DIRECTION SCIENTIFIQUE

Note de Travail n° 49

Juin 1966

E L E C T R E :

Une méthode pour guider le choix en présence de points de vue multiples

R. BENAYOUN, B.ROY, B. SUSSMANN

SOCIETE D'ECONOMIE ET DE MATHEMATIQUE APPLIQUEES

35, Boulevard Brune - PARIS 14e

RESUME

Le problème pour la résolution duquel la méthode ELECTRE a été développée est exposé en détail dans le premier chapitre de ce document. En résumé, c'est le problème suiv

- se trouvant en présence d'un ensemble d'"objets" préalablement définis c réunis en vue de la sélection de l'un d'entre eux,
- souhaitant que cette sélection porte sur celui qui se révèle le plus satisfaisant selon plusieurs points de vue, critères ou facteurs non réductibles à un seul, et pouvant être d'importance différente,
- sachant que, pour chacun de ces facteurs, on peut juger, apprécier ou noter chaque objet,

comment effectuer au mieux ce choix ?

Le but de cette méthode[1] est de fournir au responsable de la décision un petit sou ensemble d'objets candidats, à l'intérieur duquel il pourra exercer son choix, car le meilleur objet s'y trouve à coup sûr. Le principe d'ELECTRE, reposant sur une application de la théorie des graphes, est exposé au chapitre II.

Le chapitre III présente des éléments permettant de mettre en pratique la méthode e des exemples d'applications concrètes possibles.

Enfin, l'annexe indique certains aspects techniques et les bases algorithmiques du programme pour ordinateur CDC 3600 qui permet de l'appliquer.

---

(1) Qui a fait l'objet d'une communication aux Journées d'études sur les méthodes d calcul dans les sciences de l'homme, Rome, Juillet 1965.

PLAN DE LA NOTE

	Pages
AVANT-PROPOS	1
CHAPITRE I - LE PROBLEME DU CHOIX EN PRESENCE DE POINTS DE VUE MULTIPLES	2
A - Quelques illustrations du problème	3
B - Echelles multidimensionnelles	4
C - Quelques approches usuelles du problème	8
CHAPITRE II - ASPECTS THEORIQUES DE LA METHODE ELECTRE	11
A - La relation de surclassement	12
B - Définition du noyau	24
CHAPITRE III - QUELQUES ELEMENTS D'UTILISATION PRATIQUE	28
A - Nature des problèmes pouvant être abordés par ELECTRE	29
B - Précautions à prendre dans la formulation du problème	29
C - Applications possibles	34
ANNEXE - ASPECTS TECHNIQUES ET BASES ALGORITHMIQUES DU PROGRAMME ELECTRE	35
BIBLIOGRAPHIE	44

AVANT-PROPOS

Les travaux qui font l'objet de cette note de travail s'insèrent dans le cadre des recherches conduites à la Direction Scientifique de la SEMA sur les problèmes de typologie et de classement. Ces travaux ont débuté dans la deuxième moitié de l'année 1965, sur la demande du département SEMA-INDETEC qui souhaitait perfectionner la méthode MARSAN (Méthode d'Analyse, de Recherche, et de Sélection d'Activités Nouvelles). Il apparut rapidement que le problème soulevé était très général, et se posait fréquemment dans les sociétés du groupe METRA. Ceci permit de mieux le poser et d'entreprendre des recherches sur une base concrète solide.

L'objectif des recherches était de mettre au point une méthode de résolution de ce problème qui soit facile à utiliser, qui nécessite des hypothèses simples, aussi peu nombreuses et peu contestables que possible, et qui cependant puisse répondre aux besoins. Elles aboutirent à la mise au point de la méthode ELECTRE (Elimination et Choix traduisant la Réalité) et du programme correspondant disponible sur CDC 3600.

Cette note s'articule en trois chapitres : le premier a pour objet de présenter le problème, le deuxième de décrire la méthode et le troisième d'en indiquer des éléments d'utilisation et des applications possibles. On trouvera ensuite en annexe une description technique du programme ELECTRE et une brève bibliographie.

CHAPITRE I

LE PROBLEME DU CHOIX EN PRESENCE DE POINTS DE VUE MULTIPLES

Plaçons-nous devant le problème de décision suivant : on s'intéresse aux N éléme d'un ensemble E bien défini (nous appellerons objets de tels éléments, qui peuve être des produits industriels, des individus, des villes, etc), et l'on cherche, e partant de considérations objectives, à introduire une notion d'ordre pour pouvoir les comparer en vue de sélectionner l'un d'entre eux.

Une telle tentative de comparaison conduira le plus souvent à regarder ces objets différents points de vue (ou selon différents critères, facteurs, etc.) : présence absence d'une propriété, reconnaissance d'une caractéristique ou appréciation d'un facteur non quantifiable, attribution d'une note ou évaluation numérique d'un fact

Il est parfois possible de fondre ces points de vue ou ces critères en un seul (pa exemple une utilité, un coût, ...) et cela facilite grandement la prise de décisio il s'agit alors d'un problème "unidimensionnel".

Dans cette note, nous écarterons délibérément ce cas pour ne considérer que les pr blèmes "multidimensionnels", dans lesquels on tient, pour des raisons diverses, à conserver l'intégrité de chaque point de vue.

Dans la suite de ce chapitre, consacré à la formulation du problème, nous commence par donner quelques illustrations de celui-ci ; puis nous préciserons la structure états possibles de chacun des points de vue appliqués aux objets ; enfin, nous eff tuerons un survol des méthodes les plus souvent employées.

A - QUELQUES ILLUSTRATIONS DU PROBLEME

Nous en indiquerons trois.

1 - SELECTION DE PRODUITS NOUVEAUX (méthode MARSAN)

Considérons une entreprise qui souhaite développer un produit nouveau (ou une activité nouvelle). Sur la base d'une analyse de l'entreprise et de son contexte, ayant pour but de dégager les contraintes qui lui sont propres ainsi que celles dues à l'environnement, il sera possible de dresser une liste de dix ou quinze produits nouveaux, qu'il est raisonnable d'envisager. Par ailleurs, on recherchera les point de vue qu'il peut être intéressant d'adopter pour porter un jugement sur chacun des produits candidats ; ces points de vue concerneront la commercialisation du produit son marché, les possibilités de production ou de recherche de l'entreprise, etc. La plupart de ces points de vue ne pouvant conduire qu'à des résultats non quantifiabl on pourra retenir, comme ensemble d'états (ou d'appréciations) possibles pour chaqu point de vue, l'ensemble :

$$\left\{ \text{mauvais, passable, neutre, bon, très bon} \right\}.$$

A chaque produit sera alors associée une suite d'appréciations correspondant chacun à un point de vue ("profil") ; il restera à en sélectionner <u>un</u> qui pourra raisonnablement être considéré comme le meilleur.

2 - CHOIX DE LA LOCALISATION OPTIMALE D'UNE NOUVELLE USINE

Une société produisant des petites séries de produits à haute technicité désire implanter une nouvelle usine. Une quinzaine de localisations s'avèrent possible sur l'étendue du territoire, et il s'agit d'en choisir une (ou, tout au plus, deux ou trois) entre lesquelles les dirigeants de l'entreprise pourront arbitrer en tenant compte de points de vue liés à la politique générale de l'entreprise . Les points de vue à prendre en compte pour distinguer ces localisations sont tous liés au personnel qui travaillera dans l'usine : disponibilité locale en main-d'oeuvre qualifiée (notamment féminine), habitude de cette main-d'oeuvre à travailler en usine, possibilités de logement des cadres supérieurs, agrément de la région pour ces cadres, etc. Les ensembles de résultats possibles correspondant à ces points d vue peuvent alors être :

$$\{\text{jamais, rarement, souvent, toujours}\},$$
$$\{\text{non, oui}\} \ .$$

3 - <u>SELECTION D'UN CANDIDAT A LA SUITE D'UNE OFFRE D'EMBAUCHE</u>

Une entreprise désirant créer un nouveau poste d'ingénieur fait passer des annonces dans la presse. De nombreux candidats se manifestent ; après élimination de ceux qu ne conviennent visiblement pas, il en reste un petit nombre (par exemple une douzai entre lesquels il faut choisir, en tenant compte de points de vue multiples comme l'importance des connaissances techniques, l'âge, la présentation, la sociabilité, etc....

B - STRUCTURE DES ENSEMBLES D'APPRECIATIONS AUXQUELS PEUVENT CONDUIRE LES POINTS DE VUE - ECHELLES MULTIDIMENSIONNELLES

Les exemples qui précèdent montrent l'importance que prennent dans notre problème ces ensembles d'appréciations, aussi allons-nous les étudier plus précisément.

Repérons par un indice p , $p = 1,\dots, P$, chacun de ces points de vue, en nombre fini P , et désignons par K_p l'ensemble des résultats auxquels on admet a priori que puisse conduire le point de vue p . Nous appellerons <u>état</u> un élément de K_p .

L'examen selon les P points de vue conduira donc à associer à chaque objet de E une suite de P états pris respectivement dans K_1 , K_2 ,..., K_P , autrement dit un élément du produit cartésien $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_P$. Nous appellerons <u>profil</u> de l'objet i (i étant l'indice permettant de repérer les objets de E : $i = 1,\dots$ <u>l'état multidimensionnel</u> - équivalent à la suite d'états que nous venons d'introdui qui le caractérise. Remarquons que l'introduction de ce concept traduit notre volon de bien prendre en compte individuellement chacun de ces points de vue.

Notre but est maintenant d'asseoir de façon opérationnelle l'idée de comparaison (entre objets) qui doit justifier la sélection de l'un d'entre eux. A cette fin, il est essentiel de formaliser l'information qui permettra de la cerner, et c'est évidemment l'observation ou l'étude des éléments de E selon les divers points de vue qui fournira cette information. Supposons donc explicitement qu'il soit possible de définir, pour chacun des points de vue $p = 1,\dots, P$, l'ensemble K_p des résultats (appréciations) ou états auxquels peut conduire l'examen selon p d'un élément quelconque i de E , et cela de façon qu'un résultat déterminé unique $\gamma_p(i) \in K_p$ puisse ensuite être associé à i . Dans ces conditions, les P applications γ_p traduisant cette association :

$$\gamma_p : E \longrightarrow K_p \quad , \quad p = 1,\dots, P ,$$

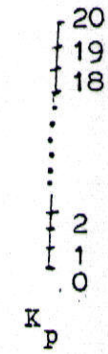
jointes à la structure dont peuvent être dotés les ensembles K_p , constituent la majeure partie de l'information nécessaire. Pour la compléter, il faut en effet être à même de pouvoir estimer <u>l'importance relative que l'on doit attribuer à chaque point de vue</u>, dans la perspective de la décision finale.

A cette fin, nous ferons l'hypothèse que cette importance peut être traduite par des coefficients π_p , $p = 1,\dots, P$, qui sont des nombres positifs, dont nous pourrons supposer dans la suite qu'ils sont entiers. C'est ainsi, par exemple, que si tous les points de vue sont jugés d'une égale importance, on posera $\pi_p = 1$; si, au contraire, ils sont très fortement hiérarchisés de telle sorte que l'importance accordée à l'un d'entre eux soit toujours plus grande que celle accordée à tous les suivants réunis, on pourra poser $\pi_p = 2^{P-p}$.

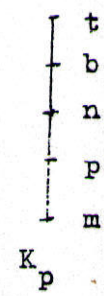
Il reste néanmoins à préciser la structure des ensembles K_p . A priori, on pourrai envisager que certains de ces ensembles soient dépourvus de structure, ou bien enco soient munis d'une structure simple du type oui, non , pour traduire par exemple qu'un objet possède ou ne possède pas une certaine propriété. Cependant, ces cas se révèlent respectivement trop généraux et trop particuliers dans notre optique de comparaison et de sélection, aussi nous limiterons-nous à supposer dans la suite que les K_p ont tous une structure d'échelle.

Sous le terme d'échelle, nous désignerons un ensemble fini d'états, d'appréciations, dont les éléments sont tous rangés (à la manière des éléments d'une échelle) dans u ordre (généralement traduit par une numérotation) auquel on attache une certaine signification : échelle de préférence, échelle hiérarchique, échelle de valeur,.... Précisons toutefois qu'il faut se garder de considérer comme a priori égaux les écarts qui séparent les paires d'échelons consécutifs. Bien plus, il peut être diffi cile de comparer entre eux deux quelconques de ces écarts, rien ne permettant le plu souvent de leur conférer un sens qui soit indépendant de leur position dans l'échell cependant, afin de pouvoir asseoir la notion d'indicateur de discordance qui sera introduite au chapitre II, nous supposerons dorénavant que l'on sait comparer deux écarts quelconques appartenant ou non tous deux à la même échelle. Cette hypothèse se précisera dans la suite ; remarquons cependant qu'elle n'entraîne pas la nécessit de munir chaque échelle d'une mesure. Ceci ne sous-entend pas que les échelles aient toutes le même nombre d'échelons, cependant il n'est nullement restrictif de l'admet tre, à condition de modifier les échelles qui ne contiennent pas le plus grand nombr d'échelons, en les complétant par des échelons supplémentaires fictifs correspondant à des résultats, ou des appréciations, que l'on n'attribuera jamais. Nous supposeron encore que, pour chaque point de vue, le sens favorable qui doit servir à fonder la sélection finale est marqué dans chaque échelle par le sens montant des échelons. Ceci nous autorisera à utiliser respectivement les notations $\gamma_p(i) \succ \gamma_p(j)$ pour exprimer que, suivant p, i est "plus haut" ou meilleur que j, et $\gamma_p(k) \geqslant \gamma_p(l)$ pour exprimer que k est au moins aussi bon que l suivant p

Voici deux exemples d'échelles :



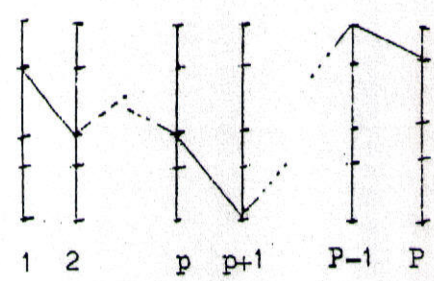
- si E désigne l'ensemble des candidats à un concours, les points de vue seront alors les matières ou épreuves du concours, et K_p sera l'échelle des notes possibles pour la matière p, par exemple de 21 échelons, allant de 0 à 20, ou tout autre si l'on intègre le π_p marquant l'importance accordée à la matière ;



- si E représente un ensemble de produits nouveaux envisagés par une entreprise, on peut imaginer que chaque point de vue donne lieu (par l'intermédiaire d'un expert, d'une enquête, ...) à une appréciation γ_p de tout $i \in E$ sur une échelle telle que :

$$K_i = \{\text{mauvais, passable, neutre, bon, très bon}\}$$

Un état multidimensionnel traduisant les appréciations portées sur un objet suivant l'ensemble des points de vue apparaît maintenant comme une suite de repères d'échelons. La représentation graphique indiquée ci-contre justifie la dénomination de "profil" que nous lui avons également donnée (remarquons que l'ordre dans lequel ont été numérotés les points de vue est arbitraire ; il ne joue aucun rôle).



Nous venons de passer en revue les principales hypothèses dont nous aurons besoin au chapitre II ; elles réapparaîtront d'ailleurs tout naturellement au cours de la description de la méthode. Cependant, avant de l'aborder, et pour terminer ce premier chapitre, nous allons effectuer un rapide survol des approches les plus classiques.

C – QUELQUES APPROCHES USUELLES DU PROBLEME

Les motifs qui ont conduit à introduire des échelles dans notre problème apparaissent maintenant clairement. La comparaison des éléments de E dans un but de sélection, plus précisément la comparaison de leurs états multidimensionnels, n'est concevable que dans la mesure où l'on sait, déjà, comparer ces mêmes éléments d'après l'état unidimensionnel relatif à un seul point de vue, quel qu'il soit. En réalité, les méthodes de sélection – ou de classement – lorsque l'on doit tenir compte de points de vue multiples, font toutes appel à cette hypothèse.

En fait, la plupart de ces méthodes répondent à un objectif de classement, et visent à ranger les objets de l'ensemble E en un <u>pré-ordre complet</u>, c'est-à-dire en une suite laissant place aux ex-aequos (préfixe "pré"), et grâce à laquelle n'importe quel objet peut être comparé (de par sa position dans la suite) à n'importe quel autre. Une telle structure possède un élément maximum au moins[(1)], ce qui résout le problème de la sélection.

Nous nous limiterons ici à une brève description de deux de ces méthodes.

---

(1) Un élément est dit maximum s'il est supérieur ou égal à tout élément de l'ensemble ; il est dit maximal s'il n'existe pas d'élément de l'ensemble qui lui soit supérieur.

1 - LA METHODE DES SOMMES PONDEREES

Cette méthode, qui est appliquée par exemple dans les concours et examens scolaires, suppose :

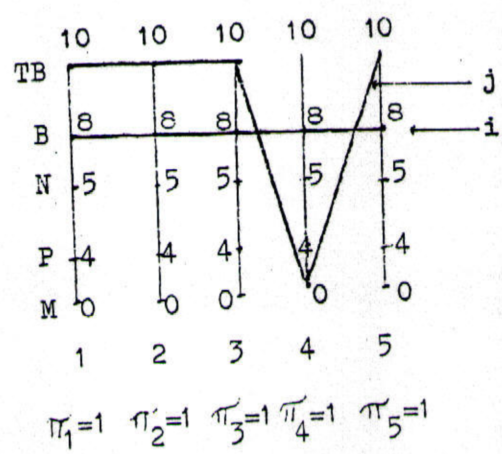
- que l'on sache définir sur chaque échelle une mesure (et alors non seulement peut-on comparer deux écarts inter-échelons d'une même échelle, mais de plus on sait dire combien de fois l'un est contenu dans l'autre),
- que l'unité de mesure soit la même sur chaque échelle.

Dans ces conditions, en utilisant les notations définies précédemment, on pose que l'objet j est au moins aussi bon (nous emploierons dans la suite le verbe "surclasser" pour exprimer cette relation d'ordre) que l'objet i si :

$$\sum_{p=1}^{P} \pi_p \ \gamma_p (j) \geqslant \sum_{p=1}^{P} \pi_p \ \gamma_p (i) ,$$

ce qui permet évidemment de définir un nouveau pré-ordre complet sur E , sur la base duquel on peut classer ces éléments.

Cette méthode présente, en dehors des hypothèses très fortes que son application nécessite, un grave inconvénient. Elle conduit à considérer comme équivalents deux objets de sommes pondérées égales ; est-ce toujours raisonnable de l'admettre pour les objets i et j dont les profils sont représentés sur la figure ci-contre (nous mettrons ce phénomène en évidence sur l'exemple qui sera développé au chapitre II)?



Remarquons encore qu'appartient à ce type de méthode celle qui consiste à utiliser non des sommes mais des produits pondérés (on classe alors selon des sommes pondérées de logarithmes).

2 - HIERARCHISATION DES POINTS DE VUE

Les points de vue étant ordonnés, on sélectionne un sous-ensemble d'objets jugés de bonne qualité suivant le point de vue le plus important, on les départage partiellement selon le point de vue d'importance immédiatement inférieure, etc.

Là encore, on peut aboutir à des résultats contestables, par exemple, si l'on élimine sur la base du premier point de vue un objet se révélant uniformément excellent selon les points de vue suivants.

CHAPITRE II

ASPECTS THEORIQUES DE LA METHODE ELECTRE

La méthode que nous allons maintenant présenter est avant tout, rappelons-le, une méthode visant à la sélection, quoiqu'elle puisse aussi fournir des éléments de classement, comme nous le verrons au chapitre III. Elle a été conçue pour permettre d'éclairer un choix, et ceci de façon simple[1] et en faisant appel à des hypothèse aussi peu restrictives que possible (ainsi, elle ne nécessite pas de faire des addi tions de jugements, appréciations ou notes attribués suivant des échelles différent Enfin, par son principe même, elle ne se substitue pas au responsable du choix en l imposant l'objet le meilleur : son résultat est, en effet, de fournir, sur la base d'une relation de surclassement, une dichotomie de E en deux sous-ensembles dont l'un, le "noyau", de dimension aussi réduite que possible, contient des éléments jugés non comparables et qui sont tels que tout objet du second est jugé moins bon que l'un au moins des objets du noyau. Le choix définitif entre les objets du noyau peut ensuite se faire sur la base d'une analyse complémentaire (qu'il aurait été trop coûteux ou trop long d'entreprendre sur la totalité des objets de E), ou bien encore sur la base de données politiques, etc.

Nous allons donc successivement définir cette relation de surclassement, puis montr comment construire le noyau.

---

(1) Nous entendons par là à l'aide d'un mécanisme simple, dont le fonctionnement es constamment contrôlable. Cela n'implique nullement qu'il ne faille pas fournir d'effort pour l'utiliser.

A - LA RELATION DE SURCLASSEMENT

Cette relation, qui se trouve à la base de la méthode, sera progressivement construite au cours de ce paragraphe. Nous commencerons par donner quelques idées qui guideront sa recherche ; nous définirons ensuite deux indicateurs qui en constituent le fondement, pour établir enfin sa définition.

1 - PRINCIPES GUIDANT LA RECHERCHE DE LA RELATION DE SURCLASSEMENT

En raison des hypothèses que nous avons faites en I.B. sur les structures des ensembles d'appréciations, nous pouvons associer à chaque point de vue p un graphe orienté $G_p = (E, U_p)$ dont les sommets représentent les objets de E, et dans lequel l'ensemble des arcs U_p est défini par les conditions :

$$\text{arc } (i,j) \in U_p \text{ si et seulement si } \gamma_p(i) \geqslant \gamma_p(j),$$

la flèche allant par convention de la valeur la plus haute vers la valeur la plus

$$i \longrightarrow j$$

basse, et l'égalité $\gamma_p(i) = \gamma_p(j)$ entraînant l'existence de deux flèches en sens inverses.

Illustrons ceci sur l'exemple suivant dans lequel on cherche à sélectionner un objet parmi six objets, jugés selon cinq points de vue. L'échelle associée à chaque point de vue comprend cinq échelons correspondant aux appréciations "mauvais (m), "passable" (p), "neutre" (n), "bon" (b) et "très bon" (t). Les appréciations portées sont résumées dans le tableau suivant :

e \ p	1	2	3	4	5
1	n	t	p	n	t
2	m	p	p	t	n
3	m	n	m	t	p
4	t	p	n	n	n
5	t	n	b	n	b
6	t	n	t	b	b

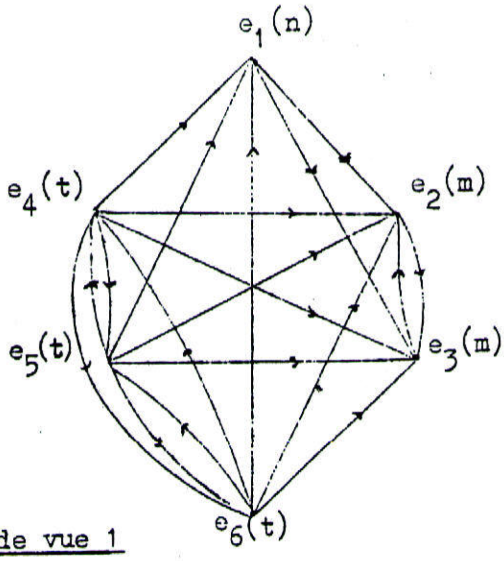
e : objets
p : points de vue

On en déduit les cinq graphes G_p représentés sur la page suivante. On remarquera que ces graphes ne sont pas quelconques. En effet :

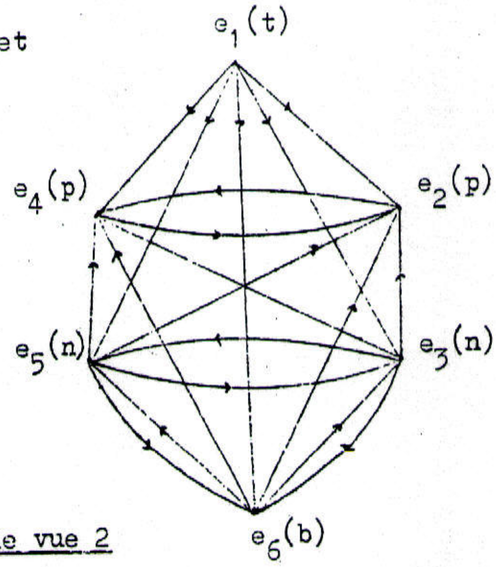
- chaque fois qu'il existe entre deux sommets i et j un chemin au moins allant du premier au second, il en existe alors nécessairement un réduit à un seul arc : propriété de transitivité ;

- deux sommets i et j sont toujours adjacents, autrement dit, G_p est complet (il existe un arc au moins entre tout couple de sommets).

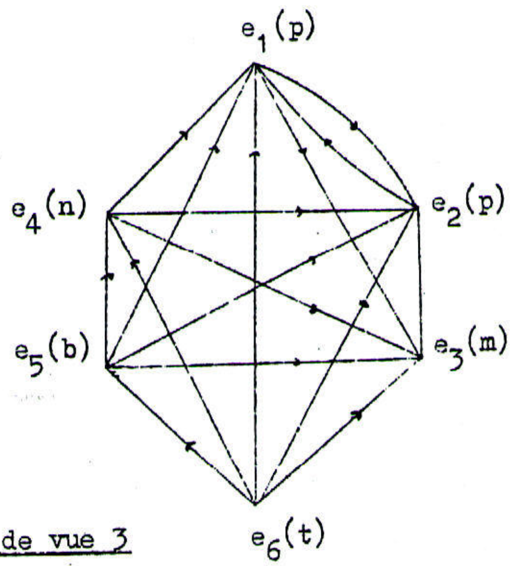
e = objet



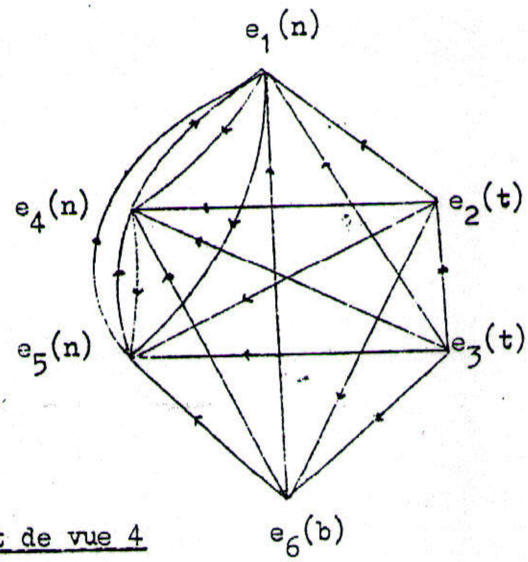
Point de vue 1



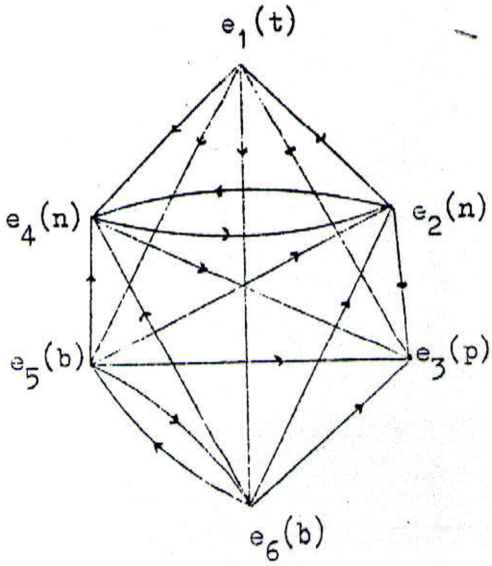
Point de vue 2



Point de vue 3



Point de vue 4



Point de vue 5

Notre objectif est maintenant de déduire de l'ensemble des graphes G_p un nouveau graphe $G = (E,U)$ qui opère la synthèse des P points de vue.

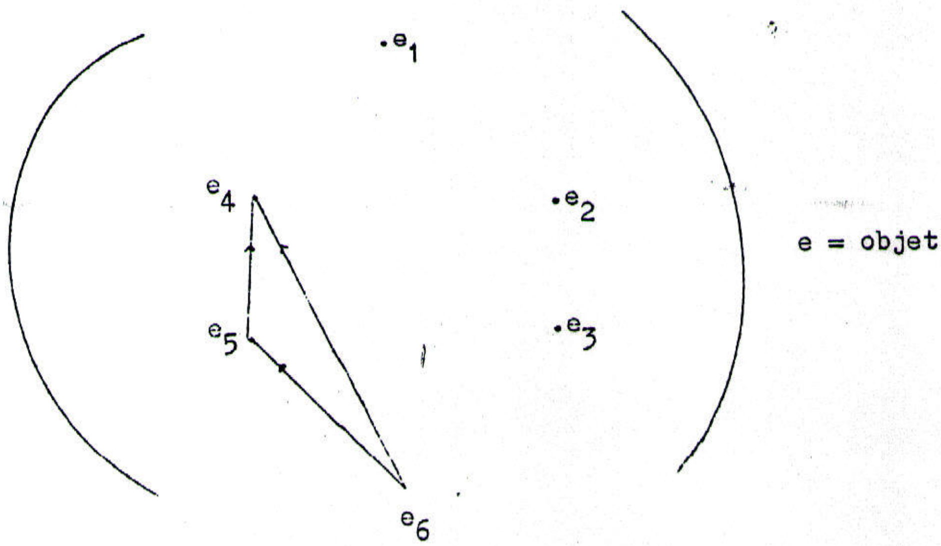
Observons tout d'abord que, s'il existe deux objets i et j pour lesquels l'échelon attribué à i est toujours - quel que soit le point de vue - au moins égal à celui attribué à j, alors, l'intégration de tous les points de vue que doit représenter G ne peut que respecter cette unanimité, autrement dit :

$$(i,j) \in U_p \qquad \forall p = 1,\ldots, P \Longrightarrow (i,j) \in U .$$

Soit alors :

$$G_0 = (E,\ U_0) \quad \text{avec} \quad U_0 = \bigcap_{p=1}^{p=P} U_p \ ,$$

Graphe G_0
associé
à l'exemple
précédent



le graphe qui rassemble les comparaisons que l'on peut ainsi fonder sur ce respect de l'unanimité (il est facile de vérifier que c'est encore un pré-ordre mais qu'en général il est loin d'être complet).

Le problème du choix de G peut maintenant être formulé de la manière suivante :

en vertu de quels principes peut-on caractériser les arcs qu'il convient d'adjoindre à G_0 pour en déduire un graphe G qui soit en aussi bon accord que possible avec les divers points de vue, sans être pour cela trop pauvre en couples comparables ?

Pour tenter de répondre à cette question, nous allons tout d'abord définir deux indicateurs associés à chaque couple ordonné i , j .

2 - LES INDICATEURS DE CONCORDANCE ET DE DISCORDANCE

Considérons deux objets i et j de E et demandons-nous ce qui permettrait de justifier l'hypothèse que i surclasse j (donc de placer, dans G , un arc allant de i vers j). Pour répondre à cette question, partageons l'ensemble des points de vue en deux classes disjointes, la classe $C\ (i,j)$ des points de vue pour lesquels i est au moins aussi bon que j , donc en concordance avec notre hypothèse, et la classe complémentaire $D\ (i,j)$ dont les points de vue sont en discordance avec cette hypothèse.

2.1 - Indicateur de concordance

Il apparaît d'autant plus légitime d'accepter notre hypothèse que le nombre de points de vue contribuant à former $C\ (i,j)$ est grand, relativement au nombre total de points de vue. Cependant, les points de vue peuvent être d'importance différente (traduite par les coefficients π_p), et il faut en tenir compte ; aussi proposons-nous, pour juger de la concordance plus ou moins bonne des divers points de vue exprimés avec notre hypothèse, l'indicateur de concordance c_{ij} défini comme :

$$c_{ij} = \frac{\sum_{p \in C\ (i,j)} \pi_p}{\sum_{p=1}^{P} \pi_p}$$

Cet indicateur s'interprête facilement, en considérant les points de vue comme des <u>votants</u> plus ou moins représentatifs : c'est le pourcentage des voix en faveur de l'hypothèse. Signalons que cette approche est inspirée des idées de Condorcet(1).

Notons également les propriétés suivantes de c_{ij} :

- il varie de 0 à 1 de façon non décroissante avec l'enrichissement de $C(i,j)$;
- il vaut 1 si et seulement si $(i,j) \in U_0$;
- il conserve sa signification, et ne conduit à aucune incohérence lorsqu'on subdivise un point de vue p en plusieurs autres que l'on met à sa place ; il faut naturellement que la somme des nouveaux coefficients égale π_p .

On trouvera ci-dessous le tableau de concordance à double entrée $C = \{c_{ij}\}$ relatif à l'exemple introduit plus haut (les lignes correspondant à j , les colonnes à i) dans cet exemple on a : $\pi_1 = \pi_3 = 3$, $\pi_2 = 2$, $\pi_4 = \pi_5 = 1$.

$$C = \begin{bmatrix} * & 0{,}40 & 0{,}10 & 0{,}70 & 0{,}70 & 0{,}70 \\ 0{,}90 & * & 0{,}60 & 0{,}90 & 0{,}90 & 0{,}90 \\ 0{,}90 & 0{,}80 & * & 0{,}70 & 0{,}90 & 0{,}90 \\ 0{,}40 & 0{,}40 & 0{,}30 & * & 1 & 1 \\ 0{,}40 & 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}40 & * & 1 \\ 0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}30 & 0{,}60 & * \end{bmatrix}$$

Par exemple :

$$c_{12} = \frac{3 + 2 + 3 + 0 + 1}{10} = 0{,}90$$

---

(1) Voir [1]

2.2 - Indicateur de discordance

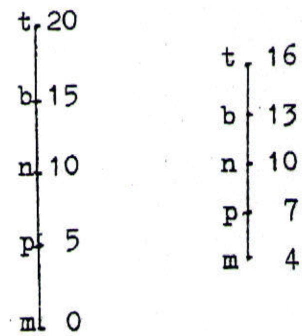
Nous avons ainsi admis que notre hypothèse de départ est d'autant plus légitime que c_{ij} est grand. Encore faut-il que les points de vue en discordance avec cette hypothèse (la minorité, dans l'optique d'une consultation électorale) ne conduisent pas à des écarts discordants trop grands et trop nombreux. Il nous faut donc apprécier l'"amplitude" de la discordance.

C'est à cette fin que nous avons fait, en I.B, l'hypothèse que l'union, sur toutes les échelles, de l'ensemble des couples d'échelons d'une échelle (couples ordonnés dans le sens de l'échelon le moins important vers le plus important) constituait un pré-ordre complet. Ceci permet alors de comparer deux à deux des écarts discordants associés à deux points de vue différents.

Pour des raisons purement opératoires, nous allons expliciter cette hypothèse en supposant que, dans chaque échelle, les échelons sont repérés par des nombres tels que la différence de deux d'entre eux représente l'écart que l'on cherche à apprécier. Ces nombres pourront s'interpréter comme des notes associées à chaque échelon, n'intervenant que par leurs différences. Un simple numérotage des échelons pourra convenir dans certains cas ; dans d'autres, il faudra introduire un "pas" propre à chaque échelle, il pourra aussi être nécessaire parfois de procéder à un étalonnage plus subtil de chacune d'elles.

Dans ces conditions, on peut songer à introduire un indicateur de discordance d_{ij} défini comme le plus grand écart discordant (convenablement normé) associé aux profils de i et j , puisque nos hypothèses permettent désormais de comparer des écarts discordants. Notons, cependant, que cette définition pourrait conduire à mesurer l'"amplitude" de la discordance par un écart discordant sur un point de vue d'importance relativement très faible. Cette remarque montre la nécessité de ne pas déterminer indépendamment les uns des autres les équivalents numériques des appréciations de deux échelles différentes : au contraire, il faut veiller à ce que la hauteur de l'échelle (différence entre la note supérieure et la note inférieure d'une échelle) soit une fonction non décroissante du coefficient (traduisant le poids) du point de vue.

A titre d'exemple, nous avons indiqué ci-dessous les deux types d'échelles choisis pour notre exemple numérique.



Points de vue 1,2,3 — Points de vue 4 et 5

On pourrait pour définir l'indicateur de discordance s'en tenir là et ne considérer donc qu'un seul écart discordant, le plus grand.

Or, nous pouvons imaginer une situation dans laquelle les points de vue discordants soient relativement nombreux (10, par exemple) mais où les écarts discordants soient tous relativement très faibles, sauf l'un d'entre eux prenant la plus grande valeur possible. Il peut apparaître un peu arbitraire de refuser l'hypothèse de comparabilité à cause de ce dernier, lui-même minoritaire au sein de la minorité. Par contre, si dans une situation analogue, il y avait 10 écarts discordants dont 5 très petits, et les 5 autres ni très petits ni très grands, la possibilité de comparer pourrait sembler moins évidente.

Pour cette raison, après nous être fixé un entier s , qui jouera dans la suite le rôle d'un paramètre (on trouvera au chapitre III des éléments de choix de s), nous allons construire <u>la liste ordonnée dans le sens décroissant des écarts</u>

<u>discordants</u>, et définirons <u>l'indicateur de discordance</u> $d_{ij}(s)$ comme le $s^{ième}$ élément de cette liste, divisé par la hauteur de la plus grande échelle (afin qu'il varie entre 0 et 1). Complètons cette définition en convenant que $d_{ij}(s) = 0$ si $D(i,j) = \emptyset$.

Il convient de remarquer que, si l'on décide de définir l'indicateur de discordance par exemple pour $s = 2$, cela équivaut à oublier complètement le point de vue le plus discordant, pour $s = 3$ les deux points de vue les plus discordants, etc..., par conséquent à ne pas en tenir compte quelle que soit l'amplitude de la discordance que l'on y observe.

Les valeurs des indicateurs de discordance peuvent encore être rassemblées, pour tous les couples i,j , en un tableau de discordance $D(s)$. Nous avons calculé le tableau $D(1)$ associé à notre exemple numérique, pour lequel l'échelle la plus haute a une hauteur de 20 (sur ce tableau, les indices j correspondent aux lignes, et les indices i aux colonnes).

$$D(1) = \begin{bmatrix} * & 0,75 & 0,50 & 0,75 & 0,50 & 0,50 \\ 0,30 & * & 0,25 & 0,30 & 0,30 & 0,15 \\ 0,30 & 0,25 & * & 0,30 & 0,30 & 0,15 \\ 0,50 & 0,10 & 0,10 & * & 0 & 0 \\ 0,50 & 0,10 & 0,10 & 0,25 & * & 0 \\ 0,75 & 0,10 & 0,10 & 0,50 & 0,25 & * \end{bmatrix}$$

Ainsi par exemple, $d_{12}(1) = \frac{6}{20} \# 0,30$.

Ce nouvel indicateur présente des propriétés analogues à celles du précédent :

- il varie de 0 à 1 de façon non croissante avec l'appauvrissement de $D(i,j)$;

- il vaut 0 si et seulement si $(i,j) \in U_0$;

- il conserve sa signification, et ne conduit à aucune incohérence, lorsque l'on affine l'échelle K_p en insérant des échelons intermédiaires entre les anciens, il faut naturellement ne pas modifier les écarts entre ces derniers.

3 - DEFINITION DE LA RELATION DE SURCLASSEMENT

Nous allons prendre comme base de définition pour la relation de surclassement la remarque suivante :

il semble naturel d'admettre qu'un objet i en surclasse un autre j si et seulement si :

- une majorité suffisante se dégage parmi les points de vue (intervenant chacun comme autant de points de vue élémentaires que l'indique leur coefficient) pour placer i au moins aussi haut que j ;

- aucun des points de vue en désaccord avec cette majorité ne révèle une supériorité trop forte de j par rapport à i.

Ceci étant admis, fixons-nous une valeur du paramètre s, puis donnons-nous deux nombres, compris entre 0 et 1, l'un p (seuil de concordance) plutôt proche de 1, l'autre q (seuil de discordance) relativement voisin de 0. Nous dirons, sur la base des P points de vue considérés et des seuils p et q, qu'un objet i surclasse un objet j si et seulement si le couple (i,j) conduit à :

- un indicateur de concordance c_{ij} au moins égal à p,
- un indicateur de discordance $d_{ij}(s)$ au plus égal à q.

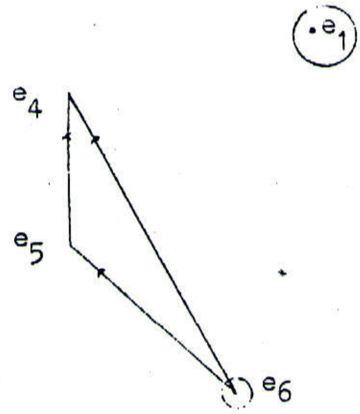
La relation de surclassement ainsi définie est représentée par un graphe :

$$G\ (p,q,s) = \left[E,\ U\ (p,q,s)\right] ,$$

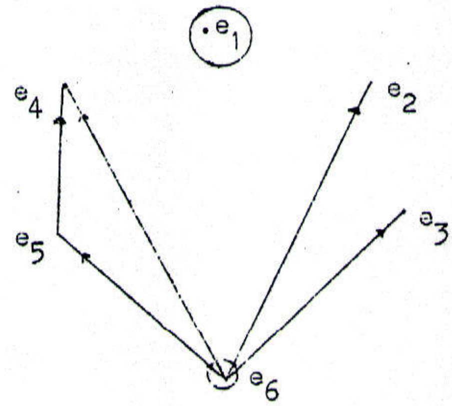
avec :

$$(i,j) \in U\ (p,q,s) \iff c_{ij} \geq p \text{ et } d_{ij}(s) \leq q.$$

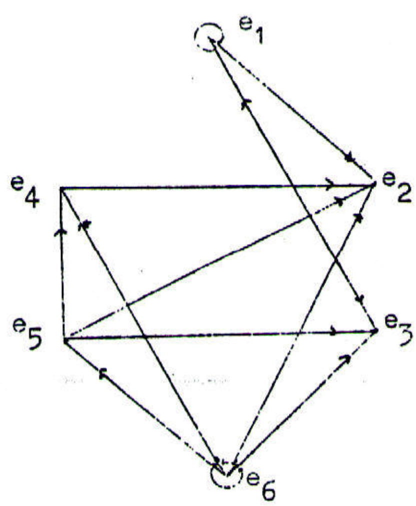
La figure ci-dessous montre des graphes de surclassement associés à l'exemple numérique étudié depuis le début de ce chapitre, pour la valeur $s = 1$.



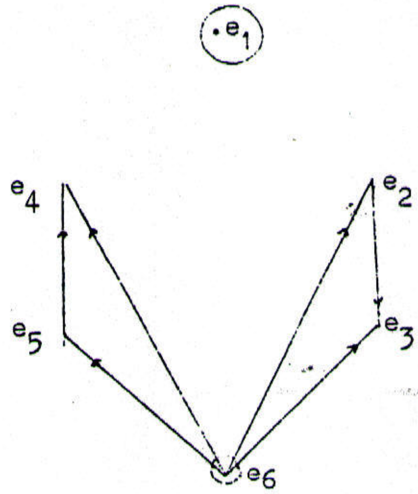
$G_0 = G\ (1\ ;\ 0\ ;\ 1)$



$G\ (0{,}90\ ;\ 0{,}15\ ;\ 1)$

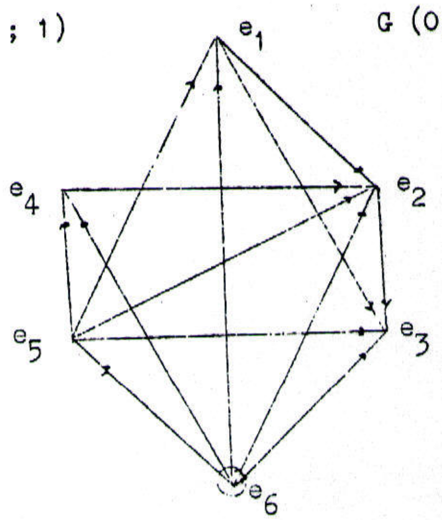


$G\ (0{,}90\ ;\ 0{,}30\ ;\ 1)$



$G\ (0{,}80\ ;\ 0{,}25\ ;\ 1)$

Les sommets appartenant au noyau sont encerclés



$G\ (0{,}70\ ;\ 0{,}50\ ;\ 1)$

Ces graphes appellent trois remarques faciles à justifier :

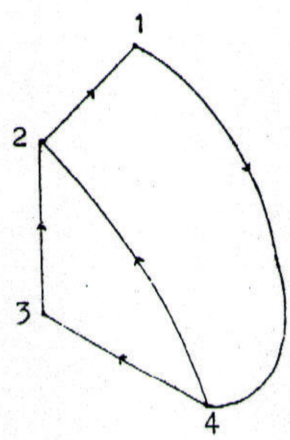
a) Si $p \leqslant p'$ et $q \geqslant q'$, alors $G(p,q,s)$ admet $G(p',q',s)$ comme graphe partiel.

b) $G(1,q,s) = G(p,0,s) = G_0$ qui est donc graphe partiel de $G(p,q,s)$ quels que soient p et q , s n'ayant bien entendu aucune signification dans ce cas.

c) Dès que $p < 1$ et $q > 0$, $G(p,q,s)$ n'est plus <u>forcément transitif</u> (bien que tous les G_p le soient) : ceci signifie tout simplement que si l'accord des divers points de vue est suffisant pour que j surclasse i et k surclasse j , il n'en découle pas logiquement un accord suffisant pour que k surclasse i . Ceci peut sembler à première vue assez déroutant ; ce n'est cependant qu'une conséquence directe de la multiplicité des points de vue (l'exemple figuré ci-dessous le montre clairement : 2 surclasse 1, 1 surclasse 4 et pourtant 4 surclasse 2). Remarquons néanmoins que plus l'on atténuera la sévérité des seuils, plus le graphe associé sera riche en arcs, et moins il apparaîtra d'intransitivités. Toutefois, la relation de surclassement <u>perdra alors de son réalisme</u>, et il sera difficile de donner une signification au graphe.

d) Il peut même se produire que des circuits apparaissent, comme le montre l'exempl[e] suivant :

Objets \ Points de vue	$\pi_1=1$ 1	$\pi_2=1$ 2	$\pi_3=1$ 3
1	2	ε	4
2	4	10	0
3	10	6	2
4	6	7	3



G (0,66;0,40;

Néanmoins, leur présence pour des valeurs réalistes de seuils suppose des conditions très particulières, ce qui explique leur rareté dans la pratique. On considèrera comme <u>équivalents</u> les objets associés à un tel circuit.

B - DEFINITION DU NOYAU

Une valeur de s étant fixée, supposons que l'on puisse raisonnablement se donner un seuil p tel que, pour déclarer un objet i prioritaire (quant à sa sélection) par rapport à un objet j, il apparaisse nécessaire que la proportion (compte tenu des coefficients) des points de vue qui conduisent à juger i au moins aussi bon que j, dépasse p. Cette condition peut ne pas être jugée suffisante en raison de la faiblesse relative (par rapport à j) que peut présenter i sur certains points de vue. Supposons encore que l'on puisse définir un nouveau seuil q tel que la priorité paraisse pleinement justifiée si, la condition précédente étant remplie, l'écart relatif normé traduisant la faiblesse que présente i par rapport à j et correspondant à la valeur s fixée, ne dépasse pas q. On sera alors en droit, pour tout arc $(i,j) \in U(p,q,s)$ <u>d'éliminer j dès l'instant où l'on conserve i</u>.

Il ne reste plus qu'à préciser comment cette dernière proposition permet de justifier la sélection des produits appartenant à un sous-ensemble défini S et l'élimination de ceux appartenant à $E - S$.

Il est assez naturel de vouloir imposer au sous-ensemble S les deux propriétés suivantes :

- <u>propriété de stabilité externe</u> :

$$\forall j \in E - S \ , \quad \exists i \in S \quad \text{tel que} \quad (i,j) \in U(p,q,s)$$

ce qui signifie que tout produit éliminé est surclassé par au moins un des produits conservés ;

- <u>propriété de stabilité interne</u> :

$$\forall j \in S \text{ et } \forall k \in S \ : \ (j,k) \notin U(p,q,s)$$

ce qui signifie qu'aucun produit sélectionné n'est surclassé par un autre produit sélectionné.

Les sous-ensembles de sommets d'un graphe qui possèdent conjointement ces deux propriétés de stabilité portent le nom de <u>noyau</u>. Or, on sait qu'un graphe quelconque n'admet pas nécessairement un noyau, et aussi qu'il peut en avoir plusieurs. Toutefois (et le lecteur voudra bien l'admettre ou se reporter à la référence [7], page 40), l'absence de circuits dans le graphe supposé fini entraîne <u>l'existence et l'unicité</u> du noyau. Mais nous avons vu que la présence de circuits (pour des valeurs réalistes des seuils) implique l'équivalence des objets du circuit. Désignons par σ ce circuit. Il est raisonnable de songer à substituer au sous-ensemble des objets formant σ, un seul objet t, soit que l'on remette à plus tard le choix, soit que l'on opte dès ce stade pour l'un d'entre eux. Il reste cependant à préciser dans quels cas t surclasse ou est surclassé par un objet quelconque de $E - \sigma$. Il est naturel de poser :

- t surclasse $i \in E - \sigma$ s'il existe $j \in \sigma$ tel que j surclasse i,

- t est surclassé par $j \in E - \sigma$ s'il existe $i \in \sigma$ tel que i est surclassé par j.

On remarquera que cette transformation n'est autre que ce que l'on appelle en théorie des graphes le rétrécissement du circuit

On peut ainsi justifier l'élimination progressive des divers circuits éventuels de $G(p,q,s)$ par simple rétrécissement (l'ordre dans lequel on procède est indifférent, comme le lecteur pourra s'en assurer). Ce travail peut d'ailleurs être exécuté de manière systématique en même temps que s'opère la recherche du noyau, et c'est à partir de cette remarque qu'a été bâti le programme ELECTRE (cf. annexe)

Il est ainsi possible d'isoler, de façon certaine et sans ambiguité, un noyau S , sinon de $G(p,q,s)$, tout au moins du graphe sans circuits qui s'en déduit par rétrécissement de ceux qu'il pourrait posséder.

Il se peut que S n'ait qu'un seul élément, celui-ci surclassant tous les autres. C'est le cas de e_6 dans le graphe $G\,(0{,}70 \; ; \; 0{,}50 \; ; \; 1)$ représenté à la fin de II.A. Il suffit d'être plus exigeant sur l'un quelconque des deux seuils pour que le noyau englobe e_1 en plus de e_6 . C'est évidemment là un phénomène très général. Lorsque pour des seuils retenus a priori, on est conduit à sélectionner un ensemble S ayant trop d'éléments, il faut en conclure que l'antagonisme des points de vue est tel que ces seuils ne peuvent donner lieu à une synthèse suffisamment riche en couples comparables. On renforcera en général l'élimination en étant moins exigeant sur l'un ou l'autre ou les deux seuils de concordance et de discordance. C'est ainsi que le noyau de $G\,(\frac{1}{2};1;1)$ est toujours réduit à un seul élément comme il est facile de le démontrer.

Signalons pour terminer que le calcul des sommes pondérées associées aux objets de l'exemple numérique considéré conduit aux résultats suivants :

Objets	6	5	4	1	2	3
Sommes pondérées	166	148	120	111	51	43

Cet exemple met bien en évidence l'intérêt que présente ELECTRE par rapport à la méthode des sommes pondérées. En effet, ce classement conduirait à conclure que l'objet 6 est nettement le meilleur et que, si un doute devait naître quant à l'opportunité de sa sélection, c'est sur le produit 5 qu'il faudrait reporter l'attention.

Or, l'application d'ELECTRE montre le danger que représente ce type de conclusion :

- on constate, en effet, en observant l'évolution des noyaux lorsque l'on diminue la sévérité des seuils, que les objets 1 et 6 ne deviennent comparables que pour des niveaux de seuils assez faibles ($p = 0{,}70$, $q = 0{,}50$, $s = 1$). Si donc on envisage de ne retenir qu'un seul objet, c'est réellement entre 1 et 6 qu'il faut choisir puisqu'il apparaît à la fois qu'ils sont difficiles à comparer et qu'ils surclassent les autres objets. Or, le classement par sommes pondérées classe 1 loin derrière 6 et, par conséquent, conduit à ne pas le prendre en considération ;

- si l'on envisageait, a priori, de retenir 2 objets, les sommes pondérées conduiraient immédiatement à la sélection de 6 et 5 , sans jamais envisager la candidature de 1 . Or, notre exemple montre bien que 6 ayant été retenu, il faut approfondir la comparaison de 5 et 1 (entre lesquels un arc n'apparaît que pour $p = 0{,}70$ et $q = 0{,}50$) pour être à même de choisir en toute connaissance de cause le second meilleur objet.

CHAPITRE III

QUELQUES ELEMENTS D'UTILISATION PRATIQUE

Nous avons présenté dans les pages qui précèdent les aspects théoriques de la méthode ELECTRE. Toutefois, le lecteur qui en verrait dès à présent une application possible peut se heurter à quelques difficultés lors de l'analyse de son problème ; c'est pourquoi nous donnerons dans ce chapitre quelques réflexions, remarques et résultats d'expérience susceptibles de l'aider.

Nous ferons quelques commentaires rapides sur la nature des problèmes qu'ELECTRE permet d'aborder ; nous donnerons ensuite des indications sur la façon de formuler un problème et de lui appliquer cette méthode, puis nous dresserons une brève liste d'applications possibles.

A - NATURE DES PROBLEMES POUVANT ETRE ABORDES A L'AIDE D'ELECTRE

ELECTRE a été conçue pour faciliter - et non pour exécuter - la sélection d'un objet parmi un ensemble de candidats. Cependant, cette méthode peut parfois permettre des utilisations moins restrictives.

En voici un premier exemple : supposons que l'on recherche à sélectionner les deux meilleurs objets d'un lot. Une première application de la méthode, suivie d'un choix à l'intérieur d'un noyau, permettra de sélectionner le meilleur objet. On le retirera donc du lot initial, pour appliquer à nouveau la méthode à l'ensemble restant. Il est parfaitement possible que cela permette de révéler un deuxième objet de très bonne qualité, mais que l'on n'avait pas aperçu précédemment dans un noyau car il était surclassé par l'objet précédemment sélectionné.

Imaginons maintenant que l'on recherche un classement des objets de E . L'étude de l'évolution des noyaux et des graphes lorsque varient p, q et s peut fournir des indications précieuses qui, ajoutées aux éléments d'information à la disposition de l'analyste mais non intégrés dans les échelles, peuvent permettre d'esquisser le classement. On imagine en effet facilement que l'on puisse mettre en évidence le premier et le dernier du classement ; de plus, en inspectant les tableaux C et $D(s)$, on peut découvrir que deux objets comparables sont voisins ; on peut aussi tirer parti des quasi-équivalences révélées par les circuits, etc.

B - PRECAUTIONS A PRENDRE DANS LA FORMULATION D'UN PROBLEME

Nous passerons successivement en revue tous les éléments qui permettent de formuler un problème relevant d'une application d'ELECTRE.

1 - LES OBJETS

La nature physique des objets importe évidemment peu, l'essentiel étant qu'ils constituent un groupe homogène de candidats a priori égaux devant la sélection.

2 - LES POINTS DE VUE

Une condition essentielle sur leur définition est qu'ils doivent être aussi peu dépendants que possible. Nous entendons par là que la connaissance de l'appréciation attribuée à i suivant le point de vue p ne doit donner que peu (ou pas du tout) d'information sur l'appréciation à attribuer à i suivant p'. Si cela n'était pas le cas, si par exemple deux points de vue se trouvaient être identiques cela contribuerait à fausser la signification des indicateurs c_{ij} et $d_{ij}(s)$, et par suite la signification du résultat définitif (certains indicateurs se verraient, en effet, artificiellement augmentés, et ceux correspondant aux mêmes couples d'objets, mais pris dans l'ordre inverse, artificiellement diminués).

Pour ce qui est maintenant de l'interprétation des points de vue, le fait de les assimiler à des experts ou à des votants semble assez commode.

3 - LES COEFFICIENTS DES POINTS DE VUE

Ceux-ci paraissent relativement difficiles à définir. Le principal guide qui permet de les déterminer demeure leur définition : le coefficient d'un point de vue fourni une évaluation de l'importance, du poids, que prend ce point de vue dans la prise de décision de sélection.

Ceci dit, il faut remarquer qu'ils sont tous définis à un coefficient près : en effet, de par la définition de c_{ij}, les ensembles $\{\pi_p\}$ et $\{\lambda \pi_p\}$, λ nombre non nul quelconque, conduisent aux mêmes tableaux de concordance. De plus, des expériences numériques semblent montrer que les résultats d'ELECTRE restent stables lorsque les coefficients varient légèrement sans modifier leur ordre.

La détermination objective des coefficients semble rarement possible, la plupart des applications d'ELECTRE associant des experts aux points de vue. En réalité, cette détermination dépend du problème.

On peut se trouver devant deux situations possibles :

- les coefficients peuvent résulter d'une politique a priori sans contenu objectif, et les résultats de la méthode traduisent alors la décision prise : c'est le cas pour le lancement d'un nouveau produit, l'implantation d'une usine nouvelle ;

- les coefficients peuvent être calculés ou estimés et dans ce cas avoir une signification plus concrète et moins subjective. Voici deux illustrations de ce cas :

  . lors du dépouillement d'une enquête au cours de laquelle on a demandé aux personnes interrogées (qui correspondent donc aux points de vue) de classer les objets de E ; supposons, par exemple, qu'il s'agisse de classer des défauts de cigarettes. Les fumeurs pouvant se classer en gros, moyens et petits fumeurs, et l'objectif de la manufacture étant d'éliminer les défauts qui gênent le groupe de ses meilleurs clients, on affectera des coefficients égaux aux individus de chacune des trois classes, les sommes des coefficients des individus de chaque classe étant entre elles comme les quantités annuelles de cigarettes qu'elles consomment (ceci suppose évidemment que l'échantillon soit judicieusement constitué),

  . lors d'une tentative de pronostic, où l'on peut chercher à définir les coefficients a posteriori par une estimation fondée sur des statistiques de résultats relatives au passé (ce cas peut s'illustrer par l'exemple du tiercé, où l'on juge chaque cheval selon sa forme, la qualité du terrain, ...).

4 - LA STRUCTURE DES ECHELLES ET LE CHOIX DES EQUIVALENTS NUMERIQUES DES APPRECIATIONS

Le choix du nombre d'échelons de chaque échelle dépend essentiellement du problème à résoudre. Ce nombre est souvent faible, inférieur à quelques unités. Exemples :

- { mauvais, neutre, bon },
- { mauvais, passable, neutre, bon, très bon },
- { vraiment très grave, très grave, ennuyeux, un peu ennuyeux, presque sans importance, vraiment sans importance }.

Quant à la cotation numérique des échelles, il paraît commode, lorsque l'on n'a aucune information initiale, de choisir un intervalle <u>constant</u> entre échelons consécutifs d'une même échelle, cet intervalle variant d'une échelle à l'autre proportionnellement à son coefficient. Les expériences numériques montrent la grande stabilité des résultats à la variation de cette cotation.

Signalons à ce propos que le programme ELECTRE permet de fournir les données par l'intermédiaire de deux options :

- l'option "notes", dans laquelle on introduit directement les échelles numériques,
- l'option "appréciation", dans laquelle on introduit les appréciations et une table de conversion appréciations-notes ; ceci permet le cas échéant, de mettre en évidence les conséquences d'une modification des distances entre échelons (applications psycho-sociologiques, en particulier).

5 - DETERMINATION DES SEUILS p et q , ET DES VALEURS DU PARAMETRE s

C'est évidemment une chose importante, puisqu'elle porte sur la raison d'être d'ELECTRE : la détermination du noyau. En fait, il n'y a d'arbitraire que lors de la première passe de calculs ; l'analyse des premiers résultats (en particulier, les tableaux C et D (s)) guide facilement le choix des autres valeurs à essayer.

Les valeurs de p sont à choisir dans l'intervalle 1 - 0,60 ; en dessous de p = 0,60 , la relation de surclassement perd beaucoup de sa signification, quel que soit q .

Les valeurs de q à choisir dépendent beaucoup du problème et des valeurs de s retenues.

Les valeurs de s à considérer dépendent du nombre de points de vue ; elles ne semblent pas devoir être prises supérieures à 10 % ou 15 % du nombre de points de vue (le nombre de valeursde s étant inférieur ou égal à la plus grande valeur de s).

Enfin, il est toujours intéressant de chercher G_0 (pour p = 1 et q = 0).

En résumé, on peut tenter, lors d'un premier passage, d'essayer quelques valeurs de s , valeurs n'excédant pas les pourcentages cités plus haut, et, par exemple, les couples de seuils suivants :

p = 1 et q = 0	p = 0,90 et q = 0,20	p = 0,75 et q = 0,15
p = 0,60 et q = 0,10	p = 0,90 et q = 0,35	p = 0,75 et q = 0,25

Il est à noter que pour un triplet donné (p , q , s), ELECTRE fournit un noyau indexé par ce triplet , noyau riche si les seuils sont sévères (p voisin de , q voisin de 0), s'appauvrissant si on atténue de plus en plus la sévérité des seui

Ce faisant, on peut donc a posteriori déterminer les triplets qui conduisent à un noyau contenant un objet unique qui pourrait ne pas correspondre à une réalité vu la valeur des seuils, mais on peut aussi s'arrêter avant d'obtenir cette situation, laissant la décision ultime de sélection d'un objet unique dans le noyau au responsable qui ferait alors intervenir des critères non encore pris en compte.

C - APPLICATIONS POSSIBLES

Nous en avons citées déjà plusieurs, que nous reprenons en les complétant, sans prétendre à l'exhaustivité :

- sélection de produits nouveaux, ou d'activités nouvelles (MARSAN),
- sélection de localisations d'usines, de magasins, d'écoles, etc.,
- sélection de candidats à un poste. concours,
- dépouillement intégré de certains types d'enquêtes (visant à établir une hiérarchie ou un classement) : hiérarchie de défauts de cigarettes, préférences de marques de voitures, préférences en matières d'habitat, etc.,
- problèmes de pronostic (tiercé),
- sélection de plans de campagne de publicité,
- sélection de plans de développement nationaux ou régionaux.
- .....

A N N E X E

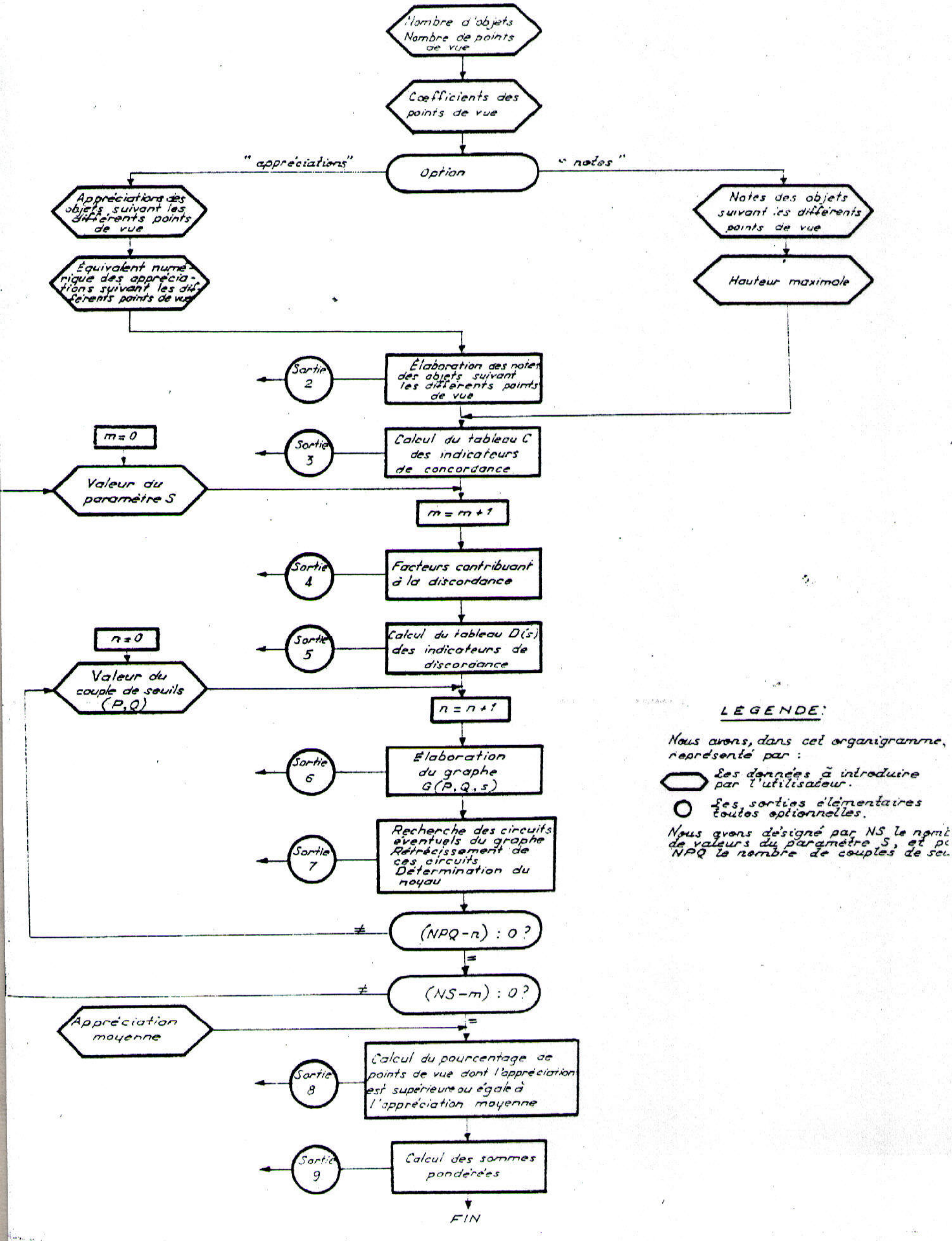
ASPECTS TECHNIQUES ET BASES ALGORITHMIQUES

DU PROGRAMME ELECTRE

Dans cette annexe nous allons décrire l'organigramme général du programme et en donner quelques commentaires en insistant sur ce qui représente l'objectif principal d'ELECTRE, à savoir, la recherche du noyau d'un graphe.

Nous ne développerons pas le coté utilisation du programme, ceci ayant fait l'objet d'un document [2] de la Direction Scientifique (Synthèse et Formation n° 25 : "ELECTRE, Manuel de Référence") ; néanmoins; nous rappellerons certaines caractéristiques essentielles du programme et ses performances.

Organigramme général



ALGORITHMES

Nous n'insisterons pas sur les opérations arithmétiques élémentaires qui ont pour objet :

- l'élaboration des notes des objets suivant les différents points de vue,
- le calcul du tableau C,
- la recherche des facteurs contribuant à la discordance,
- le calcul du tableau D (s) ,
- l'élaboration du graphe G (p,q,s) ,
- le calcul, pour chaque objet, du pourcentage de points de vue dont l'appréciation est supérieure ou égale à une appréciation moyenne,
- le calcul, pour chaque objet, de sa somme pondérée.

Par contre, la recherche des circuits du graphe, leur élimination par "rétrécissement" et enfin la détermination du noyau nécessitent certains algorithmes particuliers que nous allons développer.

A - LE GRAPHE : G (p,q,s)

Pour une valeur du paramètre s et un couple de seuils (p,q), ELECTRE élabore, à l'aide des tableaux de concordance C et de discordance D (s) , un graphe G (p,q,s) = (X,U) que le programme traite sous la forme d'une matrice carrée $M = \{a_{ij}\}$ d'ordre N (nombre d'objets), i et j étant deux objets quelconques, définie par :

$$a_{ij} = 1 \text{ si } (x_i , x_j) \in U$$

et :

$$a_{ij} = 0 \text{ si } (x_i , x_j) \notin U$$

(le premier indice concerne les lignes, le second indice concerne les colonnes).

B - LE NOYAU DU GRAPHE

Un graphe fini, sans circuits, possède un noyau et un seul.

Or, notre graphe $G(p,q,s)$ peut comporter des circuits.

Notre problème est donc de déceler les circuits éventuels du graphe et de pouvoir les traiter de manière à nous ramener à un graphe "équivalent" (Cf. chapitre II) démuni de circuits, et possédant par conséquent un noyau unique.

Nous considérerons les objets, représentés par les sommets d'un circuit, comme équivalents et nous effectuerons un "rétrécissement" du circuit dont nous expliquerons la technique. Ainsi, après "rétrécissement" de tous les circuits du graphe, nous nous trouvons en présence d'un graphe réduit sans circuits dont nous allons maintenant montrer comment trouver le noyau.

La détermination du noyau d'un graphe sans circuits s'obtient par un marquage des sommets du graphe :

par exemple, on marquera 1 les sommets du noyau,
0 les sommets n'en faisant pas partie.

La marque f d'un sommet y sera définie, en fonction des marques des sommets précédents de y, par la relation

$$f(y) = 1 - \max_{x \in P(y)} f(x)$$

$P(y)$ désignant l'ensemble des précédents du sommet y. (cf. [7] , page 40).

Nous constatons donc, d'après cette formule, qu'un sommet ayant tous ses précédents marqués pourra à son tour être marqué et qu'un sommet ne pourra être marqué 1 que si tous ses précédents ont pu être marqués 0.

Pratiquement, nous n'opérerons pas par détection préalable de tous les circuits du graphe, suivie de leur rétrécissement et de la détermination du noyau par la méthode indiquée plus haut. L'algorithme de la recherche du noyau, dans notre cas, opèrera par marquage des sommets et détection simultanée des circuits : nous tenterons donc de marquer les sommets par la méthode précédemment décrite.

Si, au cours du déroulement de cet algorithme, nous sommes arrêtés (en d'autres termes, s'il n'y a plus de sommets que l'on puisse marquer), c'est qu'il n'existe plus de sommets ayant tous ses précédents déjà marqués ; nous serons alors en présence d'un graphe possédant au moins un circuit.

Nous effectuons alors le rétrécissement de ce circuit et nous poursuivons le marquage, en rétrécissant un circuit toutes les fois où nous en rencontrons un, donc toutes les fois où nous sommes arrêtés dans le marquage , et ceci jusqu'au marquage de tous les sommets.

Nous allons développer l'algorithme choisi pour la recherche d'un circuit d'un graphe, expliquer la technique du "rétrécissement", et enfin décrire sous forme d'organigramme ce que nous venons d'expliquer sur la détermination du noyau.

a) Algorithme de recherche d'un circuit d'un graphe

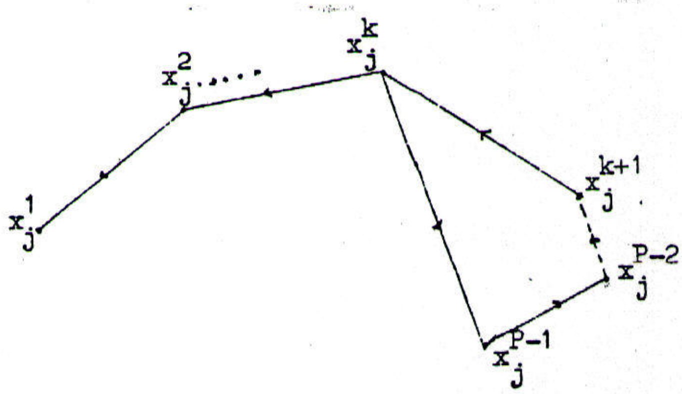
Le graphe étant ici sous forme de matrice booléenne , nous nous plaçons dans le cas où nous sommes arrêtés dans le marquage des sommets (le marquage étant celui qui traduisait l'appartenance ou non du sommet au noyau du graphe qui a été défini plus haut).

Considérons le 1er sommet x_j non marqué (j indice de colonne). Nous le désignerons par x_j^1 ; cherchons le 1er sommet x_i (indice de ligne) tel que la case intersection de ces deux sommets comporte 1 et tel que ce sommet n'ait pas encore été marqué ; il en existe forcément un dans les conditions où nous nous sommes placés : nous avons été arrêté dans le marquage, donc le graphe possède au moins un circuit ; le sommet x_j^1 n'a pu être marqué, donc il possède au moins un précédent non encore marqué.

Faisons $j = i$ et désignons x_i par x_j^2 et répétons l'opération précédente en cherchant à nouveau un sommet x_i (i indice de ligne) précédent de x_j^2 (j nouvellement défini) et non encore marqué.

Ainsi, nous pouvons constituer une liste x_j^1 , x_j^2 ,... x_j^{P-1} , $x_{j_P}^P$, qui prendra fin quand nous observerons une répétition, c'est-à-dire quand x_j^P sera égal à x_j^k avec $k \in K = \{1,2,\dots (P-1)\}$.

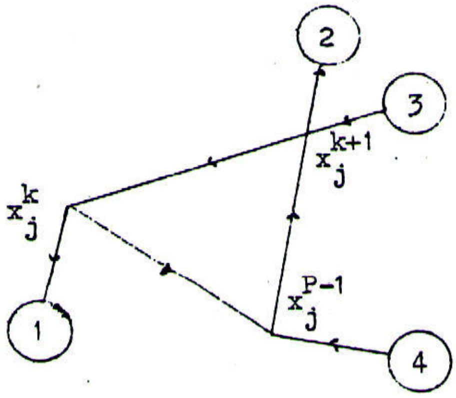
Comme nous raisonnons sur un graphe fini possédant certainement au moins un circuit, il est impossible qu'une telle répétition ne se produise pas, fournissant ainsi un circuit à coup sûr $(x_j^k , x_j^{k+1} ,\dots, x_j^{P-1} , x_j^P)$.



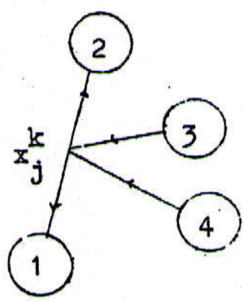
b) <u>Elimination du circuit par "rétrécissement"</u>.

Le circuit ayant été décelé, nous allons l'éliminer en le rétrécissant. Nous n'en conserverons qu'un des sommets, par exemple le premier x_j^k , mais en résumant l'information en celui-ci : les suivants et précédents des autres sommets du circuit $x_j^{k+1}, \dots, x_j^{P-1}$ deviennent alors des suivants et des précédents du sommet x_j^k .

Ceci, techniquement, se traduit par l'addition booléenne des colonnes et des lignes correspondant aux sommets $x_j^{k+1}, \dots, x_j^{P-1}$ à la colonne et à la ligne correspondant au sommet x_j^k , et par la remise à zéro de la diagonale principale.

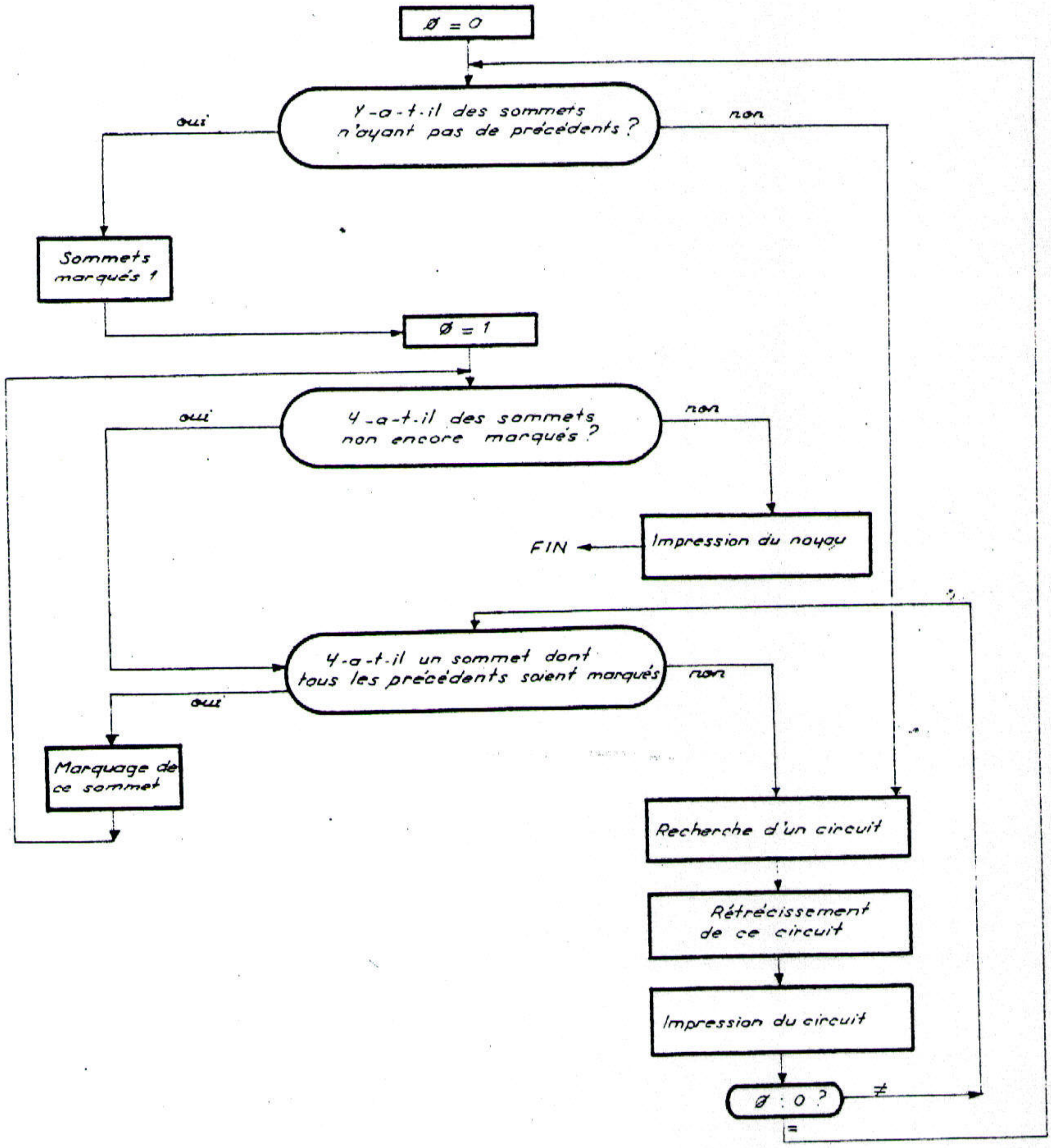


Avant rétrécissement



Après rétrécissement

c) Algorithme de détermination du noyau



2 - CARACTERISTIQUES ET PERFORMANCES DU PROGRAMME ELECTRE

Nous rappellerons seulement certains aspects techniques importants développés en détail dans 2 .

a) Caractéristiques

ELECTRE a été programmé en langage FORTRAN sur la C.D.C 3600 de la SIA. Le programme peut prendre en compte :

- un nombre d'objets $\leqslant 100$,
- un nombre de points de vue $\leqslant 100$ avec des valeurs de coefficients $\leqslant 99$,
- un nombre d'appréciations $\leqslant 21$,
- un nombre de valeurs du paramètre $s \leqslant 20$ (valeurs de $s \leqslant 100$) ,
- un nombre de valeurs de couples de seuils $(p,q) \leqslant 20$.

b) Performances

Les exemples que nous avons traités jusqu'à présent et qui portaient sur un nombre d'objets $\leqslant 30$ et un nombre de points de vue inférieur ou égal à 100, avec l'impression de toutes les sorties optionnelles, ont donné des temps de l'ordre de quelques minutes.

Il semble que ce soit surtout le nombre d'objets N qui détermine le temps de passage du programme.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.BARBUT, "Médianes : Condorcet et Kendall", note de travail n° 44 de la Direction Scientifique de la SEMA, avril 1966.

[2] R.BENAYOUN, B.ROY, B.SUSSMANN, "Le programme ELECTRE - Manuel de référence", note de Synthèse et Formation de la Direction Scientifique n° 25 de la SEMA, Juin 1966.

[3] P.BERTIER, P.CAMION, B.ROY, "A propos des fondements algébriques de la notion de typologie", note de travail n° 35 de la Direction Scientifique de la SEMA, avril 1965.

[4] B.ROY, "Etats multidimensionnels", dans "Ensembles et sous-ensembles", note de S. et F. n° 31 de la Direction Scientifique de la SEMA, avril 1966.

[5] B.ROY, "La notion de typologie", dans "Application d'un ensemble dans un autre" note de S. et F. n° 32 B de la Direction Scientifique de la SEMA, mai 1966.

[6] B.ROY, "Echelles multidimensionnelles", dans "Relation binaire - Application multivoque - Graphe", note de S. et F. n° 33 B de la Direction Scientifique de la SEMA, avril 1966.

[7] B.ROY, "Graphes particuliers", note de S. et F. n° 35, Août 1965.

[8] E.VALETTE, "Le classement selon plusieurs critères", comptes rendus du séminaire sur les modèles mathématiques dans les sciences sociales, 1962-1963.