Théorie de la mesure: Fonctions d'utilité.

Nicolas Fayard

8 Février 2023

Fonctions d'utilité

Idée

- Interroger un individu sur des choix simples
- Modéliser son comportement dans un modèle mathématique
- Utiliser le modèle pour des cas plus compliqués

Loterie simple sur X

- $l = (x_1, p_l(x_1); x_2, p_l(x_2); \cdots ; x_n, p_l(x_n))$
- $p_l(x_i)$: probabilité d'obtenir la conséquence x_i avec la loterie l.

Un décideur est indiffèrent à deux loteries SSI:

$$l \sim l' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} u(x) p_l(x) = \sum_{x \in X} u(x) p_{l'}(x)$$

Fonction d'utilité

Fonction d'utilité

- $u : X \to \mathbb{R}$.
- $u(x)$ est l'"utilité" de la conséquence $x \in X$.
- La fonction u est propre à un individu.

Avantages:

- Simple
- Délégable
- Prend en compte les caractéristiques individuelles
- Justification claire (axiomes)

Axiome 1

Rangement

Pour tout l et $l' \in L(X)$ l'une ou moins des deux propositions suivantes est vraie:

- l est préféré ou indiffèrent à l' ($l \succeq l'$)
- l' est préféré ou indiffèrent à l ($l' \succeq l$)

Et, $\succeq$ est transitive:

$$l \succeq l' \text{ et } l' \succeq l'' \Rightarrow l \succeq l''$$

$\forall l, l', l'' \in L(X)$

A1 implique que $\sim$ et $\succ$ sont transitive.

Exemple d'indifférence non transitive.

On cherche à représenter les préférences d'un décideur sur le nombre de grain de sucre à mettre dans son café.
On sait que:

$$0 \sim 1,\ 1 \sim 2,\ \cdots,\ 998 \sim 999,\ 999 \sim 1,000$$

.
Donc d'après la transitivité de l'indifférence: $0 \sim 1,000$

Exemple de préférence non transitive (effet de seuil)

Choix d'un menu:

1	Plat	15e
2	Entré + Plat	20e
3	Entré + Plat + Dessert	23e
4	Entré + Plat + Dessert + Café	25e

Un décideur peut:

$2 \succ 1, \ 3 \succ 2, \ 4 \succ 3$ mais $1 \succ 4$.

Axiome 2

Monotonie

Si $(x,1) \succ (y,1)$ alors

$$(x,p;y,1-p) \succ (x,q;y,1-q) \Leftrightarrow p > q (\forall x,y \in X)$$

Interprétation

- On aime le gain
- Pas de superstition

Axiome 3

Continuité

Si $(x,1) \succ (y,1) \succ (z,1)$ alors il existe une probabilité $p]0;1[$ telle que :

$$(y,1) \sim (x,p;z,1-p)$$

Remarque

L'axiome de monotonie implique que cette probabilité est unique.

Axiome 3

Exemple

- x : Gagner 2 centimes
- y : Gagner 1 centime
- z : Mourir

$$(x,1) \succ (y,1) \succ (z,1)$$

Quel valeur de p pour avoir:

$$(y,1) \sim (x,p;z,1-p)$$

$p = 0.9999999...?$

Axiomes 4

Indépendance

$$L_1 = (l_1, p_1; l_2, p_2; \cdots l_k, p_k)$$

$$L_2 = (l_1', p_1; l_2, p_2; \cdots l_k, p_k)$$

Si $l_1 \sim l_1'$ alors $L_1 \sim L_2$ et
Si $l_1 \succ l_1'$ alors $L_1 \succ L_2$.

Conséquences des axiomes

Soit une relation de préférence $\succeq$ sur $L(X)$.
Cette relation vérifie les axiomes $A1 - A4$ si et seulement si il existe une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ telle que :

$$l \succeq l' \Leftrightarrow \sum_{x \in X} u(x) p_l(x) \geq \sum_{x \in X} u(x) p_{l'}(x)$$

u est une Fonction d'utilité de von Neumann–Morgenstern (VNM)

Conséquences des axiomes

Théorème (Unicité)

S'il existe deux fonctions u et v vérifiant *VNM* alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$ tels que :

$$v(x) = \alpha u(x) + \beta, \quad \forall x \in X$$

Interprétation

- Les vNM sont des échelles d'intervalles.
- Les préférences se mesurent comme la température.

Encodage d'une fonction d'utilité

Cas général;

$$u(x) = pu(z) + (1 - p)u(w)$$

Il y a 4 inconnues, il faut donc en fixer 3 et trouver l'indifférence sur la quatrième.

Hypothèses

Soit $X = \mathbb{R}$ des sommes d'argent
On pose $u(0) = 0$ et $u(1,000) = 1$.

Encodage d'une fonction d'utilité

Quel valeur de x pour avoir: $(x, 1) \sim (1000, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x) = u(1000) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.5$.

Encodage d'une fonction d'utilité

Quel valeur de x pour avoir: $(x, 1) \sim (1000, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x) = u(1000) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.5$.

Quel valeur de y pour avoir: $(y, 1) \sim (x, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(y) = u(x) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.

Encodage d'une fonction d'utilité

Quel valeur de x pour avoir: $(x, 1) \sim (1000, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x) = u(1000) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.5$.

Quel valeur de y pour avoir: $(y, 1) \sim (x, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(y) = u(x) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.

Quel valeur de z pour avoir: $(z, 1) \sim (1000, 0.5; x, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(z) = u(1000) \times 0.5 + u(x) \times 0.5 = 0.75$.

Encodage d'une fonction d'utilité

Quel valeur de x pour avoir: $(x, 1) \sim (1000, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x) = u(1000) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.5$.

Quel valeur de y pour avoir: $(y, 1) \sim (x, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(y) = u(x) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.

Quel valeur de z pour avoir: $(z, 1) \sim (1000, 0.5; x, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(z) = u(1000) \times 0.5 + u(x) \times 0.5 = 0.75$.

Contrôle:

- On doit avoir $(x, 1) \sim (y, 0.5; z, 0.5)$
- Sinon : revenir en arrière.

Exemple

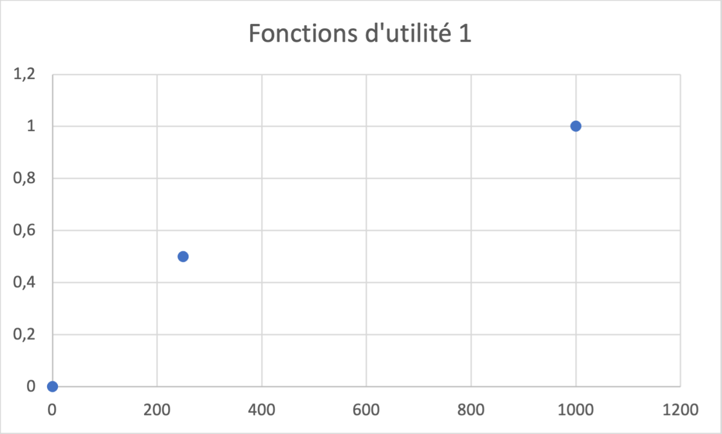
Hypothèses

Soit $X = \mathbb{R}$ des sommes d'argent
On pose $u(0) = 0$ et $u(1,000) = 1$.

Quel valeur de x_4 pour avoir: $(x_4, 1) \sim (1000, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_4) = u(1000) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.5$.
Réponse: $x_4 = \mathbf{250}$

Exemple

x	0	250	1000
$v(x)$	0	0.5	1



Frame Title

x	0	250	1000
$v(x)$	0	0.5	1

Quel valeur de x_2 pour avoir: $(x_2, 1) \sim (\mathbf{250}, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_2) = u(\mathbf{250}) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.
Réponse: x_2= **100**

Frame Title

x	0	250	1000
$v(x)$	0	0.5	1

Quel valeur de x_2 pour avoir: $(x_2, 1) \sim (\mathbf{250}, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_2) = u(\mathbf{250}) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.
Réponse: $x_2 = \mathbf{100}$

Quel valeur de x_6 pour avoir: $(x_6, 1) \sim (1000, 0.5; \mathbf{250}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_6) = u(1000) \times 0.5 + u(\mathbf{250}) \times 0.5 = 0.75$.
Réponse: $x_6 = \mathbf{500}$

Frame Title

x	0	250	1000
$v(x)$	0	0.5	1

Quel valeur de x_2 pour avoir: $(x_2, 1) \sim (\mathbf{250}, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_2) = u(\mathbf{250}) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.25$.
Réponse: $x_2 = \mathbf{100}$

Quel valeur de x_6 pour avoir: $(x_6, 1) \sim (1000, 0.5; \mathbf{250}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_6) = u(1000) \times 0.5 + u(\mathbf{250}) \times 0.5 = 0.75$.
Réponse: $x_6 = \mathbf{500}$

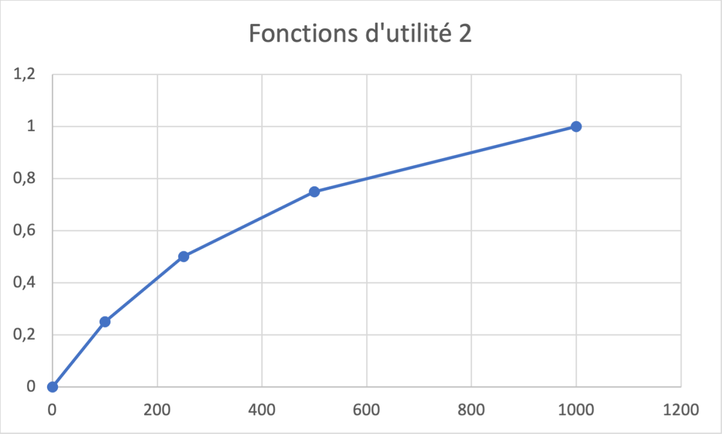
Contrôle:

- On doit avoir $(250, 1) \sim (100, 0.5; 500, 0.5)$

x	0	100	250	500	1000
$v(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1

Exemple

x	0	100	250	500	1000
$v(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1



Exemple

x	0	**100**	250	500	1000
$v(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_1 pour avoir: $(x_1, 1) \sim (\mathbf{100}, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_1) = u(100) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.125$.
Réponse: $x_1 = \mathbf{40}$

Exemple

x	0	**100**	250	500	1000
$v(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_1 pour avoir: $(x_1, 1) \sim (\mathbf{100}, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_1) = u(100) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.125$.
Réponse: $x_1 = \mathbf{40}$

Quel valeur de x_3 pour avoir: $(x_3, 1) \sim (\mathbf{100}, 0.5; \mathbf{250}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_3) = u(\mathbf{100}) \times 0.5 + u(\mathbf{250}) \times 0.5 = 0.375$.
Réponse: $x_3 = \mathbf{170}$

Exemple

x	0	$\mathbf{100}$	250	500	1000
$v(x)$	0	0.25	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_1 pour avoir: $(x_1, 1) \sim (\mathbf{100}, 0.5; 0, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_1) = u(100) \times 0.5 + u(0) \times 0.5 = 0.125$.
Réponse: $x_1 = \mathbf{40}$

Quel valeur de x_3 pour avoir: $(x_3, 1) \sim (\mathbf{100}, 0.5; \mathbf{250}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_3) = u(\mathbf{100}) \times 0.5 + u(\mathbf{250}) \times 0.5 = 0.375$.
Réponse: $x_3 = \mathbf{170}$

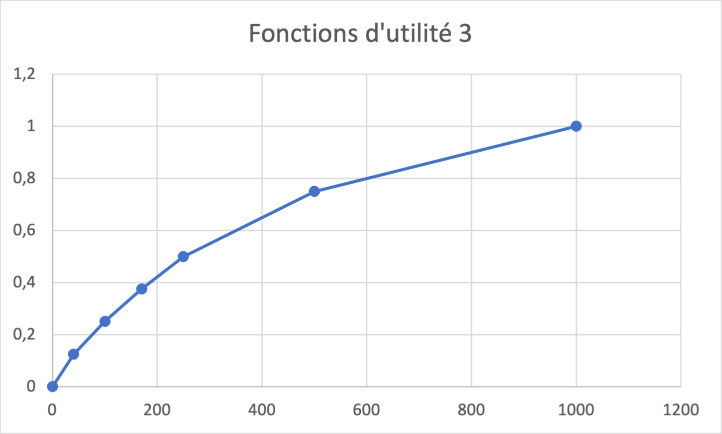
Contrôle:

- On doit avoir $(100, 1) \sim (40, 0.5; 170, 0.5)$

x	0	40	100	170	250	500	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.75	1

Exemple

x	0	40	100	170	250	500	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.75	1



Exemple

x	0	40	100	170	250	**500**	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_5 pour avoir: $(x_5, 1) \sim (250, 0.5; \mathbf{500}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_5) = u(250) \times 0.5 + u(\mathbf{500}) \times 0.5 = 0.0.625$.
Réponse: $x_1 = \mathbf{350}$

Exemple

x	0	40	100	170	250	**500**	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_5 pour avoir: $(x_5, 1) \sim (250, 0.5; \mathbf{500}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_5) = u(250) \times 0.5 + u(\mathbf{500}) \times 0.5 = 0.0.625.$
Réponse: $x_1 = \mathbf{350}$

Quel valeur de x_7 pour avoir: $(x_7, 1) \sim (\mathbf{500}, 0.5; 1000, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_3) = u(\mathbf{500}) \times 0.5 + u(1000) \times 0.5 = 0.875.$
Réponse: $x_7 = \mathbf{700}$

Exemple

x	0	40	100	170	250	**500**	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.75	1

Quel valeur de x_5 pour avoir: $(x_5, 1) \sim (250, 0.5; \mathbf{500}, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_5) = u(250) \times 0.5 + u(\mathbf{500}) \times 0.5 = 0.0.625$.
Réponse: $x_1 = \mathbf{350}$

Quel valeur de x_7 pour avoir: $(x_7, 1) \sim (\mathbf{500}, 0.5; 1000, 0.5)$?
On sait que $1 \times u(x_3) = u(\mathbf{500}) \times 0.5 + u(1000) \times 0.5 = 0.875$.
Réponse: $x_7 = \mathbf{700}$

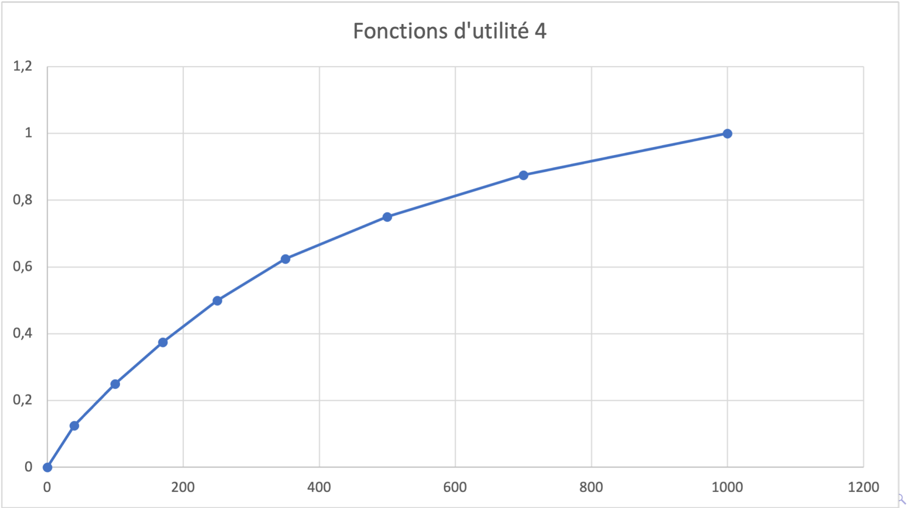
Contrôle:

- On doit avoir $(500, 1) \sim (350, 0.5; 700, 0.5)$

x	0	40	100	170	250	350	500	700	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1

Exemple

x	0	40	100	170	250	350	500	700	1000
$v(x)$	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1



Encodage d'une fonction d'utilité

Conseils:

- Utiliser des probabilités simples : 1/2, 1/3, 1/4
- Interroger par encadrements successifs
- Vérifications indispensables

Limites

- Effet du contexte
- Effet de référence
- Paradoxe d'Allais

Difficultés - Effet du contexte

Expérience

- L_1: vous courrez le risque de perdre $1,000\$$ avec $p = 1/100$
- L_2: vous pouvez vous assurez pour 10\$ contre ce risque.
- L_3: vous perdez 10\$ avec certitude mais vous ne supportez plus de risque.

Résultats

- 80% : $L_2 \succ L_1$
- 56% : $L_3 \succ L_1$

Difficultés - Effet de référence

Présentation 1 : diminution du nombre de mort

Niveau actuel de mortalité = 500 morts/an:

- Choix A : diminuer ce nombre de 500 (1/2) ou de 0 (1/2)
- Choix B : diminuer ce nombre de 400 (1/2) ou de 100 (1/2)

majorité des médecins : $B \succ A$

Présentation 2 : nombre de mort

- Choix A : nombre de mort 500 (1/2) ou 0 (1/2)
- Choix B : nombre de mort 400 (1/2) ou de 100 (1/2)

majorité des médecins : $A \succ B$

Paradoxe d'Allais

Choix 1:

A : $(10000\$, 1)$
B : $(15000\$, 0.9; 0\$, 0.1)$
La majorité des personnes préfèrent A à B.

Choix 2:

C : $(10000\$, 0.1; 0\$0.9)$
D : $(15000\$, 0.09; 0\$, 0.91)$
La majorité des personnes préfèrent D à C.

Paradoxe d'Allais

Choix 1:

$A : (10000\$, 1)$
$B : (15000\$, 0.9; 0\$, 0.1)$
La majorité des personnes préfèrent A à B.

Choix 2:

$C : (10000\$, 0.1; 0\$0.9)$
$D : (15000\$, 0.09; 0\$, 0.91)$
La majorité des personnes préfèrent D à C.

MAIS
$C : (A, 0.1; 0\$, 0.9)$
$D : (B, 0.1; 0\$, 0.9)$
$\rightarrow$ Violation de l'axiome d'indépendance.

Livres

- Bouyssou D., Marchant Th., Pirlot M., Tsoukiàs A., Vincke Ph., Evaluation and Decision Models: stepping stones for the analyst, Springer Verlag, Berlin, 2006.
- Bouyssou D., Marchant Th., Perny P., Pirlot M., Tsoukiàs A., Vincke Ph., Evaluation and Decision Models: a critical perspective, Kluwer Academic, Dordrecht, 2000.
- Keeney R.L., Raiffa H., Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs, J. Wiley, New York, 1976.
- Roberts F.S., Measurement theory, with applications to Decision Making, Utility and the Social Sciences, Addison-Wesley, Boston, 1979.