Théorie du mesurage: Multi-attribute value model.

Nicolas Fayard

25 janvier 2023

Introduction

Comment choisir un séjour pour les vacances ?

Considérer l'achat d'un séjour pour les vacances.

Ils ont différentes caractéristiques: coûts, confort de l'hôtel, distance de la plage, intérêt culturel...

Afin de choisir parmi des séjours, nous devons les comparer en fonction de plusieurs dimensions et identifier les "meilleurs".

Introduction

Que signifie "meilleur" ?

- Meilleur pour qui ?
- Comment mesurer ce qui est meilleur sur le plan de l'intérêt culturel ?
- Comment comparer ce qui est meilleur sur le plan de l'intérêt culturel avec ce qui est meilleur sur le plan des coûts ?

Séjour	Coûts	Confort de l'hôtel	Distance de la plage	Intérêt culturel
x	100	**	20min	-
y	120	***	10min	- -
z	90	***	15min	++
w	150	****	10min	++

Table: Comparaison de quelques séjours.

Introduction - poids et normalisation

alternatives	g_1	g_2	g_1^n	g_2^n	Score	Rank
h	2000	500	100.00	100.00	100.0	1
a	160	435	8.00	87.00	47.5	2
b	400	370	20.00	74.00	47.0	3
c	640	305	32.00	61.00	46.5	4
d	880	240	44.00	48.00	46.0	5
e	1120	175	56.00	35.00	45.5	6
f	1360	110	68.00	22.00	45.0	7
g	1600	45	80.00	9.00	44.5	8

Figure: Somme pondéré

Introduction - poids et normalisation

alternatives	g_1	g_2	g_1^n	g_2^n	Score	Rank
h	2000	**700**	100.00	100.00	100.0	1
a	160	435	8.00	62.14	35.07	**8**
b	400	370	20.00	52.86	36.43	**7**
c	640	305	32.00	43.57	37.79	**6**
d	880	240	44.00	34.29	39.14	**5**
e	1120	175	56.00	25.00	40.50	**4**
f	1360	110	68.00	15.71	41.86	**3**
g	1600	45	80.00	6.43	43.21	**2**

Figure: Somme pondéré

Introduction - poids et normalisation

- Changer la performance de h inverse le classement de toutes les autres alternatives !
- Les poids dans une somme pondérée sont des constantes d'échelle. Ils **n'indiquent pas une importance intrinsèque**. Ils sont liés à la largeur de l'échelle. Changer la largeur nécessite de changer les poids.
- Si un attribut a un "poids" élevé mais si il n'utilise qu'une petite partie de l'échelle possible (ex: Maths vs Philosophie) l'effet est de réduire l'impact de cette attribut.

Introduction

Somme pondéré

$$x \succeq y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i \geq \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot y_i$$

Additive value function model

$$x \succeq y \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} u_i(x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} u_i(y_i)$$

x, y : Alternatives

$$x = (x_1, x_2, \cdots x_n), y = (y_1, y_2, \cdots y_n)$$

x_i : "Évaluation" de l'alternative x sur l'attribut i

$u_i(x_i)$: Un nombre

$$u_i : X_i \to \mathbb{R}$$

Multi-attribute value model - Formalisation.

- Soit x, y, z.. sont des alternatives concurrents dans l'ensemble A;
- Soit $d_j(x)$ représentant les attributs de x sur la dimension d_j;
- $d_j(A)$ représente l'ensemble des attributs de tout l'ensemble des alternatives. La première étape consiste à vérifier que :

$$\forall j \in D \exists \succeq_j \subseteq d_j(A)^2$$

tel que j est un ordre faible (les attribus doivent être complètement et transitivement ordonnées).

Multi-attribute value model - Formalisation.

Si l'hypothèse précédente est vérifiée alors:

$$\forall j \in D \;\; \exists h_j : A \to \mathbb{R} : d_j(x) \succeq d_j(y) \Leftrightarrow h_j(x) \geq h_j(y)$$

En d'autres termes pour chaque dimension nous pouvons établir une fonction à valeur réelle respectant les préférences du décideur.

Cette fonction est UNIQUEMENT une mesure ordinale des préférences.

Example

Supposons que vous ayez 4 projets x, y, z, w de réhabilitation urbaine et un attribut appelé "esthétique".
Vous avez :
- $d_e(x) =$ statue ;
- $d_e(y) =$ fontaine ;
- $d_e(z) =$ jardin ;
- $d_e(w) =$ espace pour les enfants ;

Les préférences exprimées pourraient être par exemple :

$$d_e(x) \succ d_e(y) \succ d_e(z) \sim d_e(w)$$

Une représentation numérique possible pourrait donc être :

$$h_e(x) = 3, h_e(y) = 2, h_e(z) = h_e(w) = 1$$

Example

Supposons que vous ayez 4 projets x, y, z, w de réhabilitation urbaine et un attribut appelé "utilisation des sols".

Vous avez :

- $d_l(x) = 100m^2$;
- $d_l(y) = 50m^2$;
- $d_l(z) = 1000m^2$;
- $d_l(w) = 500m^2$;

Les préférences exprimées peuvent être, par exemple, les suivantes (supposons que le décideur n'aime pas l'utilisation des terres) décideur n'aime pas l'utilisation des terres :

$$d_l(y) \succ d_l(x) \succ d_l(w) \succ d_l(z)$$

Une représentation numérique possible pourrait donc être :
$h_l(y) = 4, h_l(x) = 3, h_l(w) = 2, h_l(z) = 1$, mais aussi :
$h_l(y) = 50, h_l(x) = 100, h_l(w) = 500, h_l(z) = 1000.$

Suffisant ?

Nous avons;
Les attributs de chaque alternative et la représentation numérique des préférences du décideur (ordinal).

Suffisant ?

Nous avons;
Les attributs de chaque alternative et la représentation numérique des préférences du décideur (ordinal).

Mais:
Nous avons besoin de quelque chose de plus riche. Nous avons besoin de savoir, lorsque nous comparons x à y (et que nous préférons x) si cette préférence est " plus forte " que à celle exprimée en comparant (sur la même dimension) z à w. Nous avons besoin de comparer les différences de préférences.

Exemple

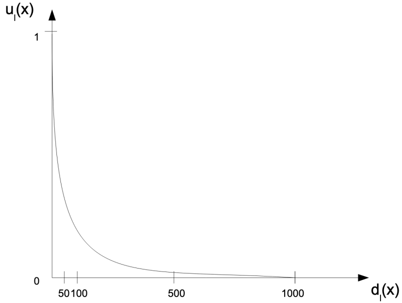


Figure: Utilisation du sol

Par exemple, si la fonction ci-dessus représente la valeur de "l'utilisation du sol", il est clair que la différence entre $50m^2$ et $100m^2$ est beaucoup plus importante que celle entre $500m^2$ et $1000m^2$.

Résumé

Résumons notre processus jusqu'à présent.

- Nous avons les alternatives.
- Nous identifions leurs attributs pour **toutes** les dimensions pertinentes **pour le décideur**.
- Ces attributs sont ordonnées pour chaque dimension en utilisant les préférences du décideur.
- Nous calculons la fonction de valeur mesurant les différences des préférences (pour chaque dimension).

Résumé

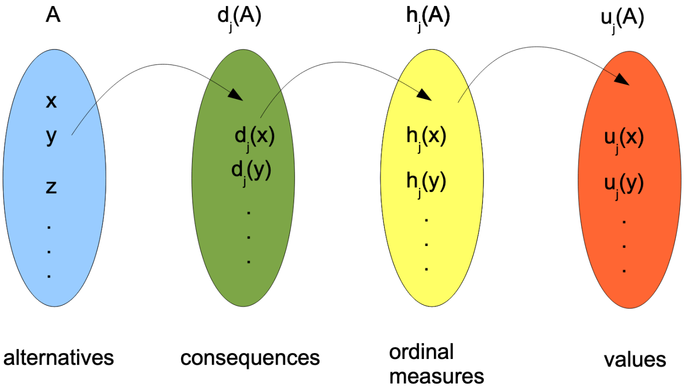


Figure: Processus jusqu'à présent.

Est-ce suffisant ?

Est-ce suffisant ?

Non !

- Le problème est que nous devons être en mesure de comparer les différences de préférences sur une dimension aux différences de préférences sur une autre dimension.
  Exemple: les différences de préférences sur l'utilisation des terres avec les différences de préférences en matière d'esthétique.
- En même temps, nous devons tenir compte de l'idée intuitive selon laquelle, pour un décideur donné, certaines dimensions sont plus "importantes" que d'autres.

Principales hypothèses

- Les préférences sur chaque dimension sont indépendantes.
- Les préférences sur chaque dimension sont mesurables en termes de différences.
- De bonnes valeurs sur une dimension peuvent compenser de mauvaises valeurs sur une autre dimension.

Principales hypothèses

Sous les hypothèses précédentes, on peut construire une fonction de valeur globale $U(x)$ comme suit :

$$U(x) = \sum_j u_j(x)$$

et si nous utilisons des fonctions de valeur marginale normalisées (dans l'intervalle $[0, 1]$) marginales $\bar{u}_j$ alors:

$$U(x) = \sum w_j \bar{u}_j(x)$$

Principales hypothèses

Si $h_j(x)$ représente les valeurs ordinales de la dimension j, alors $u_j(d_j(\underline{x})) = 0$ où $d_j(\underline{x})$ est la plus mauvaise valeur de h_j.

Dans le cas où nous utilisons des fonctions de valeur normalisées, alors $u_j(d_j(\bar{x})) = 1$ où $d_j(\bar{x})$ est la meilleure valeur de h_j.
Et où : w_j doit représenter "l'importance" des fonctions marginales.

Protocole standard

1. Demandez d'abord au décideur de choisir un "point central " correspondant à des évaluations moyenne sur les critères.
2. Demander au décideur de définir un pas unitaire sur n'importe quel critère (que nous appellerons dimension de référence).
   Nous appellerons ce pas s, il sera notre unité standard.
3. Utilisez les questions d'indifférence (voir plus loin) pour trouver des valeurs équivalentes pour les autres dimensions.
4. Faire de même avec la dimension de référence (celle utiliser pour créer s).

Questions d'indifférence

Étant donné que d_r est la dimension de référence, h_r étant les préférences ordinales, nous voulons établir une fonction de valeur pour la dimension d_k. Considérons un objet fictif x pour lequel nous avons $<h_r(x), h_k(x)>$. La question est la suivante :

$$<h_r(x), h_k(x)> \sim <h_r(x'), ?>$$

Pour toute autre dimension égal.

Quelle doit être la mesure sur la dimension k d'un objet x' dont la mesure sur la dimension de référence r est telle que $u_r(x') = u_r(x) + s$ si x et x' sont indifférents pour le décideur ?

Une fois qu'on a obtenu la réponse $h_k(x')$ du décideur, on continu comme suit:

$$<h_r(x), h_k(x')> \sim <h_r(x'), ?> \rightarrow h_k(x'')$$

$$<h_r(x), h_k(x'')> \sim <h_r(x'), ?> \rightarrow h_k(x''')$$

$$\ldots$$

Jusqu'à ce que l'ensemble de mesure de dimension k ait été couvert.

Remarque

- Commencez à considérer un point x au milieu des deux échelles h_r et h_k.
- Commencez ensuite à détériorer la dimension de référence d'une unité de valeur à la fois (ainsi, la dimension en cours de construction doit s'améliorer), jusqu'à ce que l'échelle supérieure de h_k soit atteinte. Enfin améliorez la dimension de référence d'une unité de valeur à la fois (ainsi, la dimension en cours de construction doit détériorer), jusqu'à ce que l'échelle inférieur de h_k soit atteinte.

Qu'obtient on ?

On a $U(x) = u_r(x) + u_k(x)$ par définition.
On a aussi $U(x') = u_r(x') + u_k(x')$ après questionnement.
Et puisque x et x' sont considérés comme indifférents $U(x) = U(x')$.
On obtient alors $u_r(x) + u_k(x) = u_r(x) + s + u_k(x')$ par construction.
On obtient $u_k(x') = u_k(x) - s$.

En procédant par récurrence, nous avons trouvé le point $\underline{x}$ au bas de l'échelle pour lequel, par définition, $u_k(\underline{x}) = 0$. En utilisant segments linéaires entre tous les points découverts, nous formons la fonction de valeur u_k.

Exemple

Vous devez choisir un projet parmi un ensemble de projets évalués en fonction de trois critères : le coût, l'esthétique et la masse.
En ce qui concerne le coût, l'échelle va de $5M$ à $10M$.
L'esthétique est évaluée sur une échelle subjective allant de 0 à 8.
La masse est mesurée en kg et l'échelle va de $1kg$ à $5kg$.
Sur ce moment précis, vous avez en cours d'évaluation les quatre d'entre eux :

Nom	Coût (c)	Esthétisme (e)	Masse (m)
A	$6.5M$	3	$3kg$
B	$7.5M$	4	$4.5kg$
C	$8M$	6	$2kg$
D	$9M$	7	$1.5kg$

Lequel est le meilleur ?

Préférences

Nous devons d'abord établir des préférences appropriées. Supposons dans votre cas, celles qui suivent :
Vous préférez le moins cher au plus cher (coût) ;
Vous préférez le "joli" au "moins joli" (esthétique) ;
Vous préférez le "lourd" au "moins lourd" (masse).

Après demande, le décideur nous dit que le point central est :

$$x = (7.5M, 4, 3.1kg)$$

On décide de prendre comme pas unitaire:

$$s = u_c(7.5M) - u_c(8M)$$

Fonction de la valeur de l'esthétisme

Afin de construire la fonction de valeur de l'esthétique, nous procédons avec le dialogue suivant :

$$<7.5M, 4> \sim <8M, ?>$$

Considérons un projet qui coûte $7.5M$ et qui est évalué sur le plan esthétique avec 4, et un projet qui coûte $8M$ (une unité de valeur de moins dans ce cas), de combien le second projet devrait-il être améliorer sur le plan esthétique pour être indifférent au premier ? Supposons que nous obtenions une réponse de 5 :

$$<7.5M, 4> \sim <8M, 5>$$

Nous répétons maintenant la question en utilisant la nouvelle valeur :

$$<7.5M, 5> \sim <8M, ?>$$

Nous obtenons maintenant une réponse de 6.

Fonction de la valeur l'esthétisme

Nous pouvons résumer le dialogue comme suit :

$$<7.5M, 4> \sim <8M, 5>$$

$$<7.5M, 5> \sim <8M, 6>$$

$$<7.5M, 6> \sim <8M, 7>$$

$$<7.5M, 7> \sim <8M, 7.5>$$

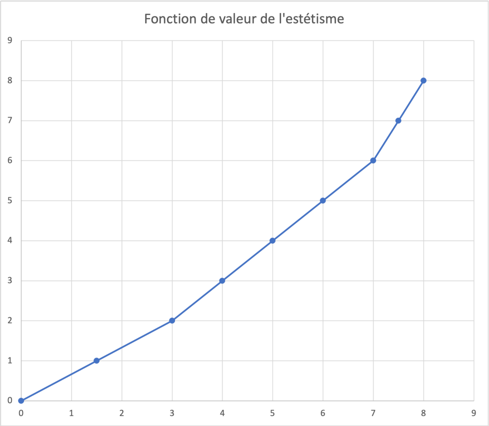
$$<7.5M, 7.5> \sim <8M, 8>$$

$$<8M, 4> \sim <7.5M, 3>$$

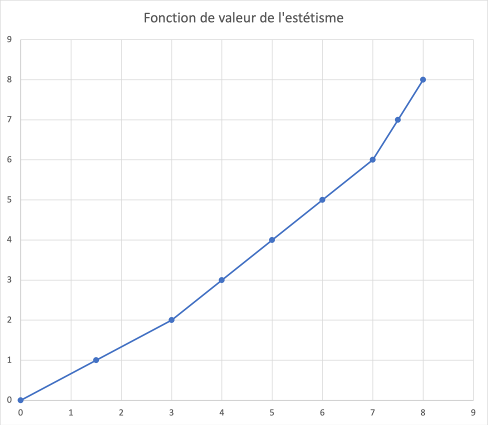
$$<8M, 3> \sim <7.5M, 1.5>$$

$$<8M, 1.5> \sim <7.5M, 0>$$

Fonction de la valeur de l'esthétisme



Fonction de la valeur de l'esthétisme



$$u_e(x) = \begin{cases} s \cdot \frac{2x_e}{3} & \text{if } x_e \in [0;3] \\ s \cdot (x_e - 1) & \text{if } x_e \in [3;7] \\ s \cdot (2x_e - 7) & \text{if } x_e \in [7;8] \end{cases}$$

Fonction de la valeur des poids

Afin de construire la fonction de valeur de poids, nous procédons avec le dialogue suivant :

$$<7.5M, 3.1kg> \sim <8M, ?>$$

Considérons un projet qui coûte $7.5M$ et qui est évalué sur le plan esthétique avec $3.1kg$, et un projet qui coûte $8M$ (une unité de valeur de moins dans ce cas) de combien le second projet devrait-il être améliorer sur le plan du poids pour être indifférent au premier ? Supposons que nous obtenions une réponse de $3.5kg$:

$$<7.5M, 3.1kg> \sim <8M, 3.5kg>$$

Nous répétons maintenant la question en utilisant la nouvelle valeur :

$$<7.5M, 3.5kg> \sim <8M, ?>$$

Nous obtenons maintenant une réponse de $3.9kg$.

Fonction de la valeur des poids

Nous pouvons résumer le dialogue comme suit :

$$<7.5M, 3.1> \sim <8M, 3.5>$$

$$<7.5M, 3.5> \sim <8M, 3.9>$$

$$<7.5M, 3.9> \sim <8M, 5>$$

$$<8M, 3.1> \sim <7.5M, 2.7>$$

$$<8M, 2.7> \sim <7.5M, 2.3>$$

$$<8M, 2.3> \sim <7.5M, 1.9>$$

$$<8M, 1.9> \sim <7.5M, 1.75>$$

$$<8M, 1.75> \sim <7.5M, 1.6>$$

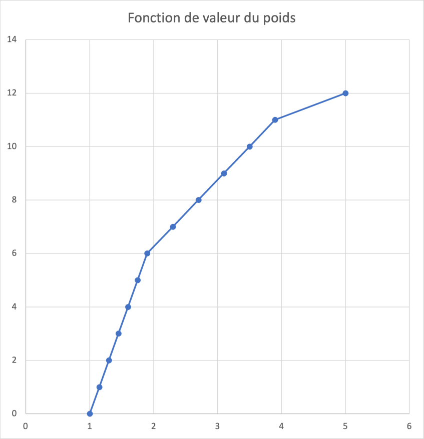
$$<8M, 1.6> \sim <7.5M, 1.45>$$

$$<8M, 1.45> \sim <7.5M, 1.3>$$

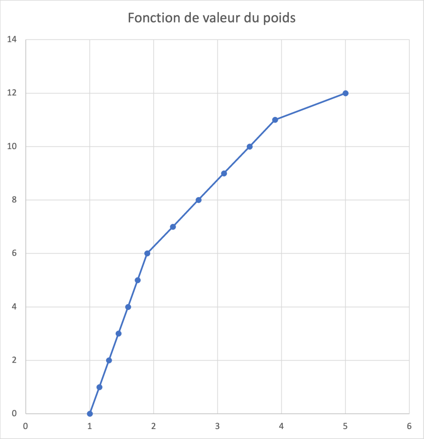
$$<8M, 1.3> \sim <7.5M, 1.15>$$

$$<8M, 1.15> \sim <7.5M, 1>$$

Fonction de la valeur de poids



Fonction de la valeur de poids



$$u_p(x) = \begin{cases} s \cdot \frac{(x_p - 1)}{0.15} & \text{if } x_p \in [1; 1.9] \\ s \cdot (2.5 \cdot x_p + 1.25) & \text{if } x_p \in [1.9; 3.9] \\ s \cdot (\frac{10}{11} x_p + \frac{82}{11}) & \text{if } x_p \in [3.9; 5] \end{cases}$$

Fonction de valeur de coût

Afin de construire la fonction de valeur de coût, nous procédons avec le dialogue suivant :

$$<3.5kg, 7.5M> \sim <3.1kg, ?>$$

Considérons un projet qui à un poids de $3.5kg$ et qui est évalué sur le plan du coût à $8M$, et un projet qui pèse $3.1kg$ (une unité de valeur de moins dans ce cas) de combien le second projet devrait-il être améliorer sur le plan du pris pour être indifférent au premier ? Supposons que nous obtenions une réponse de $7M$:

$$<3.5kg, 7.5M> \sim <3.1kg, 7M>$$

Nous répétons maintenant la question en utilisant la nouvelle valeur :

$$<3.5kg, 7M> \sim <3.1kg, ?>$$

Nous obtenons maintenant une réponse de $6.5M$.

Fonction de la valeur de coût

Nous pouvons résumer le dialogue comme suit :

$$<3.5kg, 7.5M> \sim <3.1kg, 7M>$$

$$<3.5kg, 7M> \sim <3.1kg, 6.5M>$$

$$<3.5kg, 7.5M> \sim <3.1kg, 7M>$$

$$<3.5kg, 7M> \sim <3.1kg, 6.5M>$$

$$<3.5kg, 6.5M> \sim <3.1kg, 6M>$$

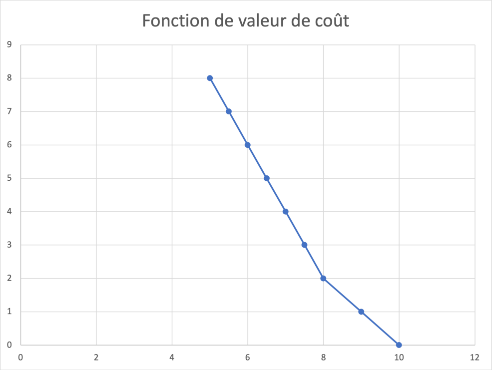
$$<3.5kg, 6M> \sim <3.1kg, 5.5M>$$

$$<3.5kg, 5.5M> \sim <3.1kg, 5M>$$

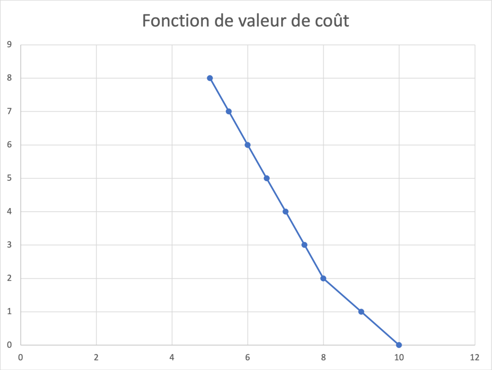
$$<3.1kg, 8M> \sim <3.5kg, 9M>$$

$$<3.1kg, 9M> \sim <3.5kg, 10M>$$

Fonction de la valeur de coût



Fonction de la valeur de coût



$$u_p(x) = \begin{cases} s \cdot (-2x_c + 18) & \text{if } x_c \in [5; 8] \\ s \cdot (-x_c + 10) & \text{if } x_c \in [8; 10] \end{cases}$$

Calculs finaux

Après avoir obtenu les trois fonctions de valeur, nous pouvons maintenant calculer les valeurs des quatre projets pour chacune d'entre elles.
En fixant arbitrairement la valeur de $s = 1$.

$$u_c(A) = 5 \;\; u_e(A) = 2 \;\; u_p(A) = 8.75$$

$$u_c(B) = 3 \;\; u_e(B) = 3 \;\; u_p(B) = 11.54$$

$$u_c(C) = 2 \;\; u_e(C) = 5 \;\; u_p(C) = 6.25$$

$$u_c(D) = 1 \;\; u_e(D) = 6 \;\; u_p(D) = 3.3333$$

Calculs finaux

Enfin;

$$U(A) = 5 + 2 + 8.75 = 15.75$$

$$U(B) = 3 + 3 + 11.54 = 17.54$$

$$U(C) = 2 + 5 + 6.25 = 13.25$$

$$U(D) = 1 + 6 + 3.33 = 10.33$$

Le projet qui maximise la valeur du décideur est le B.

Où sont les poids ?

Supposons que nous utilisions des fonctions de valeur normalisées qui doivent être doivent être "pondérées".
Nous rappelons que dans un tel cas, nous avons :

$$U(x) = \sum_j w_j \bar{u}_j(x)$$

On cherche à trouver le tradeoff entre deux "poids" w_i et w_j.
Il suffit de prendre deux solutions (x et y) indifférentes et différente seulement sur d_i et d_j.

Où sont les poids ?

Nous avons alors;

$$w_i\bar{u}_i(x_i) + w_j\bar{u}_j(x_j) = w_i\bar{u}_i(y_i) + w_j\bar{u}_j(y_j)$$

$$w_i\bar{u}_i(x_i) - w_i\bar{u}_i(y_i) = w_j\bar{u}_j(y_j) - w_j\bar{u}_j(x_j)$$

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\bar{u}_j(y_j) - \bar{u}_j(x_j)}{\bar{u}_i(x_i) - \bar{u}_i(y_i)}$$

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{\frac{u_j(y_j)-\underline{u}_j}{\bar{u}_j} - \frac{u_j(x_j)-\underline{u}_j}{\bar{u}_j}}{\frac{u_j(x_i)-\underline{u}_j}{\bar{u}_j} - \frac{u_j(y_i)-\underline{u}_j}{\bar{u}_j}}$$

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{u_j(y_j) - u_j(x_j)}{u_i(x_i) - u_i(y_i)} \cdot \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_j}$$

Où sont les poids ?

$$\frac{w_i}{w_j} = \frac{u_j(y_j) - u_j(x_j)}{u_i(x_i) - u_i(y_i)} \cdot \frac{\bar{u}_i}{\bar{u}_j}$$

Si on prends $x = <7.5M, 3.1kg>$ et $y = <8M, 3.5kg>$
$\frac{w_p}{w_c} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$
la masse représente 150% de la valeur du coût.

Si on prends $x = <7.5M, 4>$ et $y = <8M, 5>$
$\frac{w_p}{w_c} = \frac{8}{8} = 1$
l'esthétique représente la même valeur que le coût.

Où sont les poids ?

- Il n'est pas surprenant que le "poids" de chaque critère soit représenté par la valeur maximale qu'il atteint.
- Il est préférable de ne pas utiliser de "poids" lors de la construction des fonctions de valeur, car cela peut être source de confusion pour les utilisateurs. Nous pouvons expliquer l'importance relative de chaque critère en utilisant les compromis.

Les "poids" sont les compromis entre les fonctions de valeur et, en tant que telles, elles sont établies dès que les fonctions de valeur sont construites. Ils n'existent pas indépendamment et il n'est pas correct de demander au décideur de les exprimer.

Exercice

Livres

- Bouyssou D., Marchant Th., Pirlot M., Tsoukiàs A., Vincke Ph., Evaluation and Decision Models: stepping stones for the analyst, Springer Verlag, Berlin, 2006.
- Bouyssou D., Marchant Th., Perny P., Pirlot M., Tsoukiàs A., Vincke Ph., Evaluation and Decision Models: a critical perspective, Kluwer Academic, Dordrecht, 2000.
- Keeney R.L., Raiffa H., Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs, J. Wiley, New York, 1976.
- Roberts F.S., Measurement theory, with applications to Decision Making, Utility and the Social Sciences, Addison-Wesley, Boston, 1979.