Sur le partitionnement des graphes en composantes unicycliques avec contraintes

W. Ben-Ameur[1], M. Hadji[2] et A. Ouorou[3]

1. Institut National des Télécommunications,
9 rue Charles Fourier, 91011 Evry
Walid.Benameur@it-sudparis.eu

2.Institut National des Télécommunications,
9 rue Charles Fourier, 91011 Evry
Makhlouf.Hadji@it-sudparis.eu

3. France télécom R&D, Issy- les - moulineaux
Adam.Ouorou@orange-ftgroup.com

Mots-clefs : Graphe unicyclique, Matroïdes, Couplage, Polyèdres, Optimisation des réseaux

Étant donné un graphe pondéré G, nous souhaitons dans un premier temps partitionner les sommets de G en plusieurs composantes connexes unicycliques de coût total minimum. Pour cela, on développe deux algorithmes polynômiaux, le premier se base sur la théorie des matroïdes alors que le deuxième est un algorithme de couplage maximum de poids minimum. On généralise ce problème en y ajoutant différentes contraintes (taille des cycles, contraintes d'appartenance d'un certain nombre de sommets aux cycles des composantes connexes, nombre maximum des composantes connexes). Une étude polyèdrale est alors proposée. Plusieurs inégalités valides sont mise en évidence, et les faces induites par ces inégalités sont étudiées.

1 Deux algorithmes polynômiaux pour le partitionnement en composantes unicycliques

Étant donné un graphe pondéré et non orienté $G = (V, E)$, on souhaite répartir les sommets de G en plusieurs composantes unicycliques (contenant au plus un cycle), avec un coût total minimum. On propose alors deux algorithmes polynômiaux, le premier se base sur la théorie des matroïdes. Il est en effet facile de prouver que $M = (E, \mathcal{F})$, où

$$\mathcal{F} = \{I \subseteq E, \;\; I \;\; les \;\; composantes \;\; de \;\; I \;\; contiennent \;\; au \;\; plus \;\; un \;\; cycle\}$$

est un matroïde. Ceci suggère immédiatement un algorithme glouton qui nous donne la décomposition souhaitée.

L'autre approche consiste à construire d'abord un nouveau graphe biparti dont les sommets seront l'union de E et V. Les arêtes de ce nouveau graphe se définissent ainsi :

il existe une arête entre le sommet i et le sommet x, si et seulement si i est une extrémité de l'arête x. Le poids de l'arête ix, est le même que celui de l'arête initiale x dans G.

Une fois le graphe biparti construit, on calcule un couplage maximum de poids minimum. Le résultat est une décomposition en composantes unicycliques de coût total minimum.

2 Graphes unicycliques avec contraintes sur le cycle

On généralise le problème précédent en y rajoutant plusieurs types de contraintes : contraintes de taille des cycles (on interdit les cycles de taille inférieure à p), des contraintes d'appartenance d'un certain nombre de sommets aux cycles des composantes, ainsi qu'une contrainte sur le nombre maximum de composantes connexes.

Ce problème a des applications dans le domaine des télécommunications. Il a aussi des liens avec d'anciens problèmes rencontrés. En effet, deux cas particuliers sont à signaler. Par exemple, lorsque la taille minimale des cycles est $p = |V| - 1$, on obtient alors le problème du voyageur de commerce. Ceci implique alors clairement que notre problème est aussi NP-difficile. L'autre cas est lorsqu'on impose que chaque composante soit exactement un cycle, on obtient alors le problème de 2-factors, qui est un problème facile.

Pour résoudre ce problème, plusieurs classes d'inégalités valides sont mises en évidence, et les faces induites par ces dernières sont aussi étudiées. Des algorithmes de séparation ont été mis en oeuvre pour les séparer, et certains parmi eux sont polynômiaux. Au final, on propose un algorithme à plans coupants pour résoudre ce problème pour des instances de tailles moyennes.