Automates & Langages

Septembre 2020

nicolas.fayard@dauphine.eu

Forme normal de Chomsky

Un Gramaire hors context est sous la forme de Chomsky si et seulement si toute ses règles sont de la forme :
$A \rightarrow BC$
$A \rightarrow a$
$a \in \Sigma$, $A \in V$, et $B, C \in V \backslash \{S \cup \Sigma\}$. On permet la règle $S \rightarrow \epsilon$.

Forme normal de Chomsky

Procédure pour mettre une GHC en forme normal de Chomsky :

1. Nouvelle variable de départ : $S_0 \to S$
2. Éliminer les règles-ϵ : On élimine les règles de la forme $A \to \epsilon$.

   Ex : $\begin{array}{l|l} A \to \epsilon | a & A \to a \\ B \to \alpha ABA\gamma | A & B \to \alpha ABA\gamma | \alpha BA\gamma | \alpha AB\gamma | \alpha B\gamma | \epsilon \end{array}$
3. Elimination des règles $A \to B$:
   Pour toutes règles de la forme $B \to \alpha$, on ajoute la règle $A \to \alpha$ et on supprime $A \to B$.
4. Transformation des règles restante :
   Transformation des règles de la forme $A \to \alpha_1\alpha_2...\alpha_k$ avec $k \geq 3, \alpha_i \in V$, remplacé par :
   $A \to \alpha_1 A_1$, $A_1 \to \alpha_1 A_2$, ..., $A_{k-2} \to \alpha_{k-1}\alpha_k$.
   On remplace tout les symboles terminaux α_i par un symbole non terminal U_i et on ajoute $U_i \to \alpha_i$.

Transformons la *GHC* suivant en forme de Chomsky :

$S \to ASA|aB, \quad A \to B|S, \quad B \to b|\epsilon.$

1) $S_0 \to S, \quad S \to ASA|aB, \quad A \to B|S, \quad B \to b|\epsilon.$

2)

$S_0 \to S$	$S_0 \to S$
$S \to ASA\|aB\|a$	$S \to ASA\|aB\|a\|SA\|AS\|S$
$A \to B\|S\|\epsilon$	$A \to B\|S$
$B \to b$	$B \to b$

3)

$S_0 \to S$	$S_0 \to ASA\|aB\|a\|SA\|AS$
$S \to ASA\|aB\|a\|SA\|AS$	$S \to ASA\|aB\|a\|SA\|AS$
$A \to S\|b$	$A \to ASA\|aB\|a\|SA\|AS\|b$
$B \to b$	$B \to b$

4)

$S_0 \to AA_1|UB|a|SA|AS$

$S \to AA_1|UB|a|SA|AS$

$A \to AA_1|UB|a|SA|AS|b$

$B \to b$

$A_1 \to SA$

$U \to a$

Exercice

Transformons la *GHC* suivant en forme de Chomsky :
$S \rightarrow AbA, \quad A \rightarrow Aa|\epsilon$.

Exercice

Transformons la *GHC* suivant en forme de Chomsky :

$S \to AbA, \quad A \to Aa|\epsilon.$

1) $S_0 \to S, \quad S \to AbA, \quad A \to Aa|\epsilon.$

2) $S_0 \to S, \quad S \to AbA|bA|Ab|b, \quad A \to Aa|a.$

3) $S_0 \to AbA|bA|Ab|b, \quad S \to AbA|bA|Ab|b, \quad A \to Aa|a.$

4)

$S_0 \to AA_1\|bA\|Ab\|b$	$S_0 \to AA_1\|BA\|AB\|B$
$S \to AA_1\|bA\|Ab\|b$	$S \to AA_1\|BA\|AB\|B$
$A \to Aa\|a$	$A \to AC\|C$
$A_1 \to bA$	$A_1 \to BA$
	$C \to a$
	$B \to b$

Exercice

Transformons la *GHC* suivant en forme de Chomsky :
$S \rightarrow XY, \quad X \rightarrow abb|aXb|\epsilon, \quad Y \rightarrow c|cY$

Exercice

Transformons la *GHC* suivant en forme de Chomsky :

$S \rightarrow XY, \quad X \rightarrow abb|aXb|\epsilon, \quad Y \rightarrow c|cY$

1) $S_0 \rightarrow S, \quad S \rightarrow XY, \quad X \rightarrow abb|aXb|\epsilon, \quad Y \rightarrow c|cY$

2) $S_0 \rightarrow S, \quad S \rightarrow XY|Y, \quad X \rightarrow abb|aXb|ab, \quad Y \rightarrow c|cY$

3)

$$
\begin{array}{ll}
S_0 \rightarrow S & S_0 \rightarrow XY|c|cY \\
S \rightarrow XY|bc|cY & S \rightarrow XY|bc|cY \\
X \rightarrow abb|aXb|ab & X \rightarrow abb|aXb|ab \\
Y \rightarrow c|cY & Y \rightarrow c|cY
\end{array}
$$

4)

$$
\begin{array}{ll}
S_0 \rightarrow XY|C|CY & S_0 \rightarrow XY|C|CY \\
S \rightarrow XY|C|CY & S \rightarrow XY|C|CY \\
X \rightarrow AA_1|AB_1|Ab & X \rightarrow AA_1|AB_1|AB \\
Y \rightarrow c|cY & Y \rightarrow c|CY \\
A_1 \rightarrow bb & A_1 \rightarrow BB \\
B_1 \rightarrow Xb & B_1 \rightarrow XB \\
 & A \rightarrow a, \quad B \rightarrow b, \quad C \rightarrow c
\end{array}
$$

Exercice

Transformons la *GHC* suivant en forme de Chomsky :
$A \rightarrow BAB|B|\ \epsilon, \quad B \rightarrow 00\ |\epsilon.$

Exercice

Transformons la *GHC* suivant en forme de Chomsky :

$A \to BAB|B|\ \epsilon, \quad B \to 00\ |\epsilon.$

1) $S \to A, \quad A \to BAB|B|\epsilon, \quad B \to 00|\epsilon$

2)

$S \to A$	$S \to A\|\epsilon$
$A \to BAB\|B\|BA\|AB\|\epsilon$	$A \to BAB\|B\|BA\|AB$
$B \to 00$	$B \to 00$

3) $S \to BAB|BA|AB|BB|00|\epsilon$

$A \to BAB|BA|AB|BB|00$

$B \to 00$

4)

$S \to BU_1\|BA\|AB\|BB\|00\|\epsilon$	$S \to BU_1\|BA\|AB\|BB\|DD\|\epsilon$
$A \to BU_1\|BA\|AB\|BB\|00$	$A \to BU_1\|BA\|AB\|BB\|DD$
$B \to 00$	$B \to DD$
$U_1 \to AB$	$U_1 \to AB$
	$D \to 0$

Comment reconnaître une grammaire

Exemple :

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & P_N \;\; P_V \\
P_V & \rightarrow & P_V \; PP \\
P_V & \rightarrow & V \; P_N \\
PP & \rightarrow & P \; P_N \\
P_N & \rightarrow & Det \; N \\
P_N & \rightarrow & \text{Elle} \\
V & \rightarrow & \text{va} \\
P_V & \rightarrow & \text{va} \\
P & \rightarrow & \text{avec} \\
N & \rightarrow & \text{velo} \\
N & \rightarrow & \text{Dauphine} \\
Det & \rightarrow & \text{un} \\
Det & \rightarrow & \text{une}
\end{array}
$$

7	S						
6	$\emptyset$	P_V					
5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$				
4	S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$			
3	$\emptyset$	P_V	$\emptyset$	$\emptyset$	PP		
2	S	$\emptyset$	P_N	$\emptyset$	$\emptyset$	P_N	
1	P_N	V, P_V	Det	N	P	Det	N
	Elle	va	a	Dauphine	avec	un	velo

Algorithme de Cocke-Younger-Kasami (CYK)

Déterminer si un mot $w = a_1, ..., a_n \in L$
Initialisation : Pour $i = 1, ...n$: $P_{i,i} =$ tout V tel que $V \rightarrow a_i$ existe
Pour $d = 1, ..., n-1$:
  Pour $i = 1, ..., n-d$:
    $j = i + d$
    Pour $k = i, ..., j-1$:
      Pour tout $B \in P_{i,k}, C \in P_{k+1,j}$:
        Si $A \rightarrow BC \in R$: $P_{i,j} = P_{i,j} \cup A$
Si $S \in P_{1,n}$ alors w appartient au langage (sinon : non)

Accepter un mot

$S \to AB|BC, \quad A \to BA|a, \quad B \to CC|b, \quad C \to AB|a$

Est-ce que *baaba* appartiens au langage ?

5	S, A, C				
4	$\emptyset$	A, S, C			
3	$\emptyset$	B	B		
2	A, S	B	S, C	A, S	
1	B	A, C	A, C	B	A, C
	b	a	a	b	a

Accepter un mot

$S \to SS|AS_1|AB, \quad S_1 \to SB, \quad A \to (, \quad B \to)$

Est-ce que (()(())) appartiens au langage ?

8	S							
7	$\emptyset$	S_1						
6	$\emptyset$	S	$\emptyset$					
5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S_1				
4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S	$\emptyset$			
3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	S_1	$\emptyset$		
2	$\emptyset$	S	$\emptyset$	$\emptyset$	S	$\emptyset$	$\emptyset$	
1	A	A	B	A	A	B	B	B
	(	(	)	(	(	)	)	)

Automates a pile

$M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$
K = Etats
Σ =Alphabet (Entrée)
Γ = Alphabet dans la pile
$s \in K$ Etat initial
$F \subset K$ Etats finaux
Δ : relation de transition ; $(K \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma^*) \times (K \times \Gamma^*)$
$((p, a, \beta), (q, \delta)) \in \Delta$: Quand on est dans l'état p avec β au sommet de la pile, lorsqu'on lit $a \in \Sigma \cup \epsilon$; on remplace β par δ au sommet de la pile et on va dans l'état q.
On accepte un mot si on a : $(s, w, \epsilon) \rightarrow^* (p, \epsilon, \epsilon)$ avec $p \in F$.

Exercice

$L = \{wcw^R, w \in \{a, b\}\}$
$(abcab \notin L, cac \notin L, abbacabba \in L)$

Exercice

$L = \{wcw^R, w \in \{a, b\}\}$
$(abcab \notin L, cac \notin L, abbacabba \in L) M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, where
$K = \{s, f\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b\}$, $F = \{f\}$,
$\Delta =$ (1)$((s, a, \epsilon), (s, a))$, (2) ((s,b,$\epsilon$), (s, b)) (3) ((s,c,ϵ), (f, ϵ)),
(4)$((f, a, a), (f, \epsilon))$, (5) ((f, b, b), (f, ϵ))
abbcbba appartient au langage ?

Exercice

$L = \{wcw^R, w \in \{a,b\}\}$
$(abcab \notin L, cac \notin L, abbacabba \in L) M = (K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$, where
$K = \{s, f\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, $\Gamma = \{a, b\}$, $F = \{f\}$,
$\Delta = (1)((s, a, \epsilon), (s, a))$, (2) ((s,b,$\epsilon$), (s, b)) (3) ((s,c,ϵ), (f, ϵ)),
$(4)((f, a, a), (f, \epsilon))$, (5) ((f, b, b), (f, ϵ))
abbcbba appartient au langage ?

Etat	Entrée non lu	Pile	Transition
s	$abbcbba$	ϵ	
s	$bbcbba$	a	(1)
s	$bcbba$	ba	(2)
s	$cbba$	bba	(2)
f	bba	bba	(3)
f	ba	ba	(5)
f	a	a	(5)
f	ϵ	ϵ	(4)

Exercice

$L = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$

Exercice

$L = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$
$(1)((s, a, \epsilon), (s, a)),$
$(2)((s, b, \epsilon), (s, b)),$
$(3)((s, \epsilon, \epsilon), (f, \epsilon)),$
$(4)((f, a, a), (f, \epsilon)),$
$(5)((f, b, b), (f, \epsilon))$
abbbba appartient au langage ?

Exercice

$L = \{ww^R : w \in \{a, b\}^*\}$
$(1)((s, a, \epsilon), (s, a)),$
$(2)((s, b, \epsilon), (s, b)),$
$(3)((s, \epsilon, \epsilon), (f, \epsilon)),$
$(4)((f, a, a), (f, \epsilon)),$
$(5)((f, b, b), (f, \epsilon))$
abbbba appartient au langage ?

Etat	Entrée non lu	Pile	Transition
s	$abbbba$	ϵ	
s	$bbbba$	a	(1)
s	$bbba$	ba	(2)
s	bba	bba	(2)
f	bba	bba	(3)
f	ba	ba	(5)
f	a	a	(5)
f	ϵ	ϵ	(4)

$L = \{w$ à le mpême nombre de a que de $b\}$

(1)	$((s,\epsilon,\epsilon),(q,c))$	(2)	$((q,a,c),(q,ac))$
(3)	$((q,a,a),(q,aa))$	(4)	$((q,b,a),(q,\epsilon))$
(5)	$((q,b,c),(q,bc))$	(6)	$((q,b,b),(q,bb))$
(7)	$((q,a,b),(q,\epsilon))$	(8)	$((q,\epsilon,c),(f,\epsilon))$

abbbabaa appartient au langage ?

Etat	Entrée non lu	Pile	Transition
s	$abbbabaa$	ϵ	
q	$abbbabaa$	c	(1)
q	$bbbabaa$	ac	(2)
q	$bbabaa$	c	(7)
q	$babaa$	bc	(5)
q	$abaa$	bbc	(6)
q	baa	bc	(4)
q	aa	bbc	(6)
q	a	bc	(4)
q	ϵ	c	(4)
f	ϵ	ϵ	(8)