000 x_2 \\ s.c. & \\ & x_1 + 6 x_2 \leq 30 \quad (R1) \\ & 2 x_1 + 2 x_2 \leq 15 \quad (R2) \\ & 4 x_1 + x_2 \leq 24 \quad (R3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Pour représenter ce PL considérée comme une instance du modèle, il faut préciser un fichier de données qui lui correspond, dont l'extension sera **.dat**. Le fichier de données contiendra les valeurs des ensembles et des paramètres du modèle. L'ordre est arbitraire : il n'est pas nécessairement le même que celui du modèle. Les données de notre problème sont du type :

```

set P := prod1, prod2;
set R := R1, R2, R3;
param b:=
R1 30
R2 15
R3 24;
param c :=
prod1 2000 prod2 3000;
param a:
prod1 prod2 :=
R1 1 6
R2 2 2
R3 4 1;

```

1.3 Résolution d'une instance d'un modèle

Il faut effectuer cette fois les instructions suivantes :

```

ampl: model fichier.mod;
ampl: data fichier.dat;
ampl: solve;

```

1.4 Amélioration du modèle

On peut donner une version dite améliorée de ce modèle en effectuant les transformations suivantes :

- donner des noms plus explicites aux ensembles, paramètres, variables. Par exemple l'ensemble P peut être nommé P_{PRODUIT} , l'ensemble R $R_{\text{RESSOURCE}}$, le paramètre b b_{dispo} , le paramètre c c_{prix} , les variables X $X_{\text{PRODUCTION}}$,
- en mettant les contraintes de positivité lors des déclarations des variables,
- des commentaires, commençant avec #, peuvent être ajoutés pour expliquer le modèle.

Exercice 1 :

1. Écrire dans le fichier *exemple2.mod* le modèle générique du (PL) ci-dessus en appliquant les règles présentées ci-dessus.
2. Écrire dans le fichier *exemple2.dat* les données du (PL) ci-dessus pour le modèle correspondant
3. Résoudre ce PL et vérifier votre résultat avec celui obtenu au TP1.

2 Prise en compte de modifications

Une fois le PL généré, il est facile de prendre en compte un certain nombre de modifications du PL. Supposons que :

- l'on ajoute un nouveau produit qui serait fabriqué par l'usine : alors il suffit de modifier le fichier de données en ajoutant un nom de produit supplémentaire et d'ajouter ses caractéristiques dans les différents paramètres.
- l'on ajoute une borne supérieure pour chaque produit : alors il suffit d'ajouter dans le fichier du modèle un nouveau paramètre, représentant cette borne supérieure, existant pour chaque variable et le définir comme borne lors de la déclaration des dites variables. Il faut également ajouter dans le fichier de données les valeurs de ce paramètre pour chacune des variables.

Exercice 2 :

1. On souhaite à présent résoudre (PL) ci-dessus mais avec un produit supplémentaire nommé *produit 3* qui se vend 2500 euros et nécessite 2 heures de main d'oeuvre, 2 unités de R2 et 1 unités de R3.

Modifier ce qu'il faut dans *exemple2.mod* et/ou *exemple2.dat* pour résoudre optimalement ce nouveau PL.

2. Afficher la valeur optimale de chaque variable.
3. Si le nombre d'unités vendues quotidiennement est au maximum pour *le produit 1* de 4, pour *le produit 2* de 2 et pour *le produit 3* de 3, que faut-il modifier pour obtenir la résolution optimale de ce nouveau PL ?
4. Afficher les nouvelles valeurs optimales de chaque variable et la fonction objectif dans un fichier solution.

3 Un exemple réel : Analyse d'un classement de couches-culottes pour enfants

3.1 Préliminaires

Le magazine *60 millions de consommateurs* dans son numéro 540 du mois d'Août 2018 a publié, après des essais comparatifs, un classement de plusieurs marques de couches-culottes pour enfants. Les résultats de leur enquête sont donnés par la Figure 1 ci-dessous.

Nous nous intéresserons dans cette analyse à deux critères utilisés pour élaborer ce classement : la performance et la composition avec des poids respectifs de 60% et 40 %.¹ Toutes ces informations peuvent être résumées dans le tableau 1 ci-après :

1. Nous ferons l'hypothèse que les évaluations données pour chaque produit, sur ces deux critères, ont été "correctement" obtenues par agrégation des sous-critères associés à chacun de ces critères.

Les résultats de notre essai

Couches-culottes

- +++ Très bon 20 à 17
- ++ Bon 16,5 à 13
- + Acceptable 12,5 à 10
- Insuffisant 9,5 à 7
- Très insuffisant 6,5 à 0

Les pourcentages entre parenthèses expriment le poids de chaque critère dans la notation finale.

| | Joone Protection Premium | Pampers Premium Protection | Pampers Baby-Dry | Naty Eco by Naty | Pampers Premium Protection Active Fit ⁽³⁾ |
|---|--------------------------|----------------------------|------------------------------|------------------------------|--|
| • Label bio | Non | Non | Non | FSC/AB Vincotte UE | Non |
| • Prix indicatif | 64,90 € ⁽¹⁾ | 12,60 € | 15,60 € | 18,90 € | 12,30 € |
| | 162 couches | 50 couches | 50 couches | 50 couches | 46 couches |
| • Prix pour une couche | 0,40 € | 0,25 € | 0,31 € | 0,38 € | 0,27 € |
| Performances (60 %) | +++ | ++ | + | + | + |
| • Tenue | +++ | ++ | ++ | ++ | ++ |
| • Absorption | +++ | ++ | + | + | + |
| • Protection contre l'humidité | +++ | ++ | + | - | + |
| Composition (40 %) | +++ | ++ | +++ | +++ | + |
| Pesticides | | | | | |
| • Résidu du glyphosate | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ |
| • Pesticides organochlorés | +++ | +++ | +++ | +++ | + |
| Autres molécules toxiques potentielles | | | | | |
| • Dioxines | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ |
| • Composés organiques volatils (COV) | +++ | ++ | +++ | +++ | +++ |
| • Composés organiques halogénés adsorbables (AOX) | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ |
| • Allergènes | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ |
| NOTE GLOBALE (100 %) | 17/20 | 14,5/20 | 12,5/20⁽²⁾ | 12,5/20⁽²⁾ | 12,5/20 |

(1) Livraison comprise dans le prix. (2) L'appréciation globale ne peut pas être supérieure à l'appréciation sur les performances. (3) Le fabricant indique que cette référence est en fin de commercialisation. (4) L'appré-

| Carrefour Baby Ultra dry & stretch | Lupilu Soft & Dry | Mots d'enfants (Marque Repère) Ultra confort | Love & Green Couches hypoallergéniques ⁽¹⁾ | Lotus Baby Touch 3 Ultra confort | Pommette (Intermarché) Ecologic | Lillydoo Couches bébé |
|------------------------------------|-------------------|--|---|----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| Non | FSC | PEFC | FSC | FSC | FSC/Nordic ecolabel | Non |
| 10,80 € | 7,30 € | 8,90 € | 19,65 € | 19 € | 9 € | 12 € |
| 56 couches | 56 couches | 50 couches | 52 couches | 58 couches | 32 couches | 33 couches |
| 0,19 € | 0,13 € | 0,18 € | 0,38 € | 0,33 € | 0,28 € | 0,36 € |
| +++ | +++ | + | +++ | +++ | +++ | + |
| +++ | +++ | ++ | +++ | +++ | +++ | + |
| +++ | +++ | ++ | +++ | +++ | +++ | +++ |
| +++ | + | - | +++ | + | + | +++ |
| + | - | - | - | - | - | - |
| +++ | +++ | +++ | - | - | - | - |
| + | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ | - |
| +++ | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ |
| +++ | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ |
| +++ | + | +++ | +++ | +++ | - | +++ |
| +++ | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ | +++ |
| 12,5/20 | 12/20 | 12/20 | 9,5/20⁽⁴⁾ | 9,5/20⁽⁴⁾ | 9,5/20⁽⁴⁾ | 6,5/20⁽⁴⁾ |

citation globale ne peut pas être supérieure à "insuffisante" ou "Très insuffisante" en fonction de la composition du produit.

FIGURE 1 – Classement des couches-culottes issu du magazine 60

3.2 Le score global (/20) associé à chaque produit est-il issu d'une somme pondérée ?

A la lecture du classement publié, il semble clair, pour un consommateur, que le score global donné à chaque produit résulte d'une moyenne pondérée (somme pondérée) de ses évaluations sur les deux critères performance et composition.

| | 1-Performance | 2-Composition | Score Global (/20) |
|-------------------|---------------|---------------|--------------------|
| a- Joone | +++ | +++ | 17 |
| b- Pamp. Prem | ++ | ++ | 14.5 |
| c- Pamp. Baby | + | +++ | 12.5 |
| d- Naty | + | +++ | 12.5 |
| e- Pamp. Activ. | + | + | 12.5 |
| f- Carref. Baby | ++ | + | 12.5 |
| g- Lupilu | ++ | - | 12 |
| h- Mots d'enfants | + | - | 12 |
| i- Love & Green | ++ | - | 9.5 |
| j- Lotus Baby | ++ | -- | 9.5 |
| k- Pommette | ++ | -- | 9.5 |
| l- Lillydoo | + | -- | 6.5 |
| | $w_p = 60\%$ | $w_c = 40\%$ | |

Très bien : $+++ \in [17, 20]$

Bien : $++ \in [13, 16.5]$

Acceptable : $+ \in [10, 12.5]$

Insuffisant : $- \in [7, 9.5]$

Très insuffisant : $-- \in [0, 6.5]$

TABLE 1 – Tableau de performance pour le classement des produits Couches-culottes (magazine 60 M. num. 540)

L'objectif dans cette partie est de vérifier l'exactitude ou non de cette hypothèse.

Pour cela, nous allons d'abord associer un nombre réel positif à chaque évaluation qualitative attribuée à un produit. Ainsi, pour le produit "Joone" représenté par la lettre a , si le score de 17/20 est obtenu à partir d'une somme pondérée notée f , alors il existe des nombres réels positifs $U_{1a}(+++)$ et $U_{2a}(+++)$ tels que

$$f(a) = 0.6 U_{1a}(+++)$$

Plus généralement, pour un produit x dont le score global $f(x)$ est donné par une somme pondérée f , si on note $U_{ix}(\alpha_{ix})$ le nombre réel associé à l'évaluation qualitative α_{ix} du produit x sur le critère i (la valeur qualitative α_{ix} est donnée par le magazine), alors on aura

$$f(x) = 0.6 U_{1x}(\alpha_{1x}) + 0.4 U_{2x}(\alpha_{2x})$$

Pour déterminer si le classement des couches-culottes fourni par le magazine est compatible avec un modèle basé sur la somme pondérée, il suffit alors de résoudre le programme linéaire PL₁ suivant :

$$\max U_{1a}(+++)$$
 (3)

Sous les contraintes

$$0.6 U_{1a}(+++)+0.4 U_{2a}(+++)=f^a$$
 (4)

$$0.6 U_{1b}(++)+0.4 U_{2b}(++)=f^b$$
 (5)

$$0.6 U_{1c}(+)+0.4 U_{2c}(+++)=f^c$$
 (6)

$$0.6 U_{1d}(+)+0.4 U_{2d}(+++)=f^d$$
 (7)

$$0.6 U_{1e}(+)+0.4 U_{2e}(+)=f^e$$
 (8)

$$0.6 U_{1f}(++)+0.4 U_{2f}(+)=f^f$$
 (9)

$$0.6 U_{1g}(++)+0.4 U_{2g}(-)=f^g$$
 (10)

$$0.6 U_{1h}(+)+0.4 U_{2h}(-)=f^h$$
 (11)

$$0.6 U_{1i}(++)+0.4 U_{2i}(-)=f^i$$
 (12)

$$0.6 U_{1j}(++)+0.4 U_{2j}(-)=f^j$$
 (13)

$$0.6 U_{1k}(++)+0.4 U_{2k}(-)=f^k$$
 (14)

$$0.6 U_{1l}(+)+0.4 U_{2l}(-)=f^l$$
 (15)

$$f^a \geq f^b + 0.1; f^b \geq f^c + 0.1; f^c = f^d$$
 (16)

$$f^d = f^e; f^e = f^f; f^f \geq f^g + 0.1;$$
 (17)

$$f^g = f^h; f^h \geq f^i + 0.1; f^i = f^j$$
 (18)

$$f^j = f^k; f^k \geq f^l + 0.1$$
 (19)

(PL₁)

$$17 \leq U_{1a}(+++)\leq 20; 17 \leq U_{2a}(+++)\leq 20$$
 (20)

$$17 \leq U_{2c}(+++)\leq 20; 17 \leq U_{2d}(+++)\leq 20$$
 (21)

$$13 \leq U_{1b}(++)\leq 16.5; 13 \leq U_{2b}(++)\leq 16.5; 13 \leq U_{1f}(++)\leq 16.5$$
 (22)

$$13 \leq U_{1g}(++)\leq 16.5; 13 \leq U_{1i}(++)\leq 16.5$$
 (23)

$$13 \leq U_{1j}(++)\leq 16.5; 13 \leq U_{1k}(++)\leq 16.5$$
 (24)

$$10 \leq U_{1c}(+)\leq 12.5; 10 \leq U_{1d}(+)\leq 12.5; 10 \leq U_{1e}(+)\leq 12.5$$
 (25)

$$10 \leq U_{1e}(+)\leq 12.5; 10 \leq U_{1f}(+)\leq 12.5; 10 \leq U_{2h}(+)\leq 12.5$$
 (26)

$$10 \leq U_{1l}(+)\leq 12.5$$
 (27)

$$7 \leq U_{2g}(-)\leq 9.5; 7 \leq U_{2h}(-)\leq 9.5; 7 \leq U_{2i}(-)\leq 9.5$$
 (28)

$$0 \leq U_{2j}(-)\leq 6.5; 0 \leq U_{2k}(-)\leq 6.5; 0 \leq U_{2l}(-)\leq 6.5$$
 (29)

où

- La fonction objectif donnée par l'équation (3) consiste, ici, à maximiser le nombre réel $U_{1a}(+++)$ associé à l'évaluation de la couche-culotte "Joone" sur le critère Performance. Étant donné que nous cherchons simplement à satisfaire les contraintes de ce programme linéaire, le choix de n'importe quelle fonction objectif suffira à résoudre notre problème.
- Les contraintes (4) à (15) correspondent à l'écriture sous forme de somme pondérée, comme dans la formule 2 ci-dessus, des 12 produits à évaluer.

- Les contraintes (16) à (19) correspondent à l'ordre établi dans le classement des 12 produits du magazine. A noter que la valeur 0.1, dans certains de ces contraintes, permet simplement de satisfaire une inégalité stricte, en termes de notes globales, entre certains produits.
- Les contraintes (20) à (29) permettent d'assurer l'appartenance de chaque nombre réel $U_{ix}(\alpha_{ix})$ à un intervalle lié à la catégorie α_{ix} telle que définie par le magazine.

1. 1.1 Résolvez le programme linéaire PL_1 avec le logiciel AMPL.

1.2 Le programme linéaire PL_1 , lorsque la note globale de chaque couche-culotte est exactement égale à celle donnée par le magazine, c'est-à-dire,

$$f^a = 17, f^b = 14.5, f^c = 12.5, f^d = 12.5, f^e = 12.5, f^f = 12.5, f^g = 12, f^h = 12, f^i = 9.5, f^j = 9.5, \\ f^k = 9.5, f^l = 6.5.$$

admet-il une solution ? pourquoi ?

1.3 Quelle(s) conclusion(s) en tirez-vous ? Est-ce que ces conclusions peuvent remettre en cause l'information donnée par le magazine aux consommateurs ?

2. Dans cette question, nous allons supposer que l'évaluation globale n'est pas la même entre les couches-culottes "Naty" et "Pamp. Activ" d'une part, et les couches-culottes "Love & Green" et "Lotus Baby" d'autre part.

Pour cela, nous allons supprimer du programme PL_1 les deux contraintes suivantes : $f^d = f^e$ de l'équation (17) et $f^i = f^j$ de l'équation (18). Pour avoir des résultats cohérents (une solution réalisable), nous allons également supprimer du programme PL_1 la contrainte $17 \leq U_{2c}(+++)$, liée à la couche *c-Pamp.Baby* (cette contrainte est associée à la ligne 45 du fichier *Squelette_PL_V2.xlsx*).

2.1 Résolvez le programme linéaire PL_1 obtenu en prenant successivement comme fonction objectif $\max f^a$, puis $\min f^a$. Il s'agit d'analyser le meilleur et le pire score global obtenu par le produit "Joone" sous ces hypothèses.

Des couches-culottes notées en dessous de 10/20 par le magazine obtiennent-ils dans ces classements des notes globales supérieures à 10/20 ? Lesquelles ?

2.2 Résolvez le programme linéaire PL_1 obtenu en prenant successivement comme fonction objectif $\max f^l$, puis $\min f^l$. Il s'agit d'analyser le meilleur et le pire score global obtenu par le produit "Lillydoo" sous ces hypothèses.

Des couches-culottes notées en dessous de 10/20 par le magazine obtiennent-ils dans ces classements des notes globales supérieures à 10/20 ? Lesquelles ?

2.3 En comparant ces différents classements avec ceux du magazine, quelle(s) conclusion(s) en tirez-vous ?

3. A présent, nous choisissons de ne plus tenir compte de l'ordre des produits dans le classement publié par le magazine. En d'autres termes, nous supprimons les contraintes (16) à (19). Comme précédemment, pour avoir des résultats cohérents (une solution réalisable), nous allons également supprimer du programme PL_1 la contrainte $17 \leq U_{2c}(+++)$, liée à la couche *c-Pamp.Baby*.

3.1 Déterminez le score global maximal obtenu par chacun des 12 produits en résolvant à chaque fois le programme PL_1 correspondant.

3.2 En comparant les différents classements obtenus à ceux du magazine, quelle(s) conclusion(s) en tirez-vous ?