Sur le polytope des st-*chaînes*

Viet Hung Nguyen

LIP6, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6
Hung.Nguyen@lip6.fr

Mots-clefs : chemin non-orienté, chaîne, enveloppe convexe, facettes.

1 Introduction

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté où les arêtes sont pondérées par $w \in \mathbb{Q}^E$. Considérons les chaînes élémentaires dans G entre deux sommets spécifiques s et t. Ces chaînes seront appelées st-*chaînes*. Nous considérons le problème de la plus courte st-chaîne (par rapport à w). Ce problème est NP-difficile dans le cas général mais quand les circuits de G sont de poids non-négatifs, il est polynomial. On peut le ramener dans ce cas à un problème de couplage parfait de poids minimum dans un autre graphe dérivé de G [1]. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des st-*chaînes* que nous appelons sous le nom de *polytope des* st-*chaînes*. Notre contribution consiste essentiellement en deux points :

1. Présenter une large classe d'inégalités définissant des facettes du polytope des st-*chaînes*.
2. Montrer qu'un très petit sous-ensemble de cette classe d'inégalités suffit pour définir le programme linéaire "minimal" formulant le cas polynomial du problème de la plus courte st-chaîne.

2 *T-joints*

Un *T-joint* avec $T \subset V$ est un sous-graphe de G dont les sommets de degré impair sont exactement ceux de T. Quand $T = \{s, t\}$, les *T-joints* sont composés d'une st-chaîne et éventuellement de circuits supplémentaires. Lorsque les circuits de G sont de poids non-négatifs, on peut toujours trouver un *T-joint* de poids minimum qui est une st-*chaîne*. Le problème de trouver un *T-joint* de poids minimum est polynomial. On connaît une description complète de l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des *T-joints* [1], ce polytope est décrit complètement par les inégalités suivantes :

$$x(\delta(U) \setminus F) - x(F) \geq 1 - |F| \text{ où } U \subseteq V,\ F \subseteq \delta(U), \text{ et } |U \cap T| + |F| \text{ impair} \tag{1}$$

$$0 \leq x_e \leq 1 \tag{2}$$

L'inégalité (1) est appelé *inégalité de blossom*. Le problème de séparation des inégalités de blossom peut être résolu en temps polynomial [2][3][4]. Le problème de la plus courte st-*chaîne* dans un graphe sans circuit négatif peut donc être résolu en temps polynomial en résolvant le programme linéaire suivant :

$$\min w^t x$$

s.c.

$$x(\delta(U) \setminus F) - x(F) \geq 1 - |F| \text{ où } U \subseteq V,\ F \subseteq \delta(U), \text{ et } |U \cap \{s,t\}| + |F| \text{ impair} \tag{3}$$

$$0 \leq x_e \leq 1 \tag{4}$$

On peut obtenir une solution optimale issue de cette résolution qui pourrait contenir des circuits de poids zéro. En les enlevant on obtient la plus courte st-chaîne.

3 Facettes du polytope des st-chaînes

Les inégalités (3) sont donc valides pour le polytope des st-chaînes mais définissent- elles toutes, des facettes ? Dans cet exposé, nous montrons que ces inégalités définissent des facettes du polytope des st-chaînes si et seulement si l'ensemble F est un couplage.
Nous montrons en outre que le système défini par les inégalités (3) et (4) n'est pas minimal pour résoudre le problème de la plus courte *st-chaîne* quand G ne comporte pas des circuits négatifs. On peut en effet utiliser seulement (4) et les inégalités (3) dont les ensembles F sont soit l'ensemble vide soit un singleton, c.à.d. une arête.

4 Applications

Notre travail est motivé par certains problèmes difficiles dont les solutions admettent les *st-chaînes* comme sous-structures. Un algorithme de résolution de type plan-coupant nécessite une recherche d'inégalités valides ainsi que des procédures de séparation. Une inégalité valide pour les *st-chaînes* est donc valide dans la projection des solutions sur le sous-espace des variables constituant une st-chaîne. Cette inégalité peut être liftée pour devenir une inégalité valide dans l'espace des variables du problème initial. On peut aussi "lifter" l'algorithme de séparation. Si on utilise les résultats bien connus des *T-joints* avec $T = \{s, t\}$, alors on peut appliquer ce principe aux inégalités (3). Évidemment on souhaiterait générer plusieurs inégalités violées à la fois, on risque que ces inégalités soient dominées par d'autres inégalités violées. On peut donc se limiter à générer seulement des inégalités (3) violées avec F couplage et éviter par conséquent de générer les inégalités superflues qui alourdissent le programme linéaire. Nous avons appliqué nos résultats avec succès sur le problème Ring-Star qui recherche un réseau de coût minimum dont le backbone est une *st-chaîne* et les autres noeuds sont des clients connectés à un des noeuds appartenant à cette *st-chaîne* [5].

Références

[1] Schrijver, A. : Combinatorial Optimization : Polyhedra and Efficiency. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2003).
[2] Padberg, M.W. and Rao, M.R. : Odd minimum cut-sets and b-matchings. Math. Oper. Res. 7 (1982) 67-80.
[3] Grötschel, M. and Holland, O. : A cutting plane algorithm for minimum perfect 2- matching. Computing 39 (1987) 327-344.
[4] Letchford A.N., Reinelt G., and Theis, D.O. : A Faster Exact Separation Algorithm for Blossom Inequalities. D. Bienstock and G. Nemhauser (Eds.) : IPCO 2004, LNCS 3064, 196-205.
[5] Nguyen, V.H. and Kedad-Sidhoum, S. : A New formulation for the Ring-Star problem. 2007. Submitted.