Automates & Langages

Septembre 2020

N Fayard

L_8 : $\{w | w$ ne contient ni le facteur aa ni le facteur $bb\}$.

L_8 : $\{w|w$ ne contient ni le facteur aa ni le facteur $bb\}$.

Exemples du langage : $a, baba$.
Exemples qui n'appartiennent pas au langage : $aaba, ababababba$.
Expression : $(ab)^*(a+\epsilon)+(ba)^*(b+\epsilon)$

Expression régulière : Propriétés simples

Prouvez les propriétés simples suivants :

1) $\forall R,\ R + \emptyset = R$

Prouvez les propriétés simples suivants :

1) $\forall R,\ R + \emptyset = R$
On prend soit les mots de R, soit les mots du $\emptyset$ (rien), donc on prend R.

Expression régulière : Propriétés simples

Prouvez les propriétés simples suivants :

1) $\forall R,\ R + \emptyset = R$
On prend soit les mots de R, soit les mots du $\emptyset$ (rien), donc on prend R.

2) $\forall R,\ R\epsilon = R$

Expression régulière : Propriétés simples

Prouvez les propriétés simples suivants :

1) $\forall R,\ R + \emptyset = R$
On prend soit les mots de R, soit les mots du $\emptyset$ (rien), donc on prend R.

2) $\forall R,\ R\epsilon = R$
On ajoute le mot vide à chaque mot donc on obtient les mêmes mots.

Expression régulière : Propriétés simples

Prouvez les propriétés simples suivants :

1) $\forall R, \; R + \emptyset = R$
On prend soit les mots de R, soit les mots du $\emptyset$ (rien), donc on prend R.

2) $\forall R, \; R\epsilon = R$
On ajoute le mot vide à chaque mot donc on obtient les mêmes mots.

3) $\forall R_1, R_2$ tels que $|R_1|, |R_2| \in \mathbb{N}, |R_1 R_2| \leq |R_1||R_2|$ (pourquoi pas $=$?)

Expression régulière : Propriétés simples

Prouvez les propriétés simples suivants :

1) $\forall R,\ R + \emptyset = R$
On prend soit les mots de R, soit les mots du $\emptyset$ (rien), donc on prend R.

2) $\forall R,\ R\epsilon = R$
On ajoute le mot vide à chaque mot donc on obtient les mêmes mots.

3) $\forall R_1, R_2 \text{ tels que } |R_1|, |R_2| \in \mathbb{N}, |R_1 R_2| \leq |R_1||R_2|$ (pourquoi pas $=$?)
Le nombre de combinaisons est au plus $|R_1||R_2|$ parce que pour obtenir les mots du $R_1 R_2$ on choit un mot du R_1 et puis un mot du R_2. On peut avoir moins que $|R_1||R_2|$ mots à cause de repetitions, par exemple si $R = a + aa$ alors RR contient les mots aa, aaa, $aaaa$ donc sa taile est 3 et pas 4.

Expression régulière : Propriétés simples

4) $\forall R,\ R\emptyset = \emptyset$

Expression régulière : Propriétés simples

4) $\forall R,\ R\emptyset = \emptyset$
Pour obtenir un mot du $R\emptyset$ il faut sélectionner un mot du R et un mot du $\emptyset$. Mais $\emptyset$ ne contient rien !

4) $\forall R,\ R\emptyset = \emptyset$

Pour obtenir un mot du $R\emptyset$ il faut sélectionner un mot du R et un mot du $\emptyset$. Mais $\emptyset$ ne contient rien !

5) $\emptyset^* = \epsilon$

$\emptyset^* = \epsilon + \emptyset + \emptyset\emptyset + \ldots = \epsilon$.

Expression régulière : Propriétés simples

4) $\forall R,\ R\emptyset = \emptyset$
Pour obtenir un mot du $R\emptyset$ il faut sélectionner un mot du R et un mot du $\emptyset$. Mais $\emptyset$ ne contient rien !

5) $\emptyset^* = \epsilon$
$\emptyset^* = \epsilon + \emptyset + \emptyset\emptyset + \ldots = \epsilon$.

6) $\exists R,\ R + \epsilon \neq R$

Expression régulière : Propriétés simples

4) $\forall R,\ R\emptyset = \emptyset$
Pour obtenir un mot du $R\emptyset$ il faut sélectionner un mot du R et un mot du $\emptyset$. Mais $\emptyset$ ne contient rien !

5) $\emptyset^* = \epsilon$
$\emptyset^* = \epsilon + \emptyset + \emptyset\emptyset + \ldots = \epsilon$.

6) $\exists R,\ R + \epsilon \neq R$
C'est vrai si $\epsilon \notin R$, par exemple si $R = a$

4) $\forall R,\ R\emptyset = \emptyset$
Pour obtenir un mot du $R\emptyset$ il faut sélectionner un mot du R et un mot du $\emptyset$. Mais $\emptyset$ ne contient rien !

5) $\emptyset^* = \epsilon$
$\emptyset^* = \epsilon + \emptyset + \emptyset\emptyset + \ldots = \epsilon$.

6) $\exists R,\ R + \epsilon \neq R$
C'est vrai si $\epsilon \notin R$, par exemple si $R = a$

7) $\forall R,\ R^+ = RR^*$

4) $\forall R, \; R\emptyset = \emptyset$
Pour obtenir un mot du $R\emptyset$ il faut sélectionner un mot du R et un mot du $\emptyset$. Mais $\emptyset$ ne contient rien !

5) $\emptyset^* = \epsilon$
$\emptyset^* = \epsilon + \emptyset + \emptyset\emptyset + \ldots = \epsilon$.

6) $\exists R, \; R + \epsilon \neq R$
C'est vrai si $\epsilon \notin R$, par exemple si $R = a$

7) $\forall R, \; R^+ = RR^*$
Par définition. Notez que ça prouve que le R^+ n'est pas nécessaire pour définir les expressions régulières.

Expression régulière : Propriétés simples

4) $\forall R,\ R\emptyset = \emptyset$
Pour obtenir un mot du $R\emptyset$ il faut sélectionner un mot du R et un mot du $\emptyset$. Mais $\emptyset$ ne contient rien !

5) $\emptyset^* = \epsilon$
$\emptyset^* = \epsilon + \emptyset + \emptyset\emptyset + \ldots = \epsilon$.

6) $\exists R,\ R + \epsilon \neq R$
C'est vrai si $\epsilon \notin R$, par exemple si $R = a$

7) $\forall R,\ R^+ = RR^*$
Par définition. Notez que ça prouve que le R^+ n'est pas nécessaire pour définir les expressions régulières.

8) $\forall R,\ R^* + R = R^*$

Expression régulière : Propriétés simples

4) $\forall R,\ R\emptyset = \emptyset$
Pour obtenir un mot du $R\emptyset$ il faut sélectionner un mot du R et un mot du $\emptyset$. Mais $\emptyset$ ne contient rien !

5) $\emptyset^* = \epsilon$
$\emptyset^* = \epsilon + \emptyset + \emptyset\emptyset + \ldots = \epsilon$.

6) $\exists R,\ R + \epsilon \neq R$
C'est vrai si $\epsilon \notin R$, par exemple si $R = a$

7) $\forall R,\ R^+ = RR^*$
Par définition. Notez que ça prouve que le R^+ n'est pas nécessaire pour définir les expressions régulières.

8) $\forall R,\ R^* + R = R^*$
C'est évident que $R^* \subseteq R^* + R$. En plus, $R \subseteq R^*$ et donc $R^* + R \subseteq R^*$.

Expression régulière : Propriétés simples

9) $\forall R_1, R_2, R_3,\ R_1(R_2 + R_3) = R_1 R_2 + R_1 R_3$

9) $\forall R_1, R_2, R_3,\ R_1(R_2 + R_3) = R_1 R_2 + R_1 R_3$
Soit $w \in R_1(R_2 + R_3)$. Donc, $w = w_1 w_2$ tels que $w_1 \in R_1$ et $w_2 \in R_2 + R_3$.
Donc on a soit $w_2 \in R_2$ soit $w_2 \in R_3$. Si $w_2 \in R_2$ alors $w \in R_1 R_2$, si $w_2 \in R_3$ alors $w \in R_1 R_3$.
Donc on a prouvé que $R_1(R_2 + R_3) \subseteq R_1 R_2 + R_1 R_3$.
Pour l'autre direction observez que $R_1 R_2 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$ et aussi $R_1 R_3 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$, donc $R_1 R_2 + R_1 R_3 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$

Expression régulière : Propriétés simples

9) $\forall R_1, R_2, R_3,\ R_1(R_2 + R_3) = R_1R_2 + R_1R_3$
Soit $w \in R_1(R_2 + R_3)$. Donc, $w = w_1w_2$ tels que $w_1 \in R_1$ et $w_2 \in R_2 + R_3$.
Donc on a soit $w_2 \in R_2$ soit $w_2 \in R_3$. Si $w_2 \in R_2$ alors $w \in R_1R_2$, si $w_2 \in R_3$ alors $w \in R_1R_3$.
Donc on a prouvé que $R_1(R_2 + R_3) \subseteq R_1R_2 + R_1R_3$.
Pour l'autre direction observez que $R_1R_2 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$ et aussi $R_1R_3 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$, donc $R_1R_2 + R_1R_3 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$

10) $\exists R,\ (RR)^* \neq R^*$

9) $\forall R_1, R_2, R_3,\ R_1(R_2 + R_3) = R_1 R_2 + R_1 R_3$
Soit $w \in R_1(R_2 + R_3)$. Donc, $w = w_1 w_2$ tels que $w_1 \in R_1$ et $w_2 \in R_2 + R_3$.
Donc on a soit $w_2 \in R_2$ soit $w_2 \in R_3$. Si $w_2 \in R_2$ alors $w \in R_1 R_2$, si $w_2 \in R_3$ alors $w \in R_1 R_3$.
Donc on a prouvé que $R_1(R_2 + R_3) \subseteq R_1 R_2 + R_1 R_3$.
Pour l'autre direction observez que $R_1 R_2 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$ et aussi $R_1 R_3 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$, donc $R_1 R_2 + R_1 R_3 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$

10) $\exists R,\ (RR)^* \neq R^*$
Soit $R = a$. $(RR)^*$ contient seulement de mots de taille paire.

Expression régulière : Propriétés simples

9) $\forall R_1, R_2, R_3,\ R_1(R_2 + R_3) = R_1R_2 + R_1R_3$
Soit $w \in R_1(R_2 + R_3)$. Donc, $w = w_1w_2$ tels que $w_1 \in R_1$ et $w_2 \in R_2 + R_3$.
Donc on a soit $w_2 \in R_2$ soit $w_2 \in R_3$. Si $w_2 \in R_2$ alors $w \in R_1R_2$, si $w_2 \in R_3$ alors $w \in R_1R_3$.
Donc on a prouvé que $R_1(R_2 + R_3) \subseteq R_1R_2 + R_1R_3$.
Pour l'autre direction observez que $R_1R_2 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$ et aussi $R_1R_3 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$, donc $R_1R_2 + R_1R_3 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$

10) $\exists R,\ (RR)^* \neq R^*$
Soit $R = a$. $(RR)^*$ contient seulement de mots de taille paire.

11) $\exists R_1, R_2,\ (R_1 + R_2)^* \neq R_1^*R_2^*$

Expression régulière : Propriétés simples

9) $\forall R_1, R_2, R_3,\ R_1(R_2 + R_3) = R_1 R_2 + R_1 R_3$
Soit $w \in R_1(R_2 + R_3)$. Donc, $w = w_1 w_2$ tels que $w_1 \in R_1$ et $w_2 \in R_2 + R_3$.
Donc on a soit $w_2 \in R_2$ soit $w_2 \in R_3$. Si $w_2 \in R_2$ alors $w \in R_1 R_2$, si $w_2 \in R_3$ alors $w \in R_1 R_3$.
Donc on a prouvé que $R_1(R_2 + R_3) \subseteq R_1 R_2 + R_1 R_3$.
Pour l'autre direction observez que $R_1 R_2 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$ et aussi $R_1 R_3 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$, donc $R_1 R_2 + R_1 R_3 \subseteq R_1(R_2 + R_3)$

10) $\exists R,\ (RR)^* \neq R^*$
Soit $R = a$. $(RR)^*$ contient seulement de mots de taille paire.

11) $\exists R_1, R_2,\ (R_1 + R_2)^* \neq R_1^* R_2^*$
Par exemple $R_1 = a, R_2 = b$. $a^* b^* \neq (a + b)^*$ parce que la deuxième contient *ababab*.

Expression régulière : Propriétés simples

13) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$?

Expression régulière : Propriétés simples

13) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$? Oui.
Si $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?

13) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$? Oui.
Si $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?
Non ! Par exemple si $R_3 = \Sigma^*$ on a toujours $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$.

14) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 R_3 = R_2 R_3$?

Expression régulière : Propriétés simples

13) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$? Oui.
Si $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?
Non ! Par exemple si $R_3 = \Sigma^*$ on a toujours $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$.

14) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 R_3 = R_2 R_3$? Oui.
Si $R_1 R_3 = R_2 R_3$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?

Expression régulière : Propriétés simples

13) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$? Oui.
Si $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?
Non ! Par exemple si $R_3 = \Sigma^*$ on a toujours $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$.

14) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 R_3 = R_2 R_3$? Oui.
Si $R_1 R_3 = R_2 R_3$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?
Non ! Par exemple si $R_3 = \emptyset$ on a toujours $R_1 R_3 = R_2 R_3 = \emptyset$.

15) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1^* = R_2^*$?

13) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$? Oui.
Si $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?
Non ! Par exemple si $R_3 = \Sigma^*$ on a toujours $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$.

14) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 R_3 = R_2 R_3$? Oui.
Si $R_1 R_3 = R_2 R_3$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?
Non ! Par exemple si $R_3 = \emptyset$ on a toujours $R_1 R_3 = R_2 R_3 = \emptyset$.

15) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1^* = R_2^*$? Oui.
Si $R_1^* = R_2^*$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?

Expression régulière : Propriétés simples

13) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$? Oui.
Si $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?
Non ! Par exemple si $R_3 = \Sigma^*$ on a toujours $R_1 + R_3 = R_2 + R_3$.

14) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1 R_3 = R_2 R_3$? Oui.
Si $R_1 R_3 = R_2 R_3$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?
Non ! Par exemple si $R_3 = \emptyset$ on a toujours $R_1 R_3 = R_2 R_3 = \emptyset$.

15) Si $R_1 = R_2$ est-il vrai que $R_1^* = R_2^*$? Oui.
Si $R_1^* = R_2^*$ est-il vrai que $R_1 = R_2$?
Non ! Par exemple si $R_1 = a + b$, $R_2 = a + b + ab$.

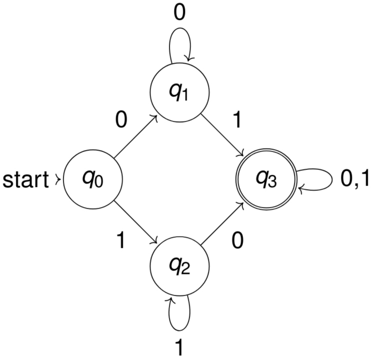
Automates finis

Un automate fini déterministe (DFA – deterministic finite automaton) est un quintuple $A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ où :

- Q : L'ensemble des états.
- Σ : Un alphabet.
- $s \in Q$: L'état initial.
- $F \subseteq Q$: L'ensemble des états finaux.
- δ : Une fonction de transition de $Q \times \Sigma$ à Q

Automates finis Exemple

$L = \{w | w \text{ contient le facteur 01 ou } 10\}$



$A = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$ avec :
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$,
$s = q_0$, $F = q_3$,
δ peut être représenté sous forme de tableau :

	0	1
q_0	q_1	q_2
q_1	q_1	q_3
q_2	q_3	q_2
q_3	q_3	q_3

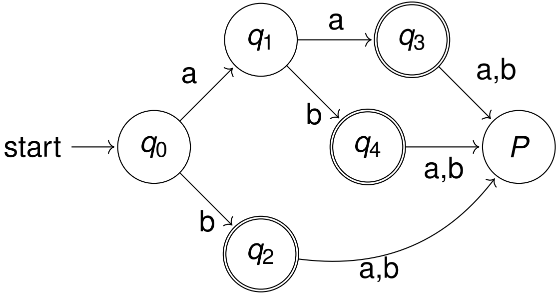
Ex : 011 appartient au langage :
$(q_0, 011) \rightarrow (q_1, 01) \rightarrow (q_1, 1) \rightarrow (q_3, \epsilon)$ et $q_3 \in F$.

Ex : 111 n'appartient pas au langage :
$(q_0, 111) \rightarrow (q_2, 11) \rightarrow (q_2, 1) \rightarrow (q_2, \epsilon)$ et $q_2 \notin F$.

Automates finis exercice

1) $L = \{ab, aa, b\}$

1) $L = \{ab, aa, b\}$

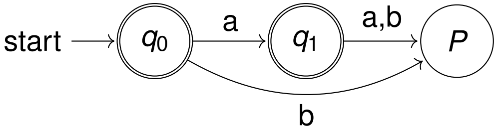


Automates finis exercice

2) $L = \{\epsilon, a\}$

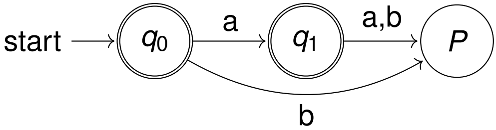
Automates finis exercice

2) $L = \{\epsilon, a\}$

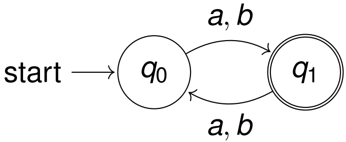


3) $L = \{w |$ la taille de w est impaire$\}$

2) $L = \{\epsilon, a\}$



3) $L = \{w|$ la taille de w est impaire$\}$

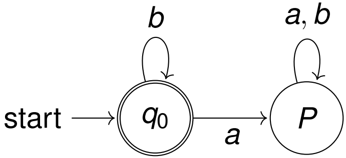


Automates finis exercice

4) $L = \{w | w \text{ ne contient pas } a\}$

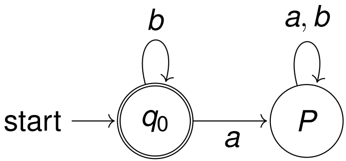
Automates finis exercice

4) $L = \{w | w \text{ ne contient pas } a\}$

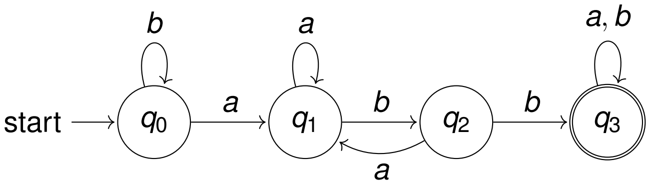


5) $L = \{w | \ w \text{ contient le facteur } abb\}$

4) $L = \{w | w \text{ ne contient pas } a\}$

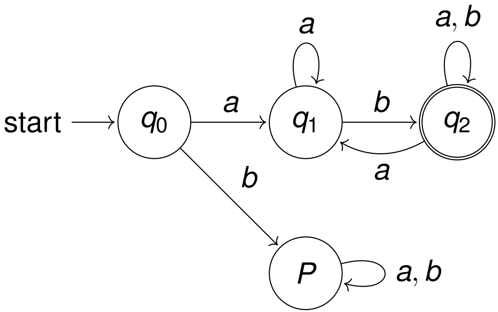


5) $L = \{w |\ w \text{ contient le facteur } abb\}$



6) $L = \{w | w$ commence avec a et finis par $b\}$

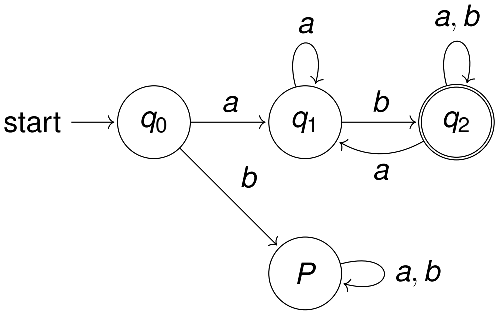
6) $L = \{w | w \text{ commence avec } a \text{ et finis par } b\}$



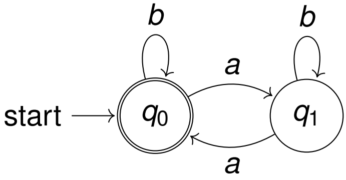
7) $L = \{w|\ w \text{ contient un nombre pair de } a\}$

Automates finis exercice

6) $L = \{w | w \text{ commence avec } a \text{ et finis par } b\}$

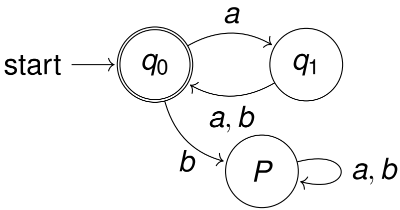


7) $L = \{w | \ w \text{ contient un nombre pair de } a\}$



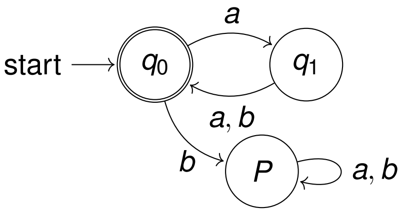
8) $L = \{w|$ les caractères en position impaire sont toujours des $a\}$

8) $L = \{w|$ les caractères en position impaire sont toujours des $a\}$

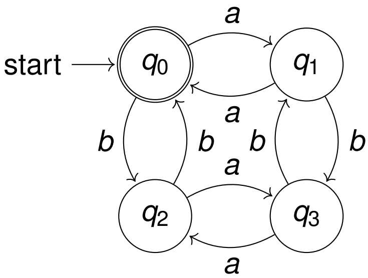


9) $L = \{w|$ w contient un nombre pair de a **et** un nombre pair de $b\}$

8) $L = \{w|$ les caractères en position impaire sont toujours des $a\}$



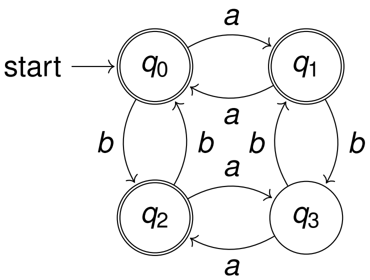
9) $L = \{w|$ w contient un nombre pair de a **et** un nombre pair de $b\}$



10) $L = \{w|\ w$ contient un nombre pair de a **ou** un nombre pair de $b\}$

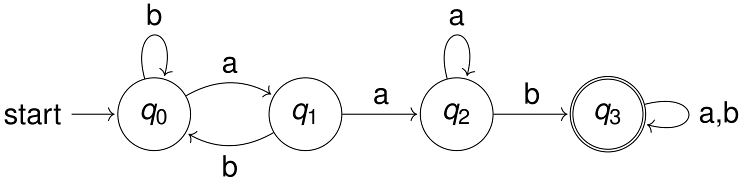
Automates finis exercice

10) $L = \{w | \ w$ contient un nombre pair de a **ou** un nombre pair de $b\}$



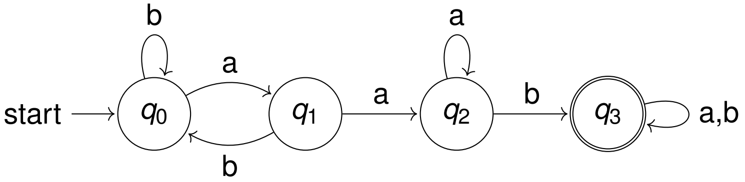
Automates finis exercice

Pour les automates suivants, decrivez les langages qu'ils acceptent. Votre description peut être en français ou avec une expression régulière.



Automates finis exercice

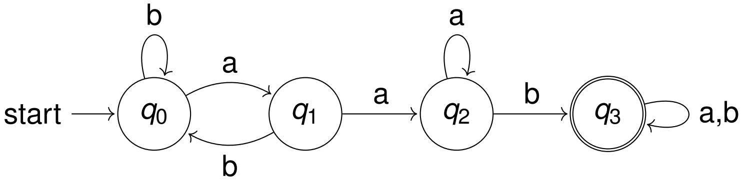
Pour les automates suivants, decrivez les langages qu'ils acceptent. Votre description peut être en français ou avec une expression régulière.



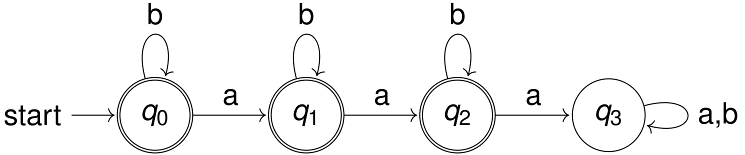
Solution : $L =$ les mots qui contiennent le facteur aab.
Ou $(a+b)^* aab(a+b)^*$.

Automates finis exercice

Pour les automates suivants, decrivez les langages qu'ils acceptent. Votre description peut être en français ou avec une expression régulière.

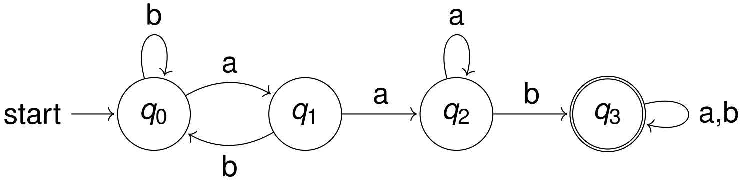


Solution : $L =$ les mots qui contiennent le facteur aab.
Ou $(a+b)^*aab(a+b)^*$.

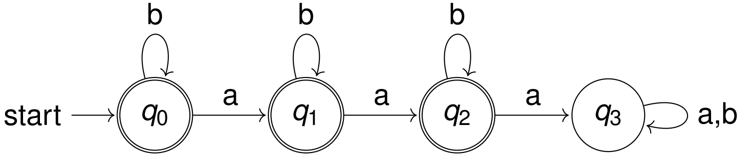


Automates finis exercice

Pour les automates suivants, decrivez les langages qu'ils acceptent. Votre description peut être en français ou avec une expression régulière.

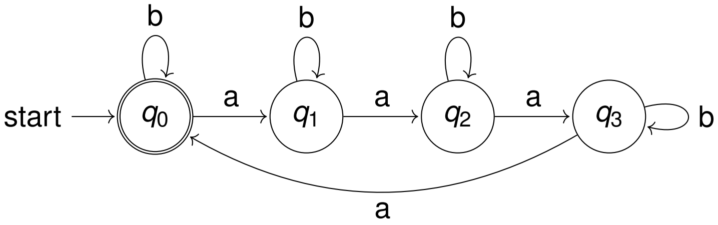


Solution : $L =$ les mots qui contiennent le facteur aab.
Ou $(a+b)^*aab(a+b)^*$.

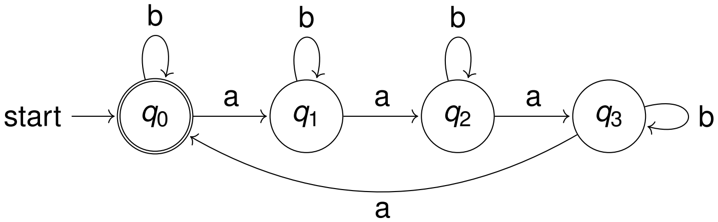


Solution : $L =$ les mots qui contiennent au plus deux a.
Ou $b^*(a+\epsilon)b^*(a+\epsilon)b^*$.

Automates finis exercice



Automates finis exercice



Solution : $L =$ les mots qui contiennent un nombre de a divisible par 4.
Ou $(b^*ab^*ab^*ab^*ab^*)^*$.

Automates finis exercice

$L = \{w|w$ contient le facteur *abb* et le nombre de b est impaire$\}$

Automates finis exercice

$L = \{w|w$ contient le facteur abb et le nombre de b est impaire$\}$