

# Types d'échelle et leur signification

## Decision Analysis

Nicolas Fayard

February 5, 2026

# Introduction : L'Indice de Qualité de l'Air : ATMO

## Calcul de l'indice

- Observation de 4 polluants : CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, O<sub>3</sub> et poussières, et leur concentration mesurée dans 1m<sup>3</sup>.
- Traduction de ces observations sur une échelle de 1 à 10, où 1 indique une qualité de l'air très bonne et 10 une qualité très mauvaise pour la santé humaine.
- L'indice ATMO se base sur le pire des quatre polluants.

## Questions à considérer

Est-ce que 5 est 5 fois pire que 1 ? Est-ce que 10 est 2 fois pire que 5 ?

# Introduction : L'Indice de Qualité de l'Air : ATMO

## Calcul de l'indice

- Observation de 4 polluants : CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, O<sub>3</sub> et poussières, et leur concentration mesurée dans 1m<sup>3</sup>.
- Traduction de ces observations sur une échelle de 1 à 10, où 1 indique une qualité de l'air très bonne et 10 une qualité très mauvaise pour la santé humaine.
- L'indice ATMO se base sur le pire des quatre polluants.

## Questions à considérer

Est-ce que 5 est 5 fois pire que 1 ? Est-ce que 10 est 2 fois pire que 5 ?

Quelles quantités sont précisément comparées ?

# Introduction : L'Indice de Qualité de l'Air : ATMO

## Calcul de l'indice

- Observation de 4 polluants : CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, O<sub>3</sub> et poussières, et leur concentration mesurée dans 1m<sup>3</sup>.
- Traduction de ces observations sur une échelle de 1 à 10, où 1 indique une qualité de l'air très bonne et 10 une qualité très mauvaise pour la santé humaine.
- L'indice ATMO se base sur le pire des quatre polluants.

## Questions à considérer

Est-ce que 5 est 5 fois pire que 1 ? Est-ce que 10 est 2 fois pire que 5 ?

Quelles quantités sont précisément comparées ?

Quel est le but de cet indice ?

# Introduction : L'Indice de Qualité de l'Air : ATMO

## Calcul de l'indice

- Observation de 4 polluants : CO<sub>2</sub>, SO<sub>2</sub>, O<sub>3</sub> et poussières, et leur concentration mesurée dans 1m<sup>3</sup>.
- Traduction de ces observations sur une échelle de 1 à 10, où 1 indique une qualité de l'air très bonne et 10 une qualité très mauvaise pour la santé humaine.
- L'indice ATMO se base sur le pire des quatre polluants.

## Questions à considérer

Est-ce que 5 est 5 fois pire que 1 ? Est-ce que 10 est 2 fois pire que 5 ?

Quelles quantités sont précisément comparées ?

Quel est le but de cet indice ?

Peut-on utiliser cet indice à d'autres fins ?

# Tableau des Polluants et Indice ATMO

| Temps | CO2 | SO2 | O3 | Poussières |
|-------|-----|-----|----|------------|
| $t_1$ | 3   | 3   | 8  | 8          |
| $t_2$ | 1   | 3   | 8  | 2          |
| $t_3$ | 7   | 7   | 7  | 7          |

Table: Concentration des polluants et indice ATMO

# Tableau des Polluants et Indice ATMO

| Temps | CO2 | SO2 | O3 | Poussières |
|-------|-----|-----|----|------------|
| $t_1$ | 3   | 3   | 8  | 8          |
| $t_2$ | 1   | 3   | 8  | 2          |
| $t_3$ | 7   | 7   | 7  | 7          |

Table: Concentration des polluants et indice ATMO

- Le score de l'indice est le max sur les critères

Selon l'indice ATMO,  $t_3$  est considéré comme mieux que  $t_2$ .

Cette évaluation est-elle justifiée ?

- L'affirmation "L'indice ATMO d'aujourd'hui (6) est deux fois plus élevé que celui d'hier (3)" est-elle significative ?

- L'affirmation "L'indice ATMO d'aujourd'hui (6) est deux fois plus élevé que celui d'hier (3)" est-elle significative ?
- Pour un polluant donné, la concentration est mesurée en  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ .
  - Les données sont transformées de manière arbitraire.
  - Par exemple, choisir 5-6 pour les normes à long terme de l'UE et 8 pour les normes à court terme est arbitraire.
- L'information pertinente de l'indice n'est pas le chiffre lui-même, mais une indication si nous sommes au-dessus ou en dessous de certaines normes liées aux effets des polluants sur la santé.
  - Dans un autre contexte, les valeurs de l'indice pourraient être différentes (par exemple, 7 et 4), et 7 n'est pas le double de 4.
- Donc, l'affirmation est valide seulement dans un contexte particulier et dépend de choix arbitraires.

- L'affirmation " Le sous-indice ATMO d'aujourd'hui pour l'ozone (6) est plus élevé que celui d'hier pour l'ozone (3)" est-elle significative.

- L'affirmation " Le sous-indice ATMO d'aujourd'hui pour l'ozone (6) est plus élevé que celui d'hier pour l'ozone (3)" est-elle significative.
- Toute transformation raisonnable des mesures de concentration en nombres entre 1 et 10 conduit à la même conclusion : le sous-indice d'aujourd'hui est plus élevé que celui d'hier.
- Exemple : une concentration de 110 et 180  $\mu\text{g}/\text{m}^3$  peut être transformée en indices 3 et 6, ou 4 et 6, ou 2 et 4, mais pas en 4 et 2.

- Peut-on dire que "L'indice ATMO d'aujourd'hui (6) est plus élevé que celui d'hier (3)" de manière significative ?

- Peut-on dire que "L'indice ATMO d'aujourd'hui (6) est plus élevé que celui d'hier (3)" de manière significative ?
  - Bien que la comparaison de deux valeurs du même sous-indice soit fiable, il en va différemment pour les valeurs de deux sous-indices différents.
  - Une valeur de 3 sur un sous-indice pourrait être plus dangereuse pour la santé qu'une valeur de 6 sur un autre.
  - Les échelles ont été construites avec soin pour rendre les sous-indices comparables.
- Peut-on vraiment supposer qu'une valeur de 5 est équivalente sur deux sous-indices différents ?
  - Cette équivalence doit être considérée en termes d'effets à court et long terme, sur différentes parties de l'organisme, et de divers impacts sur la santé.
  - Comment comparer les effets en termes de gêne, mortalité après n années, coûts de santé, etc. ?

1 Relation Binaire

2 Mesure

# Définition d'une Relation Binaire

Considérons un ensemble  $A$  :

$$A = \{a, b, c, d, \dots\}$$

## Relation binaire:

Considérons  $R$  comme une relation binaire sur l'ensemble  $A$  :

$$R \subseteq A \times A$$

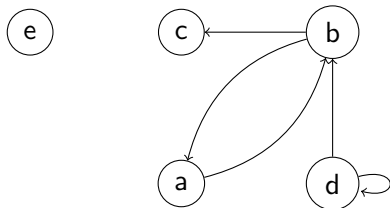
$$R = \{(a, d), (b, c), (d, c), \dots\}$$

On note  $aRb$  ou  $R(a, b)$  pour indiquer que  $(a, b) \in R$ .

Exemple :  $A = \{a, b, c, d, e\}$  et  $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$

# Illustration graphique et matricielle

Exemple :  $A = \{a, b, c, d, e\}$  et  $R = \{(a, b)(b, a), (b, c), (d, b), (d, d)\}$



| $M(i, j)$ | a | b | c | d | e |
|-----------|---|---|---|---|---|
| a         | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| b         | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| c         | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| d         | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| e         | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Une relation binaire  $R$  définie sur  $A$  est :

- *Reflexive* :  $aRa, \forall a \in A$

Une relation binaire  $R$  définie sur  $A$  est :

- *Reflexive* :  $aRa, \forall a \in A$ 
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Représentation matricielle : diagonale avec que des 1.

Une relation binaire  $R$  définie sur  $A$  est :

- *Reflexive* :  $aRa, \forall a \in A$ 
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Représentation matricielle : diagonale avec que des 1.
- *Non reflexive* :  $R$  n'est pas reflexive ( $\exists a, \neg(aRa)$ )

Une relation binaire  $R$  définie sur  $A$  est :

- *Reflexive* :  $aRa, \forall a \in A$ 
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Représentation matricielle : diagonale avec que des 1.
- *Non reflexive* :  $R$  n'est pas reflexive ( $\exists a, \neg(aRa)$ )
  - Exemple :  $a$  est content de  $b$
  - Représentation matricielle : diagonale avec au moins un zéro.

Une relation binaire  $R$  définie sur  $A$  est :

- *Reflexive* :  $aRa, \forall a \in A$ 
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Représentation matricielle : diagonale avec que des 1.
- *Non reflexive* :  $R$  n'est pas reflexive ( $\exists a, \neg(aRa)$ )
  - Exemple :  $a$  est content de  $b$
  - Représentation matricielle : diagonale avec au moins un zéro.
- *Irreflexive* :  $\neg aRa, \forall a \in A$

Une relation binaire  $R$  définie sur  $A$  est :

- *Reflexive* :  $aRa, \forall a \in A$ 
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Représentation matricielle : diagonale avec que des 1.
- *Non reflexive* :  $R$  n'est pas reflexive ( $\exists a, \neg(aRa)$ )
  - Exemple :  $a$  est content de  $b$
  - Représentation matricielle : diagonale avec au moins un zéro.
- *Irreflexive* :  $\neg aRa, \forall a \in A$ 
  - Exemples : strictement plus grand, strictement plus âgé, père de...,

Une relation binaire  $R$  définie sur  $A$  est :

- *Reflexive* :  $aRa, \forall a \in A$ 
  - Exemples : égalité des nombres, appartenir au même espèce d'animal, ...
  - Représentation matricielle : diagonale avec que des 1.
- *Non reflexive* :  $R$  n'est pas reflexive ( $\exists a, \neg(aRa)$ )
  - Exemple :  $a$  est content de  $b$
  - Représentation matricielle : diagonale avec au moins un zéro.
- *Irreflexive* :  $\neg aRa, \forall a \in A$ 
  - Exemples : strictement plus grand, strictement plus âgé, père de...,
  - Représentation matricielle : diagonale avec que des zéros.

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Représentation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Représentation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* :  $R$  n'est pas symétrique ( $\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa$ )

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Représentation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* :  $R$  n'est pas symétrique ( $\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa$ )
  - Exemple :  $a$  aime  $b$ .

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Représentation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* :  $R$  n'est pas symétrique ( $\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa$ )
  - Exemple :  $a$  aime  $b$ .
  - Représentation matricielle : violation de la symétrie.

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Représentation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* :  $R$  n'est pas symétrique ( $\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa$ )
  - Exemple :  $a$  aime  $b$ .
  - Représentation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* :  $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Représentation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* :  $R$  n'est pas symétrique ( $\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa$ )
  - Exemple :  $a$  aime  $b$ .
  - Représentation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* :  $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples :  $>$ , ancetre, ...

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Représentation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* :  $R$  n'est pas symétrique ( $\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa$ )
  - Exemple :  $a$  aime  $b$ .
  - Représentation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* :  $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples :  $>$ , ancêtre, ...
  - Représentation matricielle : asymétrique par rapport à la diagonale (que des 0 sur la diagonale).

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Représentation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* :  $R$  n'est pas symétrique ( $\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa$ )
  - Exemple :  $a$  aime  $b$ .
  - Représentation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* :  $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples :  $>$ , ancetre, ...
  - Représentation matricielle : asymétrique par rapport à la diagonale (que des 0 sur la diagonale).
- *Antisymétrique* :  $aRb \wedge bRa \implies b = a, \forall a, b \in A$

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Représentation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* :  $R$  n'est pas symétrique ( $\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa$ )
  - Exemple :  $a$  aime  $b$ .
  - Représentation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* :  $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples :  $>$ , ancêtre, ...
  - Représentation matricielle : asymétrique par rapport à la diagonale (que des 0 sur la diagonale).
- *Antisymétrique* :  $aRb \wedge bRa \implies b = a, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples :  $\geq$

- *Symétrique*:  $aRb \implies bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples : frère ou soeur, voisin, ...
  - Représentation matricielle : symétrique par rapport à la diagonale.
- *Non symétrique* :  $R$  n'est pas symétrique ( $\exists a, b, aRb \wedge \neg bRa$ )
  - Exemple :  $a$  aime  $b$ .
  - Représentation matricielle : violation de la symétrie.
- *Asymétrique* :  $aRb \implies \neg bRa, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples :  $>$ , ancetre, ...
  - Représentation matricielle : asymétrique par rapport à la diagonale (que des 0 sur la diagonale).
- *Antisymétrique* :  $aRb \wedge bRa \implies b = a, \forall a, b \in A$ 
  - Exemples :  $\geq$
  - Représentation matricielle : asymétrique par rapport à la diagonale (peut avoir des 1 sur la diagonale).

- *Transitive* :  $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$

- *Transitive* :  $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$ 
  - Exemple :  $>$ ,  $a$  est ancetre de  $b$ .

- *Transitive* :  $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$ 
  - Exemple :  $>$ ,  $a$  est ancetre de  $b$ .
  - Representation graphe : si arc  $(a, b)$  et arc  $(a, c)$  alors arc  $(a, c)$ .

- *Transitive* :  $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$ 
  - Exemple :  $>$ ,  $a$  est ancetre de  $b$ .
  - Représentation graphe : si arc  $(a, b)$  et arc  $(a, c)$  alors arc  $(a, c)$ .
- *Non transitive* :  $R$  n'est pas transitive  $(\exists a, b, c(aRb \wedge bRc \wedge \neg aRc))$

- *Transitive* :  $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$ 
  - Exemple :  $>$ ,  $a$  est ancetre de  $b$ .
  - Représentation graphe : si arc  $(a, b)$  et arc  $(a, c)$  alors arc  $(a, c)$ .
- *Non transitive* :  $R$  n'est pas transitive ( $\exists a, b, c(aRb \wedge bRc \wedge \neg aRc)$ )
  - Exemple : ami de.

- *Transitive* :  $aRb \wedge bRc \implies aRc, \forall a, b, c \in A$ 
  - Exemple :  $>$ ,  $a$  est ancetre de  $b$ .
  - Représentation graphe : si arc  $(a, b)$  et arc  $(a, c)$  alors arc  $(a, c)$ .
- *Non transitive* :  $R$  n'est pas transitive ( $\exists a, b, c (aRb \wedge bRc \wedge \neg aRc)$ )
  - Exemple : ami de.

- *Fortement complète* :  $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$  (implique la réflexivité)

- *Fortement complète* :  $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$  (implique la réflexivité)
  - Exemple :  $\leq$ .

- *Fortement complète* :  $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$  (implique la réflexivité)
  - Exemple :  $\leq$ .
  - Impact sur la représentation matricielle : au moins un 1 dans les cases  $M[i, j]$  et  $M[j, i]$  pour  $i \neq j$  et que des 1 dans la diagonale.

- *Fortement complète* :  $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$  (implique la réflexivité)
  - Exemple :  $\leq$ .
  - Impact sur la représentation matricielle : au moins un 1 dans les cases  $M[i, j]$  et  $M[j, i]$  pour  $i \neq j$  et que des 1 dans la diagonale.

- *Fortement complète* :  $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$  (implique la réflexivité)
  - Exemple :  $\leq$ .
  - Impact sur la représentation matricielle : au moins un 1 dans les cases  $M[i, j]$  et  $M[j, i]$  pour  $i \neq j$  et que des 1 dans la diagonale.
- *Complète* :  $aRb \vee bRa, \forall a \neq b \in A$

- *Fortement complète* :  $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$  (implique la réflexivité)
  - Exemple :  $\leq$ .
  - Impact sur la représentation matricielle : au moins un 1 dans les cases  $M[i, j]$  et  $M[j, i]$  pour  $i \neq j$  et que des 1 dans la diagonale.
- *Complète* :  $aRb \vee bRa, \forall a \neq b \in A$ 
  - Exemple :  $>$ .

- *Fortement complète* :  $aRb \vee bRa \forall a, b \in A$  (implique la réflexivité)
  - Exemple :  $\leq$ .
  - Impact sur la représentation matricielle : au moins un 1 dans les cases  $M[i, j]$  et  $M[j, i]$  pour  $i \neq j$  et que des 1 dans la diagonale.
- *Complète* :  $aRb \vee bRa, \forall a \neq b \in A$ 
  - Exemple :  $>$ .
  - Impact sur la représentation matricielle : au moins un 1 dans les cases  $M[i, j]$  et  $M[j, i]$  pour  $i \neq j$ .

## Ordre Total :

- Réflexif, antisymétrique, transitif, complet.

## Ordre Total :

- Réflexif, antisymétrique, transitif, complet.
  - Exemple: Classement dans une course

## Ordre Total :

- Réflexif, antisymétrique, transitif, complet.
  - Exemple: Classement dans une course

## Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.

## Ordre Total :

- Réflexif, antisymétrique, transitif, complet.
  - Exemple: Classement dans une course

## Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.
  - Exemple: Groupes sanguins

## Ordre Total :

- Réflexif, antisymétrique, transitif, complet.
  - Exemple: Classement dans une course

## Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.
  - Exemple: Groupes sanguins

## Ordre Partiel :

- Réflexive, antisymétrique, transitive.

## Ordre Total :

- Réflexif, antisymétrique, transitif, complet.
  - Exemple: Classement dans une course

## Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.
  - Exemple: Groupes sanguins

## Ordre Partiel :

- Réflexive, antisymétrique, transitive.
  - Hiérarchie dans une entreprise

## Ordre Total :

- Réflexif, antisymétrique, transitif, complet.
  - Exemple: Classement dans une course

## Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.
  - Exemple: Groupes sanguins

## Ordre Partiel :

- Réflexive, antisymétrique, transitive.
  - Hiérarchie dans une entreprise

## Ordre Faible :

- Réflexive, complet et transitif.

## Ordre Total :

- Réflexif, antisymétrique, transitif, complet.
  - Exemple: Classement dans une course

## Équivalence :

- Symétrique, réflexive et transitive.
  - Exemple: Groupes sanguins

## Ordre Partiel :

- Réflexive, antisymétrique, transitive.
  - Hiérarchie dans une entreprise

## Ordre Faible :

- Réflexive, complet et transitif.
  - Préférences de film ?

## Sémantique :

- $a \geq b$  :  $a$  est au moins aussi bon que  $b$ .
- Si  $\geq$  est un *ordre faible*, alors il peut être décomposé en :

$$\geq = > \cup \sim$$

- où :
  - $a > b \iff a \geq b \text{ et } \neg(b \geq a)$   
(relation irréflexive, asymétrique et transitive)
  - $a \sim b \iff a \geq b \text{ et } b \geq a$   
(relation réflexive, symétrique et transitive)

Soit un ensemble  $A$  et une relation binaire  $\geq \subseteq (A \times A)$ :

$\exists f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $a \geq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$  si et seulement si  $\geq$  est un ordre faible.

# Représentation numérique des Relation Binaire

Soit un ensemble  $A$  et une relation binaire  $\geq \subseteq (A \times A)$ :

$\exists f : A \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $a \geq b \Leftrightarrow f(a) \geq f(b)$  si et seulement si  $\geq$  est un ordre faible.

Prenons l'exemple de la température:

$A = \{a = \text{"Très chaud"}, b = \text{"Chaud"}, c = \text{"Froid"}, d = \text{"Très froid"}\}.$

On peut remplacer  $A$  par :

$\{f(a) = 30, f(b) = 20, f(c) = 10, f(d) = 0\},$  ou

$\{f(a) = 3, f(b) = 2, f(c) = 1, f(d) = 0\},$  ou

$\{f(a) = 56, f(b) = 22, f(c) = 4, f(d) = -505\}.$

1 Relation Binaire

2 Mesure

# Qu'est-ce que la mesure ?

## Définition

La mesure est le processus de construction d'une fonction qui associe un ensemble d'“objets” à un ensemble de “mesures”.

## Origine des Objets et des Mesures

- Les objets proviennent du monde réel.
- Les mesures découlent d'observations empiriques sur certains attributs de ces objets.

## Problématique

Le défi consiste à déterminer comment construire cette fonction à partir de telles observations.

# Exemples: mesurer des cordes

## Preuve Empirique

Soit une preuve empirique indiquant que  $e > d > c > b > a$ .

## Exemples mesurer des cordes

Différentes représentations numériques peuvent refléter cette preuve :

| Objet    | L1 | L2 | L3 |
|----------|----|----|----|
| <i>a</i> | 14 | 10 | 14 |
| <i>b</i> | 15 | 91 | 16 |
| <i>c</i> | 20 | 92 | 17 |
| <i>d</i> | 21 | 93 | 18 |
| <i>e</i> | 28 | 99 | 29 |

Toute transformation croissante de la représentation numérique est compatible avec la preuve empirique.

## Exemples: mesurer des cordes

Considérons l'assemblage des objets et l'observation suivante :

$$a + e > c + d > a + b > e > d > c > b > a$$

### Représentations Numériques Proposées pour les cordes

Voici trois représentations numériques possibles pour  $\alpha_1$  à  $\alpha_5$  :

| Objet    | L1 | L2 | L3 |
|----------|----|----|----|
| <i>a</i> | 14 | 10 | 14 |
| <i>b</i> | 15 | 91 | 16 |
| <i>c</i> | 20 | 92 | 17 |
| <i>d</i> | 21 | 93 | 18 |
| <i>e</i> | 28 | 99 | 29 |

## Exemples: mesurer des cordes

Considérons l'assemblage des objets et l'observation suivante :

$$a + e > c + d > a + b > e > d > c > b > a$$

### Représentations Numériques Proposées pour les cordes

Voici trois représentations numériques possibles pour  $\alpha_1$  à  $\alpha_5$  :

| Objet    | L1 | L2 | L3 |
|----------|----|----|----|
| <i>a</i> | 14 | 10 | 14 |
| <i>b</i> | 15 | 91 | 16 |
| <i>c</i> | 20 | 92 | 17 |
| <i>d</i> | 21 | 93 | 18 |
| <i>e</i> | 28 | 99 | 29 |

L1, L2 et L3 capturent l'ordre simple entre *a* à *e*, mais L2 ne parvient pas à représenter l'ordre entre les combinaisons d'objets.

# Exemples mesurer des cordes: Fixation d'une Séquence Standard

## Remarque Importante

En utilisant L1 comme représentation, nous observons que  $b + c \sim a + d$ , tandis qu'avec L3, nous obtenons  $b + c > a + d$ . Il est nécessaire de fixer une "séquence standard".

## Longueur

Si nous fixons une "longueur standard", une unité de mesure, alors tous les objets seront exprimés en multiples de cette unité.

## Conséquence sur la Mesure

En fixant cette unité de mesure, nous établissons une base commune pour toutes les mesures, ce qui permet de garantir la cohérence et la comparabilité des évaluations.

## Détermination de la Valeur de $a$ par Rapport à $s$

① Est-ce que  $s > a$ ? **NON**

## Détermination de la Valeur de $a$ par Rapport à $s$

- 1 Est-ce que  $s > a$ ? **NON**
- 2 Est-ce que  $2s > a$ ? **NON**

## Détermination de la Valeur de $a$ par Rapport à $s$

- ① Est-ce que  $s > a$ ? **NON**
- ② Est-ce que  $2s > a$ ? **NON**
- ③ Est-ce que  $3s > a$ ? **NON**

# Exemples mesurer des cordes: Créer une Séquence Standard

## Détermination de la Valeur de $a$ par Rapport à $s$

- ① Est-ce que  $s > a$ ? **NON**
- ② Est-ce que  $2s > a$ ? **NON**
- ③ Est-ce que  $3s > a$ ? **NON**
- ④ Est-ce que  $4s > a$ ? **OUI**

## Conclusion

Ainsi,  $4s > x > 3s$  définit la valeur relative de  $a$ .

Si on choisit  $f(s) = 1$ , alors  $4 > f(a) > 3$ .

# Exemples mesurer des cordes: Comment Converger vers une Échelle Standard ?

## Première Option : Création de Standards Plus Petits

Créer des standards plus petits et répéter l'opération jusqu'à ce que, pour un certain standard  $s$ , on obtienne  $a \sim s \circ s \circ \dots \circ s$  ( $k$  fois). Alors  $f(a) = kf(s)$ .

## Deuxième Option : Duplication de l'Objet

Faire des copies de l'objet et les concaténer.

Répéter l'opération jusqu'à ce que  $a + a + \dots + a$  ( $n$  fois)  $\sim s + s + \dots + s$  ( $m$  fois). Alors  $nf(a) = mf(s)$ .

# Exemples mesurer des cordes: Conséquences de la Fixation d'une Séquence Standard

## Comparaison avec une Séquence de Standards/Unités

Chaque objet est comparé à une séquence de standards ou d'unités de mesure.

## Rapport Constant entre les Objets

Indépendamment de la nature du standard ou de l'unité choisie, le rapport des unités entre deux objets quelconques reste constant.

## Échelle de Ratio

Cela définit une échelle de ratio où les valeurs mesurées permettent non seulement de faire des comparaisons d'ordre, mais aussi de calculer des proportions et des différences significatives.

# Nouveau Contexte : Mesure de la Différence d'État d'un Système

## Observation d'un Système à Deux Moment Différents

Considérons un système observé à un moment  $t_1$  puis au moment  $t_2$ . Nous voulons représenter la différence entre les deux états. Quel est le standard ici ?

## Établissement d'une Origine : Exemple de la Température

- Il est nécessaire d'établir une origine par rapport à laquelle mesurer les différences.
- On établit arbitrairement comme standard un état du système que l'on peut observer objectivement : le point de congélation de l'eau.

## Établissement d'une Séquence Standard

- Il est également nécessaire d'établir une séquence standard pour la distance.
- On détermine un autre état observable objectivement : le point d'ébullition de l'eau  $t_b$ .  
La température où l'eau bout :  $t_b$ .
- Le standard  $\frac{t_b - t_i}{100}$  est notre unité de mesure.

# Nouveau Contexte : Mesure de la Différence d'État d'un Système

## Constante des Ratios entre les Différences

Indépendamment de l'origine et de l'unité choisie, le ratio entre les différences d'unités reste constant.

## Échelle d'Intervalle

Cela définit une échelle d'intervalle où les valeurs sont comparables en termes de distances relatives.

# Résumé sur les Types d'Échelles

## Échelles Ordinales :

Toute transformation monotone non décroissante de l'échelle fournit la même information concernant les observations empiriques et l'ordre entre elles.

## Échelles d'Intervalle :

Toute transformation affine (du type  $\alpha x + \beta$ ) de l'échelle fournit la même information concernant les observations empiriques et l'ordre entre elles.

## Échelles de Rapport :

Toute transformation proportionnelle (du type  $\alpha x$ ) de l'échelle fournit la même information concernant les observations empiriques et l'ordre entre elles.

# Signifiante

Chaque type d'échelle autorise un certain type de transformations admissibles qui ne modifient pas arbitrairement les observations empiriques.

Échelle Ordinale :

$$f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow \Phi(f(x)) \geq \Phi(f(y))$$

Échelle d'Intervalle :

$$\frac{f(x)-f(y)}{f(z)-f(w)} = k \Leftrightarrow \frac{\Phi(f(x))-\Phi(f(y))}{\Phi(f(z))-\Phi(f(w))} = k$$

Échelle de Rapport :

$$\frac{f(x)}{f(y)} = k \Leftrightarrow \frac{\Phi(f(x))}{\Phi(f(y))} = k$$

En fonction des transformations admissibles on distingue  $\neq$  types d'échelles

| Transformations admissibles              | Type d'échelle               | Exemples                                                          |
|------------------------------------------|------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\phi(x) = x$                            | Echelle <b>absolue</b>       | Un nombre d'éléments indivisibles, Probabilités                   |
| $\phi(x) = \alpha x, \alpha > 0$         | Echelle de <b>rapport</b>    | Masse, température en Kelvin, intervalles de temps,...            |
| $\phi(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0$ | Echelle d' <b>intervalle</b> | Température en degrés Celsius, date (relation plus tard que), ... |
| $x \geq y$ ssi $\phi(x) \geq \phi(y)$    | Echelle <b>ordinaire</b>     | Préférences ?, certains indices de qualité de l'air, ...          |
| $\phi$ injective                         | Echelle <b>nominale</b>      | Codes des UEs, numéros sur les maillots d'une équipe, ...         |

**On cherche à se ramener au type d'échelle le plus strict possible pour définir le phénomène empirique observé.**

## Affirmations significatives

En théorie classique de la mesure, une affirmation est déclarée significative si sa valeur de vérité reste inchangée lorsque des transformations admissibles sont appliquées aux échelles utilisées dans l'affirmation.

# Exemple : La Course (temps en secondes)

## La course

| Équipe A = {a; d; f; j} et Équipe B = {b; c; e; g; h; i} |      |      |      |    |    |    |    |      |      |    |
|----------------------------------------------------------|------|------|------|----|----|----|----|------|------|----|
| Athlète                                                  | a    | b    | c    | d  | e  | f  | g  | h    | i    | j  |
| Temps (s)                                                | 43.5 | 43.7 | 44.2 | 45 | 47 | 48 | 52 | 52.1 | 52.5 | 55 |

Sur la base de ces chiffres, les affirmations suivantes sont-elles valides (vrai ou faux) ?

- 1 Le temps moyen de l'Équipe B est supérieur à celui de l'Équipe A;
- 2 Le deuxième meilleur temps (le plus bas) dans l'Équipe B est inférieur au deuxième meilleur temps dans l'Équipe A.

Sont elles significatives?

## Exemple : La Course (temps en secondes)

### La course

Équipe A = {a; d; f; j} et Équipe B = {b; c; e; g; h; i}

| Athlète     | a     | b     | c     | d    | e     | f   | g     | h     | i     | j     |
|-------------|-------|-------|-------|------|-------|-----|-------|-------|-------|-------|
| Temps (min) | 0.725 | 0.728 | 0.737 | 0.75 | 0.783 | 0.8 | 0.867 | 0.868 | 0.875 | 0.917 |

Toutes les affirmations restent valides.

**Remarque Générale :** Comme une durée est entièrement définie par le choix d'une unité (l'origine étant "naturelle"), toute multiplication par une constante positive devrait être possible sans changer les conclusions.

## Températures observées (en degrés Celsius)

Les températures (en  $C^{\circ}$ ) ont été mesurées à midi dans deux pays européens, pendant respectivement 10 et 8 jours consécutifs.

| J | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| a | 18 | 16 | 15 | 14 | 14 | 15 | 13 | 15 | 17 | 18 |
| b | 14 | 12 | 13 | 15 | 14 | 13 | 15 | 16 | -  | -  |

Sur la base de ces chiffres, les affirmations suivantes sont-elles valables (vraies ou fausses) ?

- La température moyenne dans le pays a est supérieure à la température moyenne dans le pays b.
- La température la plus élevée du pays a est plus de 1,5 fois supérieure à la température la plus basse du pays b.
- La somme des trois températures les plus élevées du pays a est supérieure à la somme des quatre températures les plus basses du pays b.

Sont elles significative ?

## Températures observées (en degrés Celsius et Fahrenheit)

| Jour         | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Ville A (°C) | 18   | 16   | 15   | 14   | 14   | 15   | 13   | 15   | 17   | 18   |
| Ville B (°C) | 14   | 12   | 13   | 15   | 14   | 13   | 15   | 16   | -    | -    |
| Jour         | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| Ville A (°F) | 64.4 | 60.8 | 59   | 57.2 | 57.2 | 59   | 55.4 | 59   | 62.6 | 64.4 |
| Ville B (°F) | 57.2 | 53.6 | 55.4 | 59   | 57.2 | 55.4 | 59   | 60.8 | -    | -    |

Une échelle de température est complètement définie lorsque l'origine et l'unité sont fixées. Toute transformation de la forme  $\alpha x + \beta$  (avec  $\alpha > 0$ ) devrait être possible sans changer les conclusions. Or, les conclusions des affirmations (2) et (3) changent.

## La réforme

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

|                       | Avant | Après |
|-----------------------|-------|-------|
| Très défavorable (TD) | 25    | 30    |
| Défavorable (D)       | 20    | 30    |
| Favorable (F)         | 45    | 25    |
| Très favorable (TF)   | 10    | 15    |

$$L_1 = f(TD) = 1, f(D) = 2, f(F) = 3, f(TF) = 4$$

“En moyenne, le niveau de satisfaction à baissé” :  $E(f(Av)) = 2.4$   $E(f(Ap)) = 2.25$

On a  $E(f(Av)) > E(f(Ap))$

## La réforme

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

|                       | Avant | Après |
|-----------------------|-------|-------|
| Très défavorable (TD) | 25    | 30    |
| Défavorable (D)       | 20    | 30    |
| Favorable (F)         | 45    | 25    |
| Très favorable (TF)   | 10    | 15    |

$$L_1 = f(TD) = 1, f(D) = 2, f(F) = 3, f(TF) = 4$$

“En moyenne, comment la satisfaction à évolué ”:

## La réforme

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

|                       | Avant | Après |
|-----------------------|-------|-------|
| Très défavorable (TD) | 25    | 30    |
| Défavorable (D)       | 20    | 30    |
| Favorable (F)         | 45    | 25    |
| Très favorable (TF)   | 10    | 15    |

Est ce que  $L_2 = f'(TD) = 1, f'(D) = 2, f'(F) = 3, f'(TF) = 7$  est une bonne échelle?

“En moyenne, le niveau de satisfaction est stable”:  $E(f'(Av)) = 2.7$   $E(f'(Ap)) = 2.7$

On a  $E(f'(Av)) = E(f'(Ap))$

## La réforme

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

|                       | Avant | Après |
|-----------------------|-------|-------|
| Très défavorable (TD) | 25    | 30    |
| Défavorable (D)       | 20    | 30    |
| Favorable (F)         | 45    | 25    |
| Très favorable (TF)   | 10    | 15    |

Est ce que  $L_3 = f''(TD) = 1, f''(D) = 2, f''(F) = 3, f''(TF) = 10$  est une bonne échelle?

“En moyenne, le niveau de satisfaction est stable”:  $E(f''(Av)) = 3$   $E(f''(Ap)) = 3.25$

On a  $E(f''(Av)) < E(f''(Ap))$

## La réforme

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

|                       | Avant | Après |
|-----------------------|-------|-------|
| Très défavorable (TD) | 25    | 30    |
| Défavorable (D)       | 20    | 30    |
| Favorable (F)         | 45    | 25    |
| Très favorable (TF)   | 10    | 15    |

On peut dire :

$$\textit{médiane}(Av) > \textit{médiane}(Ap)$$

$$Q_1(Av) = Q_1(Ap)$$

$$Q_3(Av) = Q_3(Ap)$$