

# Le polyèdre du problème de conception de réseaux robustes K-arête connexe avec 3 sauts.

Q.Botton<sup>1</sup>, B.Fortz<sup>2</sup> et L.Gouveia<sup>3</sup>

1. *Université catholique de Louvain, Institut d'Administration et de Gestion,  
1, Place des Doyens,  
1348, Louvain-la-Neuve, Belgique  
quentin.botton@uclouvain.be*

2. *Université libre de Bruxelles, Département d'informatique,  
Campus de la Plaine, Boulevard du Triomphe,  
1050 Bruxelles, Belgique  
bernard.fortz@ulb.ac.be*

3. *Université de Lisbonne, Département de statistiques et de recherche opérationnelle,  
C6, Campo Grande,  
1749-016 Lisbonne, Portugal  
legouveia@fc.ul.pt*

**Mots-clefs :** Conception de Réseaux Robustes, Qualité de Service, Contraintes de Sauts, Chemins Disjoints.

## 1 Introduction

Ce papier considère l'étude du problème de conception de réseaux robustes K-arête connexe avec un maximum de 3 sauts. Celui-ci consiste à trouver le sous-graphe de coût minimum de telle manière qu'il existe, pour chaque demande ou commodité, au moins K-chemins arête-disjoint d'une part et assurant que le nombre d'arêtes utilisées dans chaque chemin n'est pas supérieur à un paramètre  $L$  fixé, d'autre part. Dans le cas d'espèce, nous nous focalisons dans un premier temps sur la version simple commodité et nous fixons le paramètre  $L \leq 3$ . Ce problème a été souvent étudié par le passé dans l'espace des variables de design, variables binaires associées à chaque arête potentiellement sélectionnable. Dans cet article, nous proposons une formulation étendue utilisant uniquement les variables de flot pour modéliser les chemins. Nous démontrons que la relaxation linéaire de notre modèle donne pour  $L \leq 3$  et pour  $K \geq 1$  d'une part une description complète du polyèdre associé pour la version arc-disjoint et d'autre part pour la version arête-disjoint nous montrons que la solution optimale de la relaxation linéaire est toujours entière si et seulement si les coûts d'installation des arêtes sont non-négatifs. Enfin, nous étudions la qualité de la borne inférieure proposée par la relaxation linéaire de notre modèle lorsque  $L$  est supérieur à 3.

## 2 Revue de la littérature

La robustesse dans le domaine de la conception de réseaux est une classe de problèmes sur laquelle la recherche de ces dernières années s'est fortement concentrée. Sous l'hypothèse de panne(s), certains chercheurs préconisent des techniques de reroutage dit local, qui consistent à trouver un ou plusieurs nouveau(x) plus court(s) chemin(s) entre les extrémités de l'arête (pour des pannes d'arêtes) endommagée. Alors que d'autres, et nous nous rattachons à ces personnes dans le cadre de cette étude, s'attachent à trouver de nouveaux chemins entre l'origine et la

destination de toutes les demandes affectées par la panne. Dans le cadre de cet article, nous traitons la robustesse en trouvant pour chaque commodité  $K$ -chemins arête(arc)-disjoint, (si une arête (un arc) est utilisée par un des  $K$ -chemins, alors cette arête ne sera plus utilisable par la suite). Nous garantissons dès lors un certain degré de protection lié au paramètre  $K$ . En effet,  $K - 1$  arêtes (arcs) de chemins différents peuvent tomber en panne simultanément, sans pour autant que cela aie un impact important sur la qualité du service. Néanmoins, cette contrainte de robustesse n'est pas suffisante car en cas de panne, il se peut que certains de ces  $K$ -chemins arête-disjoint soient particulièrement longs, ce qui pourrait se répercuter dans une augmentation du délai de réception de l'information et dès lors dans une diminution de la qualité de service proposé. Dès lors, il est logique d'ajouter une contrainte supplémentaire qui viendrait limiter la longueur des plus courts chemins à utiliser, cette longueur étant ici représentée en termes du nombre d'arêtes (arcs) utilisées par ces chemins. Ces nouvelles contraintes sont appelées "contraintes de sauts". Nous pouvons mettre en exergue trois courants principaux de recherche qui ont intégré ces contraintes de sauts.

Le premier concerne les problèmes de recherche d'arbres de couverture avec contraintes de sauts qui consistent à trouver l'arbre de couverture de coût minimum de telle manière que chaque chemin entre la racine et les feuilles n'utilise pas plus de  $L$  sauts. Ce problème a été largement étudié par Gouveia [8], [9] dans lesquels l'auteur propose une formulation de flot multicommodités et discute l'utilisation de relaxation lagrangienne afin d'améliorer la borne inférieure. Dans [10], Gouveia et Requejo proposent une formulation "hop-indexed" basée sur une représentation en couches du graphe d'origine. Cette formulation est exprimée dans un espace de nouvelles variables de flot et non pas dans l'espace original des variables de "design". Dans [3], Dahl propose une étude du polyèdre de ce type de problème lorsque le nombre de sauts est limité à 2.

Le second courant se concentre sur la recherche du plus court chemin entre un noeud d'origine  $o$  et une destination  $d$  en garantissant l'utilisation d'au maximum  $L$  sauts. Dans [4], Dahl et dans [6], Dahl et Gouveia donnent une description complète du polyèdre pour  $L \leq 3$  en définissant les "Jump Inequalities" pour lesquelles le problème de séparation peut être résolu en temps polynomial. Dans [5], Dahl, Gouveia et al. étendent leur précédent travail au cas où  $L \leq 4$ .

Le troisième courant important de recherche concernant les contraintes de sauts, est celui étudié dans le cadre de ce papier et qui traite de la conception de réseau avec  $K$ -chemins arête-disjoint qui comporte un nombre maximum de sauts limité au paramètre  $L$ . Dans [1], Balakrishnan et al. donnent une formulation mixte en nombres entiers pour le problème où  $K = 1$  et dérivent une relaxation lagrangienne pour améliorer la borne inférieure. Dans [13], Pirkul et al. proposent une formulation de flots multicommodités et quelques heuristiques basées sur la relaxation linéaire. Dans [7], Dahl et al. étudient le problème où il y a pour chaque paire d'origine-destination  $K$ -chemins arête-disjoint de longueur maximum  $L$  et ils prouvent que le problème est NP difficile même lorsque  $K = 1$  et  $L \leq 2$ . Dans [12], Huygens et al. étudient le même problème pour le cas simple commodité. Ils proposent un modèle en nombres entiers pour  $K = 2$  et  $L \leq 3$  dans l'espace des variables de "design". Dans [11], Huygens et Majhoub proposent de nouvelles inégalités valides pour le problème où  $K = 2$  et  $L \leq 4$  basées sur les "Jump Inequalities". Dans [2], Bley montre que le problème simple commodité noeud-disjoint avec contraintes de sauts est NP-complet pour de grande valeur de  $L$ .

Dans ce papier, nous proposons une formulation étendue, non pas exprimée dans l'espace des variables de "design", mais dans l'espace des variables de flot du graphe en couches proposé par Gouveia [10]. Nous nous servons de l'information supplémentaire livrée par ce graphe pour proposer un modèle simple et performant pour  $L \leq 3$  et  $K \geq 1$ .

### 3 Formulation étendue et propriétés

Comme énoncé ci-dessus, notre modèle est basé sur la représentation alternative en couches du graphe original proposée par Gouveia [10]. Cette représentation transforme le graphe original en intégrant déjà les contraintes de saut d'une manière particulière. L'idée est de créer un nombre de couches strictement équivalent à la valeur du paramètre  $L$  en dupliquant  $L + 1$  fois l'ensemble des noeuds comme illustré sur la Figure 1.

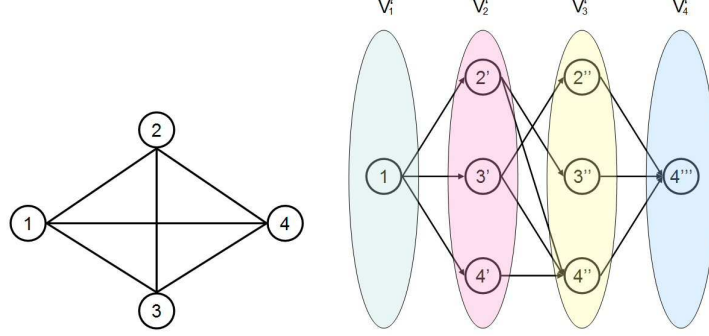


FIG. 1 – Graphe original et sa représentation en couche pour  $L \leq 3$ .

Plus formellement d'un graphe original non-dirigé  $G = (V, E)$ , nous créons un graphe alternatif en couches dirigé  $G' = (V', A')$  dans lequel  $V'$  représente l'ensemble des noeuds et où  $A'$  représente l'ensemble des arcs dirigés dans le graphe en couche.  $V' = \{V'_1 \cup V'_2 \cup \dots \cup V'_{L+1}\}$  où  $V'_1 = \{o\}$ ,  $V'_{L+1} = \{d\}$  et  $V'_l = V \setminus \{o\}$ ,  $l = 2, \dots, L - 1$ . L'ensemble des arcs est défini par  $A' = \{\{(i, j) \mid ij \in E \text{ et } i \in V'_l \text{ et } j \in V'_{l+1}, l = 1, \dots, L\} \cup \{(i, j) \mid ji \in E \text{ et } i \in V'_l \text{ et } j \in V'_{l+1}, l = 1, \dots, L\}\}$ . Il est important de noter que chaque chemin réalisable entre l'origine  $o$  et la destination  $d$  dans le graphe en couches utilise exactement  $L$  arcs. Toutes les solutions non réalisables de notre problème utilisant plus de  $L$  sauts sont automatiquement rejetées. Associé à ce graphe en couche, nous proposons le modèle suivant pour la version arc-disjoint (notée modèle HopA) :

#### Model HopA

$$\min \sum_{l \in \{1, \dots, L\}} \sum_{(i, j) \in A'} c_{ij}^l U_{ij}^l \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{j: (j, i) \in A'} U_{ji}^l - \sum_{j: (i, j) \in A'} U_{ij}^{l+1} = \begin{cases} -K & \text{if } (i = o) \text{ \& } (l = 0) \\ K & \text{if } (i = d) \text{ \& } (l = L) \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad \forall i \in N, \forall l \in \{1, \dots, L\}, \quad (2)$$

$$\sum_{l \in \{1, \dots, L\}} U_{ij}^l \leq 1, \quad \forall (i, j) \in A, \quad (3)$$

$$U_{ij}^l \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A', \forall l \in \{1, \dots, L\} \quad (4)$$

Dans ce modèle,  $U_{ij}^l$  représente la quantité d'information envoyée sur l'arc  $(i, j)$  lorsque celui-ci est utilisé en position  $l$ . Le paramètre  $c_{ij}^l$  représente le coût par unité d'information envoyée

sur l'arc  $(i, j)$  lorsque celui-ci est utilisé en position  $l$ . (1) est la fonction objectif qui minimise le coût total d'installation. (2) sont les contraintes de conservation de flot, notons simplement que pour modéliser les  $K$  chemins disjoints, nous envoyons entre l'origine et la destination une quantité égale au paramètre  $K$  et nous ajoutons les contraintes (4) qui sont des contraintes de binarité sur les variables de décision. Enfin, nous ajoutons les contraintes (3) qui limitent l'usage d'un même arc par plusieurs chemins. Lorsque  $L \leq 3$ , il est trivial d'étendre ce modèle au cas arête-disjoint que nous notons model HopE.

**Proposition 1** *Pour toute valeur de  $L$  et pour  $K = 1$ , la solution optimale de la relaxation linéaire du model HopA (respectivement du modèle HopE) est toujours entière si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées :*

- i)  $\forall (i, j) \in A, \forall l \in \{1, \dots, L\}, c_{ij}^l \leq 0$ ,
- ii)  $\forall (i, j) \in A, \forall (l, q) \in \{1, \dots, L\}^2, c_{ij}^l = c_{ij}^{l+q}$ .

**Proposition 2** *For  $L \leq 3$  and  $K \geq 1$  :*

1. *Le polyèdre défini par les contraintes de la relaxation linéaire du modèle HopA est entier.*
2. *La solution optimale de la relaxation linéaire du modèle HopE est entière si et seulement si :*
  - i)  $\forall ij \in E, \forall l \in \{1, \dots, L\}, c_{ij}^l \geq 0$ .

Les preuves de ces propositions se trouvent dans la version complète du papier.

## 4 Extensions et résultats numériques

Lorsque  $L \leq 4$ , la relaxation linéaire du modèle HopA (respectivement du modèle HopE) n'est plus entière comme illustré au travers d'un contre-exemple à la Figure 2 ci-dessous.

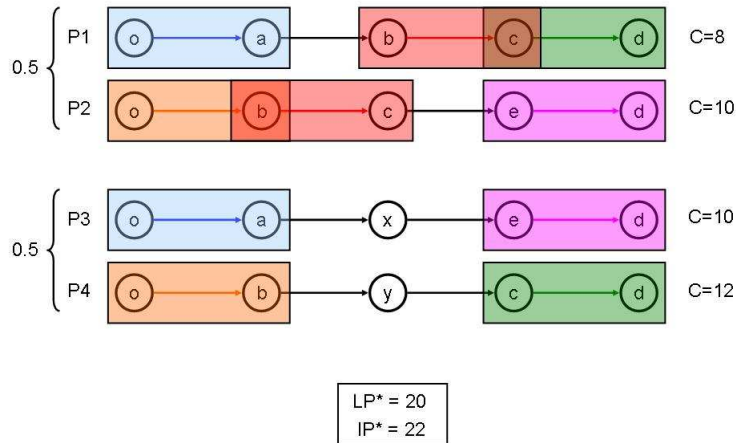


FIG. 2 – Solution optimale fractionnaire pour  $L \leq 4$ .

Néanmoins la qualité de la borne inférieure de la relaxation linéaire est très bonne. Plus de 28000 tests ont été réalisés pour différentes valeurs des paramètres  $L$  ( $\in [4, 6]$ ),  $K$  ( $\in [2, 4]$ ),  $c_{ij}^l$  générés aléatoirement ( $\in [1, 10], [1, 100], [1, 100]$ ), sur des graphes complets, pour le cas simple commodité en utilisant Cplex 7.1. sur un Pentium 3, 1.1 Ghz, 1 Gb Ram. Seules 6 instances sur 28840 (soit 0,02%) ont une solution optimale du problème relâché non entière. Les solutions

Instance	L	K	Cost	LP*	IP*	Gap(%)
1	4	3	[1-1000]	583	585	0.34
2	4	4	[1-100]	60.5	61	0.8
3	5	3	[1-1000]	697	700	0.35
4	5	4	[1-100]	127.5	128	0.39
5	6	4	[1-10]	29	29	0.00
6	6	3	[1-100]	132.5	133	0.37

TAB. 1 – Instances fractionnaires et mesure de la borne inférieure.

fractionnaires s'avèrent donc être des cas très pathologiques. Le tableau ci-dessus nous donne une indication de la qualité de la borne inférieure proposée par la relaxation linéaire de notre modèle puisque le "Gap"  $\in [0.00\%-0.80\%]$ .

## 5 Conclusion et travaux futurs

Dans ce papier, nous proposons un modèle linéaire pour le problème de conception de réseaux robustes K-arête connexe avec 3 sauts, exprimé dans l'espace des variables de flot associées à la représentation en couches proposée par Gouveia [10]. Nous proposons une description complète du polyèdre pour la version arc-disjoint, ainsi qu'une modélisation garantissant une solution optimale entière pour la version arête-disjoint. Nous étudions la qualité de la borne inférieure proposée par le modèle relâché lorsque  $L \geq 4$ .

Nous travaillons sur de nouvelles inégalités valides qui coupent les points fractionnaires pour le cas où  $L \leq 4$  et ce pour les versions arc-disjoint et arête-disjoint. Une extension vers le cas multicommodités est prévue en proposant l'utilisation de la méthode de décomposition de Benders pour traiter ce type de problème volumineux.

## Références

- [1] A. Balakrishnan and K. Altinkemer. Using a hop-constrained model to generate alternative communication network design. *ORSA J Comput*, 4 :192–205, 1992.
- [2] A. Bley. Node-disjoint length-restricted paths. *Masters thesis, TU Berlin*, 1997.
- [3] G. Dahl. The 2-hop spanning tree problem. *Oper Res Lett*, 23 :21–26, 1998.
- [4] G. Dahl. Notes on polyhedra associated with hop-constrained walk polytopes. *Oper Res Lett*, 25 :97–100, 1999.
- [5] G. Dahl, N. Foldnes, and L. Gouveia. A note on hop-constrained walk polytopes. *Oper Res Lett*, 32 :345–349, 2004.
- [6] G. Dahl and L. Gouveia. On the directed hop-constrained shortest path problem. *Oper Res Lett*, 32 :15–22, 2004.
- [7] G. Dahl and B. Johannessen. The 2-path network design. *Networks*, 43(3) :190–199, 2004.
- [8] L. Gouveia. Multicommodity flow models for spanning trees with hop constraints. *European Journal of Operational Research*, 95 :178–190, 1996.
- [9] L. Gouveia. Using variable redefinition for computing lower bounds for minimum spanning and steiner trees with hop constraints. *INFORMS J Comput*, 10 :180–188, 1998.

- [10] L. Gouveia and C. Requejo. A new lagrangean relaxation approach for the hop-constrained minimum spanning tree problem. *European Journal of Operational Research*, 132 :539–552, 2001.
- [11] D. Huygens and A. R. Mahjoub. Integer programming formulations for the two 4-hop-constrained paths problem. *Networks*, DOI 10.1002(2) :135–144, 2007.
- [12] D. Huygens, A. R. Mahjoub, and P. Pesneau. Two edge-disjoint hop-constrained paths and polyhedra. *SIAM J. Discrete Math.*, 18(2) :287–312, 2004.
- [13] H. Pirkul and S. Soni. New formulations and solution procedures for the hop constrained network design problem. *European Journal of Operational Research*, 148 :126–140, 2003.