

Théorie de la mesure: Signifiante.

Nicolas Fayard

8 Février 2023

- Des échelles numériques différentes sont considérées comme "équivalentes" si elles supportent (représentent) la même information sur les objets considérés : nous les appellerons "info-équivalentes".
- Par "**transformations admissibles**", on entend "transformations en échelles numériques équivalentes".

Affirmation significative

Dans la théorie classique de la mesure, une affirmation est déclarée **significative** si sa **valeur de vérité reste inchangée** lorsque des transformations admissibles sont appliquées sur les échelles utilisées dans l'affirmation.

Les types d'échelle:

L'échelle ordinale

Une échelle est ordinale si ses transformations admissibles sont toutes strictement croissantes.

L'échelle d'intervalle

C'est une échelle d'intervalle si ses transformations admissibles sont toutes des transformations affines positives de la forme:

$$\phi(x) = \alpha x + \beta \text{ (avec } \alpha > 0 \text{)}$$

Dans ce cas, l'échelle est déterminée de manière univoque par le choix d'une origine et de une unité.

Les types d'échelle:

L'échelle des ratios

C'est une échelle de rapport si ses transformations admissibles sont les transformations homothétiques positives de la forme:

$$\phi(x) = \alpha x \text{ (avec } \alpha > 0 \text{)}$$

Dans ce cas, l'échelle est déterminée de manière univoque par le choix d'une unité, l'origine étant "naturellement fixe".

L'échelle absolue

L'échelle absolue n'accepte aucune transformation admissible (sauf l'identité).

Ex : une échelle de comptage ou de probabilité.

Exercice 1

On a demandé à un groupe de 100 personnes représentatives leurs avis sur le gouvernement avant et après une réforme.

	Avant	Après
Très défavorable (TD)	25	30
Défavorable (D)	20	30
Favorable (F)	45	25
Très favorable (TF)	10	15

Table: Nombre de réponse par catégorie des participants.

Tous s'accordent à dire que $TD \prec D \prec F \prec TF$

Est-ce que $L_1 = f(TD) = 1, f(D) = 2, f(F) = 3, f(TF) = 4$ est une bonne échelle ?

Exercice 1

	Avant	Après
Très défavorable (TD)	25	30
Défavorable (D)	20	30
Favorable (F)	45	25
Très favorable (TF)	10	15

Table: Nombre de réponse par catégorie des participants.

$$L_1 = f(TD) = 1, f(D) = 2, f(F) = 3, f(TF) = 4$$

"En moyenne, le niveau de satisfaction à baissé":

$$E(f(Av)) = (25 \times f(TD) + 20 \times f(D) + 45 \times f(F) + 10 \times f(TF)) / 100 = 2.4$$

$$E(f(Ap)) = (30 \times f(TD) + 30 \times f(D) + 25 \times f(F) + 15 \times f(TF)) / 100 = 2.25$$

On a $E(f(Av)) > E(f(Ap))$

Exercice 1

	Avant	Après
Très défavorable (TD)	25	30
Défavorable (D)	20	30
Favorable (F)	45	25
Très favorable (TF)	10	15

Table: Nombre de réponse par catégorie des participants.

Est ce que $L_2 = f'(TD) = 1, f'(D) = 2, f'(F) = 3, f'(TF) = 7$ est une bonne échelle?

"En moyenne, le niveau de satisfaction est stable":

$$E(f'(Av)) = (25 \times f'(TD) + 20 \times f'(D) + 45 \times f'(F) + 10 \times f'(TF)) / 100 = 2.7$$

$$E(f'(Ap)) = (30 \times f'(TD) + 30 \times f'(D) + 25 \times f'(F) + 15 \times f'(TF)) / 100 = 2.7$$

On a $E(f'(Av)) = E(f'(Ap))$

Exercice 1

	Avant	Après
Très défavorable (TD)	25	30
Défavorable (D)	20	30
Favorable (F)	45	25
Très favorable (TF)	10	15

Table: Nombre de réponse par catégorie des participants.

Est ce que $L_3 = f''(TD) = 1, f''(D) = 2, f''(F) = 3, f''(TF) = 10$ est une bonne échelle?

"En moyenne, le niveau de satisfaction est stable": $E(f''(Av)) = (25 \times f''(TD) + 20 \times f''(D) + 45 \times f''(F) + 10 \times f''(TF))/100 = 3$

$E(f''(Ap)) = (30 \times f''(TD) + 30 \times f''(D) + 25 \times f''(F) + 15 \times f''(TF))/100 = 3.25$ On a $E(f''(Av)) < E(f''(Ap))$

Exercice 1

	Avant	Après
Très défavorable (TD)	25	30
Défavorable (D)	20	30
Favorable (F)	45	25
Très favorable (TF)	10	15

Table: Nombre de réponse par catégorie des participants.

On peut dire :

$médiane(Av) > médiane(Ap)$

$Q_1(Av) = Q_1(Ap)$

$Q_3(Av) = Q_3(Ap)$

Exercice 2

J	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	20	16	15	14	14	15	13	15	16	18
b	14	12	13	15	14	13	15	16	-	-

Table: Les températures (en C°) ont été mesurées à midi dans deux pays européens, pendant respectivement 10 et 8 jours consécutifs.

Sur la base de ces chiffres, les affirmations suivantes sont-elles valables (vraies ou fausses) ?

- La température moyenne dans le pays a est supérieure à la température moyenne dans le pays b.
- La température la plus élevée du pays a est plus de 1,5 fois supérieure à la température la plus basse du pays b.
- La somme des trois températures les plus élevées du pays a est supérieure à la somme des quatre températures les plus basses du pays b.

Sont elles significative ?

- Bouyssou D., Marchant Th., Pirlot M., Tsoukiàs A., Vincke Ph., Evaluation and Decision Models: stepping stones for the analyst, Springer Verlag, Berlin, 2006.
- Bouyssou D., Marchant Th., Perny P., Pirlot M., Tsoukiàs A., Vincke Ph., Evaluation and Decision Models: a critical perspective, Kluwer Academic, Dordrecht, 2000.
- Roberts F.S., Measurement theory, with applications to Decision Making, Utility and the Social Sciences, Addison-Wesley, Boston, 1979.