TD : Automates & Langages

Septembre 2020

N Fayard
L3 - Université Paris Dauphine-PSL

Induction Mathématique

Méthode générale : Quand on veut prouver que $P(i)$ est vrai pour tout $i \in \mathbb{N}$ on prouve deux choses :

1. **Base :** Que $P(0)$ ou $P(1)$ est vrai (facile !).
2. **Pas d'induction :** Que pour chaque k, si $P(k)$ est vrai alors $P(k+1)$ est vrai aussi.

Induction Mathématique : Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Induction Mathématique : Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Solution :

1. **Base :** Pour $n = 1$: $\frac{1\times(1+2)}{2} = 1$ (Evident).
2. **Pas d'indiction :** Supposons que $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ (a)

   Montrons que : $\sum\limits_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) && (1)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ par } (a) && (2)\\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{2}(n+1) && (3)\\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2} && (4)
\end{aligned}
$$

Induction Mathématique : Exercice 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Solution :

1. **Base :** Pour $n = 1$: $1^2 = \frac{1\times2\times3}{6}$ (Evident)
2. **Pas d'induction :** Supposons que $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (b)

   Montrons que : $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = (n+1)^2 + \sum_{i=1}^{n} i^2 \tag{5}$$

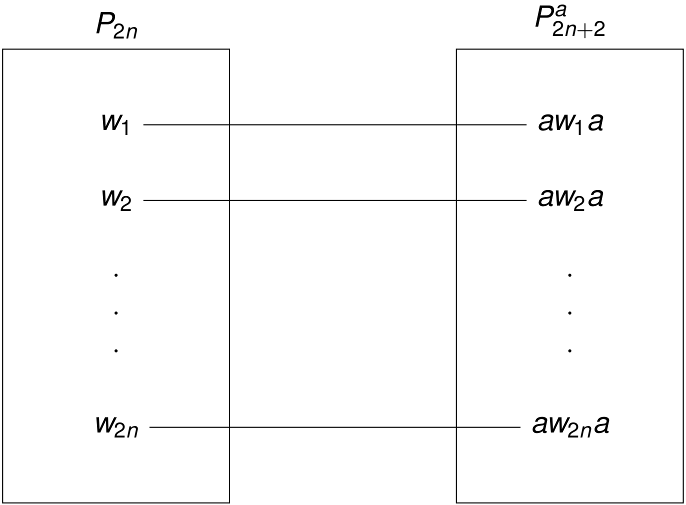
$$= (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ par } (b) \tag{6}$$

$$= (n+1)\frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \tag{7}$$

$$= (n+1)\frac{(2n+3)(n+2)}{6} \tag{8}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a [$\#$ palindromes w tel que $|w| = 2n$] $= 2^n$
Solution :

1. **Base :** pour $n = 1$: $|\{aa, bb\}| = 2$ (Evident)
2. **Pas d'induction :** Supposons que $|P_{2n}| = 2^n$ (c).
   Montrons que $|P_{2n+2}| = 2^{n+1}$
   On sait que $|P_{2n+2}| = |P^a_{2n+2}| + |P^b_{2n+2}|$



$$|P_{2n}| = |P^a_{2n+2}| = 2^n \text{ par } (c)$$

Induction Mathématique : Exercice 3 - 3/3

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a [# palindromes w tel que $|w| = 2n] = 2^n$
Solution :

1. **Base :** pour $n = 1$: $|\{aa, bb\}| = 2$ (Evident)
2. **Pas d'induction :** Supposons que $|P_{2n}| = 2^n$ (c).
   Montrons que : $|P_{2n+2}| = 2^{n+1}$
   Donc :

$$
\begin{aligned}
|P_{2n+2}| &= |P^a_{2n+2}| + |P^b_{2n+2}| && (9)\\
&= 2^n + 2^n && (10)\\
&= 2^{n+1} && (11)
\end{aligned}
$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout sous-ensemble $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tel que $|S| \geq n + 1$, alors il existe un $i \in \mathbb{N}$ tel que $\{i, i + 1\} \subseteq S$.
Solution :

1. **Base :** $n = 1$: $S \subseteq \{1, 2\}$ tel que $|S| = 2$ donc $\{1, 2\} \subseteq S$.
2. **Pas d'induction :** Supposons que la proposition est vrai pour n. (d)
   Montrons qu'elle est vrai pour $S \subseteq \{1, 2, ..., 2n, 2n + 1, 2n + 2\}$ et $|S| \geq n + 2$.

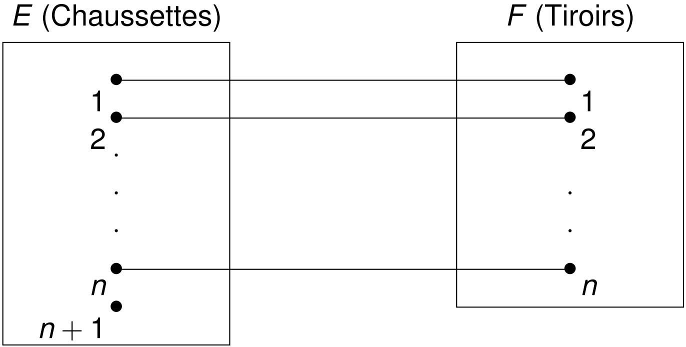
Pas d'induction : Supposons que la proposition est vrai pour n. (d)
Montrons qu'elle est vrai pour $S \subseteq \{1, 2, ..., 2n, 2n+1, 2n+2\}$ et $|S| \geq n+2$.
Deux cas :

1. $\{2n+1, 2n+2\} \subseteq S$ alors $i = 2n+1$ (on prend max un des deux éléments sinon cas 1).
2. $|S \cap \{2n+1, 2n+2\}| \leq 1$
   $|S| = |S \cap \{1, 2, ..., 2n\}| + |S \cap \{2n+1, 2n+2\}| \geq n+2$
   Donc $|S \cap \{1, 2, ..., 2n\}| \geq n+1$, par la supposition (d) il existe un $i \in \mathbb{N}$ tel que $\{i, i+1\} \subseteq S$.

Principe des tiroirs

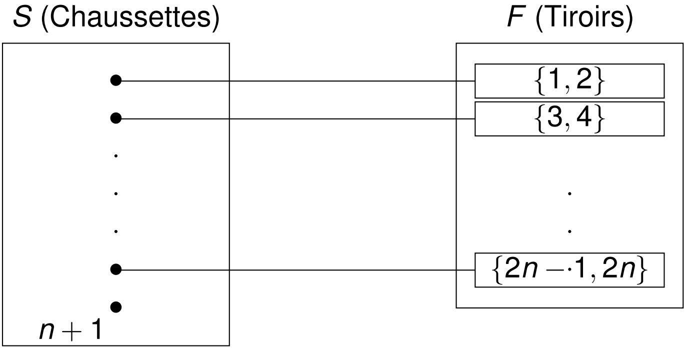
Principe : Si j'ai $n+1$ chaussettes et n tiroirs, je suis obligé d'utiliser un des tiroirs plusieurs fois.

Si E et F sont deux ensembles finis tels que $|E| \geq |F|$, si $f : E \Rightarrow F$ est une application de E dans F, alors il existe un élément de F qui admet au moins deux antécédent par f.



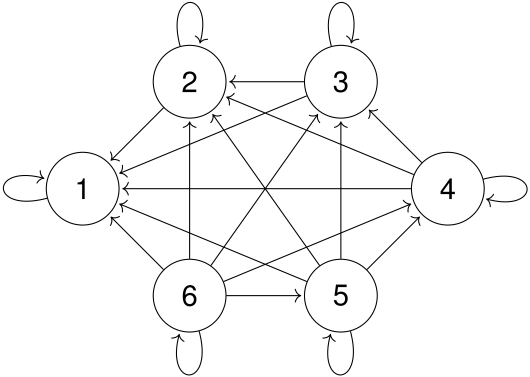
Principe des tiroirs : Exercice 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout sous-ensemble $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2n\}$ tel que $|S| \geq n + 1$, alors il existe un $i \in \mathbb{N}$ tel que $\{i, i+1\} \subseteq S$.
Solution :
On forme n tiroirs : $F = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, ..., \{2n - 1, 2n\}\}$ S sont nos chaussettes, $|S| \geq n + 1$ donc on aura au moins deux éléments de S dans un même élément de F.
Or les éléments de F sont composé d'élément consécutifs.



Relation binaire

Soit un ensemble d'éléments U, une relation binaire R sur U est un sous-ensemble de $U \times U$.
Exemple - La relation $\geq$ avec $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:



$R = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4),$
(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

Relation d'équivalence

R est une relation d'équivalence si et seulement si :

- R est réflexive : $\forall u \in U$, on a $(x, x) \in R$.
- R est symétrique : $, y, \in U$ on a $R(x, y) \Rightarrow R(y, x)$
- R est transitive : $\forall x, y, z \in U$ on a $R(x, y)$ et $R(y, z) \Rightarrow R(x, z)$

Relation d'équivalence - exemple

Prouvez que la relation définie comme $R(x, y)$ si et seulement si $cos^2 x + sin^2 y = 1$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.
$cos^2 0 = 1$, $sin^2 0 = 0$, $cos^2 x + sin^2 x = 1$

Relation d'équivalence - exemple

Prouvez que la relation définie comme $R(x, y)$ si et seulement si $cos^2 x + sin^2 y = 1$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.
$cos^2 0 = 1$, $sin^2 0 = 0$, $cos^2 x + sin^2 x = 1$

Réflexivité : $\forall x R(x, x) \leftrightarrow cos^2 x + sin^2 x = 1$
Symetrique : On veut montrer que $\forall x, y R(x, y) \Rightarrow (y, x)$
$cos^2 x + sin^2 y = 1 \leftrightarrow (1 - sin^2 x) + (1 - cos^2 y) = 1 \leftrightarrow cos^2 y + sin^2 x = 1$
Transitivité :
$(cos^2 x + sin^2 y) + (cos^2 y + sin^2 z) = 2 \leftrightarrow cos^2 x + sin^2 z = 1$

Expression régulière

C'est un moyen de définir un langage.
Selon une syntaxe précise on va décrire un ensemble de **chaînes de caractères** (mots) possibles.

La définition des expressions régulières utilise la récursivité. Une expression régulière peut être :

1. $\emptyset$ (une expression vide)
2. ϵ (un mot vide)
3. $a \in \Sigma$ (un mot de taille un)
4. $R_1 + R_2$ (la somme de deux expressions régulières)
   $R_1 + R_2 = \{w | w \in R_1 \vee w \in R_2\}$
5. $R_1 R_2$ (la concaténation de deux expressions régulières)
   $R_1 R_2 = \{w_1 w_2 | w_1 \in R_1 \wedge w_2 \in R_2\}$
6. R^* (l'étoile de Kleene d'une expression régulière)
   $R^* = \{w_1 w_2 w_3 \dots w_i | i \in \mathbb{N} \wedge \forall j \leq i,\ w_j \in R\}$

Expression régulière : Exercice - 1/3

Donnez deux mots qui appartient au langage, deux mots qui n'appartient pas au langage, et une expression régulière qui décrit langage. L'alphabet est toujours $\Sigma = \{a, b\}$.

L_1 : $\{w | w$ commence avec a et finit par $b\}$

Expression régulière : Exercice - 1/3

Donnez deux mots qui appartient au langage, deux mots qui n'appartient pas au langage, et une expression régulière qui décrit langage. L'alphabet est toujours $\Sigma = \{a, b\}$.

L_1 : $\{w | w$ commence avec a et finit par $b\}$

Exemples du langage : aab, $abbb$.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : $aaba$, $baab$.
Expression : $a(a+b)^*b$

Expression régulière : Exercice - 1/3

Donnez deux mots qui appartient au langage, deux mots qui n'appartient pas au langage, et une expression régulière qui décrit langage. L'alphabet est toujours $\Sigma = \{a, b\}$.

L_1 : $\{w|w$ commence avec a et finit par $b\}$

Exemples du langage : $aab, abbb$.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : $aaba, baab$.
Expression : $a(a+b)^*b$

L_2 : $\{w \mid$ la taille du w est impaire$\}$

Expression régulière : Exercice - 1/3

Donnez deux mots qui appartient au langage, deux mots qui n'appartient pas au langage, et une expression régulière qui décrit langage. L'alphabet est toujours $\Sigma = \{a, b\}$.

L_1 : $\{w | w$ commence avec a et finit par $b\}$

Exemples du langage : *aab*, *abbb*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aaba*, *baab*.
Expression : $a(a+b)^*b$

L_2 : $\{w \mid$ la taille du w est impaire$\}$

Exemples du langage : *aaa*, *bbb*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aa*, *aaaa*.
Expression : $(a+b)((a+b)(a+b))^*$

Expression régulière - Exercice - 2/3

L_3 : $\{w | w \text{ ne contient pas de } a\}$

Expression régulière - Exercice - 2/3

L_3 : $\{w | w$ ne contient pas de $a\}$

Expression : b^*

Expression régulière - Exercice - 2/3

L_3 : $\{w | w$ ne contient pas de $a\}$

Expression : b^*

L_4 : $\{w \mid w$ contient le suffixe $abb\}$

Expression régulière - Exercice - 2/3

L_3 : $\{w|w$ ne contient pas de $a\}$

Expression : b^*

L_4 : $\{w\ |w$ contient le suffixe $abb\}$

Exemples du langage : *abb*, *babbb*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aaba*, *ababaa*.
Expression : $(a+b)^*abb(a+b)^*$

Expression régulière - Exercice - 2/3

L_3 : $\{w|w$ ne contient pas de $a\}$

Expression : b^*

L_4 : $\{w\ |w$ contient le suffixe $abb\}$

Exemples du langage : *abb*, *babbb*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aaba*, *ababaa*.
Expression : $(a+b)^*abb(a+b)^*$

L_5 : $\{w|w$ contient un nombre pair de $a\}$

Expression régulière - Exercice - 2/3

L_3 : $\{w | w$ ne contient pas de $a\}$

Expression : b^*

L_4 : $\{w \, | w$ contient le suffixe $abb\}$

Exemples du langage : *abb*, *babbb*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aaba*, *ababaa*.
Expression : $(a+b)^* abb(a+b)^*$

L_5 : $\{w | w$ contient un nombre pair de $a\}$

Exemples du langage : *abba*, *babbab*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aaba*, *ababaaa*.
Expression : $(b^* ab^* ab^*)^* + b^*$

Expression régulière - Exercice - 3/3

L_6 : $\{w | w$ contient un nombre pair de a ou un nombre pair de $b\}$

Expression régulière - Exercice - 3/3

L_6 : $\{w | w$ contient un nombre pair de a ou un nombre pair de $b\}$

Exemples du langage : $abba$, $babba$.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : $aaba$, $abababaa$.
Expression : $((b^* ab^* ab^*)^* + b^*) + ((a^* ba^* ba^*)^* + a^*)$

Expression régulière - Exercice - 3/3

L_6 : $\{w|w$ contient un nombre pair de a ou un nombre pair de $b\}$

Exemples du langage : *abba*, *babba*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aaba*, *abababaa*.
Expression : $((b^*ab^*ab^*)^* + b^*) + ((a^*ba^*ba^*)^* + a^*)$

L_7 : $\{w|$ les caractères à positions impaires sont toujours $a\}$.

L_6 : $\{w | w$ contient un nombre pair de a ou un nombre pair de $b\}$

Exemples du langage : *abba*, *babba*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aaba*, *abababaa*.
Expression : $((b^*ab^*ab^*)^* + b^*) + ((a^*ba^*ba^*)^* + a^*)$

L_7 : $\{w|$ les caractères à positions impaires sont toujours $a\}$.

Exemples du langage : *abaa*, *aaabab*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aaba*, *abababba*.
Expression : $(a(a+b))^*(a+\epsilon)$

L_6 : $\{w|w$ contient un nombre pair de a ou un nombre pair de $b\}$

Exemples du langage : *abba*, *babba*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aaba*, *abababaa*.
Expression : $((b^*ab^*ab^*)^* + b^*) + ((a^*ba^*ba^*)^* + a^*)$

L_7 : $\{w|$ les caractères à positions impaires sont toujours $a\}$.

Exemples du langage : *abaa*, *aaabab*.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : *aaba*, *abababba*.
Expression : $(a(a+b))^*(a+\epsilon)$

Sources

Pour préparer ce TD :

Lewis, H. R., Papadimitriou, C. H. (1998). Elements of the Theory of Computation. ACM SIGACT News.

TD de Lampis M, LAMSADE.