# Preuve constructive d'une relation min-max multicoupe/multiflot dans les graphes série-parallèles

D. Cornaz [1]

1. *Université Blaise Pascal - Clermont Ferrand II,*
*Complexe scientifique des Cézeaux, 63177 Aubière cedex*
*cornaz@isima.fr*

**Mots-clefs :** Condition de coupe, circuits, relation min-max, série-parallèle, matroïdes.

## 1 Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Un ensemble d'arêtes $D \subseteq E$ est une *multicoupe de* $G$ si c'est l'ensemble de toutes les arêtes dont les extrémitées appartiennent à deux classes différentes d'une certaine partition de $V$. Si $G$ est muni d'un vecteur de poids $w \in \mathbb{Z}^E$ sur les arêtes, le poids d'une multicoupe $D$ est $w(D) = \sum_{e \in E} w_e$. On note *max-multicut*$(G, w)$ le poids maximum d'une multicoupe de $G$ avec les poids $w$.

Notons que le vecteur $w$ induit une partition $\{R, E \setminus R\}$ de $E$ où $R$ est l'ensemble des arêtes dont le poids n'est pas négatif. Si l'on considère le sous-graphe $H = (V, E \setminus R)$ comme un réseau avec des capacités $|w_f|$ pour chaque arête $f \in E \setminus R$, alors l'ensemble $R$ peut être considéré comme un ensemble de demande : pour chaque arête $e = uv \in R$, il y a une demande de flot entier de valeur $w_e$ entre $u$ et $v$. Bien sûr, il se peut que toute la demande ne puisse pas être acheminée dans le réseau. Mais il existe toujours un sous-ensemble $R' \subseteq R$ tel que les demandes dans $R \setminus R'$ puissent toutes être acheminées. Pour un tel vecteur $R'$, on dit que $\sum_{e \in R'} w_e$ est une *perte (de multiflot)*. On note *min-flowloss*$(G, w)$ la perte minimum (de multiflot). Remarquons que *min-flowloss*$(G, w)$ est égale à la somme des demandes moins le mutliflot maximum.

## 2 L'algorithme

Nous donnons un algorithme qui, étant donné un graphe série-parallèle $G = (V, E)$ avec des coûts $w_e \in \mathbb{Z}$ pour chaque arête $e$, donne en temps polynomial une multicoupe de poids maximum et la perte minimum de multiflot. Cet algorithme fournit une preuve du fait que max-multicut$(G, w)$= min-flowloss$(G, w)$ pour tout $w \in \mathbb{Z}^E$ si et seulement si $G$ est série-parallèle.

## 3 Condition de coupe et matroïdes

Le résultat ci-dessus généralise le fait que la condition de coupe implique l'existence d'un multiflot entier dans les séries-parallèles.. Ceci nous amène à considérer un troisième paramètre associé à $(G, w)$ : La condition de coupe est qu'aucune multicoupe n'a un poids strictement positive. Bien sûr cela n'est pas toujours satisfait par $(G, w)$ mais il existe toujours un sous-ensemble $R' \subseteq R$ dont la suppression nous donne que la condition de coupe est vérifiée. Notons *min-cutcond*$(G, w)$ le minimum de $\sum_{e \in R'} w_e$ pour un tel $R'$. On a alors pour tout $(G, w)$ les relations max-multicut$(G, w) \leq$ min-cutcond$(G, w) \leq$ min-flowloss$(G, w)$.

Nous établissons que ces relations sont vraies pour tous les matroides (y compris ceux qui ne sont pas binaires).

# 4 Polyèdres et TDIness

La relation min-max obtenue grâce à l'algorithme nous donne un système linéaire TDI et permet de redémontrer le résultat de Chopra sur le polytope des multicoupes. Au niveau des matroides, on peut obtenir facilement une description du polytope des multicoupes des matroides uniformes (où multicoupe veut dire ici une union de cocircuits).

# 5 Conclusion

Les perspectives de ces travaux concernent les graphes signés. En effet, la condition de coupe implique l'existence d'un mutliflot entier dans les graphes signés sans mineur $K_4$ impair. Ceci est impliqué par la caractérisation des hypergraphes binaires Mengeriens de Seymour. Mais peut-on étendre l'égalité max-multicut= min-flowloss aux graphes signés $(G, R)$ sans mineur $K_4$ impair ?

# Références


[1] F. Barahona and A. R. Mahjoub, "On the cut polytope", *Mathematical programming* 36 (1986) 157-173.

[2] F. Barahona and M. Grötschel, "On the cycle polytope of a binary matroid", *Journal of Combinatorial Theory*, Series B 40 (1986) 40-62.

[3] S. Chopra, "The Graph Partitioning Polytope on Series-Parallel and 4-Wheel Free Graphs", *SIAM Journal on Discrete Mathematics* 7, No. 1 (1994), 16-31.

[4] J. Edmonds and E.L. Johnson, "Matching, Euler tours and the Chinese postman", *Math. Programming* 5 (1973) 88-124.

[5] M. Fischetti, J. J. Salazar, "Models and algorithms for the 2-dimensional cell suppression problem in statistical disclosure control", *Mathematical programming* 84(2) (1999) 283-312.

[6] M. Grötschel, *Cardinality homogeneous set system, cycles in matroids, and associated polytopes*, in *The Sharpest Cut*, MPS-SIAM Series on Optimization (2004), Ed. Grötschel.

[7] A. Schrijver, *Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2003).

[8] P.D. Seymour, "Sums of circuits", in : *Graph Theory and related topics* Academic Press, New-York (1979) 341-355.

[9] P.D. Seymour, "Matroids and multicommodity flows", *European Journal of Combinatorics* 2 (1981) 257-290.