

L'IDH

Decision Analysis

Nicolas Fayard

February 6, 2026

Quel est le problème?

Quel est le problème ?

- Évaluer le développement humain de pays
- Comparer le développement humain de pays

Pourquoi doit on résoudre ce problème ?

Qui utilise les résultats ?

Comment modéliser le problème?

Comment modéliser le problème?

- Ne pas faire de modélisation à partir de données.

Comment modéliser le problème?

- Ne pas faire de modélisation à partir de données.
- Ne pas faire de modélisation sur les alternatives.

Comment modéliser le problème?

- Ne pas faire de modélisation à partir de données.
- Ne pas faire de modélisation sur les alternatives.

Modéliser sur les valeurs.

Modèle hiérarchique

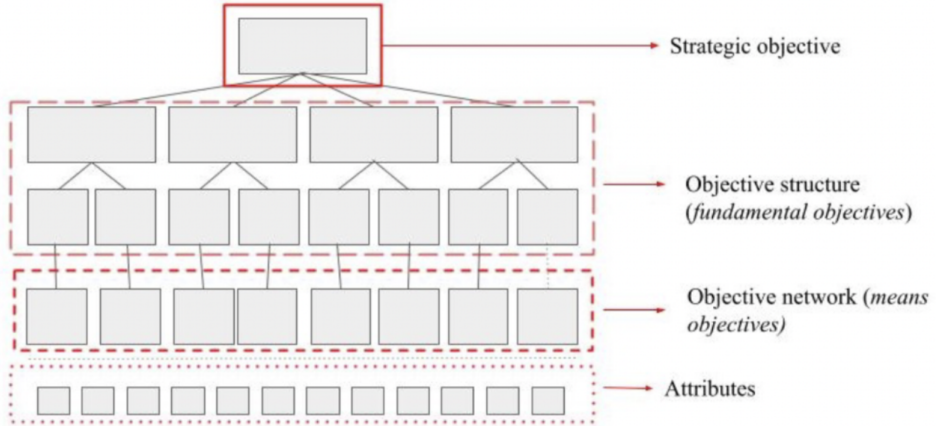
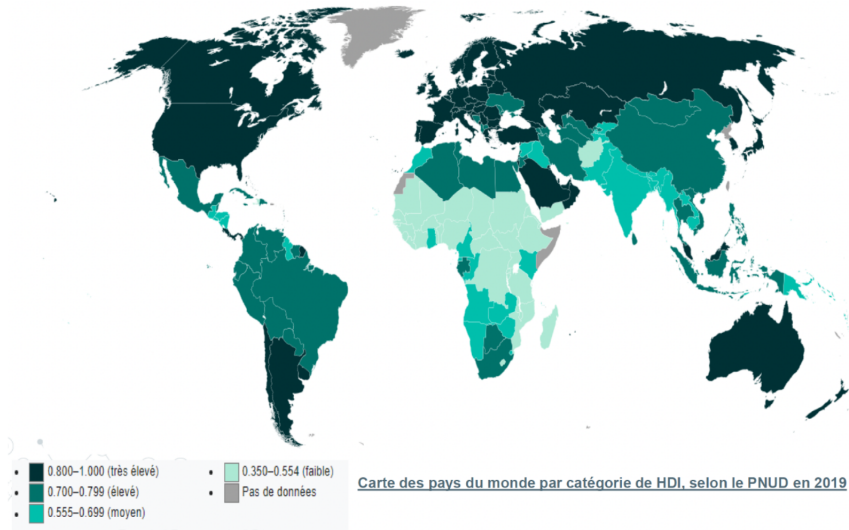


Figure: Modèle hiérarchique

L'IDH a été créé pour souligner que les personnes et leurs capacités devraient être le critère ultime d'évaluation du développement d'un pays, et non la seule croissance économique.

L'IDH peut également être utilisé pour remettre en question les choix politiques nationaux, en demandant comment deux pays ayant le même niveau de RNB par habitant peuvent aboutir à des résultats différents en matière de développement humain.

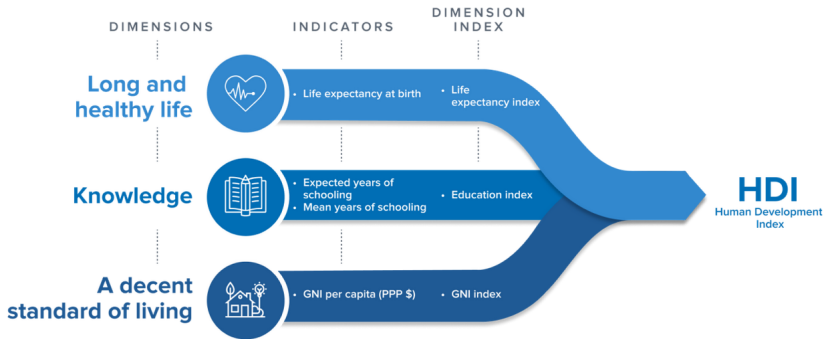
- United Nations Development Programme



Carte des pays du monde par catégorie de HDI, selon le PNUD en 2019

Indice de Développement Humain

Trois dimensions “d’importance égale” :



Si l'on veut comparer deux pays...

Pourquoi ne pas utiliser la dominance de Pareto ?

$$x > y \leftrightarrow u_i(x) \geq u_i(y), \quad \forall i$$

Il y a 17766 comparaisons par paire (189 pays) et 74% d'entre elles sont en dominance de Pareto !

Indice de Développement Humain

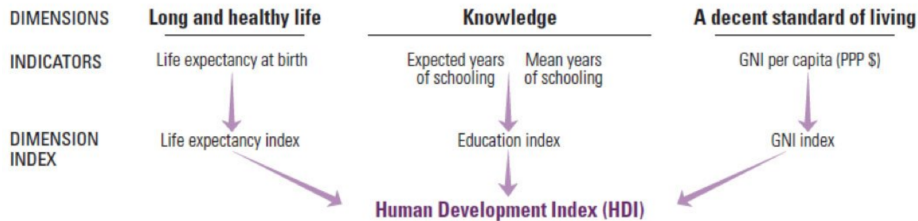


Figure: Indice de Développement Humain

HI = Health Index

EI = Education Index

II = Income Index

Fonction d'agrégation : Moyenne géométrique :

$$IDH = \sqrt[3]{HI \times EI \times II}$$

Les indices sont normalisés entre 0 et 1.

$$\text{Indice de dimension} = \frac{\text{Valeur actuelle} - \text{Valeur minimale}}{\text{Valeur maximale} - \text{Valeur minimale}}$$

Les indices sont normalisés entre 0 et 1.

$$\text{Indice de dimension} = \frac{\text{Valeur actuelle} - \text{Valeur minimale}}{\text{Valeur maximale} - \text{Valeur minimale}}$$

- Valeur minimale : "zéros naturels", niveau minimal pour qu'une société puisse subsister.
- Valeur maximale : objectif.

$$HI = \frac{\text{Espérance de vie à la naissance} - 20}{85 - 20}$$

$$HI = \frac{\text{Espérance de vie à la naissance} - 20}{85 - 20}$$

Plus précisément :

$$HI = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\text{Espérance de vie à la naissance} - 20}{85 - 20} < 0 \\ 1 & \text{si } \frac{\text{Espérance de vie à la naissance} - 20}{85 - 20} > 1 \\ \frac{\text{Espérance de vie à la naissance} - 20}{85 - 20} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

$$EI = \frac{SA + SCh}{2}$$

$$EI = \frac{SA + SCh}{2}$$

SA = années de scolarité normalisées pour les adultes âgés de 25 ans.

$$SA = \frac{x - 0}{15 - 0}$$

(Si $\frac{x-0}{15-0} > 1 \rightarrow SA = 1$, si $\frac{x-0}{15-0} < 0 \rightarrow SA = 0$)

$$EI = \frac{SA + Sch}{2}$$

SA = années de scolarité normalisées pour les adultes âgés de 25 ans.

$$SA = \frac{x - 0}{15 - 0}$$

(Si $\frac{x-0}{15-0} > 1 \rightarrow SA = 1$, si $\frac{x-0}{15-0} < 0 \rightarrow SA = 0$)

Sch = années de scolarisation prévues normalisées pour les enfants en âge d'être scolarisés.

$$Sch = \frac{x - 0}{18 - 0}$$

(Si $\frac{x-0}{18-0} > 1 \rightarrow Sch = 1$, si $\frac{x-0}{18-0} < 0 \rightarrow Sch = 0$)

$$II = \frac{\ln(RNB) - \ln(100)}{\ln(75000) - \ln(100)}$$

$$\ln(100) = 4.6, \ln(75000) = 11.22$$

$$(\text{Si } \frac{\ln(RNB) - \ln(100)}{\ln(75000) - \ln(100)} > 1 \rightarrow II = 1, \frac{\ln(RNB) - \ln(100)}{\ln(75000) - \ln(100)} < 0 \rightarrow II = 0)$$

Exemple :

Dimension	Indicator	Minimum	Maximum
Health	Life expectancy (years)	20	85
Education	Expected years of schooling (years)	0	18
	Mean years of schooling (years)	0	15
Standard of living	GNI per capita (2017 PPP\$)	100	75,000

Exemple :

Example: Sudan

Indicator	Value
Life expectancy at birth (years)	65.3
Expected years of schooling (years)	7.9
Mean years of schooling (years)	3.8
Gross national income per capita (2017 PPP \$)	3,829

Note: Values are rounded.

Exemple :

Example: Sudan

Indicator	Value
Life expectancy at birth (years)	65.3
Expected years of schooling (years)	7.9
Mean years of schooling (years)	3.8
Gross national income per capita (2017 PPP \$)	3,829

Note: Values are rounded.

$$\text{Health Index} = \frac{65.3 - 20}{85 - 20} = 0.6971$$

Exemple :

Example: Sudan

Indicator	Value
Life expectancy at birth (years)	65.3
Expected years of schooling (years)	7.9
Mean years of schooling (years)	3.8
Gross national income per capita (2017 PPP \$)	3,829

Note: Values are rounded.

$$\text{Health Index} = \frac{65.3-20}{85-20} = 0.6971$$

$$SA = \frac{3.8-0}{15-0} = 0.2513$$

Exemple :

Example: Sudan

Indicator	Value
Life expectancy at birth (years)	65.3
Expected years of schooling (years)	7.9
Mean years of schooling (years)	3.8
Gross national income per capita (2017 PPP \$)	3,829

Note: Values are rounded.

$$\text{Health Index} = \frac{65.3-20}{85-20} = 0.6971$$

$$SA = \frac{3.8-0}{15-0} = 0.2513$$

$$SCh = \frac{7.9-0}{18-0} = 0.4380$$

Exemple :

Example: Sudan

Indicator	Value
Life expectancy at birth (years)	65.3
Expected years of schooling (years)	7.9
Mean years of schooling (years)	3.8
Gross national income per capita (2017 PPP \$)	3,829

Note: Values are rounded.

$$\text{Health Index} = \frac{65.3-20}{85-20} = 0.6971$$

$$SA = \frac{3.8-0}{15-0} = 0.2513$$

$$SCh = \frac{7.9-0}{18-0} = 0.4380$$

$$\text{Education Index} = \frac{0.4380+0.2513}{2} = 0.3447$$

Exemple :

Example: Sudan

Indicator	Value
Life expectancy at birth (years)	65.3
Expected years of schooling (years)	7.9
Mean years of schooling (years)	3.8
Gross national income per capita (2017 PPP \$)	3,829

Note: Values are rounded.

$$\text{Health Index} = \frac{65.3-20}{85-20} = 0.6971$$

$$SA = \frac{3.8-0}{15-0} = 0.2513$$

$$SCh = \frac{7.9-0}{18-0} = 0.4380$$

$$\text{Education Index} = \frac{0.4380+0.2513}{2} = 0.3447$$

$$\text{Income index} = \frac{\ln(3,829) - \ln(100)}{\ln(75,000) - \ln(100)} = 0.5506$$

Exemple :

Example: Sudan

Indicator	Value
Life expectancy at birth (years)	65.3
Expected years of schooling (years)	7.9
Mean years of schooling (years)	3.8
Gross national income per capita (2017 PPP \$)	3,829

Note: Values are rounded.

$$\text{Health Index} = \frac{65.3-20}{85-20} = 0.6971$$

$$SA = \frac{3.8-0}{15-0} = 0.2513$$

$$SCh = \frac{7.9-0}{18-0} = 0.4380$$

$$\text{Education Index} = \frac{0.4380+0.2513}{2} = 0.3447$$

$$\text{Income index} = \frac{\ln(3,829) - \ln(100)}{\ln(75,000) - \ln(100)} = 0.5506$$

$$\text{Human Development Index} = (0.6971 \cdot 0.3447 \cdot 0.5506)^{\frac{1}{3}} = 0.510$$

$$HI = \frac{\text{Espérance de vie à la naissance} - 20}{85 - 20}$$

Avant $\min = 25$ et $\max = 85$.

Quelle différence ?

Exemple : $x = 70$ et $y = 80$

$$HI = \frac{\text{Espérance de vie à la naissance} - 20}{85 - 20}$$

Avant $min = 25$ et $max = 85$.

Quelle différence ?

Exemple : $x = 70$ et $y = 80$

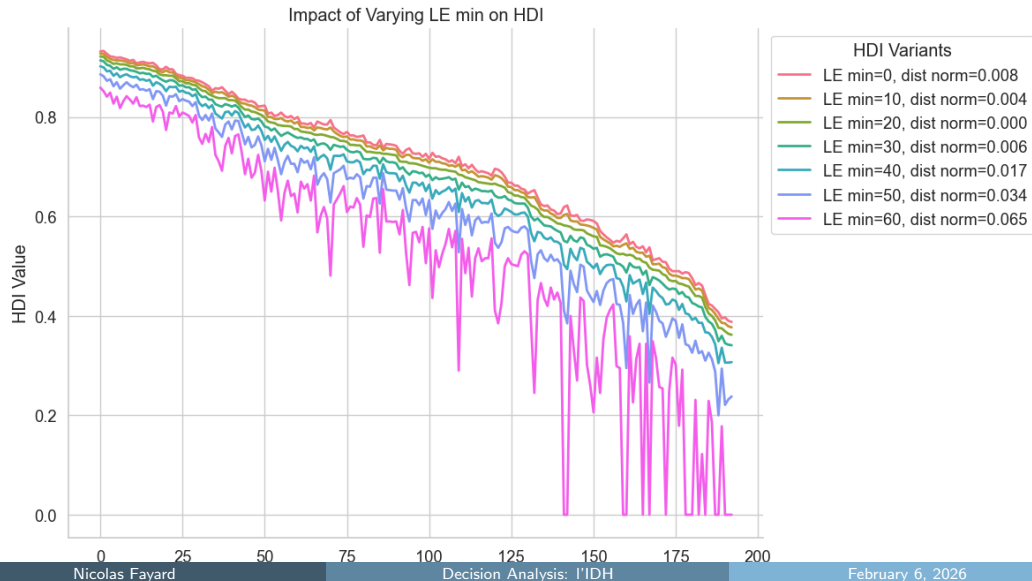
- Maintenant ($min = 20$, $max = 85$)

$HI(x) = \frac{70-20}{85-20} = 0.769$ et $HI(y) = \frac{80-20}{85-20} = 0.923$. La différence est de 0.154.

- Avant ($min = 25$, $max = 85$)

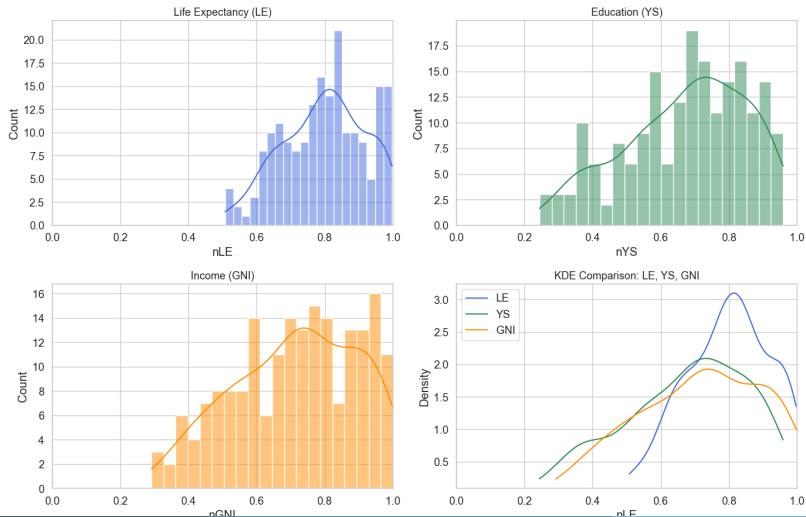
$HI(x) = \frac{70-25}{85-25} = 0.75$ et $HI(y) = \frac{80-25}{85-25} = 0.917$. La différence est de 0.167.

Health Index - le choix des min & max



Health Index - le choix des min - max

Distributions and Comparison of Normalized Dimensions



Justification du choix du min et du max par l'UNDP :

- *La justification pour placer le zéro naturel de l'espérance de vie à 20 ans est basée sur la preuve historique qu'aucun pays au 20ème siècle n'a eu une espérance de vie inférieure à 20 ans.*
- *L'espérance de vie maximale est fixée à 85 ans, un objectif réaliste pour de nombreux pays au cours des 30 dernières années. Grâce à l'amélioration constante des conditions de vie et aux progrès de la médecine, l'espérance de vie est déjà très proche de 85 ans dans plusieurs économies : 84,9 ans à Hong Kong, Chine (région administrative spéciale) et 84,6 ans au Japon.*

Avant 1994, le min et le max étaient déterminés par la valeur courante du min et du max dans le monde.

Exemple :

	A	B	C	D
Espérance de vie	80	70	82	62

Avant 1994, le min et le max étaient déterminés par la valeur courante du min et du max dans le monde.

Exemple :

	A	B	C	D
Espérance de vie	80	70	82	62

$$HI = \frac{\text{Espérance de vie} - 62}{82 - 62}$$

Avant 1994, le min et le max étaient déterminés par la valeur courante du min et du max dans le monde.

Exemple :

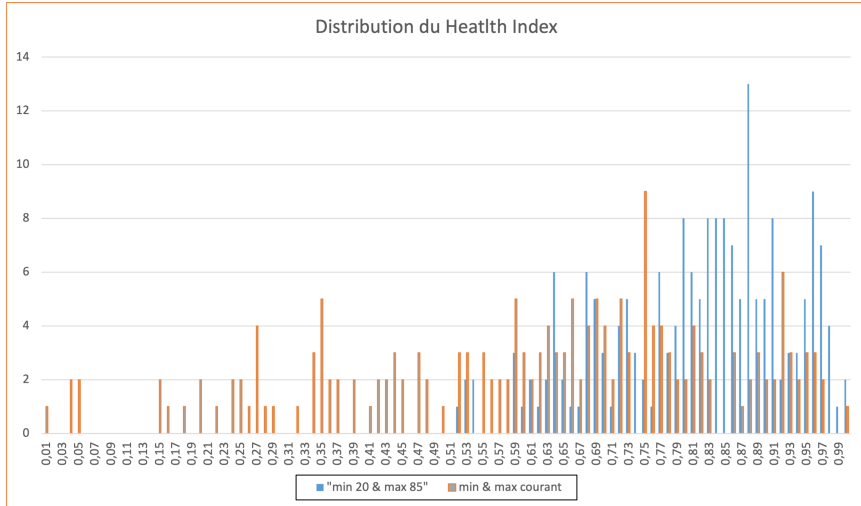
	A	B	C	D
Espérance de vie	80	70	82	62

$$HI = \frac{\text{Espérance de vie} - 62}{82 - 62}$$

HI	A	B	C	D
	0.9	0.4	1	0

Health Index - le choix des min & max - valeur courante

Appliqué aux valeurs de 2020 :



Deux problèmes principaux avec l'approche du min & max courants :

- Indépendance des options non pertinentes.
- Monotonie dans les scores.

Indépendance des options non pertinentes :

Le classement relatif de deux pays ne doit dépendre que de leur performance sur les différents critères et non des performances de pays tiers.

[Contre-]Exemple : Avant 1994 la moyenne était une moyenne arithmétique $IDH = \frac{HI+EI+II}{3}$

Indépendance des options non pertinentes :

Le classement relatif de deux pays ne doit dépendre que de leur performance sur les différents critères et non des performances de pays tiers.

[Contre-]Exemple : Avant 1994 la moyenne était une moyenne arithmétique $IDH = \frac{HI+EI+II}{3}$

Pays	Esp de vie	HI	EI	II	IDH
A	70	0.66	0.8	0.8	0.753
B	75	1	0.6	0.6	0.733
C	60	0	0.8	0.8	0.533

Health Index - le choix des min & max - valeur courante

Indépendance des options non pertinentes :

Le classement relatif de deux pays ne doit dépendre que de leur performance sur les différents critères et non des performances de pays tiers.

[Contre-]Exemple : Avant 1994 la moyenne était une moyenne arithmétique $IDH = \frac{HI+EI+II}{3}$

Pays	Esp de vie	HI	EI	II	IDH
A	70	0.66	0.8	0.8	0.753
B	75	1	0.6	0.6	0.733
C	60	0	0.8	0.8	0.533

Pays	Esp de vie	HI	EI	II	IDH
A	70	0.5	0.8	0.8	0.7
B	75	1	0.6	0.6	0.733
C	65	0	0.8	0.8	0.533

On avait $A > B$ puis $B > A$ alors que les performances de A et B n'ont pas changé.

Monotonie dans les scores.

Si un pays est plus performant sur au moins un critère, sans être moins performant sur les autres ($\exists i \text{ s.t. } c_i < c'_i$ et $\forall i \ c_i \leq c'_i$), alors son score devra être préféré ($score < score'$).

[Contre-]Exemple : Avant 1994 la moyenne était une moyenne arithmétique $IDH = \frac{HI+EI+II}{3}$

Monotonie dans les scores.

Si un pays est plus performant sur au moins un critère, sans être moins performant sur les autres ($\exists i \text{ s.t. } c_i < c'_i$ et $\forall i \ c_i \leq c'_i$), alors son score devra être préféré ($score < score'$).

[Contre-]Exemple : Avant 1994 la moyenne était une moyenne arithmétique $IDH = \frac{HI+EI+II}{3}$

Pays	Esp de vie	HI	EI	II	IDH
A	70	0.66	0.8	0.8	0.753
B	75	1	0.6	0.6	0.733
C	60	0	0.8	0.8	0.533

Monotonie dans les scores.

Si un pays est plus performant sur au moins un critère, sans être moins performant sur les autres ($\exists i \text{ s.t. } c_i < c'_i$ et $\forall i \text{ } c_i \leq c'_i$), alors son score devra être préféré ($score < score'$).

[Contre-]Exemple : Avant 1994 la moyenne était une moyenne arithmétique $IDH = \frac{HI+EI+II}{3}$

Pays	Esp de vie	HI	EI	II	IDH
A	70	0.66	0.8	0.8	0.753
B	75	1	0.6	0.6	0.733
C	60	0	0.8	0.8	0.533

Pays	Esp de vie	HI	EI	II	IDH
A	70	0.5	0.8	0.8	0.7
B	75	1	0.6	0.6	0.733
C	65	0	0.8	0.8	0.533

Pour C : l'espérance de vie est préféré dans le deuxième cas mais l'*HDI* n'a pas changé.

Justification du choix du min et du max par l'UNDP:

- *La faible valeur minimale du revenu national brut (RNB) par habitant, 100\$, est justifiée par la quantité considérable de production de subsistance non marchande et non mesurée dans les économies proches du minimum.*
- *Le plafond est fixé à 75 000 dollars par habitant. Il a été démontré qu'il n'y a pratiquement aucun gain en matière de développement humain et de bien-être à avoir un revenu annuel supérieur à 75 000 \$ par habitant. Actuellement, seuls trois pays (Liechtenstein, Qatar et Singapour) dépassent le plafond de 75 000 \$ de revenu par habitant.*

II : Income Index - les fonctions concaves

Idée : Les augmentations de revenus, ainsi que les biens et services qui peuvent être achetés grâce à ces revenus accrus, ont un effet marginal décroissant sur le bien-être humain.

II : Income Index - les fonctions concaves

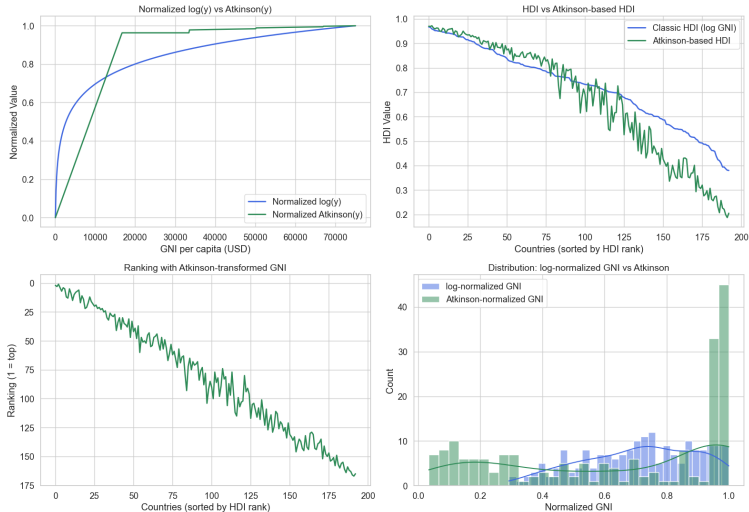
Idée : Les augmentations de revenus, ainsi que les biens et services qui peuvent être achetés grâce à ces revenus accrus, ont un effet marginal décroissant sur le bien-être humain.

Avant 1999 : Transformation Atkinson (y^* : la moyenne mondiale du PIN par habitant)

$$Atk(PIN_i) = \begin{cases} PIN_i & \text{si } PIN_i \leq y^* \\ y^* + 2 \cdot \sqrt[2]{(PIN_i - y^*)} & \text{si } y^* \leq PIN_i \leq 2 \cdot y^* \\ y^* + 2\sqrt[2]{(PIN_i - y^*)} + 3\sqrt[3]{(PIN_i - 2 \cdot y^*)} & \text{si } 2 \cdot y^* \leq PIN_i \leq 3 \cdot y^* \\ y^* + \sum_{k=2}^n k \cdot \sqrt[k]{(PIN_i - (k-1) \cdot y^*)} & \text{si } (n-1) \cdot y^* \leq PIN_i \leq n \cdot y^* \end{cases} \quad (2)$$

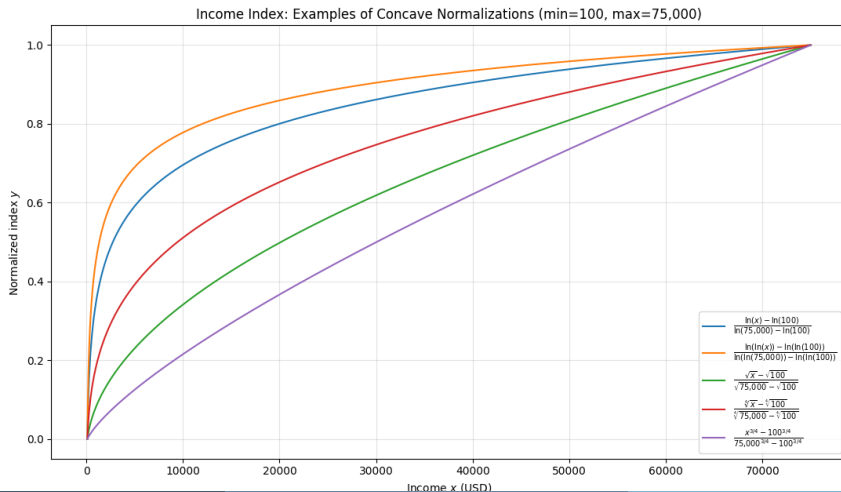
II : Income Index - les fonctions concaves

Atkinson Analysis Super Dashboard



II : Income Index - les fonctions concaves

Il existe une infinité de fonctions concaves que nous pouvons normaliser avec $\min = 100$ et $\max = 75000$:



Avant 1995 :

$$EI = \frac{2 \times \% \text{ d'alphabétisation} + \% \text{ niveau d'instruction des enfants}}{3}$$

Maintenant :

$$EI = \frac{SA + SCh}{2}$$

Avant 1995 :

$$EI = \frac{2 \times \% \text{ d'alphabétisation} + \% \text{ niveau d'instruction des enfants}}{3}$$

Maintenant :

$$EI = \frac{SA + Sch}{2}$$

SA = années de scolarité normalisées pour les adultes âgés de 25 ans.

$$SA = \frac{x - 0}{15 - 0}$$

Sch = années de scolarisation prévues normalisées pour les enfants en âge d'être scolarisés.

$$Sch = \frac{x - 0}{18 - 0}$$

Justification des min et des max par UNDP:

- *Les sociétés peuvent subsister sans éducation formelle, ce qui justifie le minimum d'éducation de 0 an.*
- *Le maximum d'années de scolarité prévues, 18 ans, équivaut à l'obtention d'une master dans la plupart des pays. Le maximum pour les années de scolarisation moyennes, 15, est le maximum prévu de cet indicateur pour 2025.*

Cutoff Points: Ce sont les valeurs de l'IDH calculées à l'aide des quartiles (q) des distributions des indicateurs des composantes, moyennées sur la période 2004-2013 :

$$COP_q = HDI(HI_q, SA_q, SCh_q, II_q) \quad q = 1, 2, 3$$

Développement humain très élevé	0,800 et plus
Développement humain élevé	0,700-0,799
Développement humain moyen	0,550-0,699
Développement humain faible	Inférieur à 0,550

Table: Classification des pays

COP : Cutoff Points - Exemple

Quels sont les *COP*?

Pays	HI	EI	II	IDH
A	0,95	0,95	0,95	0,950
B	0,9	1	0,75	0,877
C	0,8	1	0,8	0,862
D	0,7	0,9	1	0,857
E	0,8	0,8	0,7	0,765
F	1	0,7	0,6	0,749
G	0,7	0,6	0,7	0,665
H	0,5	0,6	0,6	0,565
I	0,4	0,5	0,5	0,464

COP : Cutoff Points - Exemple

Quartiles	HI	EI	II	IDH
Q_0	0,4	0,5	0,5	0,464
	0,5	0,6	0,6	0,565
Q_1	0,7	0,6	0,6	0,632
	0,7	0,7	0,7	0,700
Q_2	0,8	0,8	0,7	0,765
	0,8	0,9	0,75	0,814
Q_3	0,9	0,95	0,8	0,881
	0,95	1	0,95	0,966
Q_4	1	1	1	1,000

COP : Cutoff Points - Exemple

Développement humain très élevé	0,881 et plus
Développement humain élevé	0,765-0,880
Développement humain moyen	0,632-0,764
Développement humain faible	Inférieur à 0,632

Table: Classification des pays

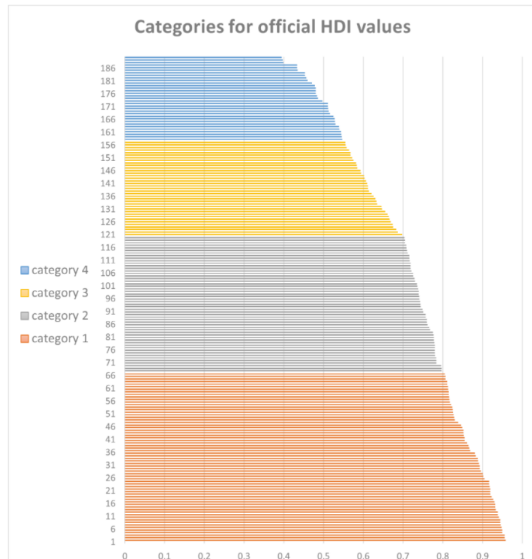
Pays	HI	EI	II	IDH	Classification
A	0,95	0,95	0,95	0,950	Très élevé
B	0,9	1	0,75	0,877	Très élevé
C	0,8	1	0,8	0,862	Très élevé
D	0,7	0,9	1	0,857	Très élevé
E	0,8	0,8	0,7	0,765	Élevé
F	1	0,7	0,6	0,749	Moyen
G	0,7	0,6	0,7	0,665	Moyen
H	0,5	0,6	0,6	0,565	Faible

$$COP_q = HDI(HI_q, SA_q, SCh_q, II_q) \quad q = 1, 2, 3$$

Classification	IDH	Nb pays	Pourcentage de pays
Très élevé	0,800 et plus	66	35%
Élevé	0,700-0,799	53	28%
Moyen	0,550-0,699	37	20%
Faible	Inférieur à 0,550	33	17%

Table: Classification des pays

Cutoff points - Répartition



Avant 2010, la fonction d'agrégation des indicateurs des composantes était :

$$IDH = \frac{HI + EI + II}{3}$$

Depuis 2010, la fonction d'agrégation des indicateurs des composantes est :

$$IDH = \sqrt[3]{HI \cdot EI \cdot II}$$

Exemple :

Quel est le HDI du Togo et du Sénégal selon les deux méthodes?

Pays	HI	EI	II
Togo	0,631	0,517	0,419
Sénégal	0,738	0,345	0,529

Agrégation : Arithmétique vs Géométrie

Avant 2010, la fonction d'agrégation des indicateurs des composantes était :

$$IDH = \frac{HI + EI + II}{3}$$

Depuis 2010, la fonction d'agrégation des indicateurs des composantes est :

$$IDH = \sqrt[3]{HI \cdot EI \cdot II}$$

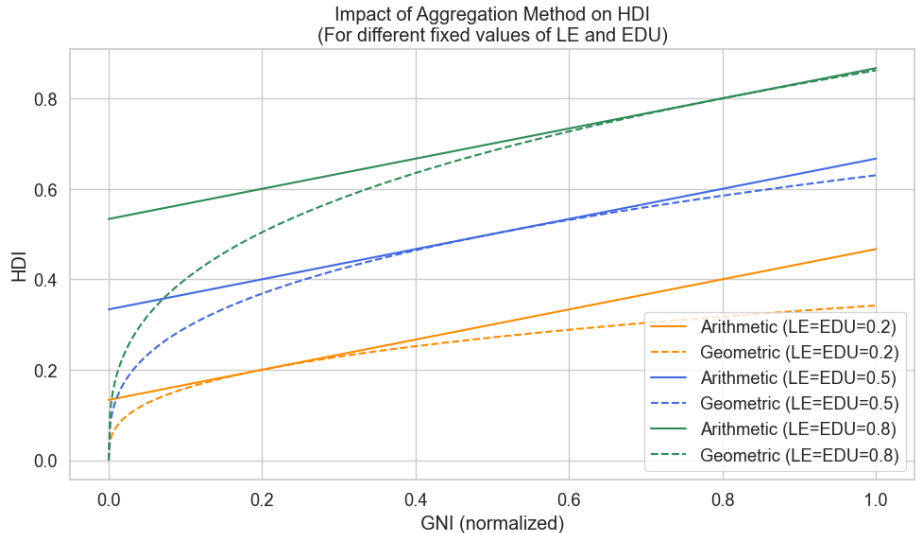
Quel est l'HDI du Togo et du Sénégal selon les deux méthodes?

Pays	HI	EI	II	HDI avant 2010	HDI après 2010
Togo	0,631	0,517	0,419	0,522	0,515
Sénégal	0,738	0,345	0,529	0,537	0,512

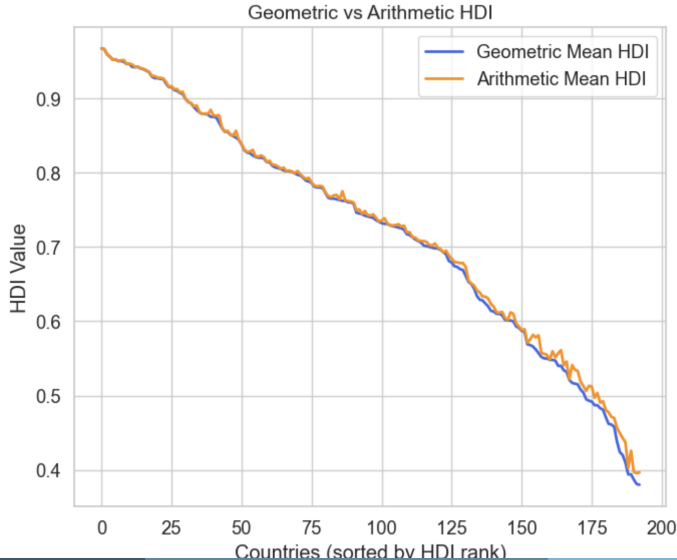
Avant 2010 : $IDH(\text{Sénégal}) > IDH(\text{Togo})$

Après 2010 : $IDH(\text{Sénégal}) < IDH(\text{Togo})$

Agrégation : Arithmétique vs Géométrique



Agrégation : Arithmétique vs Géométrique



De combien d'USD par an faudrait-il augmenter le revenu moyen des habitants de ces deux pays pour y compenser la perte d'une année de vie ?

Pays	Esp de vie	Sc prévues	Sc moyennes	RNB /hab
Burundi	61,6	11,1	3,3	754
Pays-Bas	82,3	18,5	12,4	57 707

Pour Burundi : 26 USD, soit 3,4% du RNB/hab

Pour les Pays-Bas : 4 548 USD, soit 7,8% RNB/hab

	Santé	Savoir	Niveau de vie
Min indicateur	53,3 ans République centrafricaine	6,5 et 2,1 ans Niger	754\$ Burundi
Max indicateur	84,9 ans Hong Kong	17,0 et 14,2 ans Allemagne	131032\$ Liechtenstein
Index min	0,512	0,249	0,305
Index max	0,998	0,943	1
Écart	0,486	0,694	0,695

Table: Min et max au niveau des indicateurs

Agrégation : Compensation

Distribution of Δ GNI Needed to Compensate for 1 Year of LE Loss
(8 out of 193 exceed GNI' > 75000 and cannot compensate)

