Coupes disjonctives pour la programmation mixte sous contraintes quadratiques

A. Saxena[11] P.Bonami[22] et J. Lee[3]

1. Tepper School of Business, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213, USA
anureets@andrew.cmu.edu

2. Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille,
CNRS-Université de Marseille, France
pierre.bonami@lif.univ-mrs.fr

3. IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY 10598 USA
jonlee@us.ibm.com

Mots-clefs : Optimisation Globale, Programmation non-linéaire en nombres entiers, Programmation entière sous contraintes quadratiques, Programmation disjonctive

Pour un résumé long de ces travaux le lecteur est invité à se reporter à [8].

Nous étudions des programmes mixtes sous contraintes quadratiques de la forme :

$$\begin{array}{lrcll}
\min & & a_0^T x & & \\
s.t. & & & & \\
 & x^T A_i x + a_i^T x + b_i & \leq & 0\ , & i = 1 \dots m\ ; \\
 & x_j & \in & \mathbb{Z}\ , & j \in N_I\ ; \\
 & l \leq x & \leq & u\ , &
\end{array} \qquad (\mathbf{MIQCP'})$$

où N ($n = |N|$) est l'ensemble des variables, N_I l'ensemble des variables entières, A_i (i=1,...,m) sont des matrices symétriques $n \times n$ (en général non semi-défini positives), a_i $(i = 0, \dots, m)$ l et u sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et b_i $(i = 1, \dots, m)$ sont des scalaires.

Les problèmes du type de ($\mathbf{MIQCP'}$) sont très difficiles car ils combinent deux types de non-convexité : des variables entières et des contraintes quadratiques non-convexes. Dans ces travaux nous proposons de construire des relaxations fortes de ($\mathbf{MIQCP'}$) en utilisant des techniques de programmation disjonctive et la méthodologie du lift-and-project.

Une approche standard pour dériver des relaxation convexes de ($\mathbf{MIQCP'}$) et d'introduire des variables représentant le produit de x_i par x_j : $y_{ij} = x_i x_j$. On obtient ainsi la formulation étendue suivante :

$$\begin{array}{lrcll}
\min & & a_0^T x & & \\
s.t. & & & & \\
 & A_i.Y + a_i^T x + b_i & \leq & 0\ , & i = 1 \dots m\ ; \\
 & x_j & \in & \mathbb{Z}\ , & j \in N_I\ ; \\
 & l \leq x & \leq & u\ ; & \\
 & Y & = & xx^T\ . &
\end{array} \qquad (\mathbf{MIQCP})$$

[1]Ces travaux ont été effectuś en partie lorsque le premier auteur visitait IBM T.J. Watson Research Center à Yorktown Heights qui est remerciéé pour son soutien. Aussi soutenu par la grant NSF DMI-0352885 et par la grant ONR N00014-03-1-0133

[2]La recherche du second auteur a été effectué en partie lorsque celui-ci travaillait au centre IBM T.J. Watson. Le second auteur est soutenu par le contrat ANR BLAN06-1-138894

Notons que la seule contrainte non-linéaire (et non-convexe) de (**MIQCP**) est $Y = xx^T$. Celle-ci peut être reformulée comme un paire de contraintes SDP : $Y - xx^T \succcurlyeq 0$ et $xx^T - Y \succcurlyeq 0$. La première de ces contraintes est une contrainte SDP convexe et peut être prise en compte efficacement par des méthodes de programmation semi-définie. La seconde contrainte, non-convexe, constitue l'objet principal de nos recherches.

Un aspect important des programmes non-convexes est que ceux-ci se composent souvent de contraintes non-convexes de structure simple liées par un ensemble de contraintes convexes. Dans de telles problèmes convexifier les contraintes non-convexes indépendamment les unes des autres n'amène pas à des relaxations fortes. Pour obtenir de telles relaxations, il est nécessaire d'utiliser des approches qui utilisent les contraintes liant les différentes sources de non-convexité. Ici une relaxation convexe classique de (**MIQCP**) est obtenue en relachant les contraintes d'intégrité et en remplaçant la contrainte $y_{ij} = x_i x_j$ par son enveloppe convexe donnée par les inégalités de McCormick ou Sherali-Adams[7, 9]. Cette relaxation peut être renforcée par l'ajout de la contrainte SDP convexe $Y - xx^T \succcurlyeq 0$ [6, 10, 3, 1]. La relaxation ainsi obtenue est relativement faible car elle prend en compte chaque non-convexité séparément sans prendre en compte les contraintes liant ces non-convexités. Pour renforcer cette relaxation, nous proposons un algorithme de génération d'inégalités valides basé sur la programmation disjonctive de Balas [2]. Cette approche permet de dériver des inégalités prenant en compte la totalité du problème de manière à capitaliser sur les interaction entre les différentes contraintes.

Pour appliquer la programmation disjonctive, nous devons traduire les sources de non-convexités de (**MIQCP**) sous la forme de disjonctions. Pour les contraintes d'intégralité sur les variables x_j ($j \in N_I$) nous utilisons les méthodes qui ont été développées au cours des 30 dernières années. Notre principale contribution est de dériver aussi des disjonctions valides à partir de la contrainte $xx^T - Y \succcurlyeq 0$. Pour cela, nous analysons les valeurs propres et vecteur propres de la matrice $\hat{Y} - \hat{x}\hat{x}^T$. Ceci nous permet de dériver des inégalités simples de la forme $Y.cc^T \leq (c^T x)^2$ qui sont à la base des disjonctions que nous utilisons. Nous proposons plusieurs méthodes pour dériver les inégalités du type $Y.cc^T \leq (c^T x)^2$, en particulier nous introduisons la notion de *largeur* d'une disjonction et montrons que les disjonctions de petite largeur sont à même de donner des bonnes coupes pour les problèmes quadratiques. Basé sur cette observation nous proposons un modèle nous permettant de trouver de meilleures disjonctions.

Ainsi nous proposons 3 algorithmes permettant d'obtenir des relaxations de plus en plus fortes :

1. le premier algorithme résoud la relaxation classique de (**MIQCP**) en approchant la contrainte SDP $Y - xx^T \succcurlyeq 0$ par des contraintes quadratiques convexes ;

2. Le second ajoute au premier des coupes disjonctives issues des valeurs propres strictement positives de la matrice $\hat{Y} - \hat{x}\hat{x}^T$;

3. le troisième ajoute au second des disjonctions diversifiées et de largeur minimale.

Les méthodes que nous développons ont été implémentées puis testées sur trois types d'instances : une selection des problème de la GlobalLib[4], des exemples de problèmes proposés par Grossmann et Lee[5] et des instances de problèmes quadratiques non-convexes sous contraintes de bornes[11]. Nous présentons des résultats de calcul sur ces trois types d'instances.

Références

[1] K. M. Anstreicher, Semidefinite Programming versus the Reformulation-Linearization Technique for Nonconvex Quadratically Constrained Quadratic Programming. Pre-print. Optimization Online, May 2007.

[2] E. Balas, Disjunctive programming : properties of the convex hull of feasible points. *Disc. Appl. Math.*, 89 (1-3), 1998, 3-44.

[3] S. Burer et D. Vandenbussche. A finite branch-and-bound algorithm for nonconvex quadratic programming via semidefinite relaxations. To appear in *Math. Programming.*

[4] GLOBALLib, `www.gamsworld.org/global/globallib/globalstat.htm`

[5] S. Lee et I. E. Grossmann. A global optimization algorithm for nonconvex generalized disjunctive programming and applications to process systems. Computers and Chemical Engineering. 25, 2001, 1675-1697.

[6] S. Kim et M. Kojima. Second order cone programming relaxation of nonconvex quadratic optimization problems. *Optim. Methods and Software.* 15, 2001, 201-204.

[7] G. P. McCormick. Computability of global solutions to factorable nonconvex programs : Part I Convex underestimating problems. *Math. Prog.*, 10, 1976, 147-175.

[8] A. Saxena, P. Bonami et J. Lee. Disjunctive Cuts for Non-Convex Mixed Integer Quadratically Constrained Programs. IPCO2008, mai 2008, Bologne.

[9] H. D. Sherali et W. P. Adams. A reformulation-linearization technique for solving discrete and continuous nonconvex problems. Kluwer, Dordecht 1998.

[10] H. D. Sherali et B.M.P. Fraticelli. Enhancing RLT relaxations via a new class of semidefinite cuts. *J. Global Optim.* 22, 2002, 233-261.

[11] D. Vandenbussche and G.L. Nemhauser. A branch-and-cut algorithm for nonconvex quadratic programs with box constraints. *Math. Prog.*, 102(3), 2005, 559-575.