

## TD – Relations binaires

*Représentation matricielle, représentation graphique, propriétés*

### Exercice : Deux relations sur deux ensembles

On considère deux ensembles finis :

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8\}, \quad B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}.$$

Pour chacun des ensembles  $X \in \{A, B\}$ , on considère une relation binaire  $R_X \subseteq X \times X$  définie ci dessous.

#### (I) Relation sur $A$

La relation  $R_A \subseteq A \times A$  est donnée par :

$$\begin{aligned} R_A = \{ & (a_1, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_3), (a_4, a_4), \\ & (a_1, a_2), (a_2, a_1), \\ & (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_2, a_4), \\ & (a_5, a_6), (a_6, a_7), (a_7, a_5), \\ & (a_8, a_6) \}. \end{aligned}$$

#### (II) Relation sur $B$

La relation  $R_B \subseteq B \times B$  est donnée par :

$$\begin{aligned} R_B = \{ & (b_1, b_1), (b_2, b_2), (b_3, b_3), (b_4, b_4), (b_5, b_5), (b_6, b_6), (b_7, b_7), (b_8, b_8), \\ & (b_1, b_2), (b_2, b_1), \\ & (b_4, b_5), (b_5, b_4), (b_4, b_6), (b_6, b_4), (b_5, b_6), (b_6, b_5), \\ & (b_1, b_3), (b_1, b_4), (b_1, b_5), (b_1, b_6), (b_1, b_7), (b_1, b_8), \\ & (b_2, b_3), (b_2, b_4), (b_2, b_5), (b_2, b_6), (b_2, b_7), (b_2, b_8), \\ & (b_3, b_4), (b_3, b_5), (b_3, b_6), (b_3, b_7), (b_3, b_8), \\ & (b_4, b_7), (b_4, b_8), (b_5, b_7), (b_5, b_8), (b_6, b_7), (b_6, b_8), \\ & (b_7, b_8) \}. \end{aligned}$$

Pour chacune des relations  $R_A$  et  $R_B$  :

**Q1** Donner la **représentation matricielle**.

**Q2** Donner la **représentation graphique**.

**Q3** Tester les propriétés suivantes : réflexive, non réflexive, irréflexive, symétrique, non symétrique, asymétrique, antisymétrique, transitive, non transitive, fortement complète, complète.

**Q4** En déduire si la relation est : un ordre total, une relation d'équivalence, un ordre partiel, un ordre faible.

**Rappel : définitions.** Soit  $X$  un ensemble et  $R \subseteq X \times X$ .

- **Réflexive** :  $xRx, \forall x \in X$ .
- **Non réflexive** :  $R$  n'est pas réflexive (il existe  $x \in X$  tel que  $\neg(xRx)$ ).
- **Irréflexive** :  $\neg(xRx), \forall x \in X$ .
- **Symétrique** :  $xRy \Rightarrow yRx, \forall x, y \in X$ .
- **Non symétrique** :  $R$  n'est pas symétrique (il existe  $x, y \in X$  tels que  $xRy$  et  $\neg(yRx)$ ).
- **Asymétrique** :  $xRy \Rightarrow \neg(yRx), \forall x, y \in X$ .
- **Antisymétrique** :  $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y, \forall x, y \in X$ .
- **Transitive** :  $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz, \forall x, y, z \in X$ .
- **Non transitive** :  $R$  n'est pas transitive (il existe  $x, y, z \in X$  tels que  $xRy, yRz$  et  $\neg(xRz)$ ).
- **Fortement complète** :  $xRy \vee yRx, \forall x, y \in X$  (implique la réflexivité).
- **Complète** :  $xRy \vee yRx, \forall x \neq y \in X$ .

**Rappel : structures d'ordre (comme dans les slides).**

- **Ordre total** : réflexive, antisymétrique, transitive, complète.
- **Équivalence** : symétrique, réflexive, transitive.
- **Ordre partiel** : réflexive, antisymétrique, transitive.
- **Ordre faible** : réflexive, complète, transitive.

## Exercice 2 : Préférences et structures d'ordre

On s'intéresse à des situations de préférence exprimées en langage naturel. Pour chacune des situations suivantes, vérifier si les relations sont des ordres faibles.

### Situation 1 : le sucre

On considère quatre boissons contenant respectivement

$$A = \{0, 1, 2, 3\}$$

cuillères de sucre.

Un individu exprime les préférences suivantes :

- il est indifférent entre 0 et 1 cuillère,
- il est indifférent entre 1 et 2 cuillères,
- il préfère strictement 3 cuillères à 0 et 1 cuillère, et 2 à 0 cuillère.

### Situation 2 : les films

On considère quatre films

$$B = \{\text{Film } A, \text{ Film } B, \text{ Film } C, \text{ Film } D\}.$$

Un spectateur exprime les préférences suivantes :

- il préfère le film  $A$  au film  $B$ ,
- il préfère le film  $C$  au film  $D$ ,
- il ne sait pas comparer les films  $A$  et  $C$ ,
- il ne sait pas comparer les films  $B$  et  $D$ .

### Situation 3 : Menus

Un restaurant propose trois formules de menu :

- $M_1$  : *Plat seul*, au prix de 12 €.
- $M_2$  : *Entrée + Plat*, au prix de 16 € ;
- $M_3$  : *Entrée + Plat + Dessert*, au prix de 20 € ;

Un client exprime les préférences suivantes :

- il préfère  $M_2$  à  $M_1$  (meilleur rapport qualité prix),
- il préfère  $M_2$  à  $M_3$  (le dessert vaut le surcoût),
- il préfère  $M_1$  à  $M_3$  (le menu complet est trop cher).

**Question finale.** Que montrent ces trois situations sur le lien entre préférences empiriques, relations d'ordre et mesurabilité ?