Types d'échelle et leur signification

Theorie du mesurage

Nicolas Fayard

January 29, 2024

Évaluation

Rapport individuel de 5 pages maximum (hors bibliographie et annexes) sur un indicateur de votre choix.

- Présentation rapide de l'indicateur.
- Pourquoi a-t-il été créé ? Par qui ? Pour qui ? Comment est-il utilisé ? Par qui est-il utilisé ? Est-il bien utilisé ?
- Est-il significatif ? Utile ? Comment pourrait-il être amélioré ?

Date du rendu :

Programme

- Types d'échelle et leur signification
- Problématique de choix et de rangement en multicritère
- Problématique de classement en multicritère
- Aide à la décision collective
- Aide à la décision dans l 'incertain

Programme

Introduction : L'Indice de Qualité de l'Air : ATMO

Calcul de l'indice

- Observation de 4 polluants : CO2, SO2, O3 et poussières, et leur concentration mesurée dans $1m^3$.
- Traduction de ces observations sur une échelle de 1 à 10, où 1 indique une qualité de l'air très bonne et 10 une qualité très mauvaise pour la santé humaine.
- L'indice ATMO se base sur le pire des quatre polluants.

Questions à considérer

Est-ce que 5 est 5 fois pire que 1 ? Est-ce que 10 est 2 fois pire que 5 ?

Introduction : L'Indice de Qualité de l'Air : ATMO

Calcul de l'indice

- Observation de 4 polluants : CO2, SO2, O3 et poussières, et leur concentration mesurée dans $1m^3$.
- Traduction de ces observations sur une échelle de 1 à 10, où 1 indique une qualité de l'air très bonne et 10 une qualité très mauvaise pour la santé humaine.
- L'indice ATMO se base sur le pire des quatre polluants.

Questions à considérer

Est-ce que 5 est 5 fois pire que 1 ? Est-ce que 10 est 2 fois pire que 5 ?

Quelles quantités sont précisément comparées ?

Introduction : L'Indice de Qualité de l'Air : ATMO

Calcul de l'indice

- Observation de 4 polluants : CO2, SO2, O3 et poussières, et leur concentration mesurée dans $1m^3$.
- Traduction de ces observations sur une échelle de 1 à 10, où 1 indique une qualité de l'air très bonne et 10 une qualité très mauvaise pour la santé humaine.
- L'indice ATMO se base sur le pire des quatre polluants.

Questions à considérer

Est-ce que 5 est 5 fois pire que 1 ? Est-ce que 10 est 2 fois pire que 5 ?

Quelles quantités sont précisément comparées ?

Quel est le but de cet indice ?

Introduction : L'Indice de Qualité de l'Air : ATMO

Calcul de l'indice

- Observation de 4 polluants : CO2, SO2, O3 et poussières, et leur concentration mesurée dans $1m^3$.
- Traduction de ces observations sur une échelle de 1 à 10, où 1 indique une qualité de l'air très bonne et 10 une qualité très mauvaise pour la santé humaine.
- L'indice ATMO se base sur le pire des quatre polluants.

Questions à considérer

Est-ce que 5 est 5 fois pire que 1 ? Est-ce que 10 est 2 fois pire que 5 ?

Quelles quantités sont précisément comparées ?

Quel est le but de cet indice ?

Peut-on utiliser cet indice à d'autres fins ?

Tableau des Polluants et Indice ATMO

Temps	CO2	SO2	O3	Poussières
t_1	3	3	8	8
t_1	1	3	8	2
t_2	7	7	7	7

Table: Concentration des polluants et indice ATMO

Tableau des Polluants et Indice ATMO

Temps	CO2	SO2	O3	Poussières
t_1	3	3	8	8
t_1	1	3	8	2
t_2	7	7	7	7

Table: Concentration des polluants et indice ATMO

- Le score de l'indice est le max sur les critères

Selon l'indice ATMO, t_3 est considéré comme mieux que t_2.
Cette évaluation est-elle justifiée ?

Introduction : L'Indice de Qualit e de l'Air : ATMO

- L'affirmation "L'indice ATMO d'aujourd'hui (6) est deux fois plus élevé que celui d'hier (3)" est elle significative ?

- L'affirmation “L'indice ATMO d'aujourd'hui (6) est deux fois plus élevé que celui d'hier (3)” est elle significative ?
- Pour un polluant donné, la concentration est mesurée en $\mu g/m^3$.
  - Les données sont transformées de manière arbitraire.
  - Par exemple, choisir 5-6 pour les normes à long terme de l'UE et 8 pour les normes à court terme est arbitraire.
- L'information pertinente de l'indice n'est pas le chiffre lui-même, mais une indication si nous sommes au-dessus ou en dessous de certaines normes liées aux effets des polluants sur la santé.
  - Dans un autre contexte, les valeurs de l'indice pourraient être différentes (par exemple, 7 et 4), et 7 n'est pas le double de 4.
- Donc, l'affirmation est valide seulement dans un contexte particulier et dépend de choix arbitraires.

Validité des Comparaisons des Sous-Indices ATMO pour l'Ozone

- L'affirmation "Le sous-indice ATMO d'aujourd'hui pour l'ozone (6) est plus élevé que celui d'hier pour l'ozone (3)" est-elle significative.

Validité des Comparaisons des Sous-Indices ATMO pour l'Ozone

- L'affirmation "Le sous-indice ATMO d'aujourd'hui pour l'ozone (6) est plus élevé que celui d'hier pour l'ozone (3)" est-elle significative.
- Toute transformation raisonnable des mesures de concentration en nombres entre 1 et 10 conduit à la même conclusion : le sous-indice d'aujourd'hui est plus élevé que celui d'hier.
- Exemple : une concentration de 110 et 180 $\mu g/m^3$ peut être transformée en indices 3 et 6, ou 4 et 6, ou 2 et 4, mais pas en 4 et 2.

Complexité de la Comparaison des Valeurs Globales de l'Indice ATMO

- Peut-on dire que "L'indice ATMO d'aujourd'hui (6) est plus élevé que celui d'hier (3)" de manière significative ?

Complexité de la Comparaison des Valeurs Globales de l'Indice ATMO

- Peut-on dire que "L'indice ATMO d'aujourd'hui (6) est plus élevé que celui d'hier (3)" de manière significative ?
  - Bien que la comparaison de deux valeurs du même sous-indice soit fiable, il en va différemment pour les valeurs de deux sous-indices différents.
  - Une valeur de 3 sur un sous-indice pourrait être plus dangereuse pour la santé qu'une valeur de 6 sur un autre.
  - Les échelles ont été construites avec soin pour rendre les sous-indices comparables.
- Peut-on vraiment supposer qu'une valeur de 5 est équivalente sur deux sous-indices différents ?
  - Cette équivalence doit être considérée en termes d'effets à court et long terme, sur différentes parties de l'organisme, et de divers impacts sur la santé.
  - Comment comparer les effets en termes de gêne, mortalité après n années, coûts de santé, etc. ?

Programme

Définition d'une Relation Binaire

Considérons un ensemble A :

$$A = \{a, b, c, d, \ldots\}$$

Relation binaire:

Considérons R comme une relation binaire sur l'ensemble A :

$$R \subseteq A \times A$$

$$R = \{(a, d), (b, c), (d, c), \ldots\}$$

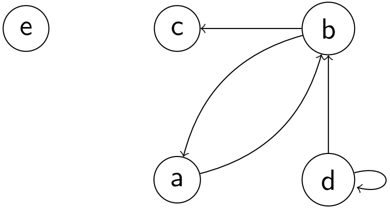
On note aRb ou $R(a, b)$ pour indiquer que $(a, b) \in R$.

Illustration graphique et matricielle

Exemple : $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $R = \{(a, b)(b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$

Illustration graphique et matricielle

Exemple : $A = \{a, b, c, d, e\}$ et $R = \{(a, b)(b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$



$M(i, j)$	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	0
b	1	0	1	0	0
c	0	0	0	0	0
d	0	1	0	1	0
e	0	0	0	0	0

Propriétés mathématiques

Une relation binaire R définie sur A est :

- *Reflexive* : $aRa, \forall a \in A$

Propriétés mathématiques

Une relation binaire R définie sur A est :

- *Reflexive* : $aRa, \forall a \in A$
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Representation matricielle : diagonale avec que des 1.

Propriétés mathématiques

Une relation binaire R définie sur A est :

- *Reflexive* : $aRa, \forall a \in A$
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Representation matricielle : diagonale avec que des 1.
- *Non reflexive* : R n'est pas reflexive $(\exists a, \neg(aRa))$

Propriétés mathématiques

Une relation binaire R définie sur A est :

- *Reflexive* : $aRa, \forall a \in A$
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Representation matricielle : diagonale avec que des 1.
- *Non reflexive* : R n'est pas reflexive $(\exists a, \neg(aRa))$
  - Exemple : a est content de b
  - Representation matricielle : diagonale avec au moins un zéro.

Propriétés mathématiques

Une relation binaire R définie sur A est :

- *Reflexive* : $aRa, \forall a \in A$
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Representation matricielle : diagonale avec que des 1.
- *Non reflexive* : R n'est pas reflexive $(\exists a, \neg(aRa))$
  - Exemple : a est content de b
  - Representation matricielle : diagonale avec au moins un zéro.
- *Irreflexive* : $\neg aRa, \forall a \in A$

Propriétés mathématiques

Une relation binaire R définie sur A est :

- *Reflexive* : $aRa, \forall a \in A$
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Representation matricielle : diagonale avec que des 1.
- *Non reflexive* : R n'est pas reflexive $(\exists a, \neg(aRa))$
  - Exemple : a est content de b
  - Representation matricielle : diagonale avec au moins un zéro.
- *Irreflexive* : $\neg aRa, \forall a \in A$
  - Exemples : strictement plus grand, strictement plus agé, père de...,

Propriétés mathématiques

Une relation binaire R définie sur A est :

- *Reflexive* : $aRa, \forall a \in A$
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Representation matricielle : diagonale avec que des 1.
- *Non reflexive* : R n'est pas reflexive $(\exists a, \neg(aRa))$
  - Exemple : a est content de b
  - Representation matricielle : diagonale avec au moins un zéro.
- *Irreflexive* : $\neg aRa, \forall a \in A$
  - Exemples : strictement plus grand, strictement plus agé, père de...,
  - Representation matricielle : diagonale avec que des zéros.

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \Longrightarrow bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \Longrightarrow bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Representation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Representation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* : R n'est pas symmetrique $(\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa)$

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Representation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* : R n'est pas symmetrique $(\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa)$
  - Exemple : a aime b.

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Representation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* : R n'est pas symmetrique $(\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa)$
  - Exemple : a aime b.
  - Representation matricielle : violation de la symétrie.

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Representation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* : R n'est pas symmetrique $(\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa)$
  - Exemple : a aime b.
  - Representation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* : $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Representation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* : R n'est pas symmetrique $(\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa)$
  - Exemple : a aime b.
  - Representation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* : $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : $>$, ancetre, ...

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Representation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* : R n'est pas symmetrique $(\exists a, b, aRb \land \neg bRa)$
  - Exemple : a aime b.
  - Representation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* : $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : $>$, ancetre, ...
  - Representation matricielle : asymétrique par rapport à la diagonale (que des 0 sur la diagonale).

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Representation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* : R n'est pas symmetrique $(\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa)$
  - Exemple : a aime b.
  - Representation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* : $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : $>$, ancetre, ...
  - Representation matricielle : asymétrique par rapport à la diagonale (que des 0 sur la diagonale).
- *Antisymétrique* : $aRb \wedge bRa \implies b = a, \forall a, b \in A$

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Representation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* : R n'est pas symmetrique $(\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa)$
  - Exemple : a aime b.
  - Representation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* : $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : $>$, ancetre, ...
  - Representation matricielle : asymétrique par rapport à la diagonale (que des 0 sur la diagonale).
- *Antisymétrique* : $aRb \wedge bRa \implies b = a, \forall a, b \in A$
  - Exemples : $\geq$

Propriétés mathématiques

- *Symétrique:* $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Representation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* : R n'est pas symmetrique $(\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa)$
  - Exemple : a aime b.
  - Representation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* : $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$
  - Exemples : $>$, ancetre, ...
  - Representation matricielle : asymétrique par rapport à la diagonale (que des 0 sur la diagonale).
- *Antisymétrique* : $aRb \wedge bRa \implies b = a, \forall a, b \in A$
  - Exemples : $\geq$
  - Representation matricielle : asymétrique par rapport à la diagonale (peut avoir des 1 sur la diagonale).

Propriétés mathématiques

- *Transitive* : $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$

Propriétés mathématiques

- *Transitive* : $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$
  - Exemple : $>$, a est ancetre de b.

Propriétés mathématiques

- *Transitive* : $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$
  - Exemple : $>$, a est ancetre de b.
  - Representation graphe : si arc (a, b) et arc (a, c) alors arc (a, c).

Propriétés mathématiques

- *Transitive* : $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$
    - Exemple : $>$, a est ancetre de b.
    - Representation graphe : si arc (a, b) et arc (a, c) alors arc (a, c).
- *Non transitive* : R n'est pas transitive $(\exists a, b, c(aRb \wedge bRc \wedge \neg aRc))$

Propriétés mathématiques

- *Transitive* : $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$
  - Exemple : $>$, a est ancetre de b.
  - Representation graphe : si arc (a, b) et arc (a, c) alors arc (a, c).
- *Non transitive* : R n'est pas transitive $(\exists a, b, c(aRb \wedge bRc \wedge \neg aRc))$
  - Exemple : ami de.

Propriétés mathématiques

- *Transitive* : $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$
  - Exemple : $>$, a est ancetre de b.
  - Representation graphe : si arc (a, b) et arc (a, c) alors arc (a, c).
- *Non transitive* : R n'est pas transitive $(\exists a, b, c(aRb \wedge bRc \wedge \neg aRc))$
  - Exemple : ami de.
- *Négativement transitive* : $\neg aRb \wedge \neg bRc \implies \neg aRc, \forall a, b, c \in A$

Propriétés mathématiques

- *Transitive* : $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$
  - Exemple : $>$, a est ancetre de b.
  - Representation graphe : si arc (a, b) et arc (a, c) alors arc (a, c).
- *Non transitive* : R n'est pas transitive $(\exists a, b, c(aRb \wedge bRc \wedge \neg aRc))$
  - Exemple : ami de.
- *Négativement transitive* : $\neg aRb \wedge \neg bRc \implies \neg aRc, \forall a, b, c \in A$
  - Ex: ¿
  - Representation graphe : si arc $\neg(a, b)$ et arc $\neg(a, c)$ alors arc $\neg(a, c)$.

Propriétés mathématiques

- *Fortement complète* : $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$ (implique la reflexivite)

Propriétés mathématiques

- *Fortement complète* : $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$ (implique la reflexivite)
  - Exemple : $\leq$.

Propriétés mathématiques

- *Fortement complète* : $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$ (implique la reflexivite)
  - Exemple : $\leq$.
  - Impact sur la representation matricielle : au moins un 1 dans les cases $M[i, j]$ et $M[j, i]$ pour $i \neq j$ et que des 1 dans la diagonale.

Propriétés mathématiques

- *Fortement complète* : $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$ (implique la reflexivite)
  - Exemple : $\leq$.
  - Impact sur la representation matricielle : au moins un 1 dans les cases $M[i, j]$ et $M[j, i]$ pour $i \neq j$ et que des 1 dans la diagonale.

Propriétés mathématiques

- *Fortement complète* : $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$ (implique la reflexivite)
  - Exemple : $\leq$.
  - Impact sur la representation matricielle : au moins un 1 dans les cases $M[i, j]$ et $M[j, i]$ pour $i \neq j$ et que des 1 dans la diagonale.
- *Complète* : $aRb \vee bRa, \forall a \neq b \in A$

Propriétés mathématiques

- *Fortement complète* : $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$ (implique la reflexivite)
  - Exemple : $\leq$.
  - Impact sur la representation matricielle : au moins un 1 dans les cases $M[i, j]$ et $M[j, i]$ pour $i \neq j$ et que des 1 dans la diagonale.
- *Complète* : $aRb \vee bRa, \forall a \neq b \in A$
  - Exemple : $>$.

Propriétés mathématiques

- *Fortement complète* : $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$ (implique la reflexivite)
  - Exemple : $\leq$.
  - Impact sur la representation matricielle : au moins un 1 dans les cases $M[i, j]$ et $M[j, i]$ pour $i \neq j$ et que des 1 dans la diagonale.
- *Complète* : $aRb \vee bRa, \forall a \neq b \in A$
  - Exemple : $>$.
  - Impact sur la representation matricielle : au moins un 1 dans les cases $M[i, j]$ et $M[j, i]$ pour $i \neq j$.

Structures d'Ordre

Ordre Total :

- Asymétrique, complet et transitif.

Structures d'Ordre

Ordre Total :

- Asymétrique, complet et transitif.
  - Exemple: Classement dans une course

Structures d'Ordre

Ordre Total :

- Asymétrique, complet et transitif.
  - Exemple: Classement dans une course

Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.

Structures d'Ordre

Ordre Total :

- Asymétrique, complet et transitif.
  - Exemple: Classement dans une course

Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.
  - Exemple: Groupes sanguins

Structures d'Ordre

Ordre Total :

- Asymétrique, complet et transitif.
  - Exemple: Classement dans une course

Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.
  - Exemple: Groupes sanguins

Ordre Partiel :

- Réflexive et transitive.

Structures d'Ordre

Ordre Total :

- Asymétrique, complet et transitif.
  - Exemple: Classement dans une course

Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.
  - Exemple: Groupes sanguins

Ordre Partiel :

- Réflexive et transitive.
  - Hiérarchie dans une entreprise

Structures d'Ordre

Ordre Total :

- Asymétrique, complet et transitif.
    - Exemple: Classement dans une course

Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.
    - Exemple: Groupes sanguins

Ordre Partiel :

- Réflexive et transitive.
    - Hiérarchie dans une entreprise

Ordre Faible :

- Réflexive, complet et transitif.

Structures d'Ordre

Ordre Total :

- Asymétrique, complet et transitif.
  - Exemple: Classement dans une course

Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.
  - Exemple: Groupes sanguins

Ordre Partiel :

- Réflexive et transitive.
  - Hiérarchie dans une entreprise

Ordre Faible :

- Réflexive, complet et transitif.
  - Préférences de film ?

Sémantique des Relations Binaires

Sémantique :

- $a \succeq b$: a est au moins aussi bon que b.
- Tout ordre peut être vu comme l'union de deux relations binaires ou plus.
- $\succeq = \succ \cup \sim$
  - $\succ$ étant irréflexive et asymétrique ; $a \succ b \Leftrightarrow (aRb)$ et $\neg(bRa)$
  - $\sim$ étant réflexive et symétrique; $a \sim b \Leftrightarrow (aRb)$ et (bRa).

Représentation numérique des Relation Binaire

Soit un ensemble A et une relation binaire $\succeq \subseteq (A \times A)$:

$\exists f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $a \succeq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ si et seulement si $\succeq$ est un ordre faible.

Représentation numérique des Relation Binaire

Soit un ensemble A et une relation binaire $\geq \subseteq (A \times A)$:

$\exists f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $a \geq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$ si et seulement si $\geq$ est un ordre faible.

Prenons l'exemple de la température:

$A = \{a =$"Très chaud", $b =$"Chaud", $c =$"Froid", $d =$"Très froid"$\}$.
On peut remplacer A par :
$\{f(a) = 30, f(b) = 20,\ f(c) = 10,\ f(d) = 0\}$, ou
$\{f(a) = 3,\ f(b) = 2,\ f(c) = 1,\ f(d) = 0\}$, ou
$\{f(a) = 56,\ f(b) = 22,\ f(c) = 4,\ f(d) = -505\}$.

Programme

Qu'est-ce que la mesure ?

Définition

La mesure est le processus de construction d'une fonction qui associe un ensemble d'"objets" à un ensemble de "mesures".

Origine des Objets et des Mesures

- Les objets proviennent du monde réel.
- Les mesures découlent d'observations empiriques sur certains attributs de ces objets.

Problématique

Le défi consiste à déterminer comment construire cette fonction à partir de telles observations.

Exemples: mesurer des cordes

Preuve Empirique

Soit une preuve empirique indiquant que $e > d > c > b > a$.

Exemples mesurer des cordes

Différentes représentations numériques peuvent refléter cette preuve :

Objet	L1	L2	L3
a	14	10	14
b	15	91	16
c	20	92	17
d	21	93	18
e	28	99	29

Toute transformation croissante de la représentation numérique est compatible avec la preuve empirique.

Exemples: mesurer des cordes

Considérons l'assemblage des objets et l'observation suivante :

$$a + e > c + d > a + b > e > d > c > b > a$$

Représentations Numériques Proposées pour les cordes

Voici trois représentations numériques possibles pour α_1 à α_5 :

Objet	L1	L2	L3
a	14	10	14
b	15	91	16
c	20	92	17
d	21	93	18
e	28	99	29

Exemples: mesurer des cordes

Considérons l'assemblage des objets et l'observation suivante :

$$a + e > c + d > a + b > e > d > c > b > a$$

Représentations Numériques Proposées pour les cordes

Voici trois représentations numériques possibles pour α_1 à α_5 :

Objet	L1	L2	L3
a	14	10	14
b	15	91	16
c	20	92	17
d	21	93	18
e	28	99	29

L1, L2 et L3 capturent l'ordre simple entre a à e, mais L2 ne parvient pas à représenter l'ordre entre les combinaisons d'objets.

Exemples mesurer des cordes: Fixation d'une Séquence Standard

Remarque Importante

En utilisant L1 comme représentation, nous observons que $b + c \sim a + d$, tandis qu'avec L3, nous obtenons $b + c > a + d$. Il est nécessaire de fixer une "séquence standard".

Longueur

Si nous fixons une "longueur standard", une unité de mesure, alors tous les objets seront exprimés en multiples de cette unité.

Conséquence sur la Mesure

En fixant cette unité de mesure, nous établissons une base commune pour toutes les mesures, ce qui permet de garantir la cohérence et la comparabilité des évaluations.

Exemples mesurer des cordes: Créer une Séquence Standard

Détermination de la Valeur de a par Rapport à s

1. Est-ce que $s > a$? NON

Exemples mesurer des cordes: Créer une Séquence Standard

Détermination de la Valeur de a par Rapport à s

1. Est-ce que $s > a$? NON
2. Est-ce que $2s > a$? NON

Exemples mesurer des cordes: Créer une Séquence Standard

Détermination de la Valeur de a par Rapport à s

1. Est-ce que $s > a$? NON
2. Est-ce que $2s > a$? NON
3. Est-ce que $3s > a$? NON

Exemples mesurer des cordes: Créer une Séquence Standard

Détermination de la Valeur de a par Rapport à s

1. Est-ce que $s > a$? NON
2. Est-ce que $2s > a$? NON
3. Est-ce que $3s > a$? NON
4. Est-ce que $4s > a$? OUI

Conclusion

Ainsi, $4s > x > 3s$ définit la valeur relative de a.
Si on choisit $f(s) = 1$, alors $4 > f(a) > 3$.

Exemples mesurer des cordes: Comment Converger vers une Échelle Standard ?

Première Option : Création de Standards Plus Petits

Créer des standards plus petits et répéter l'opération jusqu'à ce que, pour un certain standard s, on obtienne $a \sim s \circ s \circ \ldots \circ s$ (k fois). Alors $f(a) = kf(s)$.

Deuxième Option : Duplication de l'Objet

Faire des copies de l'objet et les concaténer.
Répéter l'opération jusqu'à ce que $a + a + \ldots + a$ (n fois) $\sim s + s + \ldots + s$ (m fois). Alors $nf(a) = mf(s)$.

Exemples mesurer des cordes: Conséquences de la Fixation d'une Séquence Standard

Comparaison avec une Séquence de Standards/Unités

Chaque objet est comparé à une séquence de standards ou d'unités de mesure.

Rapport Constant entre les Objets

Indépendamment de la nature du standard ou de l'unité choisie, le rapport des unités entre deux objets quelconques reste constant.

Échelle de Ratio

Cela définit une échelle de ratio où les valeurs mesurées permettent non seulement de faire des comparaisons d'ordre, mais aussi de calculer des proportions et des différences significatives.

Nouveau Contexte : Mesure de la Différence d'État d'un Système

Observation d'un Système à Deux Moment Différents

Considérons un système observé à un moment t_1 puis au moment t_2. Nous voulons représenter la différence entre les deux états. Quel est le standard ici ?

Établissement d'une Origine : Exemple de la Température

- Il est nécessaire d'établir une origine par rapport à laquelle mesurer les différences.
- On établit arbitrairement comme standard un état du système que l'on peut observer objectivement : le point de congélation de l'eau.

Établissement d'une Séquence Standard

- Il est également nécessaire d'établir une séquence standard pour la distance.
- On détermine un autre état observable objectivement : le point d'ébullition de l'eau t_b. La température où l'eau bout : t_b.
- Le standard $\frac{t_b - t_i}{100}$ est notre unité de mesure.

Nouveau Contexte : Mesure de la Différence d'État d'un Système

Constante des Ratios entre les Différences

Indépendamment de l'origine et de l'unité choisie, le ratio entre les différences d'unités reste constant.

Échelle d'Intervalle

Cela définit une échelle d'intervalle où les valeurs sont comparables en termes de distances relatives.

Résumé sur les Types d'Échelles

Échelles Ordinales :

Toute transformation monotone non décroissante de l'échelle fournit la même information concernant les observations empiriques et l'ordre entre elles.

Échelles d'Intervalle :

Toute transformation affine (du type $\alpha x + \beta$) de l'échelle fournit la même information concernant les observations empiriques et l'ordre entre elles.

Échelles de Rapport :

Toute transformation proportionnelle (du type αx) de l'échelle fournit la même information concernant les observations empiriques et l'ordre entre elles.

Signifiance

Chaque type d'échelle autorise un certain type de transformations admissibles qui ne modifient pas arbitrairement les observations empiriques.

Échelle Ordinale :

$$f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow \Phi(f(x)) \geq \Phi(f(y))$$

Échelle d'Intervalle :

$$\frac{f(x)-f(y)}{f(z)-f(w)} = k \Leftrightarrow \frac{\Phi(f(x))-\Phi(f(y))}{\Phi(f(z))-\Phi(f(w))} = k$$

Échelle de Rapport :

$$\frac{f(x)}{f(y)} = k \Leftrightarrow \frac{\Phi(f(x))}{\Phi(f(y))} = k$$

En fonction des transformations admissibles on distingue $\neq$ types d'échelles

Transformations admissibles	Type d'échelle	Exemples
$\phi(x) = x$	Echelle absolue	Un nombre d'éléments indivisibles, Probabilités
$\phi(x) = \alpha x,\ \alpha > 0$	Echelle de rapport	Masse, température en Kelvin, intervalles de temps,...
$\phi(x) = \alpha x + \beta,\ \alpha > 0$	Echelle d'intervalle	Température en degrées Celsius, date (relation plus tard que), ...
$x \geq y$ ssi $\phi(x) \geq \phi(y)$	Echelle ordinale	Préférences ?, certains indices de qualité de l'air, ...
ϕ injective	Echelle nominale	Codes des UEs, numéros sur les maillots d'une équipe, ...

On cherche à se ramener au type d'échelle le plus strict possible pour définir le phénomène empirique observé.

Affirmations significatives

Affirmations significatives

En théorie classique de la mesure, une affirmation est déclarée significative si sa valeur de vérité reste inchangée lorsque des transformations admissibles sont appliquées aux échelles utilisées dans l'affirmation.

Exemple : La Course (temps en secondes)

La course

$$\text{Équipe A} = \{a; d; f; j\} \text{ et Équipe B} = \{b; c; e; g; h; i\}$$

Athlète	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Temps (s)	43.5	43.7	44.2	45	47	48	52	52.1	52.5	55

Sur la base de ces chiffres, les affirmations suivantes sont-elles valides (vrai ou faux) ?

1. Le temps moyen de l'Équipe B est supérieur à celui de l'Équipe A;
2. Le deuxième meilleur temps (le plus bas) dans l'Équipe B est inférieur au deuxième meilleur temps dans l'Équipe A.

Sont elles significatives?

Exemple : La Course (temps en secondes)

La course

Équipe A $=$ {a; d; f; j} et Équipe B $=$ {b; c; e; g; h; i}

Athlète	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
Temps (min)	0.725	0.728	0.737	0.75	0.783	0.8	0.867	0.868	0.875	0.917

Toutes les affirmations restent valides.

Remarque Générale : Comme une durée est entièrement définie par le choix d'une unité (l'origine étant "naturelle"), toute multiplication par une constante positive devrait être possible sans changer les conclusions.

La météo

Températures observées (en degrés Celsius)

Les températures (en C^o) ont été mesurées à midi dans deux pays européens, pendant respectivement 10 et 8 jours consécutifs.

J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	18	16	15	14	14	15	13	15	17	18
b	14	12	13	15	14	13	15	16	-	-

Sur la base de ces chiffres, les affirmations suivantes sont-elles valables (vraies ou fausses) ?

- La température moyenne dans le pays a est supérieure à la température moyenne dans le pays b.
- La température la plus élevée du pays a est plus de 1,5 fois supérieure à la température la plus basse du pays b.
- La somme des trois températures les plus élevées du pays a est supérieure à la somme des quatre températures les plus basses du pays b.

Sont elles significative ?

La Météo

Températures observées (en degrés Celsius et Fahrenheit)

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ville A (°C)	18	16	15	14	14	15	13	15	17	18
Ville B (°C)	14	12	13	15	14	13	15	16	-	-

Jour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ville A (°F)	64.4	60.8	59	57.2	57.2	59	55.4	59	62.6	64.4
Ville B (°F)	57.2	53.6	55.4	59	57.2	55.4	59	60.8	-	-

Une échelle de température est complètement définie lorsque l'origine et l'unité sont fixées. Toute transformation de la forme $\alpha x + \beta$ (avec $\alpha > 0$) devrait être possible sans changer les conclusions. Or, les conclusions des affirmations (2) et (3) changent.

Les sondages

La réforme

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

	Avant	Après
Très défavorable (TD)	25	30
Défavorable (D)	20	30
Favorable (F)	45	25
Très favorable (TF)	10	15

$L_1 = f(TD) = 1, f(D) = 2, f(F) = 3, f(TF) = 4$
"En moyenne, le niveau de satisfaction à baissé": $E(f(Av)) = 2.4$ $E(f(Ap)) = 2.25$
On a $E(f(Av)) > E(f(Ap))$

La réforme

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

	Avant	Après
Très défavorable (TD)	25	30
Défavorable (D)	20	30
Favorable (F)	45	25
Très favorable (TF)	10	15

$L_1 = f(TD) = 1, f(D) = 2, f(F) = 3, f(TF) = 4$

“En moyenne, comment la satisfaction à évolué ”:

La réforme

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

	Avant	Après
Très défavorable (TD)	25	30
Défavorable (D)	20	30
Favorable (F)	45	25
Très favorable (TF)	10	15

Est ce que $L_2 = f'(TD) = 1, f'(D) = 2, f'(F) = 3, f'(TF) = 7$ est une bonne échelle?
"En moyenne, le niveau de satisfaction est stable": $E(f'(Av)) = 2.7$ $E(f'(Ap)) = 2.7$
On a $E(f'(Av)) = E(f'(Ap))$

La réforme

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

	Avant	Après
Très défavorable (TD)	25	30
Défavorable (D)	20	30
Favorable (F)	45	25
Très favorable (TF)	10	15

Est ce que $L_3 = f''(TD) = 1, f''(D) = 2, f''(F) = 3, f''(TF) = 10$ est une bonne échelle?
"En moyenne, le niveau de satisfaction est stable": $E(f''(Av)) = 3 \; E(f''(Ap)) = 3.25$
On a $E(f''(Av)) < E(f''(Ap))$

Les sondages

La réforme

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

	Avant	Après
Très défavorable (TD)	25	30
Défavorable (D)	20	30
Favorable (F)	45	25
Très favorable (TF)	10	15

On peut dire :

$$médiane(Av) > médiane(Av)$$
$$Q_1(Av) = Q_1(Ap)$$
$$Q_3(Av) = Q_3(Ap)$$