Optimisation en présence de contraintes non holonomes

Witold Respondek

INSA-Rouen, Laboratoire de Mathématique,
Place Emile Blondel BP 08
76131 Mont-Saint-Aignan Cédex
witold.respondek@insa-rouen.fr

Mots-clefs : contraintes non holonomes, minimisation de l'action, approche variationnelle, approche mécanique

Le but de cet exposé est de discuter les systèmes mécaniques soumis à contraintes non holonomes. Nous allons définir et discuter d'abord la notion de contraintes non holonomes, ensuite le problème de commandabilité et principalement nous allons étudier comment établir les équations du mouvement. Nous allons illustrer les notions et les résultats par des exemples et nous allons aussi donner quelques remarques sur les systèmes non holonomes discrets.

Considérons un système mécanique dont l'espace des configurations (c'est à dire, des positions) Q, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (ou une variété différentiable de dimension n), soumis aux contraintes

$$\varphi(q) = 0,$$

où $\varphi : Q \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Ces contraintes ne dépendent que des configurations $q \in Q$. On dit alors qu'elles sont *holonomes* et on peut restreindre le système à

$$C = \{q \in Q \ : \ \varphi(q) = 0\},$$

qui, sous l'hypothèse de régularité de φ, est une sous-varieté de Q.

Soit $TQ = \bigcup_{q\in Q} T_qQ$, où T_qQ est l'espace tangent à Q en q, qui est formé par toutes les paires (q, v_q), où v_q sont les vecteurs de toutes les vitesses attachées en q. Considérons une application $\Phi : TQ \longrightarrow \mathbb{R}^k$ et les contraintes définies par

$$\Phi(q, v) = 0$$

qui donnent alors un sous-ensemble

$$\mathcal{C} = \{(q, v) \in TQ \ : \ \Phi(q, v) = 0\}$$

de TQ qui, en général, dépend des configurations et des vitesses. Ces contraintes sont dites *non holonomes* si justement elles ne peuvent pas être représentées par une application qui dépendrait seulement des configurations.

Très souvent l'application Φ est linéaire par rapport aux vitesses $\Phi(q, v) = \Omega(q)v$. Dans ce cas en chaque point $q \in Q$ les vitesses admissibles forment un sous-espace linéaire $\mathcal{D}(q)$ de T_qQ définie par $\mathcal{D}(q) = \ker \Omega(q)$ et une trajectoire $q(t)$ est admissible (c'est à dire : respecte les contraintes $\Omega(q(t)) \cdot \dot{q}(t) = 0$) si et seulement si

$$\dot{q}(t) \in \mathcal{D}(q(t)).$$

Le champ des sous-espaces $\mathcal{D}(q)$, noté par $\mathcal{D}$, est appelé une distribution. Choisissons des champs de vecteurs $g_1, \ldots, g_m$ sur Q, où $m = n - k$, qui (localement) engendrent $\mathcal{D}$. Il est clair qu'une trajectoire $q(t)$ respecte les contraintes si et seulement si elle satisfait

$$\dot{q}(t) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t) g_i(q(t)),$$

pour des fonctions $u_i(t)$ (appeleées contrôles). Les contraintes non holonomes ne changent pas alors l'espace des configurations (qui reste toujours Q) mais réduisent l'espace des vitesses et, en conséquence, l'espace des trajectoires admissibles : en effet seules les trajectoires satisfaisant $\dot{q}(t) \in \mathcal{D}(q(t))$ sont admissibles.

Considérons un système mécanique sur Q et supposons qu'aucune contrainte ne soit imposée. Le principe de Hamilton énonce que le système se déplace de telle façon que sa trajectoire $\gamma = q(t)$ minimise la fonctionnelle d'action

$$J(\gamma) = \int_{T_0}^{T_1} L(q(t), \dot{q}(t), t)dt \longrightarrow \text{min},$$

où le *lagrangien* $L(q, \dot{q}) = E(q, \dot{q}) - V(q)$ est la différence entre l'énergie cinétique E et l'énergie potentielle V.

Les trajectoires minimisant J (plus généralement, les points critiques de la différentielle $\mathrm{d}J$) sont des solutions de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$(EL) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

La question que nous allons aborder est : comment décrire le mouvement du système s'il se déplace sous des contraintes non holonomes ?

Le premier sous-problème est le suivant : étant donné deux points dans Q, un point initial q_0 et un point final q_1, existe-il toujours une trajectoire admissible joignant q_0 et q_1 ? La réponse est positive si les champs de vecteurs $g_1, \dots, g_m$ et tous leurs crochets de Lie engendrent l'espace tangent T_qQ, en chaque point $q \in Q$. Supposons alors que cette condition, dite condition du rang de Lie, soit satisfaite.

Le deuxième sous-problème est donc : parmi toutes les trajectoires joignant q_0 et q_1 trouver celle qui réalise le mouvement physique. Deux approches sont envisageables : mécanique et variationnelle.

Il est connu que si un système mécanique, sans contraintes non holonomes, se déplace en présence d'une force extérieure F_{ext} sa trajectoire est donnée par la modification suivante de l'équation d'Euler-Lagrange :

$$(EL)_{ext} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = F_{ext}.$$

On peut dire qu'un système non holonome se déplace sous l'action d'une force extérieure F_{ext} qui est la réaction des contraintes et alors $F_{ext} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \omega^i$ où les ω^i sont les lignes de la matrice Ω définissant les contraintes. On obtient donc les équations du mouvement suivantes :

$$(MNH - EL) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \omega^i.$$

Cette formulation d'équations de mouvement sera appelée *le problème mécanique non holonome* et c'est le principe de d'Alembert qui conduit à ce système d'équations.

La deuxième approche est basée sur la minimisation de la fonctionnelle d'action J sur l'espace des trajectoires admissibles. En suivant la méthode de multiplicateurs de Lagrange nous formons le lagrangien étendu

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) - \sum_{i=1}^{k} \mu_i \omega^i \dot{q}$$

(comme dans le problème de la minimisation de $F : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ sur $C = \{q \in Q \ : \ g^i(q) = 0\}$ nous considérons $\mathcal{F} = F - \sum_i \mu_i g^i$). Si une trajectoire $q(t)$ minimise le lagrangien étendu $\mathcal{L}$ (plus généralement, est un point critique de sa différentielle) alors elle satisfait

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0;$$

Ce qui est équivalent à

$$(VNH - EL) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum_{i=1}^{k} \dot{\mu}_i \omega^i - \mu_i(\mathrm{d}\omega^i \dot{q}).$$

Ceci sera appelé *le problème variationnel non holonome.*

Il est alors naturel de se poser les trois questions suivantes :
- Les problèmes (MNH-EL) et (VNH-EL) ont-ils les mêmes solutions ?
- Sinon, quel est le problème dont les solutions décrivent les systèmes physiques (réels) ?
- Quelles sont les interprétations géométriques de (MNH-EL) et (VNH-EL) et de leurs solutions ?

La réponse à la première question est négative : en effet les dérivées $\dot{\mu}_a$ des multiplicateurs sont impliqués dans (VNH-EL) contrairement à (MNH-EL), où ils entrent de façon statique.

La deuxième question attire l'attention des chercheurs depuis la fin du XIX^{ème} siècle. Nous devons à D. Korteweg (1899) et même plus encore à H. Hertz (1894) une claire distinction des deux approches et la compréhension du fait que c'est l'approche mécanique non holonome (MNH-EL) qui décrit les systèmes physiques réels et que l'approche variationnelle n'est pas applicable aux systèmes mécaniques sous contraintes non holonomes. C'est Hertz aussi qui a proposé les termes *holonome* et *non holonome* en mécanique en s'inspirant des mot grecs $\acute{o}\lambda o\varsigma$ (entier, intégral) et $\nu o\mu o\varsigma$ (nom, principe). Notons que l'approche variationnelle, même étant inapplicable en mécanique des systèmes non holonomes, a une place très importante en contrôle optimal et en géométrie sous-Riemannienne.

Pour répondre à la troisième question, supposons (pour la simplicité) l'absence de l'énergie potentielle V et alors le lagrangien L est égal à l'énergie cinétique E. S'il n'y a pas de contraintes non holonomes on peut donner deux interprétations aux solutions de l'équation d'Euler-Lagrange (EL) : elles sont les courbes les plus courtes (minimisant la distance défini par la métrique riemannienne correspondant à l'énergie cinétique) et elles sont aussi les courbes les plus droites (le long desquelles le système n'accélère pas). En présence de contraintes non holonomes ces deux propriétés ne coïncident plus. Justement les solutions de (VNH-EL) sont "les plus courtes" et les solutions de (MNH-EL) sont "les plus droites". Ce sont ces dernières qui réalisent le mouvement physique, et la mécanique non holonome est un des rares domaines de la physique qui n'obéit pas à un principe variationnel.

Références

[1] A.M. Bloch, (2003). *Nonholonomic mechanics and Control.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.

[2] F. Bullo et A.D. Lewis, (2004). *Geometric Control of Mechanical Systems.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin.