Automates & Langages

Septembre 2020

nicolas.fayard@dauphine.eu

Minimisation - Algorithme de Moore

Definition (Equivalence de Moore)

$w_1 \sim_h w_2$: les mots w_1 et w_2 sont indistingable par un mots de taille $\leq h$ ($\sim \equiv \sim_\infty$).

On a $w_1 \sim_{h+1} w_2 \Leftrightarrow w_1 \sim_h w_2$ et $w_1 a \sim_h w_2 a, \forall a \in \Sigma$

Algorithme de Moore :

Soit A un automate qu'on veut minimiser.

Initialisation : $\sim_0$

Partitionner les états en deux classes : F et $Q \backslash F$.

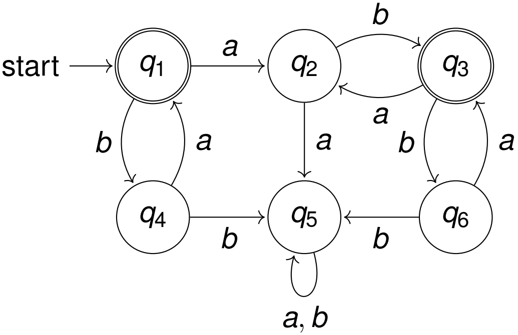
Par induction :

Pour une classe d'états d'équivalence de $\sim_h$ on cherche si deux états pour lesquels une transition $(h+1)$ conduit à deux classes différentes.

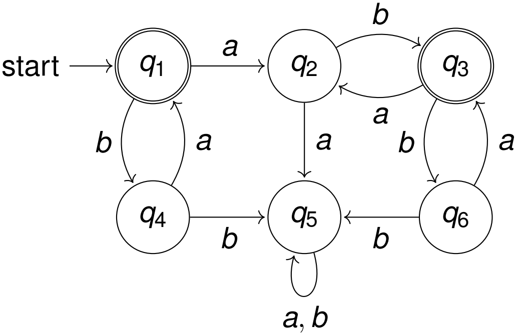
On s'arrête lorsque la partition $\sim_h$ est la même que $\sim_{h+1}$.

Minimisation - Algorithme de Moore

Minimisez l'automates suivant :



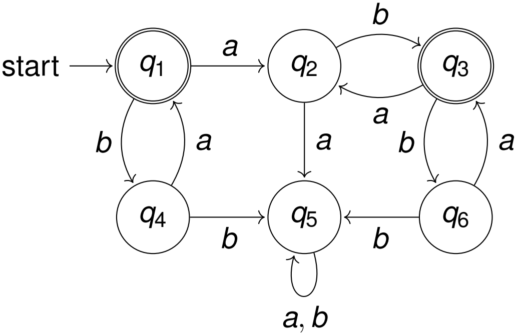
Minimisez l'automates suivant :

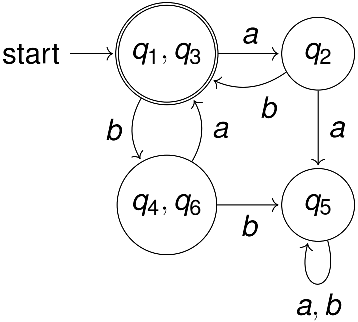


$h = 0 : \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_4, q_5, q_6\}$
$h = 1 : \{q_1, q_3\}, \{q_2\}, \{q_4, q_6\}, \{q_5\}$
$h = 2 : \{q_1, q_3\}, \{q_2\}, \{q_4, q_6\}, \{q_5\}$

Minimisation - Algorithme de Moore

Minimisez l'automates suivant :

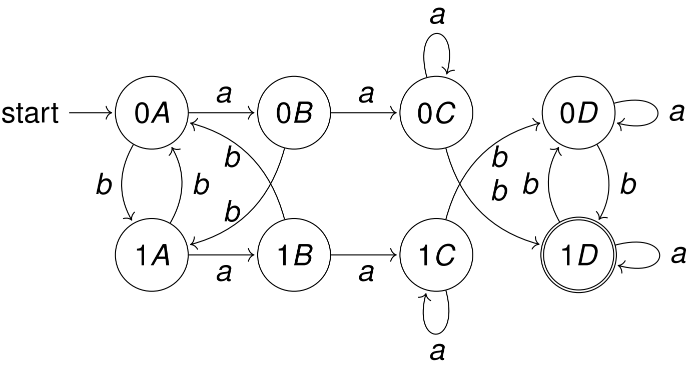




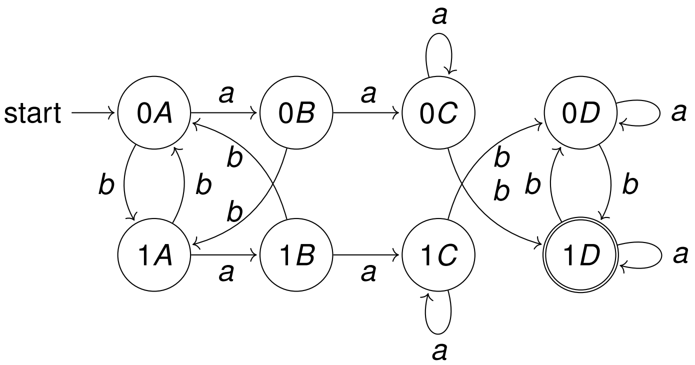
$h = 0 : \{q_1, q_3\}, \{q_2, q_4, q_5, q_6\}$
$h = 1 : \{q_1, q_3\}, \{q_2\}, \{q_4, q_6\}, \{q_5\}$
$h = 2 : \{q_1, q_3\}, \{q_2\}, \{q_4, q_6\}, \{q_5\}$

Minimisation - Algorithme de Moore

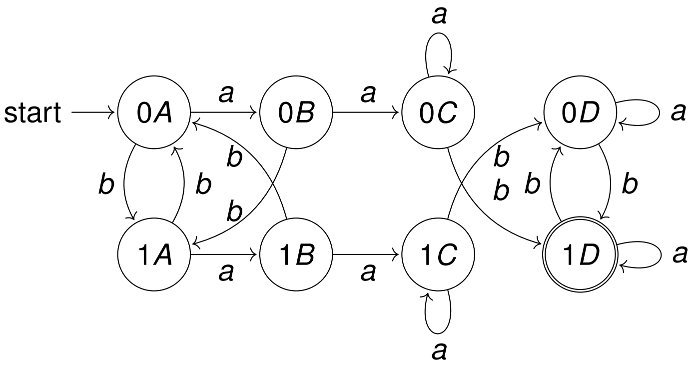
Minimisez l'automates suivant :



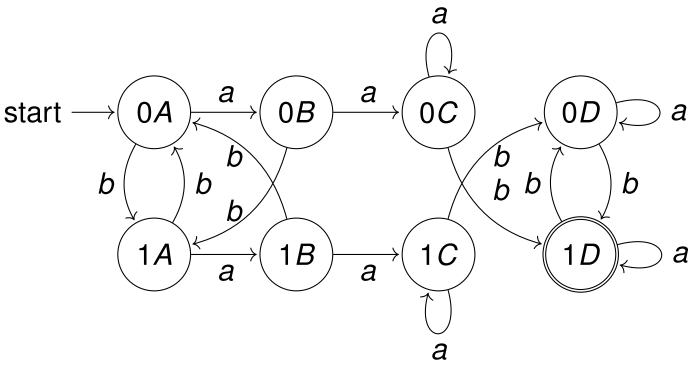
Minimisez l'automates suivant :



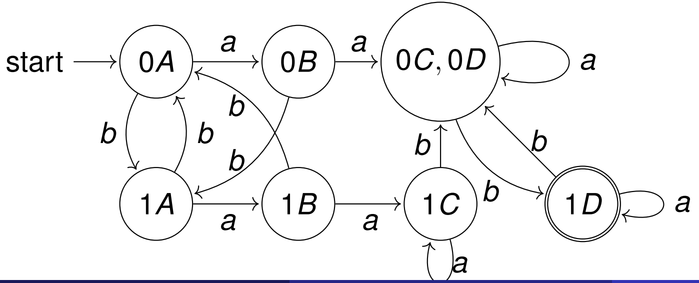
$h_0 = \{0A, 0B, 0C, 0D, 1A, 1B, 1C\}, \{1D\}$
$h_1 = \{0A, 0B, 1A, 1B, 1C\}, \{0C, 0D\}, \{1D\}$
$h_2 = \{0A, 1A, 1B\}, \{0B\}, \{1C\}, \{0C, 0D\}, \{1D\}$
$h_3 = \{0A\}, \{1A\}, \{1B\}, \{0B\}, \{1C\}, \{0C, 0D\}, \{1D\}$
$h_4 = \{0A\}, \{1A\}, \{1B\}, \{0B\}, \{1C\}, \{0C, 0D\}, \{1D\}$



$\{0A\}, \{1A\}, \{1B\}, \{0B\}, \{1C\}, \{0C, 0D\}, \{1D\}$



$\{0A\}, \{1A\}, \{1B\}, \{0B\}, \{1C\}, \{0C, 0D\}, \{1D\}$



Langages Non-réguliers - Myhill-Nerode

Theorem

Myhill-Nerode L est un langage regulier si et seulement le nombre de classes d'equivalence de la relation $\sim$ pour L est fini.

Pour montrer qu'un langage n'est pas régulier il suffi donc de montrer qu'il y a une infinité de classes d'équivalences.

Langages Non-réguliers - Myhill-Nerode

Theorem

Myhill-Nerode L est un langage regulier si et seulement le nombre de classes d'equivalence de la relation $\sim$ pour L est fini.

Pour montrer qu'un langage n'est pas régulier il suffi donc de montrer qu'il y a une infinité de classes d'équivalences.

L est-il un langage régulier ?
$L = \{w | w = XX^r (w \text{ est un palindrome})\}$

Theorem

Myhill-Nerode L est un langage regulier si et seulement le nombre de classes d'equivalence de la relation $\sim$ pour L est fini.

Pour montrer qu'un langage n'est pas régulier il suffi donc de montrer qu'il y a une infinité de classes d'équivalences.

L est-il un langage régulier ?
$L = \{w | w = XX^r (w \text{ est un palindrome})\}$

$w_1 = ab$	$w' = ba$
$w_2 = aab$	$w' = baa$
$w_3 = aaab$	$w' = baaa$
$w_4 = a^4 b$	$w' = ba^4$
...	...
$w_k = a^k b$	$w' = ba^k$

$\forall i \neq j$, $w_i \nsim w_j$, il suffit de prendre $w' = ba^i$:
$w_i w' \in L$
$w_j w' \notin L$

Langages Non-réguliers - Myhill-Nerode

L est-il un langage régulier ?
$L = \{w \mid |w| = k^2, k \in N\}$

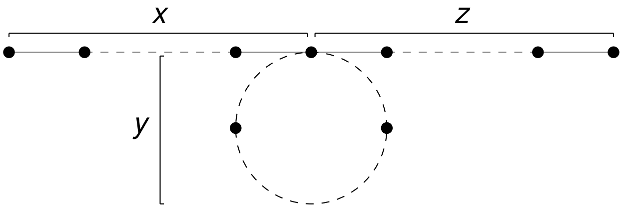
L est-il un langage régulier ?
$L = \{w||w| = k^2, k \in N\}$

$$\begin{array}{l|l} w_1 = a & w' = aaa \\ w_2 = aaaa & w' = aaaaa \\ w_3 = a^9 & w' = a^7 \\ ... & ... \\ w_k = a^{k^2} & w' = a^{2k+1} \end{array}$$

$\forall i < j,\ w_i \nsim w_j$, il suffit de prendre $w' = a^{2k+1}$:
$w_i w' = a^{i^2} a^{2i+1} = a^{i \times i + 2i + 1} = a^{(i+1)^2} \in L$
$w_j w' = a^{j^2} a^{2i+1} \notin L$, car $j^2 < |w_j w'| = j^2 + 2i + 1 < j^2 + 2j + 1 = (j+1)^2$

Soit L un langage régulier. Alors il existe un nombre $p > 0$ tel que pour chaque mot $w \in L$ tel que $|w| > p$ il existent x, y, z tels que

1. $w = xyz$
2. $|y| > 0$
3. $|xy| \leq p$
4. Pour chaque $i \geq 0$ on a $xy^iz \in L$



Langages Non-régulier - Lemme de pompage

A	B
"L est régulier"	"L n'est pas régulier"
$\|A\| = p$	
	$w = \|w\| > p$
$w = xyz$	
	$xy^iz \notin L$

Pour prouvez que L n'est pas régulier on joue B.

Frame Title

L est-il un langage régulier ?
$L = \{w | w = XX^r (w \text{ est un palindrome})\}$

Frame Title

L est-il un langage régulier ?

$L = \{w | w = XX^r (w \text{ est un palindrome})\}$

$$\begin{tikzcd} A & B \\ |A| = p \arrow[dr] & \\ & w = a^p bba^p \arrow[dl] \\ xyz \arrow[dr] & \\ & w' = xyyz \notin L \arrow[dl] \\ {} & \end{tikzcd}$$

1. Supposons qu'il existe un automate avec p états.
2. $w = a^p bba^p$ (on a $w \in L$ et $|w| > p$).
3. Supposons que : $w = xyz, |y| > 0, |xy| \leq p$ alors $y = a^k$, $k \in \mathbf{N}$, $p \geq k > 0$.
4. Mais alors l'automate accepte xy^2z.

Montrez que L n'est pas un langage régulier, par Nyhill-Nerode et Lemme de Pompage.
$L = \{w | a^n b^n, n \in \mathrm{N}\}$.

Montrez que L n'est pas un langage régulier, par Nyhill-Nerode et Lemme de Pompage.

$L = \{w | a^n b^n, n \in \mathrm{N}\}$.

Nyhill-Nerode :

Soit $w_k = a^k$, $\forall i \neq j$, $w^i \nsim w_j$, il suffit de prendre $w' = b^i$.

$w_i w' = a^i b^i \in L$ et $w_j w' = a^j b^i \notin L$.

Montrez que L n'est pas un langage régulier, par Nyhill-Nerode et Lemme de Pompage.
$L = \{w | a^n b^n, n \in \mathrm{N}\}$.

Nyhill-Nerode :

Soit $w_k = a^k$, $\forall i \neq j$, $w^i \nsim w_j$, il suffit de prendre $w' = b^i$.
$w_i w' = a^i b^i \in L$ et $w_j w' = a^j b^i \notin L$.

Lemme de pompage

1. Supposons qu'il existe un automate avec p états.
2. $w = a^p b^p$ (on a $w \in L$ et $|w| > p$).
3. Supposons que : $w = xyz, |y| > 0, |xy| \leq p$ alors $y = a^k$, $k \in \mathbf{N}$, $p \geq k > 0$.
4. Mais alors l'automate accepte $xy^2 z$.

Montrez que L n'est pas un langage régulier, par Nyhill-Nerode et Lemme de Pompage.
$L = \{w|$ Le nombre de b divise le nombre de $a\}$.

Montrez que L n'est pas un langage régulier, par Nyhill-Nerode et Lemme de Pompage.

$L = \{w|$ Le nombre de b divise le nombre de $a\}$.

Nyhill-Nerode :

Soit $w_k = a^k$, $\forall i > j$, $w^i \nsim w_j$, il suffit de prendre $w' = b^i$.

$w_i w' = a^i b^i \in L$ et $w_j w' = a^j b^i \notin L$.

Montrez que L n'est pas un langage régulier, par Nyhill-Nerode et Lemme de Pompage.

$L = \{w|$ Le nombre de b divise le nombre de $a\}$.

Nyhill-Nerode :

Soit $w_k = a^k$, $\forall i > j$, $w^i \nsim w_j$, il suffit de prendre $w' = b^i$.

$w_i w' = a^i b^i \in L$ et $w_j w' = a^j b^i \notin L$.

Lemme de pompage

1. Supposons qu'il existe un automate avec p états et $p > 1$.
2. $w = a^p b^p$ (on a $w \in L$ et $|w| > p$).
3. Supposons que : $w = xyz, |y| > 0, |xy| > p$ alors $y = a^k$, $k \in \mathbf{N}$, $p > k > 0$.
4. Mais alors l'automate accepte xy^2z. (p ne divise pas $p + k$ car $0 < k < p$)

Montrez que L n'est pas un langage régulier, par Lemme de Pompage.
$L = \{w | |w| \text{ est un nombre premier}\}$.

Montrez que L n'est pas un langage régulier, par Lemme de Pompage.
$L = \{w||w| \text{ est un nombre premier}\}$.

Lemme de pompage

1. Supposons qu'il existe un automate avec p états.
2. $w = a^q$ avec $q > p$ et q premier.
3. Supposons que : $w = xyz, |y| > 0, |xy| \leq p$ alors $y = a^k$, $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 0$.
4. Mais alors l'automate accepte $xy^{q-k}z$.
$|xy^{q-k}z| = |xz| + |y^{q-k}| = (q-k) + k(q-k) = (q-k)(1+k)$

Grammaire hors contexte (CFG)

Une grammaire hors contexte (CFG) est défini par :

1. Un ensemble V des variables.
2. Un alphabet Σ des symboles terminaux, $\Sigma \subseteq V$.
3. Un symbole $S \in V - \Sigma$ qui est le symbole initiale.
4. Un ensemble des règles R telles que chaque règle a la forme $A \rightarrow w$, où $A \in V$ et $w \in (V \cup \Sigma)^*$

Exemple

(W, Σ, P, R)

$W = \{P, N, P_V, V\} \cup \Sigma$

$\Sigma = \{$Alice, Bob, aime, dort, court $\}$

$$
\begin{array}{lcll}
P & \rightarrow & N \; P_V & (1) \\
P & \rightarrow & P \text{ et } P & (2) \\
P_V & \rightarrow & V & (3) \\
P_V & \rightarrow & V \; N & (4) \\
N & \rightarrow & \text{Alice} & (5) \\
N & \rightarrow & \text{Bob} & (6) \\
V & \rightarrow & \text{aime} & (7) \\
V & \rightarrow & \text{dort} & (8) \\
V & \rightarrow & \text{court} & (9)
\end{array}
$$

$P \xrightarrow{1} NP_V \xrightarrow{5}$ Alice $P_V \xrightarrow{3}$ Alice $V \xrightarrow{9}$ Alice court.

$P \xrightarrow{1} NP_V \xrightarrow{4} NVN \xrightarrow{6}$ Bob $VN \xrightarrow{7}$ Bob aime $N \xrightarrow{5}$ Bob aime Alice.

$P \xrightarrow{2} P$ et $P \xrightarrow{1,1} NP_V$ et $NP_V \xrightarrow{3,3} NV$ et $NV \xrightarrow{5,6}$ Alice V et Bob $V \xrightarrow{8,9}$ Alice court et Bob dort.

Exercice

Pour les langages suivants, donnez des grammaires qui les décrivent.
L'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
$L = \{w = w^R\}$ **Text^R = txeT**

Exercice

Pour les langages suivants, donnez des grammaires qui les décrivent.
L'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.

$L = \{w = w^R\}$

$G = (S, \{a, b\}, S, R)$

$R = \{S \rightarrow aSa|bSb|a|b|\epsilon\}$

Exercice

Pour les langages suivants, donnez des grammaires qui les décrivent.
L'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.

$L = \{w = w^R\}$

$G = (S, \{a, b\}, S, R)$

$R = \{S \rightarrow aSa | bSb | a | b | \epsilon\}$

aSa
abSba
abba

$L = \{w |$ le nombre de $a =$ le nombre de $b\}$

Exercice

Pour les langages suivants, donnez des grammaires qui les décrivent.
L'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
$L = \{w = w^R\}$
$G = (S, \{a, b\}, S, R)$
$R = \{S \rightarrow aSa|bSb|a|b|\epsilon\}$

$L = \{w|$ le nombre de $a =$ le nombre de $b\}$
$R = \{S \rightarrow \epsilon|aSbS|bSaS\}$

Exercice

Pour les langages suivants, donnez des grammaires qui les décrivent.
L'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
$L = \{w = w^R\}$
$G = (S, \{a, b\}, S, R)$
$R = \{S \rightarrow aSa|bSb|a|b|\epsilon\}$

$L = \{w|$ le nombre de $a =$ le nombre de $b\}$
$R = \{S \rightarrow \epsilon|aSbS|bSaS\}$

$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, \times\}$
$L = \{$ L'ensemble des expressions algébriques$\}$ (Comme $2 + 3 \times 15 + 5$)

Exercice

Pour les langages suivants, donnez des grammaires qui les décrivent.
L'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
$L = \{w = w^R\}$
$G = (S, \{a, b\}, S, R)$
$R = \{S \rightarrow aSa|bSb|a|b|\epsilon\}$

$L = \{w|$ le nombre de $a =$ le nombre de $b\}$
$R = \{S \rightarrow \epsilon|aSbS|bSaS\}$

$\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, \times\}$
$L = \{$ L'ensemble des expressions algébriques$\}$ (Comme $2 + 3 \times 15 + 5$)
$S \rightarrow N|S + S|S \times S$
$N \rightarrow 0|1|...|9|NN$

$\overbrace{a \quad a}^{i}\ \overbrace{b \quad a}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$L = \{w | w = a^i b^j a^{i+j}, i, j \in \mathrm{N}\}$

Exercice

a   a S $a^{L} - a$

$\Sigma = \{a, b\}$
$L = \{w | w = a^i b^j a^{i+j}, i, j \in \mathrm{N}\}$
$S \rightarrow aSa | E$
$E \rightarrow bEa | \epsilon$

$L = \{w |$le nombre de a est supérieur au nombre de $b\}$

Exercice

$\Sigma = \{a, b\}$
$L = \{w | w = a^i b^j a^{i+j}, i, j \in \mathrm{N}\}$
$S \rightarrow aSa | E$
$E \rightarrow bEa | \epsilon$

$L = \{w |$ le nombre de a est supérieur au nombre de $b\}$
$S \rightarrow EaE$
$E \rightarrow aEbE | bEaE | aE | \epsilon$

$L = \{w | a^* b^i a^* b^{2i}\}\}$

Exercice

$\Sigma = \{a, b\}$
$L = \{w | w = a^i b^j a^{i+j}, i, j \in \mathrm{N}\}$
$S \rightarrow aSa|E$
$E \rightarrow bEa|\epsilon$

$L = \{w|$le nombre de a est supérieur au nombre de $b\}$
$S \rightarrow EaE$
$E \rightarrow aEbE|bEaE|aE|\epsilon$

$L = \{w|a^* b^i a^* b^{2i}\}\}$
$S \rightarrow aS|B$
$B \rightarrow bBbb|A$
$A \rightarrow aA|\epsilon$