Approximation de problèmes de couverture de tâches en transport ferroviaire

J. Sadki [1], L. Alfandari[1,2], A. Nagih[3] et A. Plateau[4]

1. LIPN, UMR-CNRS 7030, Université Paris 13,
99 Av. J-B Clément 93430 Villetaneuse,
{jalila.sadki}{laurent.alfandari}@lipn.univ-paris13.fr

2. ESSEC,
Av. Bernard Hirsch B.P. 50105 95105 Cergy
alfandari@essec.fr

3. LITA, Université Paul Verlaine-Metz,
Ile du Saulcy 57045 Metz Cedex 1
anass.nagih@univ-metz.fr

4. CEDRIC, CNAM,
292 Rue Saint-Martin 75141 Paris
aplateau@cnam.fr

Mots-clefs : Programmation linéaire en nombres entiers, problème de couverture, approximation, planification ferroviaire.

1 Introduction

Le sujet de la communication est le problème ferroviaire dit d'affectation de locomotives (*locomotive assignment* [3]). Étant donné un ensemble de locomotives de différents types, et un ensemble de tâches de traction, le problème consiste à déterminer un enchaînement de tâches par locomotive de façon à couvrir l'ensemble des tâches de traction tout en minimisant le coût du déploiement des locomotives. Ce problème d'optimisation est NP-Difficile étant donné que le problème de couverture d'ensemble (*Set Covering Problem*) en est un cas particulier. Cette complexité est confirmée, d'un point de vue pratique, par les résultats d'expérimentations effectuées sur des jeux de données réels résolus avec la méthode de génération de colonnes, dont le problème maître se modélise comme un problème de couverture connu dans la littérature sous le nom *Covering Integer Programming* (CIP). Dans ce contexte, nous nous intéressons à la résolution approchée de ce problème ferroviaire via des heuristiques d'approximation basées sur une reformulation du problème maître.

2 Présentation du problème ferroviaire d'affectation de locomotives

Soit N l'ensemble des tâches à couvrir (trains à tracter), et Ω^k l'ensemble des chemins réalisables par type $k \in K$ de locomotives d'un réseau ferroviaire (un chemin réalisable est un enchaînement de tâches par une locomotive respectant certaines contraintes de ressources). Chaque train i nécessite un nombre b_i d'unités de puissance pour être tracté, de même chaque chemin p est associé à une locomotive d'un certain type k qui est caractérisé par un nombre w^k d'unités de puissance de traction. Un train n'est supposé couvert que si la puissance totale de l'assemblage de locomotives (*consist*) qui lui sont affectées est au moins égale à sa puissance de traction requise. L'objectif, dans ce problème est de couvrir toutes les tâches de traction par des locomotives à moindre coût. Le problème maître issu de la décomposition de Dantzig-Wolfe, dans une approche de résolution par génération de colonnes, est donné par la formulation suivante :

$$(\mathcal{PM})\begin{cases} \min & \sum_{k\in K}\sum_{p\in\Omega^k} c_p^k y_p^k \\ \text{s.c} & \\ & \sum_{k\in K}\sum_{p\in\Omega^k} w^k a_{ip} y_p^k \geq b_i \quad \forall i\in N \\ & y_p^k \geq 0 \ \text{ entiers} \qquad\qquad \forall k\in K, \forall p\in\Omega^k \end{cases}$$

La variable du problème y_p^k désigne le nombre de locomotives de type k empruntant le chemin p, c_p^k représente le coût d'un chemin réalisable $p \in \Omega^k$ et a_{ip} vaut 1 si la tâche i appartient au chemin p et 0 sinon.

Des expérimentations numériques comparatives ont été faites entre la méthode de génération de colonnes et une résolution directe par Cplex. Outre la difficulté liée à la taille des problèmes, elles montrent que les temps de résolution ainsi que les sauts d'intégrité (*gaps*) sont intrinsèquement liés aux contraintes de couverture pondérées, et justifient l'utilisation complémentaire d'heuristiques pour $(\mathcal{PM})$ qui est un cas particulier du problème (CIP) décrit dans la section suivante.

3 Présentation du problème générique de *Covering Integer Programming* (CIP)

Le problème (CIP) qui généralise le problème $(\mathcal{PM})$ ci-dessus est le suivant. Soit $\mathcal{C} = \{1,..,n\}$ un ensemble de n éléments, et $\mathcal{S} = \{S_1,..,S_m\}$ un ensemble de m sous-ensembles de $\mathcal{C}$. On associe à chaque sous-ensemble S_j de $\mathcal{S}$ un coût $c_j \in \mathbb{N}$, à chaque élément i de $\mathcal{C}$ une demande $b_i \in \mathbb{N}$ à couvrir, et à chaque couple (i, S_j) un poids $a_{ij} \in \mathbb{N}$.
Le problème *Covering Integer Programming* consiste à sélectionner une famille de sous-ensembles de $\mathcal{S}$, chaque sous-ensemble pouvant être pris plusieurs fois, de façon à couvrir à coût minimal chaque élément de $\mathcal{C}$. Il se formule comme suit :

$$(CIP)\begin{cases} \min & \sum_{j=1}^{m} c_j y_j \\ \text{s.c} & \\ & \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \geq b_i \quad \forall i\in\{1..n\} \\ & y_j \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1}$$

La variable y_j désigne le nombre de fois où un sous-ensemble S_j est sélectionné dans la solution optimale. La contrainte (1) assure la couverture de la demande de chaque élément i.

4 Approximation

L'heuristique gloutonne de Dobson [2] présente le meilleur rapport d'approximation possible pour la résolution du CIP, soit $H(max_j(\sum_i a_{ij}))$ où H désigne la série harmonique ($H(n) \leq 1 + ln(n)$). Elle consiste à sélectionner à chaque itération le sous-ensemble qui minimise le ratio coût sur couverture residuelle, les poids a_{ij} et b_i sont mis à jour au fur et à mesure des itérations, et l'algorithme s'arrête dès que tous les éléments sont entièrement couverts. Cette heuristique généralise l'heuristique de Chvátal [1] pour le cas non pondéré.

Nous revisitons l'analyse au pire des cas de cette heuristique via une reformulation du CIP en un problème de couverture d'ensemble particulier.

La résolution par cette heuristique du problème maître ferroviaire nous amène à résoudre à chaque itération r un problème auxiliaire associé à chaque sous-graphe $G^k = (N^k, A^k)$ du réseau de transport. Ce problème noté $(\mathcal{SP}_k)$ vise à trouver un plus court chemin qui minimise la fonction ratio formulée comme suit :

$$(\mathcal{SP}_k) \begin{cases} \min & \frac{\sum_{(i,j)\in A^k} c_{ij}x_{ij}}{\sum_{(i,j)\in A^k, i\in N^k} \min(w^k, b_i^r)x_{ij}} \\ \text{s.c} & \\ & x \in \Omega^k, x \in \{0,1\}^{|A^k|} \end{cases}$$

avec $x = (x_{ij})_{(i,j)\in A^k}$ et b_i^r la puissance résiduelle de la tâche i à l'itération r.

D'une façon générale, les problèmes combinatoires de minimisation de fonctions fractionnaires (min $\frac{f(x)}{g(x)}$ où f et g sont des fonctions linéaires) sont NP-difficiles [6]. Il est connu que si le dénominateur $g(x)$ est positif alors le problème fractionnaire peut être résolu en temps polynomial si le problème linéaire paramétré associé (min $f(x) - \lambda g(x)$ où λ est un paramètre réel) est solvable en temps polynomial [5]. Ce principe s'applique à notre problème auxiliaire de plus court chemin fractionnaire (*Min Ratio Path Problem*) dans le cas sans contrainte de ressource. Le problème ferroviaire est par conséquent approximable par l'heuristique de Dobson [2] au même rapport logarithmique soit $H(max_{p\in\Omega^k}(\sum_{i\in p}\min(w^k, b_i)))$ [4]. D'autre part, Hashizume [7] ayant montré que, si le problème linéaire paramétré n'est pas polynomial mais approximable à rapport $1+\epsilon$ alors le problème fractionnaire associé est aussi approximable au même rapport $1+\epsilon$, nous en déduisons que, dans le cas avec une contrainte de ressource de type capacité ($\sum_{(i,j)\in A} v_{ij}x_{ij} \leq B$), le problème fractionnaire admet un schéma d'approximation en temps polynomial dérivé d'un schéma d'approximation du problème linéaire de plus court chemin contraint [8].

Références

[1] V.Chvátal, A greedy-heuristic for the Set-Covering Problem. *Mathematics for Operations Research* 4 (1979) 233-235.

[2] G.Dobson, Worst-case analysis of greedy heuristics for integer programming with non-negative data. *Mathematics for Operations Research* 7 :4 (1982) 515-531.

[3] K.Ziarati, F.Soumis, J.Desrosiers, S.Gélinas, A.Saintonge. Locomotive assignment with heterogeneous consists at CN North America. *European Journal of Operational Research* 97 (1997) 281-292.

[4] L.Alfandari, V. Paschos. Master slave strategy and polynomial approximation. *Computational optimization and Applications* 16 :3 (2000) 231-245.

[5] N.Megiddo. Combinatorial optimization with rational objective functions. *Mathematics of Operations Research* 4 :4 (1979) 414-424.

[6] A.Nagih. Problèmes fractionnaires : Tour d'horizon sur les applications et méthodes de résolutions. *RAIRO Operations Research.* 33 (1999) 383-419.

[7] S.Hashizume, M.Fukushima, N.Katoh, T.Ibaraki. Approximation algorithms for combinatorial fractional programming problems. *Mathematical programming* 37 (1987) 255-267.

[8] R.Hassin. Approximation schemes for the restricted shortest path problem. *Mathematics of Operations Research* 17 :1 (1992) 36-42.